Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

LUCAS LIMA MENDES

TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM AMPLA NO ENSINO REGULAR

TERESINA
2024

LUCAS LIMA MENDES

TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM AMPLA NO ENSINO REGULAR

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Me. Anderson Fabian de Sousa Meneses

TERESINA
2024

M538t Mendes, Lucas Lima.
Triângulo de Pascal: uma abordagem ampla no ensino rgular /
Lucas Lima Mendes. - 2024.
53 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Piauí -
UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional, Campus Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2024.
"Orientador: Prof. Me. Anderson Fabian de Sousa Meneses".

1. Triângulo de Pascal. 2. Triângulo Aritmético. 3. Binômio de
Newton. 4. Número Binomial. I. Meneses, Anderson Fabian de Sousa .
II. Título.

CDD 512

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecário) CRB-3ª/1188

LUCAS LIMA MENDES

TRIÂNGULO DE PASCAL: UMA ABORDAGEM AMPLA NO ENSINO REGULAR

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Me. Anderson Fabian de Sousa Meneses

Data de aprovação: 16 de setembro de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br ANDERSON FABIAN DE SOUSA MENESES
Data: 06/01/2025 19:28:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Anderson Fabian de Sousa Meneses – Orientador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
gov.br NATA FIRMINO SANTANA ROCHA
Data: 17/12/2024 12:29:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha – Examinador Interno
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
gov.br JURANDIR DE OLIVEIRA LOPES
Data: 06/01/2025 19:13:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes – Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí – UFPI

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS, por escutar todas as minhas orações e apelo, por toda força, sabedoria e bençãos durante toda minha vida, foi minha luz nos momentos de angustia e alegria.

À minha esposa Alice Rocha por me dar forças quando não tinha, por me incentivar e acreditar em mim quando nem eu mesmo acreditava, com seu lindo amor me tornou uma pessoa cada vez melhor. Obrigado por aguentar esse processo custoso, sem você conseguiria nada do que tenho hoje, não tenho como mensurar o tamanho da gratidão que tenho por ter você ao meu lado, te amo muito.

À todos os meus familiares, em especial, minha mãe Regina Cláudia por todo o apoio, ensinamento e por sempre acreditar em mim, ao meu Pai Agnelo Mendes e meus irmãos por todo o apoio e ensinamentos durante minha vida, vocês moldaram o que sou hoje, se cheguei aonde cheguei foi com grande ajuda de todos, muito obrigado.

Á Luísa Rocha por toda simplicidade e alegria de uma criança que sempre me motiva a ser melhor todos os dias. Aos meus sogro José e sogra Celestina por o imenso apoio que vocês me deram durante essa jornada, sou extremamente grato.

Aos meus tios e tias, primos e primas pela grande compreensão e apoio, minha avó Ivone.

Agradeço à minha psicóloga Mariana, que, em pouco tempo, me guiou e apoiou no processo, ajudando-me a retomar o foco e concluir minha dissertação.

Aos meu grandes amigos Luiz Eduardo, Igor, Bruno por todos os momentos de alegria e sabedoria.

Aos meu colegas de turma , Afonso, Edvaldo, Vanilson, José Carlos,Gustavo, Lício Eugênio, Delon, Robson, Erasmo, Miranda, Ney, Açucena, Viana e Hislley que considero como irmãos que o PROFMAT me deu. Vocês foram essenciais nessa jornada e nossa turma mostrou o verdadeiro significado de união e resiliência.

Aos professores do PROFMAT/UESPI, por cada ensinamento tanto matemático quanto pessoal, especialmente, aos Professores Afonso, Pedro Júnior, Arnaldo e Val, tenho vocês como referencia. Ao Meu orientador Anderson Fabian, que me direcionou com seus conhecimentos e sempre esteve disponível para mim orientar. Vou levar como um grande amigo.

“A Matemática não mente.
Mente quem faz mau uso dela.”

Albert Einstein

RESUMO

Esta dissertação tem como intuito primordial apresentar novas perspectivas sobre o Triângulo de Pascal no contexto escolar. Trata-se de um tema complexo e pouco explorado neste nível de ensino, que traz consigo possibilidades de aplicação e curiosidades instigantes para despertar o interesse dos estudantes, potencializando processos de ensino e aprendizagem mais eficazes. Através de diferentes abordagens, é viável motivar e enriquecer o conteúdo tradicional da Matemática na educação básica, e trabalhar com situações de caráter interdisciplinar. O estudo traz um breve histórico sobre a origem do Triângulo e sua utilização ao longo do tempo por diversos matemáticos até Pascal. Além disso, são apresentados e discutidos resultados matemáticos obtidos a partir da análise dos elementos desse Triângulo. Por fim, uma série de abordagens que relacionam o Triângulo a diferentes campos da Matemática são propostas, visando auxiliar os professores da educação básica na elaboração de atividades para suas aulas. Questões que envolvem conceitos matemáticos mais avançados também são abordadas, permitindo que cada educador escolha e adapte aquelas que forem mais adequadas à sua realidade. Com isso, busca-se proporcionar aos docentes da escola básica mais um recurso para a criação de propostas pedagógicas inovadoras que contribuam para o avanço da educação básica de forma envolvente e significativa.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal; Triângulo Aritmético; Binômio de Newton; Número Binomial.

ABSTRACT

This dissertation aims to present new perspectives on Pascal's Triangle in the school context. It is a complex and rarely explored topic at this educational level, which brings with it possibilities for application and intriguing curiosities to spark students' interest, thereby enhancing more effective teaching and learning processes. Through different approaches, it is possible to motivate and enrich the traditional content of Mathematics in basic education and work with interdisciplinary situations. The study provides a brief history of the origin of the Triangle and its use over time by various mathematicians up to Pascal. Additionally, mathematical results obtained from the analysis of the elements of this Triangle are presented and discussed. Finally, a series of approaches that relate the Triangle to different fields of Mathematics are proposed, aiming to assist basic education teachers in preparing activities for their classes. Issues involving more advanced mathematical concepts are also addressed, allowing each educator to choose and adapt those that are most suitable for their reality. In this way, the goal is to provide basic school teachers with an additional resource for creating innovative pedagogical proposals that contribute to the advancement of basic education in an engaging and meaningful way.

Keywords: Pascal's Triangle; Arithmetic Triangle; Newton's Binomial; Binomial Number.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No contexto do ensino básico, o Triângulo Aritmético, popularmente conhecido como Triângulo de Pascal, muitas vezes não recebe a devida atenção. Comumente, é empregado apenas como uma abordagem inicial para o estudo do Binômio de Newton ou como um adendo ao conceito de combinações simples. Neste estudo, analisa-se de que maneira o Triângulo de Pascal pode se tornar uma ferramenta relevante no Ensino Básico, com o intuito de explorar suas múltiplas aplicações e motivar os educadores a utilizá-lo não somente como um meio de ensino, mas também como um recurso cativante para estimular o interesse dos alunos pela matemática.

Neste trabalho vamos apresentar a trajetória do contexto histórico, em que o Triângulo de Pascal está inserido. Em seguida, explicaremos as notações utilizadas para que haja uma clara compreensão dos conteúdos básicos para o melhor entendimento deste trabalho. Explicamos o que é o Triangulo de Pascal e apresentamos algumas das propriedades e teorema que aparecem nas linhas, colunas e diagonais que aparecem no triângulo de Pascal. Vamos mais fundo mostrando aplicações na álgebra, geometria, aritmética e principalmente na análise combinatória. Apresentaremos propostas interessantes envolvendo o uso do triângulo aritmético (Pascal) para que possamos motivar e aprofundar em sala de aula. Cada seção do trabalho foi pensada o que poderia ser feito da melhor maneira para transmitir o conhecimento tradicional de uma forma diferente, desde cada teorema com um esquema algébrico, um esquema visual e aplicações.

Iniciaremos, no primeiro capítulo, com o estudo da história do surgimento do Triângulo Aritmético até o Triângulo de Pascal como conhecemos hoje. O capítulo mostra que desde os primeiros registos que tem do triângulo aritmético como o matemático indiano Pingala que viveu por volta de 200 a.C, o que nos leva a afirmar que esse tema já era objeto de estudo na Índia dois mil anos antes de Pascal trabalhar no Triângulo Aritmético. Renomados nomes como Yang Hui (1238-1298) que elaborou que desenvolveu dois livros focados nos estudos do triângulo aritmético e suas aplicações por meio dos seus cálculos. Na Europa nomes como Apianus (1495-1551) cita em 1527 o Triângulo Aritmético em uma das suas obras, mas antes de Pascal Michel Stifel (1487-1567) e Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1559) tiveram grandes importâncias nos estudos do Triângulo Aritmético, Stifel em estudos das propriedades do triângulo em sua obra *”Arithmetrica Integra”* de 1544, já Tartaglia em sua obra *"General Trattato di numeri et misure"* de 1556 reivindicou a invenção do Triângulo Aritmético.

Na França em no século XXVII um matemático chamado Blaise Pascal(1623-1662) investigou e dedicou-se a fundo do Triângulo Aritmético e resultou em sua obra *"Traité di Triangle Arithmétique"* publicado em 1665. Nela Pascal construiu cada número do triângulo colocando-os em uma célula respeitando uma regra geral. Cada célula é igual ao número da célula que a precede na sua posição perpendicular mais a célula que a precede na sua posição paralela, depois da publicação de sua obra após sua morte o triângulo Aritmético ficou conhecido em livros didáticos atuais como Triângulo de Pascal. Na sequência, o trabalho apresenta a matemática por trás do Triângulo de Pascal, começando com os conceitos de números fatoriais, combinação e a relação com o Binômio de Newton.

No quarto capítulo, são apresentadas as propriedades do Triângulo de Pascal, com demonstrações e esquemas ilustrativos, abordando desde as propriedades mais simples até as mais interessantes, como a relação com a sequência de Fibonacci.

Posteriormente, o trabalho explora novas aplicações para temas do Ensino Básico e apresenta uma proposta interessante que visa mostrar como o Triângulo de Pascal pode facilitar a compreensão de assuntos e cálculos, além de instigar o raciocínio lógico por meio das ferramentas apresentadas.

