Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

NEY DA COSTA OLIVEIRA

TEORIA DE CONJUNTOS: UM ESTUDO SOBRE SUAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

TERESINA
2024

NEY DA COSTA OLIVEIRA

TEORIA DE CONJUNTOS: UM ESTUDO SOBRE SUAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

TERESINA
2024

O48t Oliveira, Ney da Costa.
Teoria de conjuntos: um estudo sobre suas propriedades e aplicações / Ney da Costa Oliveira. - 2024.
57f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Piauí - UESPI , Campus Poeta Torquato Neto, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima".

1. Teoria de Conjuntos. 2. Operações de Conjuntos. 3. Aplicabilidade. I. Lima, Alexandre Bezerra do Nascimento . II. Título.

CDD 511.32

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
JOSÉ EDIMAR LOPES DE SOUSA JÚNIOR (Bibliotecário) CRB-3ª/1512

NEY DA COSTA OLIVEIRA

TEORIA DE CONJUNTOS: UM ESTUDO SOBRE SUAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Data de aprovação: 28 de novembro de 2024.

Banca Examinadora:

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima – Orientador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Anderson F. S. Meneses

Prof. Me. Anderson Fabian de Sousa Meneses – Examinador Interna
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza – Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí – UFPI

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter concedido todas as situações para que eu pudesse concluir esse curso de mestrado que a mim foi dada oportunidade.

Agradeço o apoio de minha família: minha mãe Francisca, meu irmão Bruno e de meu pai Carlos Alberto, que mesmo não estando mais entre nós, sempre será lembrado como exemplo de cuidado, dedicação e empenho em tudo que fez. Agradeço, também, o auxílio de meus familiares que sempre deixaram palavras de incentivo e perseverança.

Agradeço aos meus estimados irmãos da IEFAP, que prosseguem a mesma jornada de fé que a minha, os quais sei que intercederam por mim em suas orações.

Aos meu caros amigos e irmãos do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional: Afonso Araújo, Antônio Delon, Edivaldo Leandro, Francisco Erasmo, Francisco Miranda, Gustavo Vilarinho, Hislley Meneses, José Carlos, Lício Lima, Lucas Lima, Paulo Robson, Raimundo Nonato e Vanilson Paulo, agradeço pelo incentivo e coloboração mútua que tivemos nesse período tão laboroso. Sou grato, também, aos professores do curso: Dr. Arnaldo Brito, Dr. Afonso Norberto, Dr. Pedro Júnior, Dr. Neuton Alves, Dra. Valdirene que contribuiram com os ensinamentos tão riquíssumos e em especial ao Dr. Alexandre Bezerra, meu orientador, o qual compartilho o fruto desse trabalho de pesquisa ao fim dessa jornada.

Por tudo aquilo que até aqui Deus me permitiu alcançar e por tudo aquilo que hei de alcançar, sou grato.

“Ate aqui o nos ajudou o Senhor”

1 Samuel: 7: 12b

RESUMO

A Teoria de conjuntos busca estudar o agrupamento de elementos que tenham características ou propriedades comuns, sendo de grande importância por sua aplicação não somente na Matemática como também de outras ciências. As definições, propriedades e teoremas que estão descritas neste trabalho tem por finalidade prover uma estruturação fundamentada e concisa, evitando contradições ou lacunas quanto às suas aplicações. Através de exemplos e demostrações, evidenciamos que não somente os conceitos pertinentes ao estudo de conjuntos podem ser úteis nas ciências, mas também as operações de conjuntos aliadas à lógica de sentenças tem grande valia, pois fundamentam toda uma estrutura de pensamento usada no meio científico. Diante do exposto, objetivo deste trabalho é analisar a aplicação da Teoria de conjuntos na Matemática e em outras áreas das ciências, servindo como instrumento de apropriação conceitual. Portanto, recorremos à literatura para uma fundamentação teórica sobre o tema abordado e sua aplicabilidade nas diversas situações que exijam a disciplinaridade. Por fim, esperamos que este trabalho seja de instrumento de motivação e compreensão em uma área que tem servido como um norte na pesquisa matemática e científica.

Palavras-chave: Teoria de conjuntos, Operações de Conjuntos, Aplicabilidade.

ABSTRACT

Set Theory studies the grouping of elements that have common characteristics or properties, being of great importance for its application in Mathematics as well as in other sciences. The definitions, properties and theorems that are described in this essay are intended to provide a well-founded and concise structuring, avoiding contradictions or gaps regarding their applications. Through examples and demonstrations, we make clear that not only the concepts relevant to the study of sets can be useful in science, but also set operations combined with sentence logic are of great value, as they underlie an entire structure of thought used in scientific area. Thus, this work aims to analyze the application of Set Theory in Mathematics and in other areas of science, being helpful as an instrument of conceptual appropriation. Therefore, we searched the literature for a theoretical foundation on the topic and its applicability in different situations that require disciplinary approach. Finally, we hope that this study will be an instrument of investigation and understanding in an area that has an important role as a guide in mathematical and scientific research.

Keywords: financial mathematics; teaching; amortization.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A busca pelo rigor matemático, passou a exigir o desdobramento e/ou a inclusão de determinados campos do saber que tivessem um papel agregador ao desenvolvimento da Matemática. A Teoria de Conjuntos é uma das áreas que trás uma contribuição real para o estudo não somente na Matemática mas de outras áreas afins e de outros campos do saber. O estudo de conjuntos e de determinados conceitos relativos a estes sempre foram essenciais, como no âmbito de conjuntos numéricos e da álgebra que assim os sucede, de funções e das leis por estes determinadas, da lógica proposicional a partir de sentenças, dentre outras.

Segundo Lima (2013, p.2), "A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc". A lógica e a linguagem que se seguem pela ideia de conjunto embasam fortemente definições que norteiam as ciências, pois evita lacunas ou paradoxos na compreensão de conceitos gerais. Vale destacar que:

> Toda Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela também é a mais simples das ideias matemáticas. Lima (2013, p.2)

A Base Nacional Comum Curricular Brasil (2018) explicita a natureza da Matemática de, não somente, realizar técnicas de cálculos com números e atividades de contagem e medição, mas, por vezes, criar sistemas abstratos, onde a compreensão destes pode ser utilizado na resolução de problemas no mundo físico. Dessa forma, a relação da aplicação de conceitos e definições de conjuntos moldam uma articulação com outros campos matemáticos - álgebra, geometria, probabilidade, estatística, análise, lógica e outras. Diante do exposto, esse trabalho tem por objetivo geral analisar a aplicação da Teoria de conjuntos nos demais campos da Matemática e nas demais áreas do saber científico, servindo como instrumento de apropriação conceitual.

Determinadas habilidades estão elencadas na BNCC Brasil (2018) que se podem se entrelaçar com conceitos vigentes na Teoria de conjuntos:

- (EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos

- (EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.

- (EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.
- (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
- (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Portanto, esse trabalho se propõe elencar conceitos e definições que, uma vez compreendidos, venham agregar ao processo de ensino e aprendizagem e expor situações que evidenciem a aplicação interdisciplinar e transdisciplinar da teoria de conjuntos. O objetivo geral dessa pesquisa é alcançado através dos seguintes objetivos específicos: **a)** Identificar os principais conceitos e propriedades relativos à Teoria de conjuntos; **b)** Investigar aplicações da Teoria de conjuntos na área da Matemática, bem como em outras ciências; **c)** Apresentar as contribuições ao processo de apropriação conceitual a partir da relação do estudo de conjuntos e suas propriedades às diversificadas áreas do conhecimento.

Essa pesquisa, que é de natureza qualitativa, por aprofundar-se em modelos que visem o significado daquilo que está sendo abordado, e quantitativa, pois visa modelos abstratos e descrição de situações que produzem regularidades, como menciona Minayo, Deslandes e Gomes (2009), foi realizada através da análise de material bibliográfico que busca basear-se em documentos os quais versam sobre o tema abordado.

Este trabalho foi dividido em 4 capítulos. O primeiro capítulo remete às questões introdutórias desse trabalho. O segundo aborda os conceitos elementares ,e não menos importantes, de conjuntos e suas derivações - tipos de conjuntos, subconjuntos, família de conjuntos - ; quantificadores lógicos; operações de conjuntos, propriedades operatórias e seus desenvolvimentos. O terceiro capítulo retrata algumas aplicações da Teoria de conjuntos relacionadas dentro das áreas da Matemática e de outros campos científicos. O quarto capítulo são apresentadas as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Conjuntos

2.1.1 Conceito de conjuntos, elementos e pertinência

Os estudos de Cantor o levaram à seguinte definição de um conjunto: um conjunto é qualquer coleção de objetos definidos, distinguíveis, de nossa intuição ou de nosso intelecto, para serem concebidas como um todo. Os objetos são chamados de elementos (membros) do conjunto.

Dado que um conceito primitivo é aquele que não necessita de definição para sua afirmação, no estudo de conjuntos, alguns conceitos primitivos devem ser considerados:

- Conjunto: designado por uma letra maiúscula do alfabeto latino
- Elemento: designado por uma letra minúscula do alfabeto latino
- Relação de pertinência: relação entre elemento e conjunto, designado pelo símbolo "$\in$", que é lido "pertence a", "é elemento de" ou "é membro de". De modo análogo, o símbolo "$\notin$" é denotado por "não pertence".

Outro conceito importante é o de conjunto universo dado a seguir:

Definição 2.1 (Conjunto Universo)**.** *Novaes (2018, p.6) Conjunto universo é o conjunto de todos os elementos de interesse em determinado contexto.*

O conjunto universo (universo do discurso ou conjunto fundamental), identificado por U, uma vez fixado, permite considerarmos apenas conjuntos cujos elementos pertençam a U. Analisemos o exemplo a seguir: Dados dois pontos distintos A e B, o conjunto de pontos P equidistantes a estes será determinado de acordo com o conjunto U considerado:

1. Se o conjunto U for o segmento de reta AB, então o conjunto solicitado será o ponto médio P de AB.
2. Se o conjunto U for o plano onde A e B estão contidos, então o conjunto dos pontos P será a reta mediatriz do segmento AB.
3. Se o conjunto U for o espaço contendo os pontos A e B, então o conjunto dos pontos P em questão será o plano mediador do segmento AB.

2.1.2 Designação de conjuntos

O modo de designação de um conjunto deve nos permitir decidir se um determinado objeto particular é ou não um elemento desse conjunto. Eis algumas formas de designação de conjuntos:

a) **Propriedade característica dos elementos**: dada uma propriedade P que defina o conjunto A, os elementos pertencentes ao conjunto universo U que atendem à propriedade P são pertencentes ao conjunto A. Esse modo de designação menciona um elemento genérico do conjunto, acompanhado de uma propriedade que o caracteriza. Normalmente, é designado como $A = \{x : P(x)\}$ ou $A = \{x \in U : P(x)\}$.

Exemplo 2.2. : $A = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, *designa o conjunto A dos números x tais que x é um número do tipo 2n, para algum n inteiro;* $B = \{x \in \mathbb{N} : x \mid 99\}$, *designa o conjunto de todos os números inteiros positivos divisores de 99.*

b) **Listagem dos elementos**: este modo de designação de um conjunto consiste em listar os seus elementos entre chaves, sendo que, quando necessário, usam-se reticências para omitir os elementos de mesma propriedade já expressos explicitamente.

Exemplo 2.3. *:* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, *designa o conjunto dos números naturais;*
$M(5) = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$, *designa o conjunto dos múltiplos inteiros de 5;*
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$, *designa o conjunto dos números primos.*

c) **Fórmula recursiva**: é um de modo designação obtido por meio da chamada definição recursiva, que consiste nas seguintes cláusulas:

1. *Cláusula básica*: estabelece explicitamente pelo menos um elemento do conjunto, assegurando que não é vazio.

2. *Cláusula recursiva*: estabelece uma fórmula sistemática para assegurar que novos elementos possam ser obtidos através do(s) elemento(s) já conhecido(s).

3. *Cláusula terminal*: assegura que as cláusulas (1) e (2) sejam os únicos meios pelos quais os elementos do conjunto em questão podem ser obtidos.

Um exemplo da fórmula recursiva são os Axiomas de Peano, para um conjunto $A \subset \mathbb{N}$:

1. $1 \in A$;

2. Se $x \in A$, então $x + 1 \in A$;

3. Por (1), temos $1 \in A$, e por (2), temos que $2 \in A$, $3 \in A$, $4 \in A$, $5 \in A$, $\ldots$.

d) **Função característica**: por definição, dado um conjunto A tal que $A \subset U$, a função caraterística de A é definida por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A \end{cases} . \tag{1}$$

Portanto, a função característica associa a cada elemento de um conjunto universo U, um e somente, um dos valores: 1 ou 0, de acordo com sua pertinência ao conjunto.

2.1.3 Subconjuntos

Por definição, um conjunto A é denominado subconjunto de um conjunto B se todo elemento de A é também elemento de B e é utilizada a seguinte notação: $A \subseteq B$, que também pode indicar "A está contido em B" ou "A é parte de B". Desse modo, entende-se que $x \in A \Rightarrow x \in B$. Ainda temos que, quando existir pelo menos um x tal que $x \in A$ e $x \notin B$, teremos que A não é subconjunto de B, tendo por notação $A \not\subseteq B$.

A relação de inclusão se apoia em tal sentença, de modo a obedecer às seguintes propriedades:
a) Reflexão: $A \subseteq A$.
b) Antissimétrica: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Através do método da dupla inclusão, fornece uma maneira de demonstração de igualdade de dois conjuntos.
c) Transitiva: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. Essa propriedade segue como base para o raciocínio dedutivo, denominado por silogismo. Um exemplo amplamente conhecido é o seguinte caso:
Todo ser humano é um animal. Todo animal é mortal. Logo, todo ser humano é mortal.
Considerando os seguintes conjuntos A, B e C, tais que $A = \{x; x \text{ é um ser humano}\}$, $B = \{x; x \text{ é animal}\}$, $C = \{x; x \text{ é mortal}\}$, teremos a seguinte equivalência para o silogismo anteriormente mencionado:

$$\begin{gathered} A \subseteq B \\ B \subseteq C \\ A \subseteq C \end{gathered}$$

Tais propriedades são úteis para elucidação dos elementos componentes de um conjunto. Veja o exemplo:

Exemplo 2.4. *: Demonstre que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$, para algum $a \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}\}$, é igual ao conjunto $B = \{a\}$.*

Demonstração 2.5. *: Temos que $a \leq a \leq a + \frac{y}{n}$, para algum $a \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $B \subseteq A$. Das desigualdades $a \leq a \leq a + \frac{y}{n}$, temos que $\frac{y}{n} \geq 0$. Para $\frac{y}{n} = 0$, então $x \leq a$. Como, por hipótese, $x \geq a$, então $x = a$. Suponhamos, por contradição, que $x > a$. Logo, $x - a > 0$. Como $\frac{y}{n} > 0$, podemos, sem perda de generalidade, considerar $\frac{y}{n} = \frac{x-a}{2}$. Como $x - a > 0$, resulta que $x - a > \frac{x-a}{n} = \frac{y}{n} \Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $x \leq a$. Desse modo, chega-se que $A \subseteq B$. Resulta das inclusões aqui demonstradas que $A = B$.*

2.1.4 Subconjuntos próprios

Existe uma classe de subconjuntos muito importante para a teoria de conjuntos que são chamados de subconjuntos próprios, que têm a seguinte definição:

Definição 2.6. *Novaes (2018, p.83) Dado um conjunto $A \neq \emptyset$, sendo A subconjunto de B, tal que exista, pelo menos, um elemento de B não pertencente a A, o conjunto A será chamado subconjunto próprio de B e tem por notação $A \subseteq B$. No caso de A não ser subconjunto próprio de B, será usada a notação $A \subsetneq B$.*

De modo geral, para demonstrar que A é subconjunto próprio de B, necessitamos demonstrar que um elemento arbitrário de A pertence a B, mas nem todo elemento de B pertence a A. Ou seja, em termos de propriedades características dos elementos, equivale a demonstrar que se um elemento arbitrário x tem a propriedade que caracteriza os elementos de A, então também tem a propriedade que caracteriza os elementos de B, porém a recíproca não vale.

Uma aplicação amplamente válida se dá nas propriedades de inclusão dos conjuntos ao relacionarmos os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos. Através da sequência de inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ podemos notar que a propriedade transitiva é a única que é valida para a inclusão própria. De fato, todo número natural é inteiro; todo número inteiro é racional; todo número racional é real; todo número real é complexo. Porém, um número inteiro negativo não é natural; um número racional irredutível não é inteiro; um número irracional não é racional; um número complexo puro não é real.

2.1.5 Conjuntos finitos e conjuntos infinitos

Aqui, denotaremos por $I_k = \{1, 2, 3, 4, \ldots, k\}$ o conjunto dos números naturais de 1 até k, sendo $k \in \mathbb{N}$ e pelo simples processo de contagem, nota-se que I_k tem exatamente k elementos. Diante do exposto, um conjunto finito pode ser definido como segue:

Definição 2.7. *Novaes (2018, p.51)Um conjunto A é dito finito se A é vazio ou se existe, para algum k natural, uma bijeção $f : I_k \to A$.*

No primeiro caso, dizemos que A tem zero elementos. No segundo caso, dizemos que k é o número de elementos de A. Em ambos os casos, estamos nos referindo à *cardinalidade* do conjunto A, chamado também de número cardinal de A, denotado por $n(A)$. Portanto, contar elementos de um conjunto A significa definir uma bijeção $f : I_k \to A$, em que $I_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ e k sendo o próprio número cardinal de A. Por essa bijeção, temos a seguinte associação de elementos de I_k e A:

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3,\ \ldots,\ f(k) = a_k, \text{ com } A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k\}.$$

Exemplo 2.8. *Dada a fatoração de um número inteiro positivo x em números primos distintos p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n, ou seja, $x = p_1^{q_1}.p_2^{q_2}.p_3^{q_3}.\cdots.p_n^{q_n}$, $q_i \in \mathbb{N}$, $1 < i < n$, o conjunto $D\left(x\right)$ dos divisores de positivos de x é um conjunto finito e sua cardinalidade é $n\left[D\left(x\right)\right] = (q_1+1).(q_2+1).(q_3+1).\ldots.(q_n+1)$. O conjunto das raízes de um polinômio de grau n a uma variável é finito, cuja cardinalidade é igual a n.*

De modo análogo, temos a definição de conjunto infinito. E para tal, devemos negar a definição formal de conjunto finito

Definição 2.9. *Um conjunto A é chamado infinito se não for vazio e se, para todo $k \in \mathbb{N}$, não exista uma bijeção.*

$$f : I_k \to A$$

Outra definição para conjuntos infinitos foi proposta por J. W. R. Dedekind que enuncia o seguinte:

Definição 2.10. *Novaes (2018, p.53) Um conjunto é infinito se ele é uma bijeção de um subconjunto próprio de si mesmo.*

Em outras palavras, um conjunto é infinito se existe uma bijeção entre ele e um subconjunto próprio dele. Um exemplo a ser citado é com relação ao conjunto dos números naturais. Tomemos o conjunto $\mathbb{P}$ dos números pares. Definamos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ por $f(k) = 2k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado um $m \in \mathbb{P}$ $(m = 2n)$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 2n \Rightarrow f(n) = m$. Assim, f é sobrejetiva. Se $f(m) = f(n)$, então $2m = 2n \Rightarrow m = n$. Portanto, f é injetiva. Logo, f é uma bijeção e conclui-se que $\mathbb{N}$ é infinito.

Diante do que já foi exposto nesta seção, nota-se que dado um conjunto finito, qualquer subconjunto próprio dele também será finito. O teorema a seguir deixa mais clara essa situação.

Teorema 2.11. *Dados A e B conjuntos finitos, se A é subconjunto próprio de B, então $n(A) < n(B)$.*

Demonstração 2.12. *Suponhamos $n(A) = r$ e $n(B) = s$. Assim, existe uma bijeção entre A e o conjunto $I_r = \{1, 2, 3, \ldots, r\}$ de modo que podemos escrever $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r\}$, onde $k \leftrightarrow a_k$, para todo $k \in I_r$. Como A é um subconjunto próprio de B, existe pelo menos um e no máximo m $(1 \leq m \leq s - r)$ elementos de B que não pertençam a A. Sendo B um conjunto finito, podemos designá-lo por $B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m\}$, em que b_l $(1 \leq l \leq m)$ representa os elementos pertencentes a B porém não a A. Por definição, existe uma bijeção entre B e o conjunto $I_{r+m} = \{1, 2, 3, \cdots, r, r+1, r+2, r+3, \cdots, r+m\}$, de modo que $s = n(B) = r + m$. Logo, $s > r$.*

2.1.6 Conjuntos Equivalentes e Enumeráveis

Surgem, naturalmente, questionamentos se dois conjuntos têm ou não a mesma quantidade de elementos. Em se tratando de conjuntos finitos, a resposta pode ser encontrada apenas pela simples contagem em cada dos conjuntos postos. No caso de serem conjuntos infinitos, é necessário definirmos quando dois conjuntos terão a mesma quantidade de elementos.

Definição 2.13. *Lipschutz (1967, p.187) Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é equivalente a B, designado por $A \sim B$, se existir uma função $f : A \to B$ que é bijetora e definida sobre B.*

Exemplo 2.14. *: Sejam os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ e uma função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \textit{se} \quad x \quad \textit{é um número natural par}, \\ -(\frac{x+1}{2}), & \textit{se} \quad x \quad \textit{é um número natural ímpar}, \end{cases} \tag{2}$$

que associa os números pares de $\mathbb{N}$ aos números não negativos de $\mathbb{Z}$ e os números ímpares de $\mathbb{N}$ aos números negativos de $\mathbb{Z}$.

Além disso, também são verificadas as propriedades:

1. Reflexiva ($A \sim A$) para qualquer conjunto A, pois a função identidade $f : A \to A$ é biunívoca e definida sobre A.

2. Simétrica ($A \sim B \to B \sim A$). De fato, se $A \sim B$, então existe uma função $f : A \to B$ que é uma bijeção. Portanto existe uma função inversa $f^{-1} : B \to A$. Assim, $A \sim B$ implica $B \sim A$.

3. Transitiva ($A \sim B$ e $B \sim C \to A \sim C$). Como $A \sim B$ e $B \sim C$, então existem funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ bijetivas. Desse modo, a função produto $g \circ f : A \to C$ é uma bijeção definida sobre C. Logo, $A \sim B$ e $B \sim C$ implica $A \sim C$.