2 TRIÂNGULO DE PASCAL: CONSTRUÇÃO HISTÓRICA

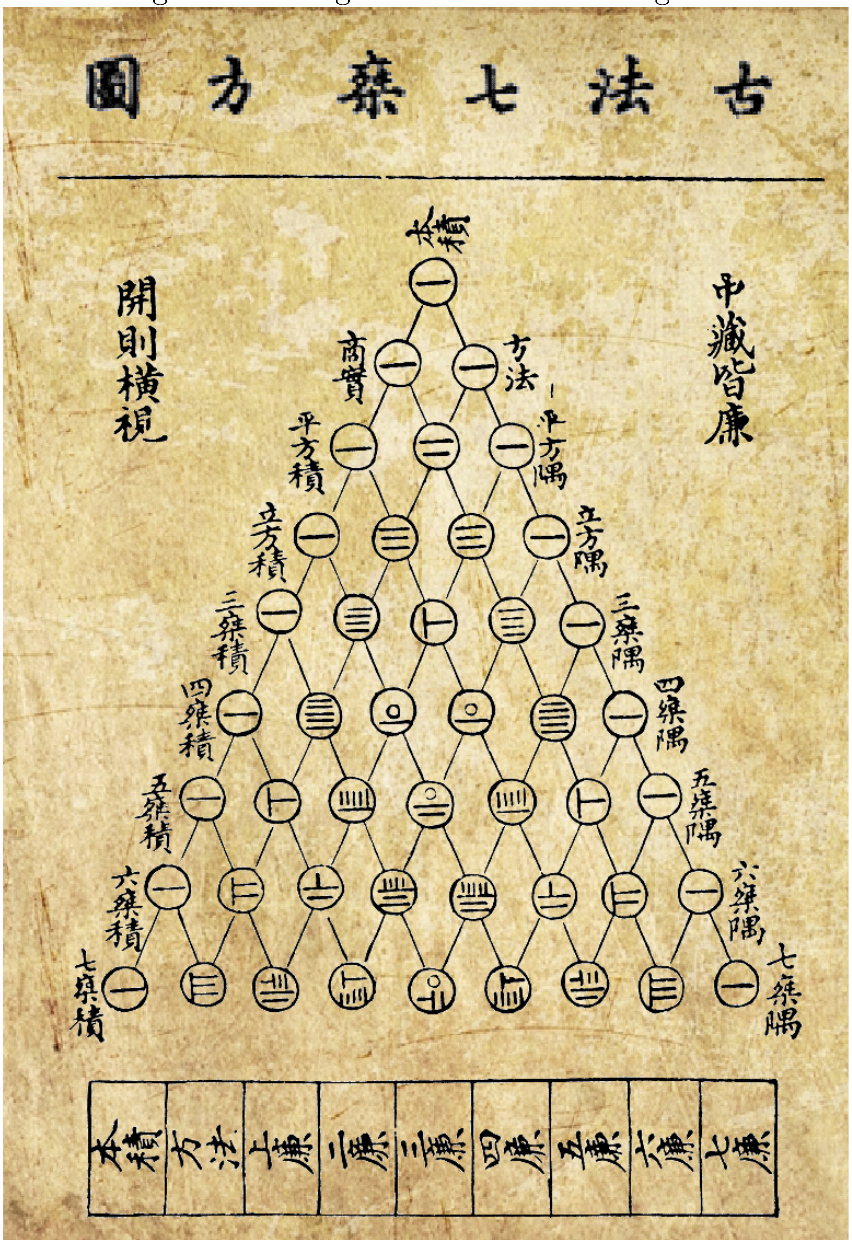
O Triângulo de Pascal, também reconhecido como triângulo aritmético, recebeu diversas denominações ao longo do tempo, incluindo Triângulo Aritmético, Triângulo de Yang Hui, Triângulo Combinatório, Triângulo de Tartaglia e Triângulo de Pascal. Essa variedade de nomes se deve ao fato de que vários matemáticos ao redor do mundo o estudaram e contribuíram para o seu desenvolvimento. De acordo com (SILVA, 2015), os registros mais antigos desse estudo remontam ao matemático indiano Pingala, que viveu aproximadamente em 200 a.C. Isso indica que o triângulo já era conhecido e explorado muito antes de Blaise Pascal, o matemático que lhe dá nome hoje.
Para (AFFONSO, 2014) os indianos estudavam vários temas matemáticos, dentre eles, ressaltava-se o estudo de combinatória, assunto este que teve suas técnicas justapostas a vários outros estudos. Nesse contexto, afloram os primeiros livros com técnicas combinatórias, mas, como já descrito acima, é só com o erudito Pingala (200 a.C.), em sua obra "Chandra Sutra"que surge, pela primeira vez, o Triângulo Aritmético.

Figura 1: Primeiro Registro do Triângulo Aritmético

Fonte: (AFFONSO, 2014)

Ainda sobre as origens do triangulo de pascal, de acordo com AFFONSO (2014), o aparecimento do Triângulo de Pascal na China, se deu através do estudo das aproximações das raízes quadradas, cúbicas e as demais, ultilizavam distribuição binomial mas, para achar as raízes não se precisava utilizar o Triangulo aritmético. Somente no século XIII que o famoso chinês Yang Hui (1238-1298), que elaborou dois livros abordando os estudos do triângulo aritmético e suas aplicações. Dessa forma o triângulo de pascal também ficou conhecido como triângulo de Yang Hui por meio dos seus cálculos dos coeficientes binominais, como podemos analisar na Figura 2.

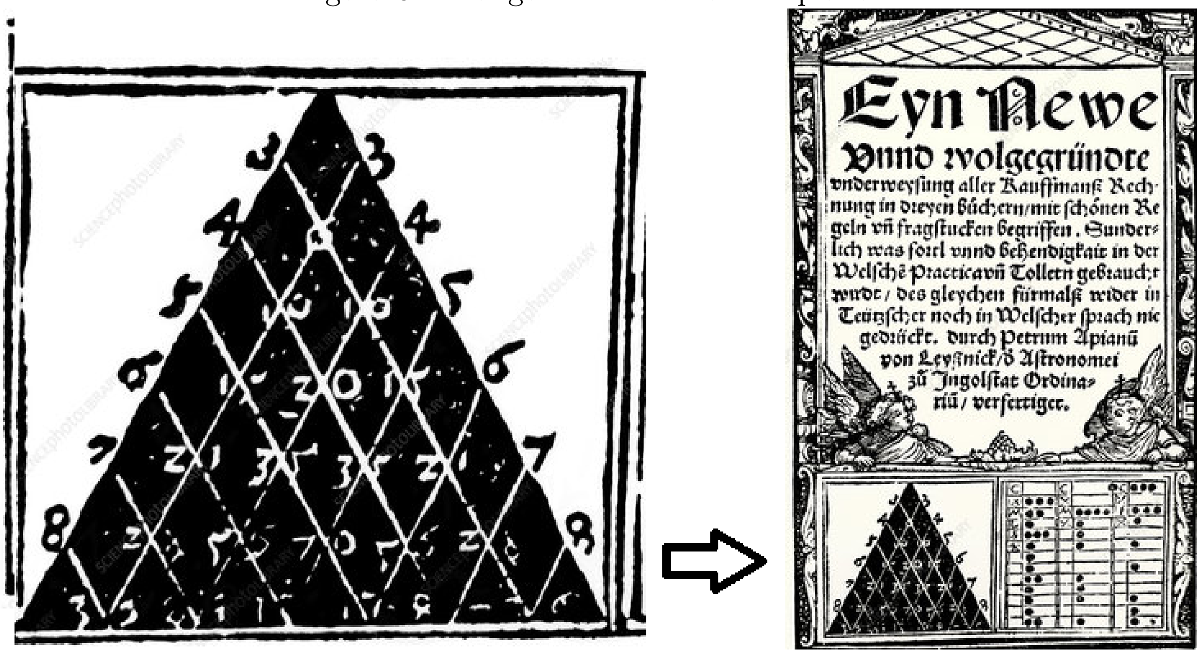
Figura 2: Triângulo Aritmético de Yang Hui.



Fonte: (AFFONSO, 2014)

Agora na região da Europa, segundo Rosadas (2016, p.18), “a era mais próxima de Pascal, o matemático alemão Apianus (1495-1551) redigiu em 1527 o livro denominado "Kauffmanns Rechnung", que tratava de uma obra específica em aritmética comercial. Nele o Triângulo aritmético aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas. A figura 3 mostra como o triângulo aritmético estava agregado nesse livro, ela foi a primeira impressão do "Kauffmanns Rechnung", na Europa.

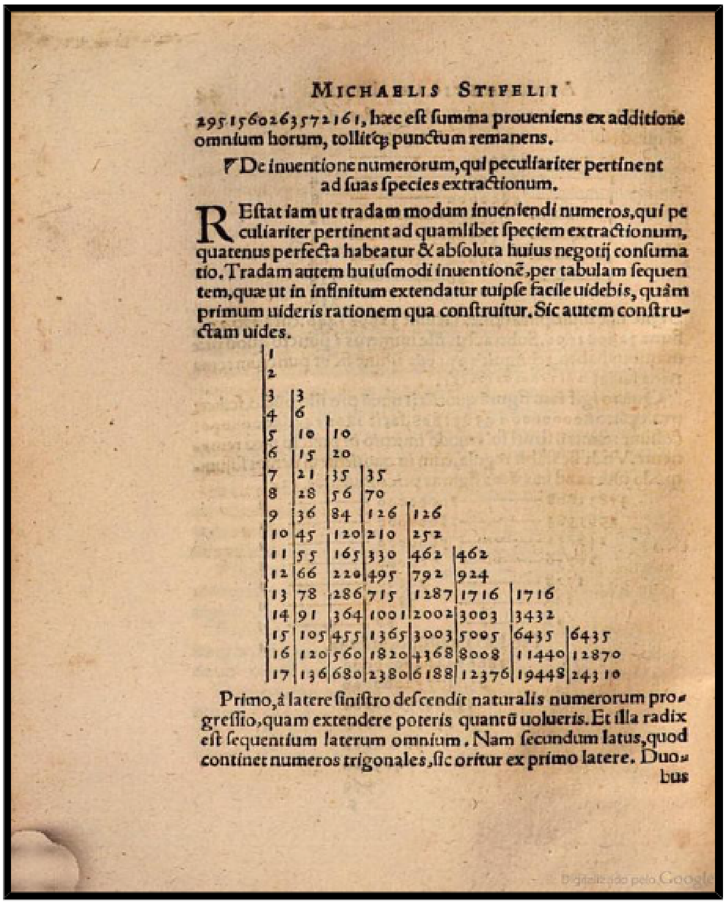
Figura 3: Triângulo Aritmética de Apianus.



Fonte: (AFFONSO, 2014)

Mas o pioneiro na divulgação do triângulo Aritmético na Europa ocorre com o matemático Michel Stifel (1487-1567), que segundo (AFFONSO, 2014) que estudou algumas propriedades do triângulo e as discutiu em sua obra Arithmetrica Integra, de 1544. Em 1553, Michael Stifel publicou uma nova edição da obra de intitulada *Die Coss* . Nessa edição revisada, Stifel fez várias adições e complementos ao conteúdo original, o que resultou em uma obra com mais do que o dobro de páginas da edição anterior.