Pela definição de conjuntos equivalentes, e pela familiaridade e aplicação dos conjuntos dos números naturais, evidencia-se a necessidade das definições de conjuntos enumeráveis e conjuntos contáveis que se segue:

Definição 2.15. *Lipschutz (1967, p.189) Um conjunto é chamado enumerável se é equivalente ao conjunto dos números naturais.*

Exemplo 2.16. *Uma sequência infinita qualquer $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de elementos distintos é um conjunto enumerável, visto que é uma função $f(n) = a_n$, cujo domínio é $\mathbb{N}$.*

2.1.7 Família de conjuntos e conjunto das partes

Novaes (2018, p.112)Ao conjunto que, pelo menos, um de seus elementos é um conjunto, dar-se o nome de família de conjuntos (ou coleção de conjuntos, ou classe de conjuntos). As famílias de conjuntos são designadas por letras maiúsculas do alfabeto latino: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\cdots$. Um exemplo da empregabilidade desse conceito está na relação de pertinência, a qual não se aplica a propriedade transitiva. Suponhamos os conjuntos $A = \{0\}$, $B = \{\{0\}, 1\}$, $C = \{\{\{0\}, 1\}, 2\}$. Nesse caso, temos que $A \in B$, $B \in C$, porém $A \notin C$, mostrando a inaplicabilidade da propriedade transitiva na relação de pertinência.

Novaes (2018, p.112) Define-se conjunto das partes ao conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de um conjunto dado. Sua notação é dada por $\mathcal{P}(A)$, para um conjunto A qualquer e, simbolicamente, é denotado como $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$.

A cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto finito se dá pelo teorema a seguir:

Teorema 2.17. *Dado o um conjunto finito A que tem m elementos, o conjunto das partes de A tem 2^m elementos.*

Demonstração 2.18. *Para o caso do conjunto ser vazio, teremos o conjunto das partes sendo unitário, pois para os m elementos de A, se tomados 0 elementos, passamos a ter $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ subconjunto de A. Para subconjuntos unitários, teremos subconjuntos tomando elementos um a um, ou seja, $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ subconjuntos. Para subconjuntos com dois elementos, são tomados elementos dois a dois, resultando em $\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ subconjuntos. Procedendo de forma análoga, formamos subconjuntos com $m-1$ elementos, obtendo, assim, $\begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix}$ subconjuntos. Ao considerarmos o próprio conjunto A, que é subconjunto de si próprio, teremos $\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = 1$ subconjunto. Logo, o número total de subconjuntos de A será:*

$$\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = 2^m \tag{3}$$

2.1.8 Igualdade de Conjuntos

Por definição, dois conjuntos A e B são iguais se todo elemento de A também pertence a B e se todo elemento de B também pertence a A. A notação usual é:
$A = B$ (A é igual a B)

Simbolicamente, podemos escrever como $A = B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, ou seja, x pertence a A se e somente se x pertence a B, para qualquer x. Como consequência da

definição, a ordem e a repetição de um ou mais elementos não serão relevantes. Analisemos os seguintes conjuntos:
$A = \{a : a$ é um elemento não nulo na representação decimal do número racional $\frac{41}{333}\}$,
$B = \{b : b$ é um elemento não nulo na representação decimal do número racional $\frac{44}{333}\}$,
$C = \{c : c$ é um elemento não nulo na representação decimal do número racional $\frac{4036363637}{33300000000}\}$

Todos os conjuntos mencionados anteriormente são iguais, visto que:
$\frac{41}{333} = 0,123123123\cdots$,
$\frac{44}{333} = 0,132132132\cdots$,
$\frac{4036363637}{33300000000} = 0,1212121212312\cdots$.

Portanto, $A = B = C = \{1, 2, 3\}$.

Se por um lado, conjuntos iguais são definidos como conjuntos dados cujos todos elementos de um pertencem ao outro e vice-versa, a negação disso nos dá a definição de conjuntos diferentes:

Definição 2.19. *Novaes (2018, p.62) Dados dois conjuntos A e B, se pelo menos um elemento de A não pertence a B ou, se pelo, menos um elemento de B não pertence a A, então o conjunto A é diferente do conjunto B, e terá por notação $A \neq B$.*

Simbolicamente, temos $A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(\exists y)(y \in B$ e $x \notin A)$. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.20. *: Sejam os conjuntos A e B tais que $A = \{quadriláteros\ equiláteros\}$ e $B = \{quadriláteros\ equiângulos\}$. Tais conjuntos são diferentes pois um retângulo é equiângulo, porém, não será equilátero, se não for um quadrado. Um losango é equilátero, mas só será equiângulo caso seja também um quadrado.*

As seguintes propriedades são verificadas para igualdades de conjuntos:

1. Reflexiva: $A = A$
2. Simétrica: $A = B$ e $B = A$
3. Transitiva: Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$

2.2 Quantificadores

2.2.1 Funções Proposicionais e Conjunto Verdade

Lipschutz (1967, p.298) Seja um conjunto A. Uma *função proposicional* ou *sentença aberta* em A é uma expressão que apresenta uma propriedade $p(x)$ tal que $p(a)$ é verdadeiro ou falso para $a \in A$.

Exemplo 2.21. *: Seja $p(x) : x + 2 > 7$. Desse modo, $p(x)$ é uma função proposicional em $\mathbb{N}$, para $x \in \mathbb{N}$, pois dependendo do valor assumido por x, $p(x)$ será verdadeiro (para $x \leq 5$) ou será falso (para $x > 5$).*

Se $p(x)$ é um a função proposicional num conjunto A, então o conjunto dos elementos $a \in A$ tal que $p(a)$ é verdadeiro é chamado de *Conjunto Verdade*, denotado por V_p de $p(x)$.

Exemplo 2.22. *: Considere a função proposicional $p(x) : x + 4 > 8$, definida em $\mathbb{N}$. Logo, $\{x \mid x \in \mathbb{N},\, x + 4 > 8\} = \{5, 6, 7, 8, 9, \cdots\}$ é o conjunto verdade de A.*

Exemplo 2.23. *: Seja $p(x) : x + 6 < 1$. Temos, então, que o conjunto verdade de $p(x)$ em $\mathbb{N}$ é $\{x \mid x \in \mathbb{N},\, x + 6 < 1\} = \emptyset$.*

2.2.2 Quantificador universal

Lipschutz (1967, p.299) Seja uma função proposicional $p(x)$ em um conjunto A. Assim, $(\forall x \in A)p(x)$ é uma proposição que se lê *"Para todo elemento x em A, $p(x)$ é uma proposição verdadeira"*, onde o símbolo $\forall$ é chamado de quantificador universal. Note que o conjunto verdade de $p(x)$ é o próprio conjunto A, ou seja, $V_p = \{x \mid x \in A,\, p(x)\}$.

Observe que $p(x)$ é uma sentença aberta, porém, $\forall x, p(x)$ é uma proposição e tem valor verdade. Desse modo, podemos dizer que se $\{x \mid x \in A, p(x)\} = A$, então $\forall x, p(x)$ é verdadeiro; se $\{x \mid x \in A,\, p(x)\} \neq A$, então $\forall x, p(x)$ é falso.

Exemplo 2.24. *: A proposição $(\forall n \in \mathbb{N})(n + 4 > 3)$, é verdadeira desde que $\{n \mid n+4 > 3\} = \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}$*

Exemplo 2.25. *: A proposição $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(n + 2 > 8)$ é falsa, pois $\{n \mid n + 2 > 8\} = \{7, 8, 9, \cdots\} \neq \mathbb{N}$*

2.2.3 Quantificador existencial

Lipschutz (1967, p.300) Dada uma função proposicional $p(x)$ em um conjunto A, a proposição $(\exists x \in A)p(x)$ se lê *"Existe um elemento x em A, $p(x)$ é uma proposição verdadeira"*, onde o símbolo $\exists$ é chamado de quantificador existencial. Note que o conjunto verdade de $p(x)$ não é vazio, ou seja, $V_p = \{x \mid x \in A,\, p(x)\} \neq \emptyset$.

Observe que se $\{x \mid p(x)\} \neq \emptyset$, logo, $\exists x, p(x)$ é verdadeira; se $\{x \mid p(x)\} = \emptyset$, então $\exists x, p(x)$ é falso.

Exemplo 2.26. *: A proposição* $(\exists n \in \mathbb{N})(n+4<7)$ *é verdadeira se* $\{n \mid n+4<7\} = \{1,2\} \neq \emptyset$.

Exemplo 2.27. *: A proposição* $(\forall n \in \mathbb{N})(n+6<4)$ *é falsa pois* $\{n \mid n+6<4\} = \emptyset$.

2.2.4 Negação de Proposições com Quantificadores

Seja M o conjunto de todos os homens e a seguinte proposição $p(x)$: "Todos os homens são mortais".A negação dessa proposição é "Não é verdade que todos os homens são mortais"ou, ainda, "Existe pelo menos um homem que não é mortal". O que foi escrito anteriormente pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\sim (\forall x \in M)p(x) \equiv (\exists x \in M) \sim p(x)$$

De forma análoga, ao utilizarmos o quantificador existencial, teremos:

$$\sim (\exists x \in M)p(x) \equiv (\forall x \in M) \sim p(x)$$

Desse modo, podemos entender como sendo a proposição que a negação da proposição "Existe pelo menos um homem que é mortal"é "Não é verdade que exista algum homem que é mortal", ou, também, Todo homem não é mortal". Ambas as situações elencadas anteriormente são referentes a dois teoremas:

Teorema 2.28 (De Morgan)**.** $\sim (\forall x \in A)p(x) \equiv (\exists x \in A) \sim p(x)$

Teorema 2.29 (De Morgan)**.** $\sim (\exists x \in A)p(x) \equiv (\forall x \in A) \sim p(x)$

Os teoremas de De Morgan citados anteriormente podem ser entendidos como sendo as seguintes proposições:

1. "Não é verdade que para cada $a \in A$, $p(a)$ é verdadeiro"que é equivalente à "Existe um $a \in A$ tal que $p(a)$ é falso"(Teorema 2.3).

2. "Não é verdadeiro que exista um $a \in A$ tal que $p(a)$ seja verdadeiro"é equivalente à proposição "Para todo $a \in A$, $p(a)$ é falso (Teorema 2.4).

2.2.5 Contra-Exemplo

Uma aplicação que se tem do Teorema 2.3 é o *contra-exemplo*. Para mostrar que uma proposição $\forall x$, $p(x)$ é falsa temos que mostrar que $\exists x \sim p(x)$ é verdadeiro, ou seja, que existe um elemento $a \in A$ tal que $p(a)$ é falso. Tal elemento é o chamado *contra-exemplo* da proposição $\forall x$, $p(x)$.

Exemplo 2.30. *: Lipschutz (1967, p.302) Seja uma proposição* $\forall x,\ x^2 > x,\ x \in \mathbb{Q}$. *A proposição não é verdadeira pois o número* $\frac{1}{2}$ *é um contra-exemplo, visto que* $(\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}$.

2.2.6 Funções Proposicionais contendo mais de uma variável

Lipschutz (1967, p.303) Considere os conjuntos A_1, A_2, A_3, $\ldots$,A_n. Uma função proposicional em $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$ de n variáveis é uma expressão designada por $p(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ na qual a propriedade $p(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ é verdadeira ou falsa para qualquer n-upla ordenada $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$.