Figura 4: Triângulo Aritmético de Stifel.



MICHAELIS STIFELII

295156026357216 1, hæc eſt ſumma prouenienſ ex additione omnium horum, tollitq; punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad ſuas ſpecies extractionum.

REſtat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & abſoluta huius negotij conſummatio. Tradam autem huiuſmodi inuentionẽ, per tabulam ſequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipſe facile uidebis, quàm primum uideris rationem qua conſtruitur. Sic autem conſtructam uides.

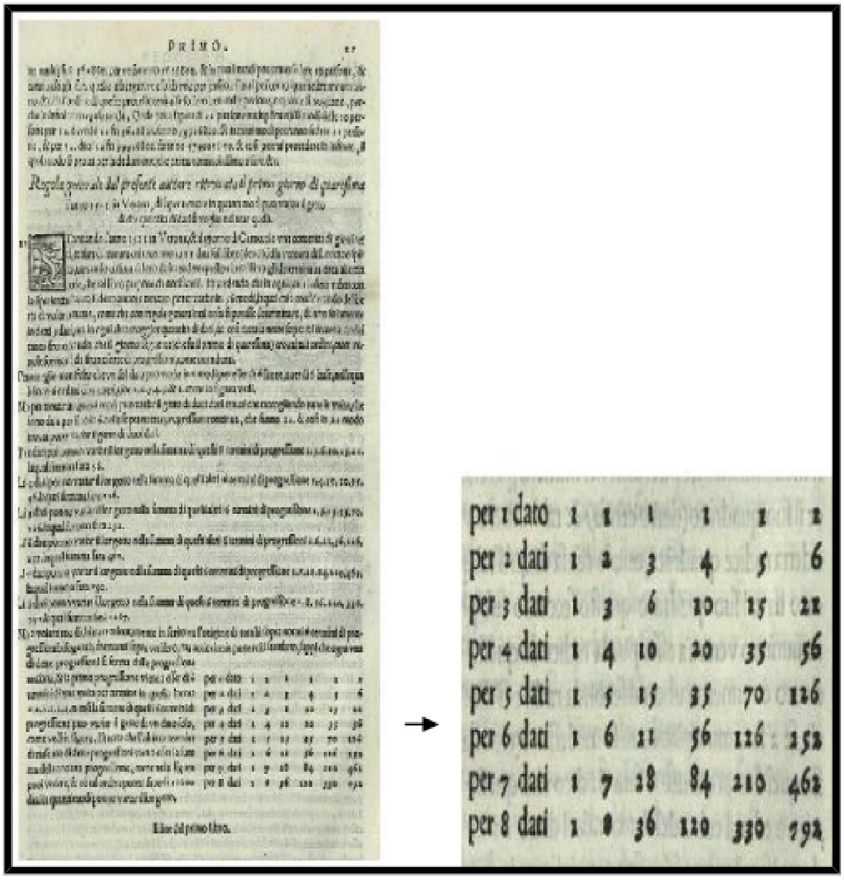
1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere ſiniſtro deſcendit naturalis numerorum progreſſio, quam extendere poteris quantũ uolueris. Et illa radix eſt ſequentium laterum omnium. Nam ſecundum latus, quod continet numeros trigonales, ſic oritur ex primo latere. Duobus

Fonte: (ROSADAS, 2016)

Na Itália, um dos matemáticos mais influentes a se dedicar ao estudo e à divulgação do Triângulo foi Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1559). Ele apresentou suas descobertas em sua obra "General Trattato di numeri et misure", publicada em 1556. Tartaglia reivindicou a invenção do Triângulo Aritmético, o que levou alguns países europeus a chamarem o Triângulo Aritmético de "Triângulo de Tartaglia".

Figura 5: Triângulo Aritmético de Tartaglia.



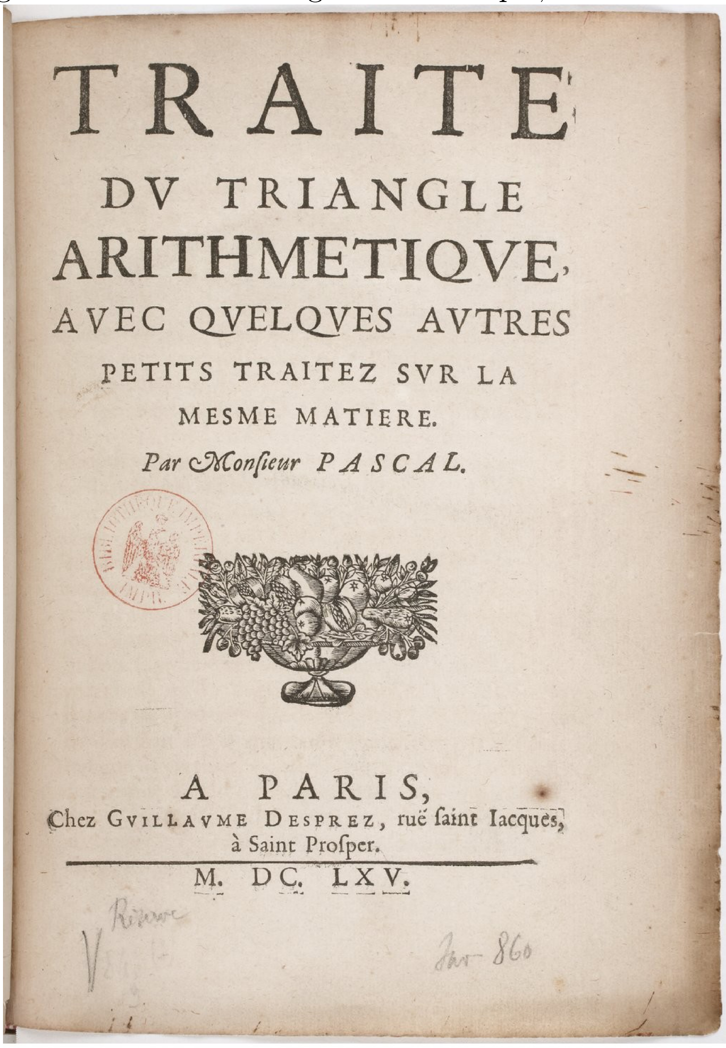
per 1 dato	1	1	1	1	1	1
per 2 dati	1	2	3	4	5	6
per 3 dati	1	3	6	10	15	21
per 4 dati	1	4	10	20	35	56
per 5 dati	1	5	15	35	70	126
per 6 dati	1	6	21	56	126	252
per 7 dati	1	7	28	84	210	462
per 8 dati	1	8	36	120	330	792

Fonte:(AFFONSO, 2014)

O triângulo de Pascal é conhecido por diferentes nomes ao redor do mundo, refletindo a contribuição de diversos matemáticos de várias culturas que estudaram suas propriedades e aplicações. Em outras palavras, esse triângulo é um exemplo de como o conhecimento matemático transcende fronteiras, recebendo nomes distintos em diferentes continentes em homenagem aos matemáticos que exploraram suas características.

Na França o matemático mais famoso a investigar profundamente o Triângulo Aritmético foi Blaise Pascal (1623-1662). Pascal empenhou-se veementemente em conhecer o Triângulo Aritmético e suas propriedades. O fruto desse empenho resultou em sua obra "Traité di Triangle Arithmétique", publicada após sua morte em 1665.

Figura 6: Traité di Triangle Arithmétique, obra de Pascal.



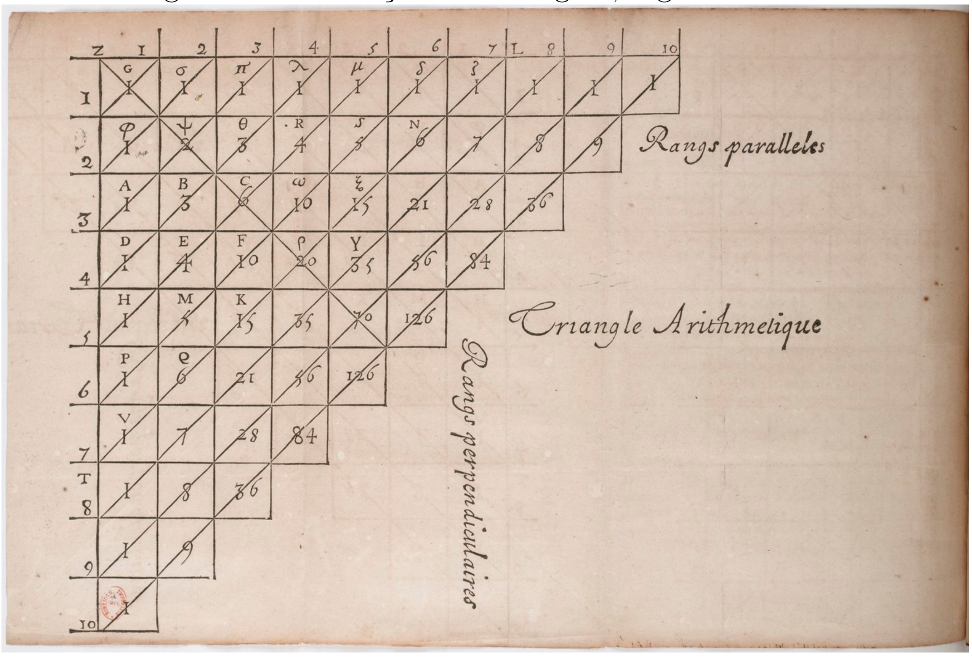
TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE,
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, ruë ſaint Iacques,
à Saint Proſper.
M. DC. LXV.

Fonte::https://gallica.bnf.fr/ark:
/12148/btv1b86262012/f1.item.r=Pascal,20Blaise.langPT

Segundo (AFFONSO, 2014) ”construção do triângulo é feita colocando cada número em uma célula que obedece a uma regra geral, necessitando-se apenas a escolha do primeiro número ou número gerador que no caso do Triângulo Aritmético é o número 1. O número de cada célula é igual ao número da célula que a precede na sua posição perpendicular mais a célula que a precede na sua posição paralela. Portanto, a célula F é obtido pela soma da célula C mais a célula E, e assim sucessivamente (AFFONSO, 2014 apud PULSKAMP, 2009, p. 3).

Figura 7: Construção do Triângulo, segundo Pascal.



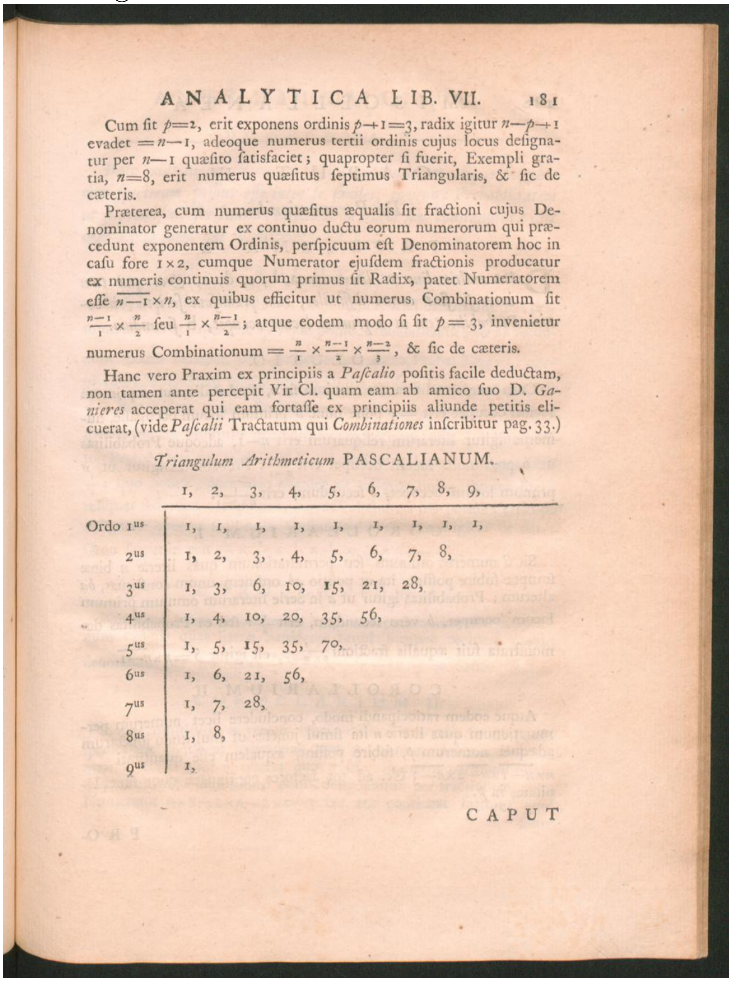
Fonte::https://gallica.bnf.fr/ark:
/12148/btv1b86262012/f1.item.r=Pascal,20Blaise.langPT

Na obra acima, Pascal investigou várias propriedades a fundo do Triângulo de Aritmético:

> Pascal propôs um novo modelo para o triângulo, e estudou as suas propriedades mais a fundo que seus antecessores, provando várias delas. A consagração da denominação atual, Triângulo de Pascal ocorreu pelo fato de que em 1739, De Moivre (Abrahan de Moivre, 1667-1754) publicou um trabalho que alcançou grande repercussão na época, em que usou a denominação "triangulum, arithmeticum pascalianum" para o Triângulo Aritmético. (BLOGUEIRO, 2010)

A partir dessa obra o Triângulo Aritmético ficou conhecido como "Triângulo de Pascal" denominação que vamos utilizar como sinônimo de Triângulo Aritmético devido ao uso tradicional em livros didáticos.

Figura 8: "Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM"de De Moivre.



ANALYTICA LIB. VII. 181

Cum ſit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus deſignatur per $n-1$ quæſito ſatisfaciet; quapropter ſi fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæſitus ſeptimus Triangularis, & ſic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæſitus æqualis ſit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perſpicuum eſt Denominatorem hoc in caſu fore 1×2, cumque Numerator ejuſdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus ſit Radix, patet Numeratorem eſſe $\overline{n-1} \times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum ſit $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ ſeu $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$; atque eodem modo ſi ſit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, & ſic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Paſcalio* poſitis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico ſuo D. *Ganieres* acceperat qui eam fortaſſe ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Paſcalii* Tractatum qui *Combinationes* inſcribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Ordo 1us	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2us	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
3us	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,		
4us	1,	4,	10,	20,	35,	56,			
5us	1,	5,	15,	35,	70,				
6us	1,	6,	21,	56,					
7us	1,	7,	28,						
8us	1,	8,							
9us	1,								

CAPUT

Fonte::https://gallica.bnf.fr/ark: /12148/btv1b86262012/f1.item.r=Pascal,20Blaise.langPT

Pascal, que sempre teve uma saúde delicada, adoeceu gravemente em 1659 e faleceu em 19 de agosto de 1662, apenas dois meses após completar 39 anos. Ele foi sepultado na Igreja de Saint-Étienne-du-Mont, na Ilha de França, em Paris. Embora a tuberculose seja frequentemente apontada como a causa de sua morte, uma necropsia revelou sérios problemas no estômago e em partes do abdômen, além de danos significativos em seu cérebro. Isso sugere que ele possa ter sofrido de câncer de estômago com metástase, que se espalhou para o cérebro.

3 A MATEMÁTICA DO TRIÂNGULO DE PASCAL

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos matemáticos importantes para o entendimento do Triângulo de Pascal.

3.1 Fatorial

O fatorial de um número natural é o resultado do produto desse número por todos os seus antecessores até chegar à unidade. Matematicamente, o fatorial de um número n é representado como $n!$. Em outras palavras, podemos dizer que o fatorial de n é igual ao produto de todos os números inteiros positivos de 1 até n. A notação de fatorial foi criada e utilizada pela primeira vez por Christian Kramp (1760-1826) em seu livro *"Élements d'arithmétique universelle"* de 1808. Ele diz:

> "Eu uso a notação $n!$ para designar o produto de números decrescentes a partir de n a unidade, ou seja, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. O uso constante de análise combinatória, na maioria das minhas provas, fez esta notação necessária."

Defina-se $n!$ como:

$$n! = \begin{cases} 1, \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Exemplo 3.1. Quantos são os anagramas da palavra KARMP?

Solução. Cada anagrama de KARMP é nada mais que uma ordenação das letras K,A,R,M,P. Onde temos 5 possibilidades para escolher a primeira letra, 4 possibilidades para a segunda, 3 para a terceira letra até a ultima que resta uma então o total de anagramas é $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ anagramas.

3.2 Combinação

Seja A um conjunto com 5 objetos $A = \{a, b, c, d, e\}$. De quantos modos podemos escolher 3 objetos do conjunto A distintos entre 5 objetos distintos dados?

Podemos formar os seguintes subconjuntos de A com 3 objetos:
$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$.
Assim, podemos formar 10 subconjuntos de A com 3 letras.

Analisemos esta resposta: a primeira escolha do elemento da combinação pode ser feita de 5 modos, a segunda escolha pode ser feita de 4 modos (não podendo repetir o elemento da primeira escolha), a terceira escolha de 3 modos. Mas observe esses casos: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, etc. Essas combinações são idênticas e foram contadas como se fossem diferentes. Assim, como o total das combinações foram 60 e cada combinação os elementos podem ser escritos em $3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes com repetição. Logo, a resposta é:

$$\frac{60}{6} = 10 = \frac{5!}{3!(5-3)!}.$$

No caso geral temos:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}; \quad 0 \leq p \leq n.$$

Como discutido por (CARVALHO; MORGADO, 2013) As notações C_n^p e $C_{n,p}$ para denotar o número de combinações simples de n elementos tomando p a p são mais comuns em livros para o Ensino Médio no Brasil. Em textos mais avançados, a denotação mais usual é $\binom{n}{p}$.

Exemplo 3.2. Quantas saladas contendo exatamente 5 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

Basta escolher 5 frutas das 10 que temos dispostas, assim:

$$C_{10}^5 = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252 \text{ modos.}$$

3.3 {O Binômio de Newton

O binômio de Newton ganhou esse nome pois Issac Newton (1646-1727) mostrou como calcular de forma direta $(1+x)^n$ com n fracionário, sem precisar calcular o termo anterior. Segundo (BOYER, 1996, Boyer, 1996) "O teorema binomial nos parece tão evidente agora que é difícil ver por que a sua descoberta tardou tanto." e

> "Descoberto em 1664 ou 1665, o teorema binomial foi descrito em duas cartas de 1676, de Newton a Henry Oldenburg (1615?- 1677), secretário da Royal Society, e publicado por Wallis (dando crédito a Newton) na Algebra de Wallis, de 1685. A forma de expressão dada por Newton (e Wallis) parece desajeitada ao leitor moderno, mas indica que a descoberta não foi uma simples substituição de potência inteira por fracionária; foi resultado de muitas tentativas e erros da parte de Newton relativos a divisões e radicais envolvendo quantidades algébricas."

Como citado em (AFFONSO, 2014), que se refere ao trabalho de Polcino Miles, "A relação entre o Teorema do Binômio (que, na verdade, não é de Newton) e o Triângulo de Pascal é muito anterior a ambos". O desenvolvimento do binômio está entre os problemas mais antigos da Analise Combinatória. Segundo (MORGADO et al., 2020) "O caso $n = 2$

do desenvolvimento de $(n+1)^n$ já pode ser encontrado no *Elementos de Euclides*, por volta de 300a. C." Pascal (1623 - 1662) publicou um tratado por volta de 1654 mostra que para encontrar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$. Jaime Bernoulli (1654-1705) usou a interpretação de Pascal em seu *Ars Conjectandi*, de 1713 para mostrar que:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

O teorema a seguir foi retirado do livro Análise Combinatória e Probabilidade de (MORGADO et al., 2020).

Teorema 3.3. Binômio de Newton: Sendo x e a números reais e n um número inteiro positivo, temos:

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x^1 + \binom{n}{n} a^n x^0.\end{aligned}$$

Demonstração. Temos

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)(x+a)(x+a)\cdots(x+a)(x+a)}_{n-vezes}$$

Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um x ou um a e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k, $0 \leq k \leq n$, se escolhermos a em k dos parênteses, x será escolhido em $n-k$ maneiras dos parênteses e o produto será igual a $a^k x^{n-k}$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. Então $(x+a)^n$ é uma soma onde há, para cada $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\binom{n}{k}$ parcelas iguais a $a^k x^{n-k}$, isto é,

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k}.$$

□

[EXEMPLO 6.19 MA12 PROFMAT] Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^7$$

Solução. O termo genérico do desenvolvimento é:

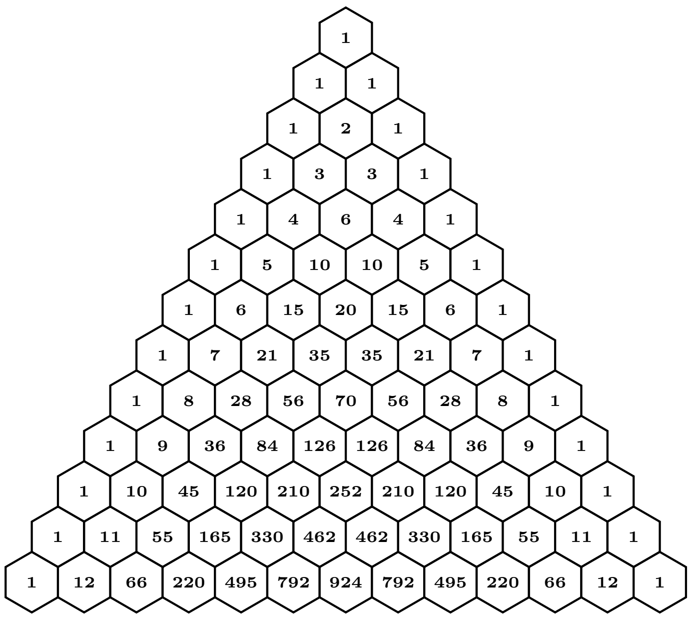
$$\binom{7}{p} \left(\frac{-1}{x}\right)^p (x^4)^{7-p} = \binom{7}{p} (-1)^p x^{28-5p}$$

Observe que o termo x^3 é obtido se $28 - 5p = 3$, ou seja, se $p = 5$. Assim o termo procurado é $\binom{7}{5}(-1)^5 x^3 = -21x^3$. Portanto o coeficiente é -21.