Exemplo 2.31. *: Considere os conjuntos H (conjunto dos homens) e M (conjunto das mulheres). A proposição "x é casado com y" é uma função proposicional $H \times M$.*

Exemplo 2.32. *: Seja o conjunto $\mathbb{N}$. A proposição "$x + 2y + 3z = 18$"é uma função proposicional de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

O princípio básico de funções proposicionais de mais de uma variável é que quantificadores de cada variável que precedem uma função a tornam uma proposição e fazem-na ter um valor verdade.

Exemplo 2.33. *: Sejam $H = \{$ Júlio, Arnaldo, Tiago$\}$, $M = \{$ Márcia, Antônia$\}$ e $p(x) : x$ é irmão de y. Assim, $\forall x \in H, \exists y \in M, p(x)$, ou seja, para cada x pertencente a H, existe um y pertencente a M tal que x é irmão de y. Logo, cada membro de H é irmão de Márcia ou Antônia.*

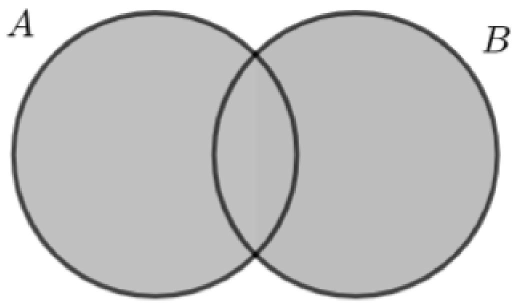
Exemplo 2.34. *: Se tomarmos os mesmos conjuntos e a mesma proposição do exemplo anterior, porém, escrevermos a função proposicional $\exists y \in M, \forall x \in H, p(x)$, será estabelecido que ao menos uma das mulheres em M é irmã de todos os homens em H. Desse modo, uma ordem diferente dos quantificadores define uma proposição diferente.*

2.3 União de Conjuntos

Definição 2.35. *Novaes (2018, p.161) A união de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém os elementos pertencentes a A ou a B .*

A união entre dois conjuntos A e B tem por notação $A \cup B$ e simbolicamente, é identificada por $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Podemos representar a união de dois conjuntos A e B de acordo com o seguinte diagrama de Venn:

Figura 1: $A \cup B$



Fonte: Autor

Citaremos alguns exemplos que remetem à união de conjuntos:

Exemplo 2.36. *: Consideremos um conjunto $M = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ termina em } 0\}$ e $N = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ termina em } 5\}$. Assim, $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} : x$ termina em 0 ou em 5}, ou seja, $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} : x$ é divisível por 5}.*

Exemplo 2.37. *: Dados dois pontos distintos A e B, o conjunto formado pelos pontos colineares a A e B e que estão entre eles é denominado segmento AB. Pelo dos pontos A e B serem extremidades de AB, temos que $AB = \{A, B\} \cup \{X : X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$*

2.3.1 Propriedades da União

A operação de união de conjuntos tem as seguintes propriedades:

1. (*Identidade*) $A \cup \emptyset = A$

2. (*Dominante*) $A \cup U = U$

3. (*Idempotente*) $A \cup A = A$

4. (*Comutativa*) $A \cup B = B \cup A$

5. (*Associativa*) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Existem, também, as propriedades conjuntas da operação de união com a relação de inclusão, que estão elencadas abaixo:

1. $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$

2. $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$

3. $A \subset C$ e $B \cup C$ se e somente se $A \cup B \subset C$

4. $A \subset B$ e $A \subset C$ se e somente se $A \subset B \cup C$

5. Se $A \subset B$, então $A \cup C \subset B \cup C$.

Citaremos, agora, as propriedades conjuntas das operações de união e de interseção de conjuntos:

1. (*Absorção*) $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$

2. (Distributividade da interseção em relação à união) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. (Distributividade da união em relação à interseção) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.3.2 União de uma quantidade finita de conjuntos

A noção de união de dois conjuntos pode ser estendida para a definição de união de uma quantidade $n \geq 2$ finita de conjuntos pela definição que se segue.

Definição 2.38. *Novaes (2018, p.169) A união de $n(n \geq 2)$ conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ é o conjunto de elementos pertencentes a, pelo menos, um desses n conjuntos.*

Disso, podemos ver que a condição para que um objeto possa ser elemento da união dos n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ é: um objeto x pertence a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ se e somente se pertence a um dos conjuntos $A_i (1 \leq i \leq n)$.

Exemplo 2.39. *: Dados os conjuntos $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{3, 4\}$, ..., $A_n = \{n, n+1\}$, temos que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} = \{1, 2, 3, \cdots, n, n+1\}$$

Exemplo 2.40. *: Dados os n conjuntos $C_i = [-i, i] (i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n)$, ou seja, $C_1 = [-1, 1]$, $C_2 = [-2, 2]$, $C_3 = [-3, 3]$, $\cdots$, $C_n = [-n, n]$, temos que $\bigcup_{i=1}^{n} = C_n$.*

2.3.3 União de uma família de conjuntos

A seguinte definição menciona um conceito muito importante sobre família de conjuntos retratados dentro do conjunto dos números naturais.

Definição 2.41. *Novaes (2018, p.172) Dado um conjunto I, cujos elementos são denominados índices, uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos com índices em I (ou conjunto indexado) é uma função que, a cada $i \in I$, corresponde um único conjunto A_i.*

Portanto, uma indexação é uma função com domínio em I e cuja imagem é o conjunto indexado $\{A(i) : i \in I\}$, denotado por $\{A_i : i \in I\}$ ou A_i. De posse do exposto, temos a seguinte generalização da definição para a operação de interseção de conjuntos.

Definição 2.42. *Novaes (2018, p.173) Dado um conjunto de índices I, união da família de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ é o conjunto cujos elementos são pertencentes a A_i, para algum $i \in I$.*

Essa definição pode ser entendida, simbolicamente, por $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i$, para algum $i \in I\}$ e tem a notação $\bigcup_{i\in I} A$ (ou $\bigcup A_i$). Uma maneira de compreendermos a condição em que um objeto deve satisfazer para ser elemento da interseção de A_i é que ele pertença a A_i, para algum $i \in I$. Vejamos o exemplo a seguir que corrobora com o que foi exposto até aqui:

Exemplo 2.43. *: Dada a família de conjuntos $D_i = \{\frac{k}{i} : k$ é um inteiro$\}(i \in \mathbb{N})$, ou seja,*
$D_1 = \{\frac{k}{1} : k$ é um inteiro $\}$,
$D_2 = \{\frac{k}{2} : k$ é um inteiro $\}$,
$D_3 = \{\frac{k}{3} : k$ é um inteiro $\}$,
$\vdots$
temos $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}$

2.3.4 União disjunta de dois conjuntos

A união disjunta de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B mas não de ambos. A notação usada para união disjunta de dois conjuntos A e B é $A\dot{\cup}B$ e, simbolicamente, é indicado por $A\dot{\cup}B = \{x :$ ou $x \in A$ ou $x \in B\}$. Podemos os seguintes casos de uniões disjuntas:

Exemplo 2.44. *: Dados os conjuntos P dos números inteiros positivos e Q dos números inteiros negativos, a união $P \cup Q$ é disjunta, pois não existe um número inteiro positivo e negativo.*

Exemplo 2.45. *: Dados $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2\}$, a união $A \cup B$ é disjunta, pois o único número que satisfaz tanto a $x^2 \leq 2$ quanto a $x^2 \geq 2$ é $\sqrt{2}$, que sendo um número irracional não pertence nem a A e nem a B*

2.3.5 Partição de um conjunto

Definimos conjuntos *mutuamente disjuntos* (*dois a dois disjuntos* ou *não sobrepostos*) aos conjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ os quais não existam A_i e A_j $(1 \leq i, j \leq n)$, com índices distintos e que tenham elementos em comum. Simbolicamente, podemos escrever como:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ para todo } i \neq j \ (1 \leq i, j \leq n)$$

A partir disto, dado um conjunto A, vamos definir uma partição de A.

Definição 2.46. *Novaes (2018, p.178) Dado um conjunto A, um conjunto $\{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathcal{P}(A)$ é denominado uma partição de A se satisfizer as seguintes condições:*

- $A_i \notin \emptyset$, $\forall i = 1, \ldots, n$;
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, *se* $i \neq j$, $\forall i, j = 1 \ \ldots, n$
- $A = A_1 \cup \ldots \cup A_2$

Portanto, uma partição de um conjunto A não vazio é uma coleção de subconjuntos não vazios de A, dois a dois distintos, cuja união disjunta é A e que terá por notação $\mathcal{P} = \{A_i\}$. O caso a seguir nos mostra uma aplicação do conceito de partição de um conjunto.

Exemplo 2.47. *: Um número pode ser denominado deficiente se a soma de seus divisores próprios (divisores distintos dele mesmo) é menor que ele; pode ser denominado perfeito se a soma de seus divisores próprios é igual a ele; ou pode ser denominado abundante se a soma de seus divisores próprios é maior que ele. Assim, 15 é um exemplo de um número deficiente* $(1+3+5=9)$*, 6 é um exemplo de um número perfeito* $(1+2+3=6)$*, e 24 é um exemplo de um número abundante* $(1+2+3+4+6+8+12=36)$*. Considerando os conjuntos* $A = \{n \in \mathbb{N} : n$ *é um número deficiente*$\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : n$ *é um número perfeito*$\}$ *e* $C = \{n \in \mathbb{N} : n$ *é um número abundante*$\}$*. Pelo fato desses conjuntos serem não vazios, dois a dois disjuntos e a união* $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$*, temos que* $\{A, B, C\}$ *é uma partição de* $\mathbb{N}$

2.3.6 Triângulo de Bell

Dado um conjunto finito não vazio A de cardinalidade k, quantas partições de A existem? A resposta à essa pergunta é equivalente a saber de quantos modos os subconjuntos de A podem ser particionados. O número de partições de um conjunto de cardinalidade k é denotado por B_k, conhecido por *número de Bell*. Ao considerarmos, por exemplo, para $k = 1, 2, 3$, teremos:

1. $(k = 1)$ Dado $A = \{a\}$, só existe uma forma de particioná-lo: $\{\{a\}\}$. Assim, $B_k = 1$.
2. $(k = 2)$ Dado $A = \{a, b\}$, existem duas formas diferentes de particioná-lo: $\{\{a\}, \{b\}\}$, $\{\{a, b\}\}$. Desse modo, $B_k = 2$.
3. $(k = 3)$ Dado $A = \{a, b, c\}$, existirão cinco formas diferentes de particioná-lo: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}\}$, $\{\{c\}, \{a, b\}\}$, $\{\{a, b, c\}\}$. Logo, $B_k = 5$.

Podemos calcular os números de Bell através do *triângulo de Bell*. Análogo ao triângulo de Pascal, o triângulo de Bell é formado por números que indicam os valores da quantidades de partições de um conjunto. Também é conhecido por *triângulo de Pierce* ou *matriz de Aitken*, em homenagem a matemáticos - Charles Sanders Pierce e Alexander Craig Aitken - que descobriram o triângulo mencionado.