4 ESTUDOS DAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL

O triângulo de Pascal é uma estrutura matemática fascinante composta por coeficientes binomiais, também conhecidos como números binomiais.
Esses coeficientes são representados por dois números naturais n e p, onde $n \geq p$, e são denotados como $\binom{n}{p}$. No contexto do triângulo de Pascal, n representa o numerador, indicando a linha em que o coeficiente binomial está localizado, e p representa o denominador, indicando a coluna.
Em termos simples, cada entrada no triângulo de Pascal é calculada combinando o valor da linha n com o valor da coluna p usando a fórmula $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, onde ! denota o fatorial.

Figura 9: Triângulo de Pascal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após construir e apresentar o Triângulo de pascal e os seus Valores e dos Coeficientes Binomiais, é importante destacar algumas características observadas desses triângulos. Vamos agora discutir algumas das propriedades notáveis da construção do Triângulo dos Coeficientes Binomiais.

4.1 Relação de Stifel

O teorema a seguir foi retirado do livro Matemática Discreta coleção PROFMAT MA12 de (CARVALHO; MORGADO, 2013).

Teorema 4.1 (Relação de Stifel). Segundo(CARVALHO; MORGADO, 2013) Somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela. Em outras palavas a soma de dois números binominais consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo do segundo número binominal. Em relação a posição vale o triângulo da tabela 9.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

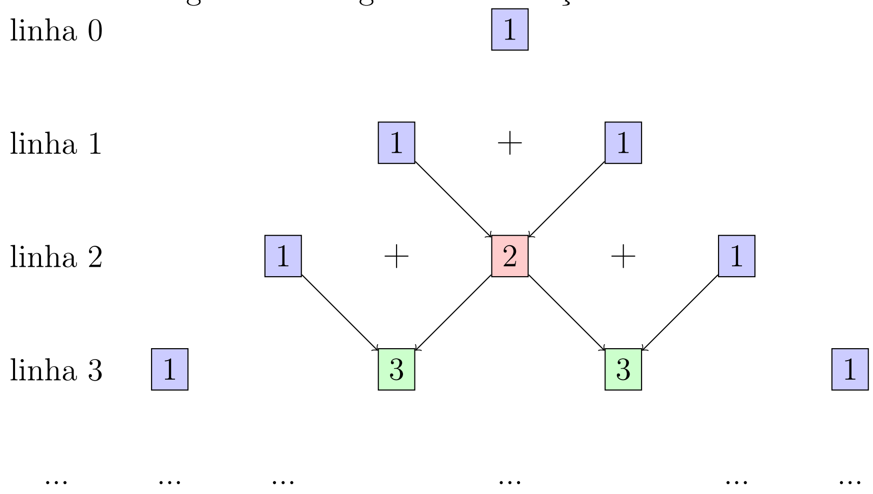
Demonstração:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{(n-p)!(p)!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-p)!(n-p-1)!(p)!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-p)(n-p-1)!(p)!} + \frac{(p+1)\cdot n! + (n-p)\cdot n!}{(n-p-1)!(p+1)!} \\
&= \frac{n![(p+1)+(n-p)]}{(n-p)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(n-p-1)!(p+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-p-1)!(p+1)!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}$$

□

Esquema Demonstrativo:

Figura 10: Diagrama da Relação de Stifel



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Relação das Combinações Complementares

O teorema a seguir foi retirado do livro Matemática Discreta coleção PROFMAT MA12 de (CARVALHO; MORGADO, 2013).

Teorema 4.2. ***Combinações Complementares*** segundo (CARVALHO; MORGADO, 2013, MORGADO,2013) em cada linha, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Demonstração: Temos que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

e que

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!}\\ &= \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

□

Esquema Demonstrativo:

Figura 11: Combinações Complementares

linha 0	1						
linha 1	1	1					
linha 2	1	2	1				
linha 3	1	3	3	1			
linha 4	1	4	6	4	1		
linha 5	1	5	10	10	5	1	
linha 6	1	6	15	20	15	6	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 Teorema das Linhas

O teorema a seguir foi retirado do livro Matemática Discreta coleção PROFMAT MA12 de (CARVALHO; MORGADO, 2013).

Teorema 4.3. Teorema das Linhas Trata-se que a soma de todos os elementos de uma determinada linha n resulta em uma potência 2^n, com n correspondente ao número de linha. De modo geral temos da seguinte forma:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração: Vamos utilizar o Princípio de Indução, temos:

(i) Para $n = 0$ a igualdade é verdadeira ,pois

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!} = 1 = 2^0.$$

Suponhamos agora para $n = k$, temos:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Vamos mostrar a validade para $n = k + 1$, ou seja:

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Pela Relação de Stifel, temos que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Assim para $n = k$ e $p \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$:

$$p = 1; \qquad \binom{k+1}{1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}$$

$$p = 2; \qquad \binom{k+1}{2} = \binom{k}{1} + \binom{k}{2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$p = n = k; \qquad \binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1} \qquad (1)$$

Pela Hipótese de indução, temos:

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{p} + \binom{k}{p} = 2^k + 2^k = 2^{k+1} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$\binom{k+1}{0} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] + \cdots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k+1}\right] + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}$$

Como

$$\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0} \quad e \quad \binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$$

temos que:

$$\binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=2^{k+1}.$$

Portanto pelo princípio de Indução, o resultado é valido para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esquema Demonstrativo:

Figura 12: Teoremas das Linhas

Linha 0: $\boxed{1}$ $\longrightarrow$ $1 = 2^0$

Linha 1: $\boxed{1}\ \boxed{1}$ $\longrightarrow$ $1+1 = 2^1$

Linha 2: $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$ $\longrightarrow$ $1+2+1 = 2^2$

Linha 3: $\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{1}$ $\longrightarrow$ $1+3+3+1 = 2^3$

Linha 4: $\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$ $\longrightarrow$ $1+4+6+4+1 = 2^4$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Linha n: $\boxed{1}\ \boxed{\text{n}} \cdots \boxed{\text{n}}\ \boxed{1}$ $\longrightarrow$ $1+n+\cdots+n+1 = 2^n$

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4 Teorema das Colunas

O teorema a seguir foi retirado do livro Análise Combinatória e Probabilidade de (MORGADO et al., 2020).

Teorema 4.4. ***Teorema das Colunas*** Trata-se que a soma dos elementos de qualquer coluna começando do 1° elemento até um elemento qualquer resulta no número da próxima linha e próxima coluna com relação a última parcela da soma.

Para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

Demonstração: Vamos utilizar o Princípio de Indução sobre p, fixando $n \in \mathbb{N}$.
(i) Para p=0 temos que a igualdade é válida, de fato:

$$\binom{n}{n} = \binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+0+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

Suponhamos válido para $p = k$, ou seja:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Queremos mostrar que é valido para $p = k + 1$:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} + \binom{n+k+1}{n} =$$

$$= \left[\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n}\right] + \binom{n+k+1}{n}$$

E por hipótese, temos:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

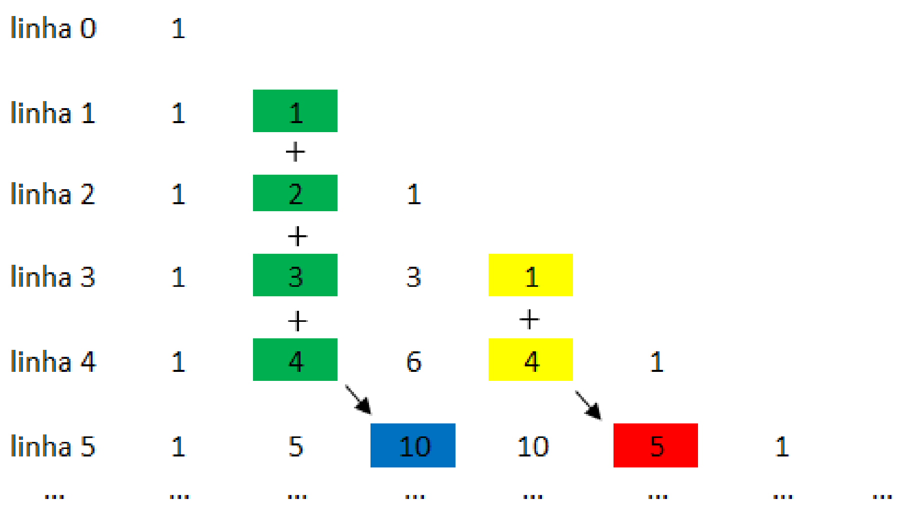
Dessa forma pela Relação de Stifel temos que:

$$\binom{n+k+1}{n+1} + \binom{n+k+1}{n+1}. = \binom{n+k+2}{n+1}.$$

$\square$.

Esquema Demonstrativo:

Figura 13: Teorema das Colunas



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5 Teorema das Diagonais

O teorema a seguir foi retirado do livro Análise Combinatória e Probabilidade de (MORGADO et al., 2020).

Teorema 4.5. ***Teorema das Diagonais*** A soma dos elementos situados na mesma diagonal, começando do elemento na 1ª coluna até qualquer elemento, é igual ao elemento imediatamente abaixo desse último elemento na diagonal.

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Demonstração: Pela propriedade dos binominais complementares temos que:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n};\quad \binom{n+1}{1}=\binom{n+1}{n};\quad \binom{n+2}{2}=\binom{n+2}{n};\quad \ldots\quad ;\binom{n+p}{p}=\binom{n+p}{n}.$$

Assim

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}.$$

Pelo Teorema das Colunas, sabemos quer

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

E, pelo teorema dos binominais complementares

$$\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}.$$

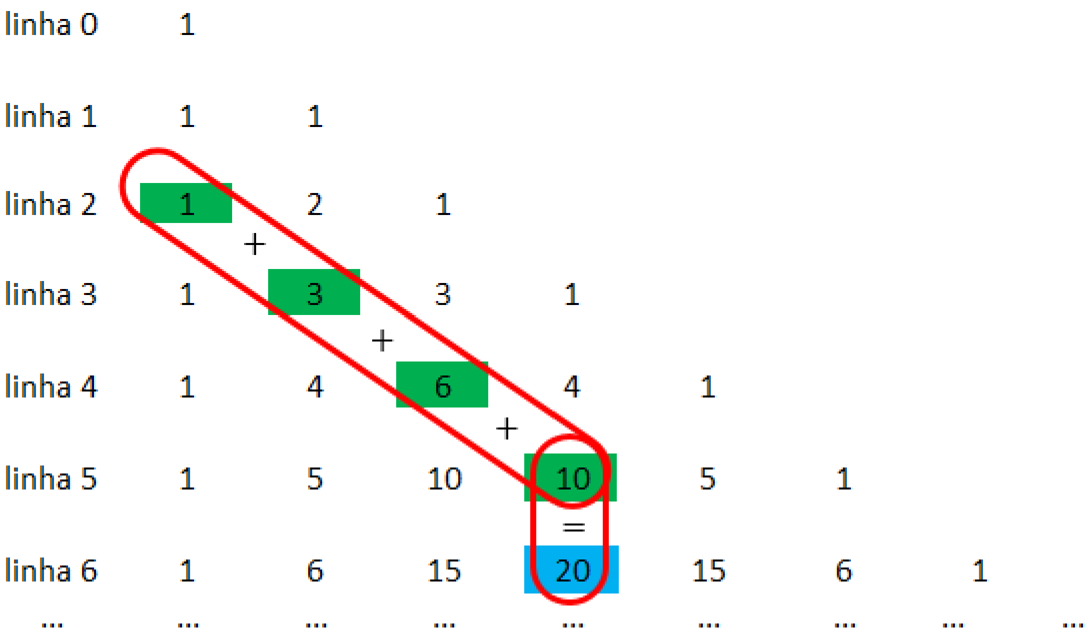
Concluimos que

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}.$$

□

Esquema Demonstrativo

Figura 14: Teorema das Diagonais



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.6 Sequência de Fibonacci

Teorema 4.6. ***Sequência de Fibonacci*** Segundo (MORGADO et al., 2020), o número de Fibonacci F_n é definido como a soma dos elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal.

Demonstração: Temos

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} + F_n &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots \\
&= \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \ldots \\
&= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots \\
&= F_{n+2}.
\end{aligned}
$$

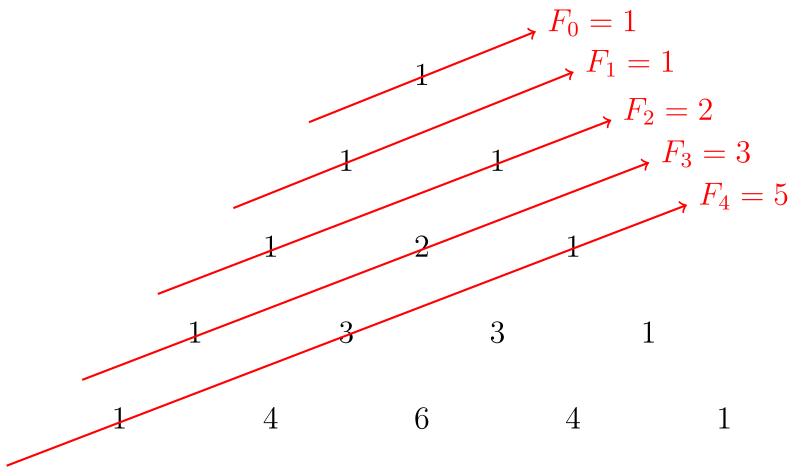
Portanto, mostramos que

$$F_{n+1} + F_n = F_{n+2}.$$

$\square$

Esquema Demonstrativo:

Figura 15: Sequência de Fibonacci



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 UMA ABORDAGEM MAIS AMPLA DO TRIÂNGULO DE PASCAL NO ENSINO REGULAR

Vamos abordar uma proposta didática para o ensino do Triângulo de Pascal Ensino Regular, sabemos que nos livros de matemática para o Ensino Regular, o Triângulo de Pascal é geralmente introduzido no final do capítulo de análise combinatória, sendo apenas brevemente abordado. Estamos sugerindo uma abordagem mais abrangente, conectando o triângulo de Pascal a outros conteúdos. Isso visa enriquecer a aprendizagem dos alunos e oferecer aos professores uma maneira inovadora de ensinar o tema.
De acordo com os Parâmetros Curricular Nacionais (PCN) " É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas" (BRASIL, 2002, BRASIL, pag. 40; 41).
Os métodos para explorar o triângulo de Pascal são o estudo de seu formação e os padrões interessantes que ele mostra. O triângulo de Pascal apresenta uma grande variedade de conceitos matemáticos que podem ser considerados através dela, tais como combinações, coeficientes binomiais, muitas propriedades algébricas. O triângulo de Pascal, por sua vez, é empregado em problemas de várias áreas da matemática, como probabilidade e estatística, teoria dos números e geometria. De fato, o triângulo de Pascal é uma ferramenta visual e de ensino que pode ajudar a entender conceitos mais complexos visualmente.
Tendo por base tudo o que já foi exposto, o nosso trabalho consiste em possibilitar uma aplicação prática de todo o conteúdo presente no desenvolvimento teórico deste trabalho.Para isso realiza-se por meio de exemplos e apresentar por meio do Triângulo de Pascal algumas das suas aplicações e curiosidades que nele apresenta.

5.1 Produtos Notáveis do tipo $(x \pm y)^n$

Como visto no capitulo 3 seção 2 sobre o Binômio de Newton e o desenvolvimento de $(x \pm y)^n$, existe uma relação do Triângulo de Pascal com este conteúdo.

5.1.1 Caso $(x + y)^n$

A proposta a seguir o é mostrar que os coeficientes do desenvolvimento são números do Triângulo de Pascal, enquanto o primeiro termo x começa elevado a maior potência n e vai diminuindo até zero, e segundo termo y começa com potência igual a zero e aumenta até expoente n. Observe o desenvolvimento de $(x + y)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= \binom{0}{0}x^0y^0\\
(x+y)^1 &= \binom{1}{0}x^1y^0+\binom{1}{1}x^0y^1\\
(x+y)^2 &= \binom{2}{0}x^2y^0+\binom{2}{1}x^1y^1+\binom{2}{2}x^0y^2\\
(x+y)^3 &= \binom{3}{0}x^3y^0+\binom{3}{1}x^2y^1+\binom{3}{2}x^1y^2+\binom{3}{3}x^0y^3\\
(x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4y^0+\binom{4}{1}x^3y^1+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}x^1y^3+\binom{4}{4}x^0y^4\\
(x+y)^5 &= \binom{5}{0}x^5y^0+\binom{5}{1}x^4y^1+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}x^1y^4+\binom{5}{5}x^0y^5
\end{aligned}
$$

Calculando os coeficientes binomiais das expansões temos,

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= 1x+1y\\
(x+y)^2 &= 1x^2+2xy+1y^2\\
(x+y)^3 &= 1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3\\
(x+y)^4 &= 1x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+1y^4\\
(x+y)^5 &= 1x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+1y^5
\end{aligned}
$$

Logo os termos $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 são termos do Triângulo de Pascal.

5.1.2 Caso $(x-y)^n$

A diferença entre o desenvolvimento de $(x+y)^n$ e $(x-y)^n$ é que, no caso de $(x+y)^n$, todos os termos do desenvolvimento são positivos. Já em $(x-y)^n$, os termos se alternam entre valores positivos e negativos, começando com um termo positivo. Essa alternância ocorre devido ao sinal negativo na expressão, que afeta os termos de forma intercalada. Com isso temos o desenvolvimento de $(x-y)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5.

Com os dois casos acima o aluno pode ir além do que é mais trabalhado em sala, que geralmente são so casos $(\mathbf{x} \pm \mathbf{y})^{\mathbf{2}}$ e $(\mathbf{x} \pm \mathbf{y})^{\mathbf{3}}$ enriquecendo ainda mais seus estudos.

5.2 Progressões Aritméticas

No Ensino Regular, as Progressões Aritméticas são bastante exploradas e trabalhadas de forma a mostrar sequências de números que seguem um padrão. No triângulo de pascal, que também obedece padrões, é possível identificar várias progressões aritméticas, de primeira ordem e de ordens superiores a 1. Nessa seção iremos mostrar exemplos de progressões aritméticas de várias ordens, seguindo as colunas do triângulo de pascal. Antes de relacionar a progressão aritmética com o triângulo de pascal, vamos defini-la.

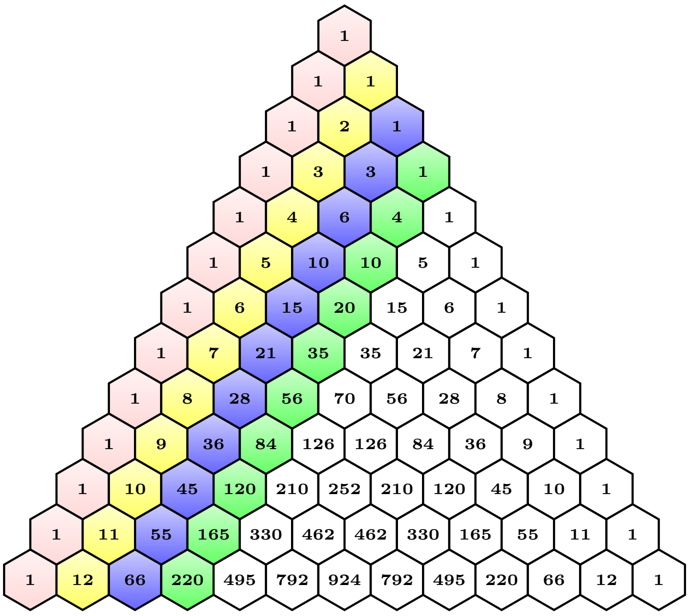
Definição 5.1. Segundo (CARVALHO; MORGADO, 2013) Uma *progressão aritmética (PA)* é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de **razão** da progressão e representada pela letra **r**.

As progressões podem ser classificas de três modos:

- Crescente quando a razão é positiva.
- Decrescente quando a razão é negativa.
- Constante quando a razão é zero(nula).