O procedimento para construção do triângulo de Bell é mostrado a seguir:

- números da primeira linha: 1
- números da segunda linha: 1 (repetição), 2 (1+1)
- números da terceira linha: 2 (repetição), 3 (2+1), 5 (3+2)
- números da quarta linha: 5 (repetição), 7 (5+2), 10 (7+3), 15 (10+5)
- números da quinta linha: 15 (repetição), 20 (15+5), 27 (20+7), 37 (27+10), 52 (37+15)

e continua até a k-ésima linha. Desse modo temos o seguinte triângulo com os números dispostos:

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 2 & & & \\
2 & 3 & 5 & & \\
5 & 7 & 10 & 15 & \\
15 & 20 & 27 & 37 & 52 \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

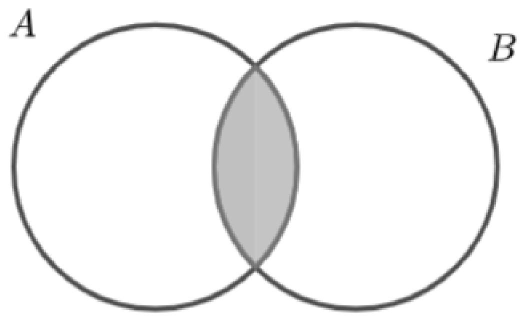
Os números de Bell são os últimos de cada linha, ou seja, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$

2.4 Interseção de Conjuntos

Definição 2.48. *Novaes (2018, p.131) A interseção entre dois conjuntos A e B é o conjunto cujos elementos pertencem tanto a A quanto a B.*

A interseção entre dois conjuntos A e B tem por notação $A \cap B$ e simbolicamente, é identificada por $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$. Portanto, um objeto pertence a $A \cap B$ e somente se pertencer a A e a B. Podemos representar a interseção de dois conjuntos A e B de acordo com o diagrama de Venn a seguir:

Figura 2: $A \cap B$



Fonte: Autor

Vejamos alguns casos que exemplificam a interseção entre conjuntos:

Exemplo 2.49. *: Suponhamos duas retas a e b, contidas em um mesmo plano e não coincidentes, que se intersectam. Desse modo, como a e b são conjuntos de pontos temos que* $a \cap b = \{P\}$*, ou seja, a interseção entre as retas a e b é o conjunto* $\{P\}$*, onde o ponto P é a interseção das retas supracitadas.*

Exemplo 2.50. *: Consideremos o conjunto M dos pontos de um plano* α *cuja distância a um ponto fixo O desse plano é menor do que ou igual a um número real R* $(R > 0)$*, e o conjunto N dos pontos do plano cuja distância a esse mesmo ponto O é maior do que ou igual a um número real r* $(r > 0)$*, sendo* $r < R$*. Assim,* $M \cap N$ *é o conjunto dos pontos desse plano* α *delimitado pelos dois círculos de centro comum O e de raios r e R.*

2.4.1 Propriedades da interseção

A interseção de conjuntos tem as seguintes propriedades:

1. (*Dominante*) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

2. (*Identidade*) $A \cap U = A$.

3. (*Idempotente*) $A \cap A = A$.

4. (*Comutativa*) $A \cap B = B \cap A$.

5. (*Associativa*) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2.4.2 Propriedades de inclusão e interseção

Existem propriedades conjuntas da relação de inclusão e da operação de interseção que são as seguintes:

1. $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.

2. $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$.

3. $C \subset A$ e $C \subset B$ se e somente se $C \subset A \cap B$.

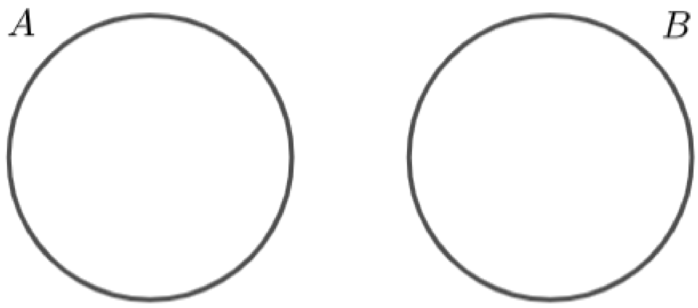
4. Se $A \subset B$, então $A \cap C \subset B \cap C$.

2.4.3 Conjuntos Disjuntos

Definição 2.51. *Novaes (2018, p.134) Dois conjuntos são ditos disjuntos se não têm elementos em comum.*

A disjunção de dois conjuntos é expressa, simbolicamente, por $A \cap B = \emptyset$. Além disso, dois conjuntos disjuntos são representados através do diagrama de Venn como segue abaixo:

Figura 3: Conjuntos disjuntos A e B



Fonte: Autor

O conjunto vazio é o único conjunto disjunto de qualquer conjunto A. Se A é ou não vazio, teremos que $A \cap \emptyset = \emptyset$, pela propriedade *dominante* da interseção. Ainda temos que $A \cap A = \emptyset$ e somente se $A = \emptyset$, pela propriedade *idempotente*.

Há um teorema que retrata a respeito de conjuntos não comparáveis, citado a seguir.

2.4.4 Interseção de uma família de conjuntos

Definição 2.52. *Novaes (2018, p.142) Dado um conjunto de índices I, interseção da família de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ é o conjunto cujos elementos são pertencentes a A_i, para todo $i \in I$.*

Essa definição pode ser entendida, simbolicamente, por $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i$, para todo $i \in I\}$ e tem a notação $\bigcap_{i\in I}^{\infty} A$ (ou $\bigcap_{i\in I}$, ou mesmo $\bigcap A$). Uma maneira de compreendermos a condição em que um objeto deve satisfazer para ser elemento de da interseção de A_i é que ele pertença a A_i, para cada $i \in I$. Analisemos o exemplo.

Exemplo: Dada a família de conjuntos $E_n = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, temos que $\bigcap_{i\in I} E_i = E_1$, pois
$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 1\} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1\}$
$E_2 = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 1\} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1\}$
$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 1\} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1\}$
$\vdots$

Essa família de conjuntos satisfaz $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$.

2.4.5 Interseção de uma quantidade finita de conjuntos

Para uma quantidade finita $n \geq 2$ de conjuntos temos a seguinte definição:

Definição 2.53. *Novaes (2018, p.130) A interseção de n $(n \geq 2)$ conjuntos A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n é o conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a todos esses n conjuntos.*

A condição de que um objeto deva satisfazer para ser elemento da interseção de n conjuntos A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n é: um objeto x pertence a $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ se e somente se pertence a cada $A_i (1 \leq i \leq n)$.

Exemplo 2.54. *: Dados os n conjuntos $A_1 = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $A_2 = \{2, 3, 4, \cdots\}$, $A_3 = \{3, 4, 5, \cdots\}$, $\cdots$, $A_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$, temos $\bigcap_{i=1}^{n} = A_n$ pois $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n$*

Exemplo 2.55. *: Dados os n conjuntos $B_i = [-i, i]$ $(i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n)$, de modo que $B_1 = [-1, 1]$, $B_2 = [-2, 2]$, $B_3 = [-3, 3]$, $\cdots$, $B_n = [-n, n]$, temos $\bigcap_{i=1}^{n} = B_1$, pois $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots \subset B_n$.*

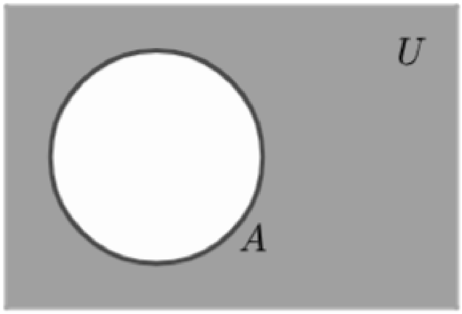
Exemplo 2.56. *: Dados os n conjuntos $C_i = \{i, i^2\}$ $(i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n)$, de modo que $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 4\}$, $C_3 = \{3, 9\}$, $\cdots$, $C_n = \{n, n^2\}$, temos $\bigcap_{i=1}^{n} = \emptyset$. De fato, os conjuntos $C_i^{'}s$ não são disjuntos, dois a dois, pois $C_k = C_{k^2}$, para todo $1 \leq k \leq n$, porém C_1 é disjunto de cada um dos demais conjuntos.*

2.5 Complementar

Definição 2.57. *Novaes (2018, p.211) Dado um subconjunto A de um conjunto universo U, o complementar de A com relação a U é o conjunto dos elementos de U que não pertencem a A.*

Simbolicamente, o complementar de A em relação a U é dado por $A^C = \{x \in U : x \notin A\}$ e a condição para que um objeto deva satisfazer para pertencer a A^C é que se um elemento pertencente a U pertence ao complementar de A se e só se não pertence a A. O diagrama de Venn que representa o complementar de um conjunto A e mostrado a seguir:

Figura 4: Complementar do conjunto A



Fonte: Autor

Consideremos, por exemplo, o conjunto U das retas de um plano α, r um elemento fixado de α e A o conjunto das retas do plano U que intersectam r. Desse modo, o complementar de A em relação a U é o conjunto de todas as retas do plano α que são paralelas a r.

Vejamos o caso de um dado conjunto universo U e dois subconjuntos A e B quaisquer de U.

Exemplo 2.58. *: Demonstremos que se x é um elemento qualquer de U, então x pertence a um e somente um dos seguintes conjuntos: $A \cap B$, $A \cap B^C$, $A^C \cap B$, $A^C \cap B^C$.*

Demonstração 2.59. *Através da definição de complementar de um conjunto, $x \in A$ ou $x \in A^C$, porém, não a ambos. De forma análoga, $x \in B$ ou $x \in B^C$, mas não a ambos. Pela definição de interseção, temos que $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap B^C$, mas não a ambos; como também podemos ter que $x \in A^C \cap B$ ou $x \in A^C \cap B^C$, porém, não a ambos.*

2.5.1 Propriedades do Complementar

A operação de complementar de conjuntos tem as seguintes propriedades:

1. $\emptyset^C = U$
2. $U^C = \emptyset$

3. (Involução) $(A^C)^C = A$

4. $A \subseteq B$ se e somente se $B^C \subseteq A^C$

5. (leis de De Morgan)

   - $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$
   - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

6. $A \cap A^C = \emptyset$

7. $A \cup A^C = U$

Analisemos alguns exemplos que nos fornecem a utilidade da aplicação das propriedades de complementar de conjuntos.

Exemplo 2.60. *: Demonstre que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2$ é ímpar$\}$ é subconjunto de $B = \{x \in \mathbb{Z} : x$ é ímpar$\}$. Vamos provar que $B^C \subseteq A^C$. Para isso, vamos supor que $x \in B^C$, ou seja, x é da forma $x = 2n(n \in \mathbb{Z})$, portanto, um número par. Elevando x ao quadrado, obtemos $x^2 = 4n^2 = 2 \cdot (2n^2)$. Logo, X^2 é par e assim, $x \in A^C$. Conclui-se que $B^C \subseteq A^C$, que é equivalente a $A \subseteq B$.*

Exemplo 2.61. *: Demonstre que o conjunto $A = \{p \in \mathbb{N} : p$ é primo$\}$ é subconjunto do conjunto $B = \{p \in \mathbb{N} : \sqrt{p}$ é irracional$\}$. Vamos demonstrar que $B^C \subseteq A^C$. Para isso, vamos supor que $p \in B^C$, ou seja, $\sqrt{p}$ é racional. Assim, $\sqrt{p} = \frac{a}{b}(a,\ b \in \mathbb{N})$. Elevando ambos os membros dessa igualdade ao quadrado obtemos $p = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = pb^2$. Porém, nessa igualdade, o expoente de p no primeiro membro é par, enquanto no segundo membro é ímpar, o que contradiz a unicidade do Teorema Fundamental da Aritmética. Logo, demonstramos que $B^C \subseteq A^C$, que é equivalente a $A \subset B$.*

2.5.2 Complementar relativo

Uma generalização do conceito de complementar de um conjunto A pertencente ao conjunto universo U é o complementar de A em relação a B, de modo que $A \subset B$. A definição a seguir torna preciso esse conceito.;

Definição 2.62. *Novaes (2018, p.218) Dados A e B subconjuntos de um conjunto universo U, tais que $A \subset B$, o complementar relativo de A em B é o conjunto dos elementos que pertencem a B mas não a A.*

Simbolicamente, o complementar relativo do conjunto A em relação ao conjunto B é dado por $C_B^A = \{x : x \in B \text{ e } x \notin A\}$, onde C_B^A é a notação do complementar de A em relação a B. Um exemplo a ser citado é que no conjunto universo dos quadriláteros, o complementar do conjunto Q dos quadrados é o conjunto dos quadriláteros que ou não são retângulos ou não são losangos.

2.5.3 Princípio da Dualidade

O princípio da dualidade diz que se uma afirmação for feita sobre conjuntos é verdadeira, então a afirmação obtida permutando $\subset$ com $\supset$, $\subseteq$ com $\supseteq$, $\cup$ com $\cap$ e U com $\emptyset$ também é verdadeira e reciprocamente.

Diante disso, chamamos de **duais** Novaes (2018, p.219) às duas afirmações que podemos obter uma da outra por meio do Principio da Dualidade, Portanto, se uma afirmação é verdadeira para quaisquer conjuntos, então sua afirmação dual será verdadeira para quaisquer tais conjuntos necessariamente.

A aplicabilidade do princípio da dualidade nos fornece ferramentas nas demonstrações onde novas afirmações são obtidas das originais por meios das permutações já mencionadas. Nisso, podemos, também, estabelecer certa quantidade de afirmações e aceitar seus duais como verdadeiras, sem a necessidade de argumento adicional.

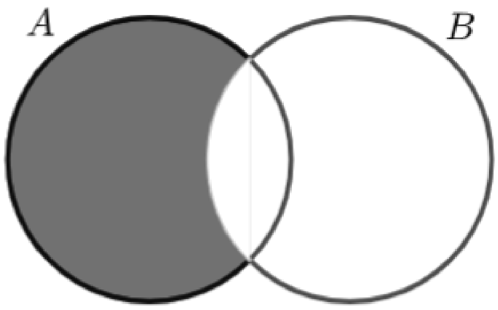
2.6 Diferença de Conjuntos

Definição 2.63. *Novaes (2018, p.241) Dados A e B conjuntos quaisquer de um subconjunto U, denominamos **diferença entre A e B** ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B*

A diferença entre dois conjuntos A e B é denotada por $A - B$ e, simbolicamente é representada por $A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Note que $A - B$ é uma generalização da operação de complementar relativo de B em A e, portanto, $A - B$ é um subconjunto de A. Também podemos ver que não é necessário $B \subset A$.

A seguinte representação do diagrama de Venn ilustra a operação de diferença entre dois conjuntos A e B.

Figura 5: Complementar do conjunto A



Fonte: Autor

Exemplo 2.64. *Consideremos os conjuntos $A = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x : x = 4m, m \in \mathbb{N}\}$. Desse modo, o conjunto $A - B = \{x : x = 4m + 2, m \in \mathbb{N}\}$, ou seja, o conjunto dos números naturais que quando divididos por 4 deixam resto 2.*

Exemplo 2.65. *Consideremos o conjunto A dos números inteiros primos e B o conjunto dos números inteiros ímpares. Assim, $A - B = \{2\}$, que é o conjunto dos números inteiros primos que não são ímpares.*

2.6.1 Propriedades da diferença

A operação de diferença de conjuntos tem as seguintes propriedades:

1. $A - \emptyset = A$ e $\emptyset - A = \emptyset$
2. $A - U = \emptyset$ e $U - A = A^C$
3. $A - A = \emptyset$
4. $A - A^C = A$
5. $(A - B) = A^C \cup B$

6. $A - B = B^C - A^C$
7. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ e $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
8. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$ e $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
9. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ e $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
10. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ e $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
11. $A - (A - B) = A \cap B$ e $(A - B) - B = A - B$

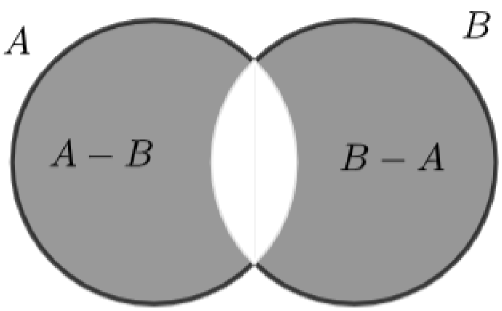
2.6.2 Diferença Simétrica

Definição 2.66. *Novaes (2018, p.255) Dados dois conjuntos A e B, chamamos de **diferença simétrica de** A **e** B ao conjunto formado por todos os elementos que pertencem a um e, somente, a um dos conjuntos A e B.*

A diferença simétrica de dois conjuntos A e B usa a notação $A\Delta B$, e simbolicamente é denotada por $A\Delta B = \{x : \text{ou } (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ e } x \in B)\}$. Isso indica que podemos obter um conjunto através da união das diferença não comutativas de dois conjuntos, mesmo que sejam conjuntos disjuntos.

O seguinte diagrama de Venn representa a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B.

Figura 6: Diferença simétrica de A e B ($A\Delta B$)



Fonte: Autor

2.6.3 Propriedades da diferença simétrica

As seguintes propriedades são manuseadas pela diferença simétrica de conjuntos:

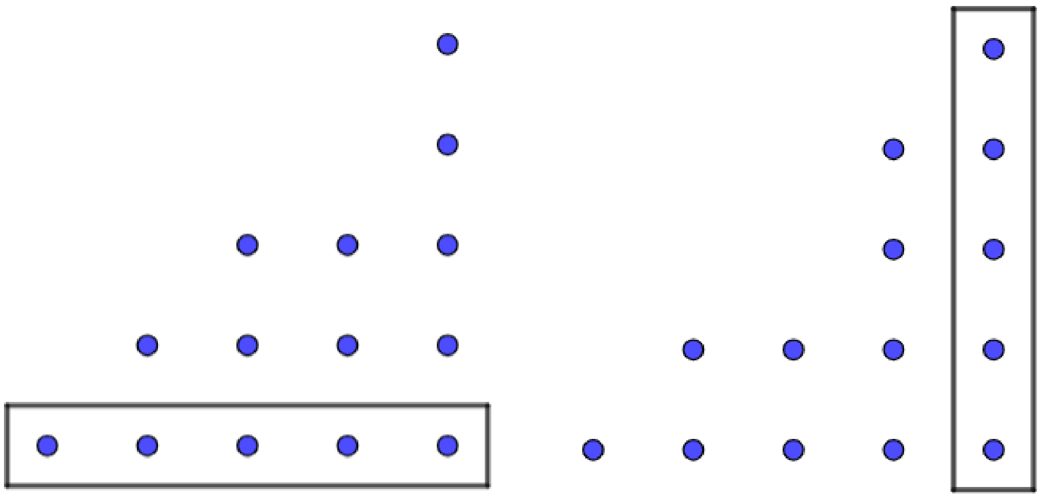
1. $A\Delta\emptyset = A$
2. $A\Delta U = A^C$
3. $A\Delta A^C = U$
4. $A\Delta A =$
5. (Comutatividade) $A\Delta B = B\Delta A$
6. $(A\Delta B)^C = (A\Delta B) \cup (A^C \cap B^C)$
7. (Associatividade) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
8. $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A\Delta C)$
9. $A \cup (B\Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A^C \cap B^C \cap C^C)$
10. $(A\Delta B) - C = (A\Delta C^C)\Delta(B\Delta C^C)$ e $A - (B\Delta C) = (A \cap B \cap C)(A \cap B^C \cap C^C)$

3 APLICAÇÕES

3.1 Problema das moedas

Novaes (2018) Dadas pilhas de moedas de um centavo, removemos uma moeda da cada pilha para formar uma nova pilha. Cada pilha original reduz-se de uma moeda, de modo que cada pilha de uma moeda desaparece, cada pilha de duas moedas reduz-se para pilhas de uma moeda e assim, sucessivamente. Aqui, vamos restringir nossa atenção a listas de números naturais em ordem não decrescente pelo fato de ordens diferentes da mesma lista de tamanhos serem equivalentes.Veja a figura abaixo:

Figura 7: Pilhas de moedas antes e após a remoção de uma moeda de cada pilha



(a) Pilhas de moedas antes da remoção (b) Pilhas de moedas após a remoção

Fonte: Autor

Consideremos os seguintes conjuntos:

- A : conjunto das listas que não mudam.
- B : conjunto das listas que consistem em uma pilha de cada tamanho, de 1 a n, para algum número inteiro positivo n.

Provaremos que $A = B$.

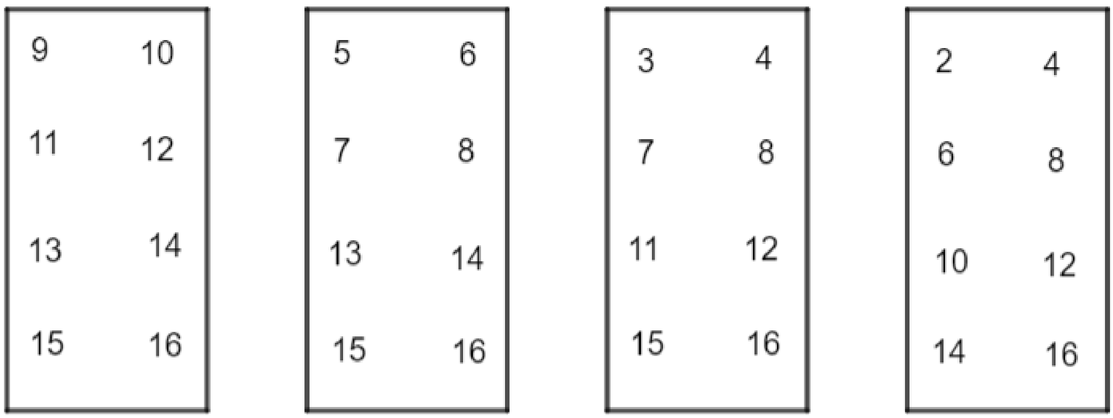
Demonstração 3.1. *Consideremos k uma lista contendo n pilhas, e l contendo a nova lista de pilhas resultante. Se $k \in A$, significando que k e l são a mesma lista, então l tem também n pilhas. Como introduzimos uma nova pilha, exatamente uma pilha desaparece. Assim, k tem uma pilha de tamanho 1. Devido a $k = l$, l tem exatamente uma pilha de tamanho 1, fazendo com que k contenha uma pilha de tamanho 2. Seguindo esse procedimento para i, tomado de 1 até $n-1$, temos que k, ao conter uma pilha de tamanho i, nos fará deduzir que l também tem uma pilha de tamanho i, de modo que k tem uma* *pilha de tamanho* $i+1$. *Isso nos fornece uma pilha de cada tamanho, de 1 até* n. *Desse modo, demonstramos que todo elemento de* A *é também elemento de* B, *ou seja,* $A \subseteq B$. *Consideremos, agora, o elemento de* B *contendo pilhas de tamanhos 1, 2,* $\cdots$, n. *Para cada* i, *de 1 até* n, *a pilha de tamanho* i *torna-se uma pilha de tamanho* $i-1$ *e cada uma das* n *pilhas contribui para com ma moeda, fazendo que a pilha de tamanho 1 desapareça. O resultado desse processo é a pilha original. Logo, todo elemento de* B *é também elemento de* A, *ou seja,* $B \subseteq A$. *Devido a* $A \subseteq B$ *e* $A \subseteq B$, *conclui-se que* $A = B$.