Observe a tabela abaixo

Figura 16: PAs no Triângulo de Pascal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na primeira coluna temos uma P.A constante de razão igual a zero (r=0), $(1, 1, 1, 1, 1, ...)$.

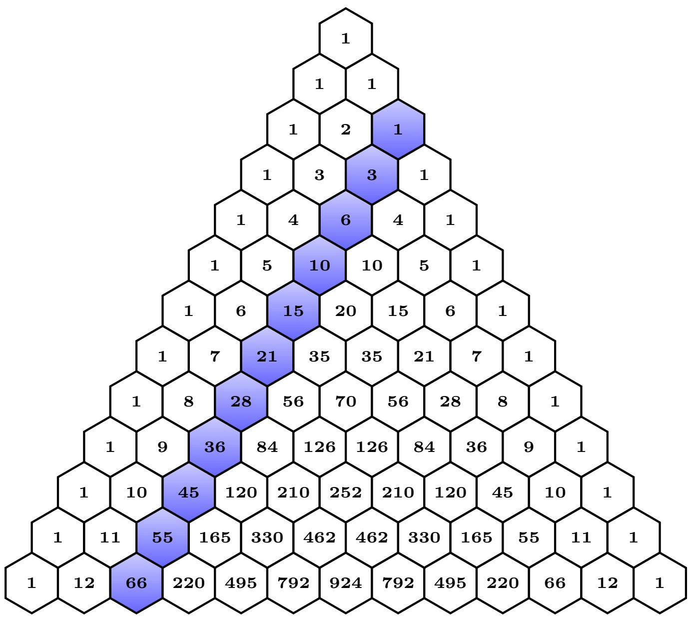
Na segunda coluna temos uma P.A crescente de razão igual a um (r=1), $(1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)$.

No ensino das progressões e sequências, raramente são abordadas progressões de ordem superior. Segundo (ROSADAS, 2016), " uma sequência de segunda ordem é definida como "A progressão aritmética de segunda ordem, é uma sequência de números em que as diferença diferenças entre os termos consecutivos formam uma progressão aritmética." Uma progressão aritmética de ordem superior, segundo (CARVALHO; MORGADO, 2013), é definida da seguinte maneira:

> " Define-se para sequências o operador Δ, chamamos de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Portanto, da definição segue imediatamente uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, somente se, $(\Delta a_n) = (_{n+1} - a_n)$é constante."

A terceira coluna do triângulo de pascal é um ótimo exemplo de uma sequência de segunda ordem. Note que a sequência $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28...)$ é uma progressão de segunda ordem, aonde a diferença entre os termos consecutivos $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, ...)$ é uma progressão aritmética aonde o primeiro termo é 2 e a razão igual a 1.

Figura 17: PA segunda ordem



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, os dois casos mais simples dos produtos notáveis que normalmente são vistos para casos $(x \pm y)^2$ e $(x \pm y)^3$, poderão ser estudados além deles, aprofundando ainda mais os conhecimentos dos Binômio de Newton.

5.3 Potências de 11

Existe uma relação interessantíssima entre as potências de 11 e o triângulo de pascal, pois podem ser obtidas a partir de cada elemento das linhas. Essa relação fica bastante evidente até a quinta linha e a partir da sexta linha de forma implícita. É possível obter as potências de 11 usando o produto notável $(x+y)^n$ para $x=10$ e $y=1$, ou seja, $(10+1)^n$.

Veja o esquema abaixo das 5 primeiras potências de 11.

$$
\begin{aligned}
&11^0 = 1\cdot 10^0 = 1\\
&11^1 = 1\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 11\\
&11^2 = 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 121\\
&11^3 = 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 1331\\
&11^4 = 1\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 = 14641
\end{aligned}
$$

Observe que elas estão diretamente ligadas as 5 primeiras linhas do triângulo de pascal.

E o que acontece a partir da 6 linha dá relação entre as potências de 11 e do triângulo de pascal?

Vamos analisar a 6ª linha

$$11^5 = 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 10\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0.$$

Veja que aparecem números com mais de um algarismo no triângulo de pascal, nesse caso implicitamente conseguimos identificar as potências de 11.

Por exemplo,11^5, no triângulo de pascal corresponde á sexta linha e é representado pela sequência1 5 10 10 5 1.

Uma das maneiras de "arrumar" os números com mais de um algarismo é usando o produto notável como $11^5 = (10+1)^5$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
11^5 &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 10\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0\\
&= 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1\\
&= 161051.
\end{aligned}
$$

Segundo (SANTOS, 2017) "Os algarismos que não correspondem a unidade podem ser acrescentados a próxima potência de 10, de forma que, ao final, os coeficientes de todas as potências serão formados por um único algarismo"

Como exemplo seja a linha 5 do triângulo de pascal com os seguinte números: 1, 5, 10, 10, 5, 1. A partir dessa linha, devemos seguir o procedimento da seguinte forma: Seguindo da direita para esquerda, temos

Número 1 ok!

Número 5 ok!

Número 10 transferir o número 1 para o próximo e deixar o 0.

Número 10 somar o número 1 da casa anterior, ficando 11 agora transferir o número 1 para o próximo e deixar o 1.
Número 5 somar o número 1 da casa anterior e ficando com 6.
Número 1 ok!

Assim temos os algarismos 1, 6, 1, 0, 5, 1. ou seja

$$11^5 = 161051.$$

Lembrando que temos que transferir para a próxima potência todos os números que estiverem além das unidades, ou seja aquelas que ultrapassarem a quantidade de um algarismo.

5.4 Quadrados Perfeitos

Essa propriedade é tirada da Dissertação de Mestrado de (SANTOS, 2017).

[Quadrados Perfeitos] A soma de dois elementos consecutivos da segunda coluna resulta em um quadrado perfeito.

$$\binom{2}{n} + \binom{2}{n+1} = n^2 \quad para \quad n \geq 2.$$

Demonstração: Desenvolvendo

$$\binom{2}{n} + \binom{2}{n+1} \quad \text{para } n \geq 2, \text{ temos:}$$

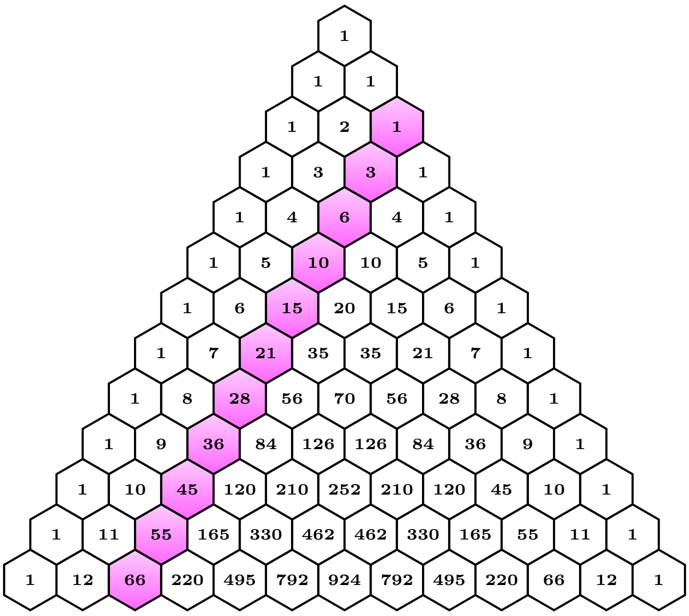
$$\begin{aligned}
\binom{2}{n} + \binom{2}{n+1} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} \\
&= \frac{n(n-1)+n(n+1)}{2!} = \frac{n^2-n+n^2+n}{2} \\
&= \frac{2n^2}{2} \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

□

Observando a coluna destacada acima notamos que:

$$1+3=4=2^2; 3+6=9=3^2; 6+10=16=4^2; 10+15=25=5^2; 15+21=36=6^2.$$

Figura 18: Triângulo de Pascal:Quadrados Perfeitos

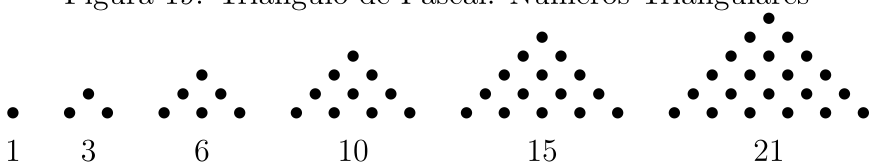


Fonte: Elaborado pelo autor.

5.5 Números Triangulares

Números Triangulares são números que podem ser representados na forma de um triângulo equilátero. Tais números são 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. É dada pela fórmula da soma dos números naturais: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, para $n \geq 1$.

Figura 19: Triângulo de Pascal: Números Triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os números triangulares aparecem na terceira coluna do triângulo de pascal.

Demonstração: Analisando a terceira coluna do triângulo temos:

São representado pelos números binominais: $\binom{2}{0}; \binom{3}{1}; \binom{4}{2}; \cdots ; \binom{n}{n-2}$. Vamos provar que:

$$\binom{n-2}{n} + \binom{n-1}{n} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

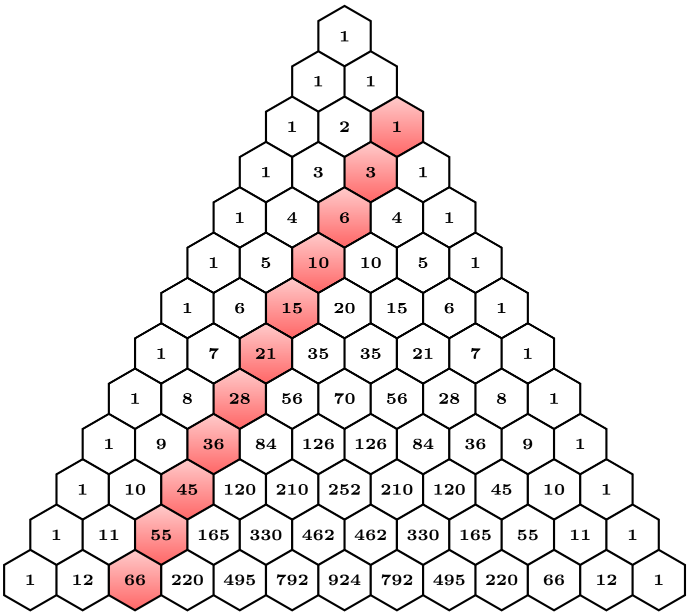
para $n \geq 1$

De fato, desenvolvendo $\binom{n-2}{n} + \binom{n-1}{n}$, temos:

$$\binom{n-2}{n} + \binom{n-1}{n} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} + \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}$$
$$= \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-1)!1!}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} + \frac{n(n-1)!}{(n-1)!1!}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} + n$$
$$= \frac{n(n-1)+2n}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Figura 20: Triângulo de Pascal: Números triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.6 Números Tetraédricos ou Piramidais