3.2 Truque mágico com cartões

Novaes (2018) Um jogador M apresenta a um jogador N um "truque de mágica"que consiste em quatro cartões A, B, C, D, os quais contêm, cada cartão oito dentre dezesseis números inteiros 1, 2, 3, $\cdots$, 16. O jogador M pede ao jogador N que escolha um desses números e, em seguida, o jogador M pergunta a N: o número que você escolheu está no cartão A?, B?, C?, D? As respostas serão sim ou não de acordo com o cartão perguntado.

O objetivo desse jogo é o jogador M adivinhar o número escolhido por N.

Figura 8: Cartões do truque mágico



Fonte: Autor

Supondo que N tenha escolhido um número e, logo após, ter fornecido a N as seguintes respostas: A(sim), B(não), C(não), D(sim), o jogador M acertou a escolha do número feito por N. Usaremos os termos A, B, C ,D para denotar os conjuntos dos números contidos nos cartões correspondentes.

$A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

$B = \{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16\}$

$C = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16\}$

$D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

Desse modo, as respostas fornecidas pelo jogador N indicam que o número escolhido por ele está em A, B^C, C^C e D simultaneamente, portanto, $A \cap B^C \cap C^C \cap D$. Determinando o conjunto em questão, teremos:

$A \cap B^C \cap C^C \cap D = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\} \cap \{1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12\} \cap \{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16\} = \{10\}$

O entendimento que se deve levar em conta é de que dois cartões distinguem quatro números; três cartões distinguem oito números; quatro cartões distinguem dezesseis números e assim por diante é essencial para responder corretamente a pergunta. Visto que cada cartão apresentado contém duas respostas, sim ou não, um jogador com dois cartões terá quatro possibilidades de respostas: sim, sim; sim, não; não, sim; não, não. Logo, para cada uma das quatro respostas possíveis, será atribuído um número. De posse disso, esse "truque mágico"só funcionará se houver apenas um número no mesmo conjunto de cartões.

Isto se dá porque deve haver um único número que corresponda a qualquer sequência de respostas fornecidas pelo jogador N ao jogador M, ou seja, se K é A ou A^C, W é B ou B^C, X é C ou C^C e Y é D ou D^C, então $K \cap W \cap X \cap Y$ contém exatamente um número.

3.3 Circuitos elétricos

Novaes (2018) Um circuito elétrico consiste de uma fonte de eletricidade H, um ou mais fio(s) metálico(s), um ou mais interruptor(es) $A, B, C, \cdots$, e um terminal T. Quando um interruptor está ligado (circuito fechado), a corrente elétrica flui através dele, iniciando em H e terminando em T. Quando o interruptor está desligado (circuito aberto), a corrente não flui através dele.

Existem., essencialmente, dois tipos de circuitos: *em série* e *em paralelo*. Qualquer outro tio mais complicado consiste de uma combinação entre tipos de circuitos. Um circuito cujos interruptores estão em série, podemos interpretá-los como conjuntos realizando uma operação de interseção. Já nos circuitos cujos interruptores estão em paralelo, podemos interpretá-los como conjuntos que realizam uma operação de união. Desse modo, quaisquer outros circuitos podem ser interpretados como combinações de interseções e uniões de conjuntos representados por seus interruptores.

Consideremos o circuito a seguir, constituído por uma fonte H, dois interruptores e um terminal T.

Figura 9: Circuito em série

Fonte: Autor

Se ambos os interruptores em um circuito estão arranjados em *série*, então estão em um mesmo ramo ,por definição. Se tanto A quanto B estão ligados, a corrente flui de H para T. SE pelo menos um deles, ou A ou B, está desligado, então a corrente elétrica não flui de H para T.

Em suma, podemos construir a seguinte tabela que nos mostrará se a corrente flui ou não em um circuito em série contendo dois interruptores A e B:

A	B	A corrente flui de H para T
Ligado	Ligado	Sim
Ligado	Desligado	Não
Desligado	Ligado	Não
Desligado	Desligado	Não

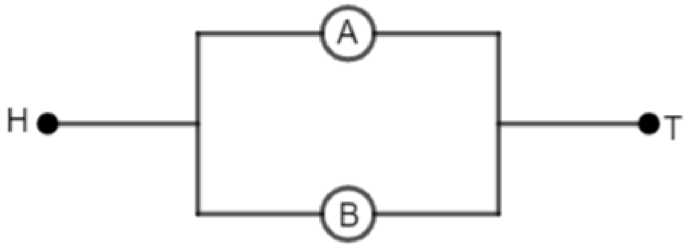
Tabela 1: Circuito em série
Fonte: Autor

Ao interpretar os interruptores como conjuntos, podemos observar que a tabela anterior é análoga à tabela de pertinência da interseção de conjuntos A e B, no qual o estado "Ligado", é equivalente à propriedade "é elemento de"e o estado "Desligado"é equivalente à propriedade "não é elemento de". Assim, podemos representar o arranjo de dois interruptores em série como $A \cap B$.

Uma aplicação desse tipo de circuito seria a sequência de lâmpadas de luzes de uma árvore de Natal, em que, muitas vezes, são ligadas em série

Agora, consideremos o circuito a seguir, o qual é constituído por uma fonte, dois interruptores em paralelo e um terminal T.

Figura 10: Circuito em paralelo



Fonte: Autor

Por definição, se ambos os interruptores em um circuito estão em ramos diferentes, esses interruptores são ditos arranjados em *paralelo*, Se pelo menos um deles, ou A ou B, está ligado, então a corrente elétrica flui de H para T. Se, no entanto, A e B estão desligados, então a corrente não flui de H para T.

Podemos construir a seguinte tabela para que nos mostrará as condições para que a corrente flua ou não em um circuito em paralelo contendo dois interruptores A e B:

Ao interpretar os interruptores como conjuntos, podemos observar que a tabela anterior é análoga à tabela de pertinência da união de conjuntos A e B, no qual o estado

A	B	A corrente flui de H para T
Ligado	Ligado	Sim
Ligado	Desligado	Sim
Desligado	Ligado	Sim
Desligado	Desligado	Não

Tabela 2: Circuito em paralelo
Fonte: Autor

"Ligado", é equivalente à propriedade "é elemento de"e o estado "Desligado"é equivalente à propriedade "não é elemento de". Assim, podemos representar o arranjo de dois interruptores em paralelo como $A \cup B$.

Se dois interruptores são arranjados de modo que, sempre que um está ligado o outro está desligado, teremos interruptores complementares. Dado um interruptor A, o outro será denotado por A^C. Um exemplo claro se vê em interruptores colocados na base e no topo de uma escada, o que permite a você acender e apagar a luz a o longo da escada, sempre que estiver na base ou no topo. Caso estes interruptores complementares estejam em série (Figura 5), então a corrente nunca flui de H para T, expresso por $A \cap A^C = \emptyset$. Na situação dos interruptores complementares estarem em paralelo (Figura 6), a corrente sempre fluirá de H para T, expresso por $A \cup A^C = U$.

Figura 11: Circuitos complementares em série

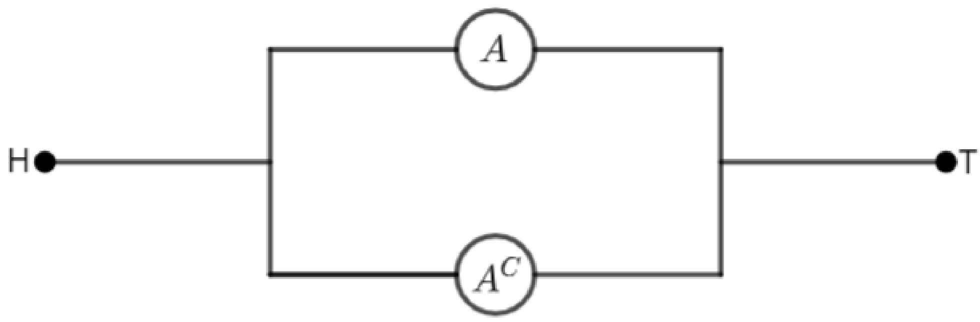


Figura 12: Circuitos complementares em paralelo

As seguintes tabelas mostram se a corrente flui de H para T através dos interruptores complementares A e B.

Tabela 3: Circuitos complementares em série

A	A^C	A corrente flui de H para T
Ligado	Desligado	Não
Desligado	Ligado	Não

Tabela 4: Circuitos complementares em paralelo

A	A^C	A corrente flui de H para T
Ligado	Desligado	Sim
Desligado	Ligado	Sim

3.4 Diferentes tipos de Infinito

Como já citada na definição 2.7, um conjunto enumerável é equivalente ao conjunto dos números naturais e, portanto, um conjunto não enumerável tem cardinalidade diferente da cardinalidade de $\mathbb{N}$. Um exemplo disso é o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$. A partir dessa dos trabalhos de Cantor, que elucidaram a compreensão a respeito da existência de conjuntos enumeráveis, que chegou-se à conclusão de que dado certo conjunto X, sempre existirá um conjunto com cardinalidade maior do que a de X.

Pela definição 2.6, existe uma bijeção $f : X \to Y$ entre dois conjuntos X e Y se estes tem a mesma cardinalidade, e denotamos por $\#(X) = \#(Y)$, ou pode ser também denotado por card $(X) =$ card (Y). Dados dois conjuntos X e Y, $\#(X) < \#(Y)$ se existe uma função injetiva $f : X \to Y$ mas não existir uma sobrejetiva $f : X \to Y$. O seguinte teorema nos mostra que $\#(\mathbb{N}) \leq \#(X)$ para todo conjunto infinito X.

Teorema 3.2. *Lima (2014, p.49) Todo conjunto infinito X possui um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração 3.3. *Em cada subconjunto não vazio $A \subset X$, escolhemos um elemento $x_A \in A$. Definindo uma função f por indução, poremos $f(1) = x_X$ e coloquemos $A_n = X - \{f(1), \cdots, f(n)\}$, tendo já definidos $f(1), \cdots, f(n)$. Pelo fato de X ser infinito, então A_n não é vazio. Poremos, então, $f(n+1) = x_{A_n}$. Desse modo encerra-se a definição por indução de $f : \mathbb{N} \to X$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, em que $m < n$, temos que $f(m) \in \{f(1), \cdots, f(n-1)\}$. Logo, $f(n) \in \{f(1), \cdots, f(n-1)\}^C$. Portanto, $f(m) \neq f(n)$, ou seja, $f(\mathbb{N})$ é um subconjunto enumerável de X.*

Conclui-se que o número cardinal de um conjunto infinito enumerável é o menor dos números cardinais de conjuntos infinitos.

Teorema 3.4 (Cantor)**.** *Lima (2014, p.52) Sejam X um conjunto qualquer e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Não há função sobrejetiva φ tal que $\varphi : X \to \mathcal{F}(X; Y)$.*

Demonstração 3.5. *Dada a função $\varphi : X \to \mathcal{F}(X;Y)$ e sendo $\mathcal{F}(X;Y)$, indiquemos por φ_x o valor de φ no ponto $x \in X$. Desse modo, φ_x é uma função de X em Y. Façamos uma função $f \in \mathcal{F}(X;Y)$ tal que $f \neq \varphi_x$, para todo $x \in X$. Podemos escolher um elemento $f(x) \in Y$ diferente de $\varphi_x(x)$para cada $x \in X$. Isto é possível devido ao fato de Y ter pelo menos dois elementos. Logo, a função $f : X \to Y$ é tal que $f(x) \neq \varphi_x(x)$, para todo $x \in X$. Portanto, $f \notin \varphi(X)$, e, consequentemente, φ não é sobrejetiva.*

O teorema 3.2 pode ser aliado ao fato de que podemos construir uma bijeção entre o conjunto das partes de um conjunto A e uma família de funções $\mathcal{F}(A;\{0,1\})$ a fim de concluirmos que sempre podemos encontrar conjuntos com cardinalidades maiores do que de um dado conjunto.

De fato, para um dado conjunto A e $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de A, a cada conjunto $X \in \mathcal{P}(A)$, associa-se a função $\xi_x : A \to \{0,1\}$, que é chamada de *função característica* do conjunto X, ou seja, $\xi_x(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_x(x) = 0$ se $x \notin X$. A correspondência $X \mapsto \xi_x$ se torna biunívoca pois representa a bijeção de $\mathcal{P}(A)$ sobre $\mathcal{F}(A;\{0,1\})$ e sua inversa acaba por associar a cada função $f : A \to \{0,1\}$ um conjunto X dos elementos $x \in A$ tais que $f(x) = 1$. Logo, $\xi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{F}(A;\{0,1\})$ é uma bijeção. Como $\{0,1\}$ tem dois elementos, pelo teorema 3.2, não existe uma função sobrejetiva $\varphi : A \to \mathcal{F}(A;\{0,1\})$.

Tomando $\varphi = \xi \circ \delta : A \to \mathcal{F}(A;0,1)$, teremos $\delta : A \to \mathcal{P}(A)$, que, consequentemente, também não será sobrejetiva. Porém, há uma função injetiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$, definida por $f(x) = \{x\}$. Assim, para todo conjunto A, $\#(A) < \#[\mathcal{P}(A)]$.

3.5 Sensibilidade e Especificidade

A Teoria de Conjuntos também tem sua aplicação nas áreas biomédicas, podendo ser utilizada juntamente com o estudo de Probabilidades, pois à varias incógnitas e resultados possíveis, porém, não se conhece o desfecho certo. Serão abordados conceitos de probabilidades e epidemiologia, mais especificamente, *teste de diagnóstico* para subsequente uso destes e suas correlações.

3.5.1 Conceitos de Probabilidade

Um experimento aleatório é qualquer experimento em que possa se conhecer todos os seus resultados mas não se sabe qual deles será observado. Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Um evento é um subconjunto de um espaço amostral.

Definição 3.6 (Clássica)**.** *Velarde (2007, p.41) A probabilidade de um evento é a divisão do número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis.*

Definição 3.7 (Frequentista)**.** *Velarde (2007, p.41) Dados m e n com sendo, respectivamente, o número de vezes em que um evento A é observado e o número de repetições do experimento, a probabilidade de A, denotada por $P(A)$, será dada por*

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Dados dois eventos A e B, tais resultados são evidenciados:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Se o espaço amostral é denotado por Ω, então, $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Dois eventos são exclusivos se possuem interseção vazia
5. Se dois eventos são exclusivos, então $P(A \cap B) = 0$
6. Se um espaço amostral está formado por eventos exclusivos $A_1, A_2, A3, \cdots, An$, então $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n) = 1$.
7. Seja A^C o evento complementar de A, então $P(A) = 1 - P(A^C)$

A probabilidade de um determinado evento pode estar condicionado a um outro. Nesse caso, para dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A, dado B será dada por $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

O diagnóstico é parte importante da clínica médica e muitas são feitas para melhoria seus métodos de testes. Para isso levaremos em conta quatro fatores: sensibilidade, especificidade, valor preditivo positivo e valor preditivo negativo. Para alicerçarmos o entendimento, usaremos dois eventos A e B, tais que A indica o evento dos pacientes que estão doentes e B indica o evento dos pacientes que resultaram positivo no teste diagnóstico.

Velarde (2007, p.46) A *sensibilidade* é a proporção de resultados positivos entre os doentes feito em um teste. Sua probabilidade é calculada por $P(B \mid A)$.,

Velarde (2007, p.46) A *especificidade* é proporção dos resultados negativos entre os não doentes feito por um teste. Sua probabilidade será dada por $P(B^C \mid A^C)$.

Velarde (2007, p.46) O *valor preditivo positivo* é a proporção dos pacientes doentes entre os que apresentaram resultado positivo no teste. Sua probabilidade é dada por $P(A \mid B)$.

Velarde (2007, p.46) O *valor preditivo negativo* é a proporção dos pacientes não doentes entre os que apresentaram resultado negativo no teste. Sua probabilidade é indicada por $P(A^C \mid B^C)$.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.8. *Um teste clínico foi usado para diagnosticar certa doença e o quadro abaixo mostra os resultados.*

Resultado do teste	Estado indivíduo		Total
	Doente	Não doente	
Positivo	240	40	280
Negativo	30	56	86
Total	270	96	366

Tabela 5: Quadro de resultados do teste diagnóstico

Através dos resultados do quadro da Tabela 5, podemos aplicar os conceitos estabelecidos e calcular as probabilidades da sensibilidade, da especificidade, do valor preditivo positivo e do valor preditivo negativo descritos no teste. Assim, teremos:

- *Sensibilidade* $= \frac{240}{270} = 0,89$
- *Especificidade* $= \frac{56}{96} = 0,58$
- *Valor preditivo positivo* $= \frac{240}{280} = 0,86$
- *Valor preditivo negativo* $= \frac{56}{86} = 0,65$

Os dados coletados em testes diagnósticos durante o período de maior da incidência da COVID-19 foram essenciais para o estudo da velocidade de disseminação, modo de contágio, sintomas entre os doentes, recuperação e pesquisas para confecção da vacina.

No estado do Piauí Brasil (2020b), os dados coletados indicaram, no ano de 2020, o número de 142.672 casos acumulados em uma população de 3.273.227 habitantes. A definição de *prevalência* Pizzichini, Patino e Ferreira (2020) é a razão entre o número de casos existentes de uma doença e a população em risco de tê-la. Isso mostra uma prevalência de

$$\frac{142.672}{3.273.227} = 0,0436$$

A ANVISA (Agência Nacional de Vigilância Sanitária), mostra os dados de sensibilidade e especificidade de testes de diagnóstico. O teste CORONAVÍRUS RAPID TEST Brasil (2020a) dispõe de uma sensibilidade de $86,43\%$ e especificidade de $99,57\%$. Aplicando esse teste à população para piauiense em 2020, para encontrarmos a probabilidade de uma pessoa não ter COVID-19, se seu teste deu positivo, é preciso calcular $P(A|B)$, onde A é o conjunto dos pacientes doentes e B, o conjunto dos pacientes que resultaram positivo no teste diagnóstico. Como $P(A) = 0,0436$, então $P(A^C) = 1-0,0436 = 0,9564$. Pela sensibilidade do teste em questão, temos que a probabilidade da pessoa estar doente se seu teste teve positivo será dada por $P(A \cap B) = 0,0436 \cdot 0,8643$. Através da especificidade,a probabilidade da pessoa não estar doente se seu teste teve resultado negativo é dada por $P(A^C \cap B^C) = 0,9564 \cdot 0,9957$. De modo similar, podemos encontrar a probabilidade de $P(A^C|B)$. Logo, $P(A^C|B)$ será dado por:

$$\begin{aligned}
P(A^C|B) &= \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} \qquad (4) \\
P(A^C|B) &= \frac{P(A^C \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^C \cap B)} \\
P(A^C|B) &= \frac{0,9564 \cdot 0,0043}{0,0436 \cdot 0,8643 + 0,9564 \cdot 0,0043} \\
P(A^C|B) &= 0,09839 \\
P(A^C|B) &= 9,84\%
\end{aligned}$$

Portanto, $9,84\%$ dos piauienses que tiveram resultados positivos dos testes diagnósticos para COVID-19 por meio do CORONAVÍRUS RAPID TEST podiam não estar doentes no ano de 2020.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo sobre a Teoria de conjuntos demonstra ter uma real contribuição para formação do estudante pois estimula um pensamento lógico, dedutivo e crítico, não somente na Matemática como em outras áreas da ciência. Isso é tão veraz que vários campos da Matemática se utilizam de princípios e definições referentes de conceitos pertinentes a conjuntos a fim de evitar contradições ou paradoxos.

Tendo em vista que o objetivo geral desse trabalho é analisar a aplicação da Teoria de conjuntos nos demais campos da matemática nas demais áreas do saber científico, nota-se que foi contemplado no referencial teórico desse presente trabalho. A compreensão sobre os conjuntos numéricos abordados durante a formação do estudante de matemática só se dá quando existe uma apropriação conceitual de suas respectivas propriedades, analisadas, em sua maior parte, pela álgebra operacional desenvolvidas nestes, bem como na identificação de figuras geométricas que constam das mesmas propriedades, tornando, desse modo, mais evidente a aplicação da ideia de conjuntos

Primando pela objetividade e sucintez, este trabalho visou, especificamente, identificar os principais conceitos e propriedades relativos à Teoria de conjuntos, investigar aplicações da Teoria de conjuntos na área da Matemática e de outras ciências, apresentar as contribuições ao processo de apropriação conceitual a partir da relação de estudos e suas propriedades às diversificadas áreas do conhecimento. Portanto, o estudo de conjuntos e suas aplicações buscam proporcionar uma experiência mais enriquecedora e eficaz, estimulando o aprofundamento em conceitos matemáticos.

Espera-se que este trabalho contribua para um aprofundamento em uma área que tem servido de base sólida e confiável para a Matemática, dirimindo dúvidas, fundamentando hipóteses a serem validadas e direcionando para um avanço cada vez mais inevitável e necessário da pesquisa matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.], 2018. 11

BRASIL. *Acurácia dos testes diagnósticos registrados para a Covid-19*. [S.l.], 2020. 46

BRASIL. *Covid-19: casos e óbitos*. [S.l.], 2020. 46

LIMA, E. L. *Números e Funções*. [S.l.]: Sociedde Brasileira de Matemática, 2013. 11

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. [S.l.]: Rio de Janeiro : IMPA, 2014. 43

LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos Conjuntos*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Ao Livro técnico S.A., 1967. 18, 21, 22, 23

MINAYO, M. C. S.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. [S.l.]: Petrópolis: Vozes, 2009. 12

NOVAES, G. P. *Introdução à Teoria de Conjuntos*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2018. 13, 16, 17, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40

PIZZICHINI, M. M. M.; PATINO, C. M.; FERREIRA, J. C. Medidas de frequência: calculando prevalência e incidência na era do covid-19. *Jornal Brasileiro de Pneumologia, v. 46, p. e20200243, 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/j/jbpneu/a/yzdNrrMgb8xMwJ6sgQnrmWt/?lang=pt*, 2020. 46

VELARDE, L. G. C. *Noções de Bioestatística*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Universidade federal Fluminense, 2007. 44, 45