Segundo (SANTOS, 2017) os números tetraédricos representam os números de pontos com que se pode definir um tetraedro, ou uma quantidade de esferas empilhadas em n linhas para formar uma pirâmide de base triangular, é pela sequência de números (1, 4, 10, 20, 35,...) e sua fórmula é dada por $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Como discutido na subseção 5.5. Os números triangulares em que $\binom{n-2}{n} + \binom{n-1}{n} = \frac{n(n+1)}{2}$ teremos ideia análoga na demonstração dos números tetraédricos. Temos na quarta

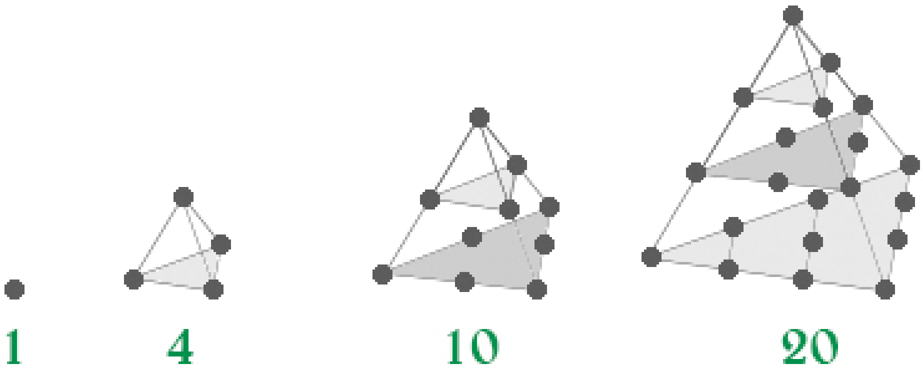


Figura 21: Tetraedros. (Fonte:(SILVA, 2024))

coluna do triângulo de pascal é $\binom{3}{0}; \binom{4}{1}; \binom{5}{2}; \cdots ; \binom{n+1}{n-2}; \binom{n+2}{n-1}$., assim vamos provar que $\binom{n-1}{n-4} + \binom{n}{n-3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Demonstração:

$$\binom{n-2}{n+1} + \binom{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!(n+1-(n-2))!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!(n+1-(n-1))!}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 3!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)! \cdot 2!}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)n}{2!}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{3(n+1)n}{6}$$

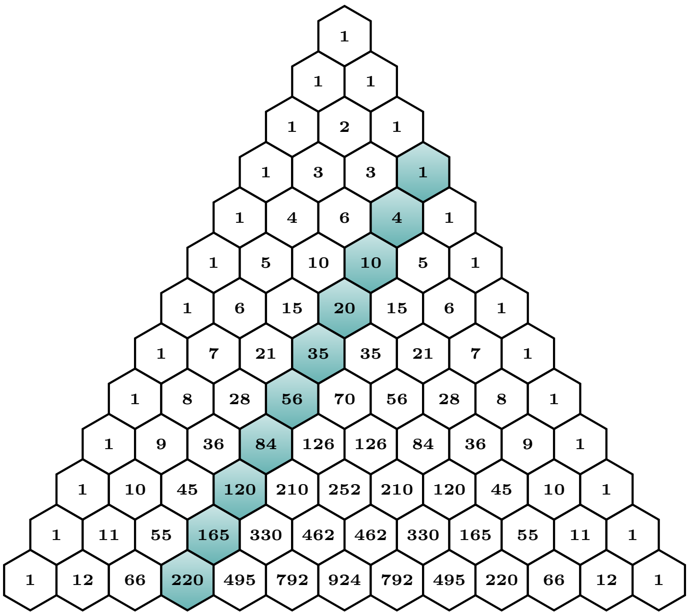
$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

□

Esquema demonstrativo

Figura 22: Triângulo de Pascal: Os números tetraédricos

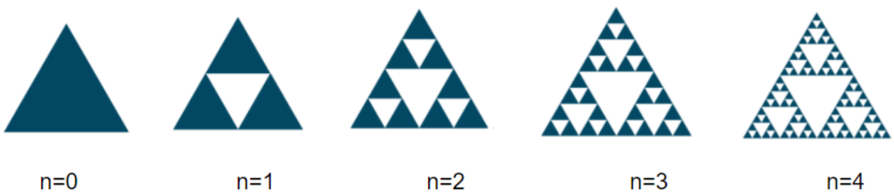


Fonte: Elaborado pelo autor.

5.7 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski [1] é um fractal formado a partir de um triângulo equilátero em que, a partir dos pontos médios dividindo em outros quatro triângulos equiláteros congruentes ao triângulo de origem e esse processo continua infinitamente formando o fractal conhecido como triângulo de Sierpinski.

Figura 23: Triângulo de Sierpinski



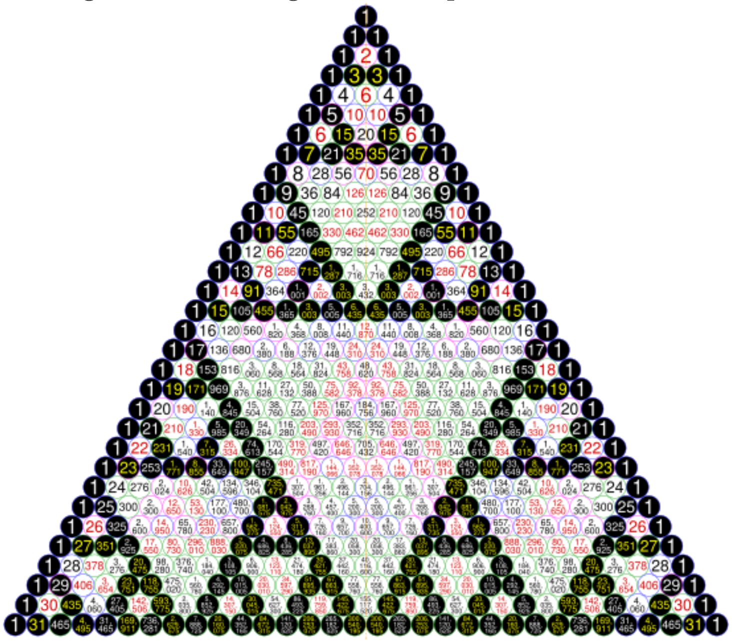
Fonte: (FORA, 2021).

5.8 Fractais e Triângulo de Pascal

No triângulo de pascal se indicarmos cada um dos números pares (múltiplos de 2) de uma cor e os números impares de outra cor, obtemos um padrão muito interessante:

[1]Waclaw Sierpinski, matemático polonês, 1882-1969

Figura 24: triângulo de Sierpinski e de Pascal



Fonte: (OBMEP, 2020).

A figura resultante segue o mesmo padrão do Triângulo de Sierpinski, que é um tipo de fractal uma figura geométrica que se repete infinitamente. Para comparação, na imagem a seguir, utilizamos um Triângulo de Pascal com menos linhas do que o da imagem anterior.

Figura 25: triângulo de Sierpinski e de Pascal

Fonte: (OBMEP, 2020).

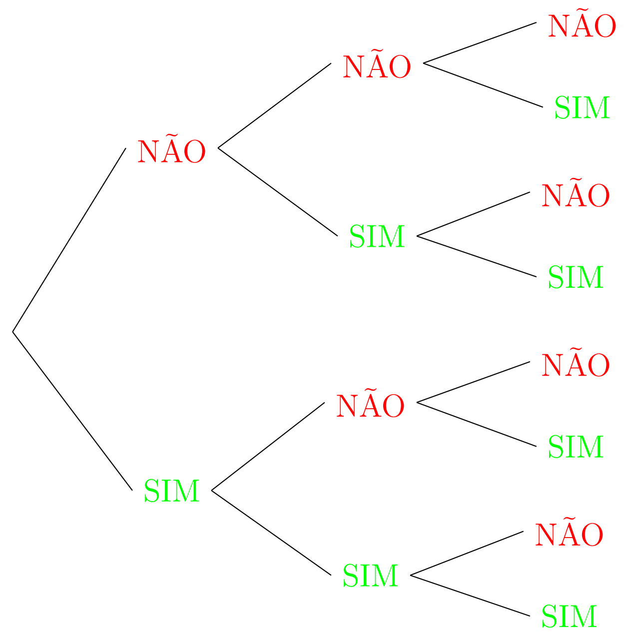
5.9 Número de subconjuntos de um conjunto finito

Esta seção tem como objetivo demonstrar que o número de subconjuntos de um conjunto finito é dado por 2^n, onde n é a quantidade de elementos do conjunto. Além disso, a seção relaciona essa afirmação com o Triângulo de Pascal, evidenciando como a contagem de subconjuntos está conectada com os coeficientes binomiais presentes no triângulo. Seja um conjunto A e B um subconjunto de A, ou seja os elementos de B também são elementos de A. Assim podemos dizer que B está contido em A, denotaremos de $B \subset A$. Se $A = \{a, b, c\}$ então, seus subconjuntos são: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} e \{a, b, c\}$.

De acordo com (ROSADAS, 2016), ao tentarmos construir todos os subconjuntos de A, podemos pensar em uma relação binária de pertencimento. Em outras palavras, cada elemento de A pode ou não fazer parte de um subconjunto B. Essa relação binária é comum em diversos ramos da Matemática, como na definição de números pares e ímpares, na formulação de questões de verdadeiro ou falso, ou, como no caso atual, na decisão de pertencimento ou não a um conjunto.
Conforme apontado por (ROSADAS, 2016) de forma bem intuitiva é como explicássemos todas as possibilidades de repostas SIM ou NÃO por parte de cada elemento do conjunto A á pergunta: *"Este elemento pertence ao subconjunto?"*. Com essa construção, o conjunto vazio representa o subconjunto de A em que todos os elementos de responderam NÃO, e o próprio conjunto representa todos respondendo SIM.

Uma árvore de relação binaria de pertencimento para um conjunto com três elementos , resume a construção, como na figura 26.

Figura 26: Árvore de relação binaria para conjunto com três elementos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e as informações que a árvores de relação binaria 26 nos oferece, vamos listar os subconjuntos de A:

1. Subconjuntos sem elementos.
   - $\emptyset$ A sua quantidade é determinada pela combinação de 3 elementos escolhidos de 0 em 0, ou seja $\binom{3}{0} = 1$.
2. Subconjuntos com examente 1 elemento
   - $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ A sua quantidade é determinada pela combinação de 3 elementos escolhidos de 1 a 1, ou seja $\binom{3}{1} = 3$.
3. Subconjuntos com examente 2 elemento
   - $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ A sua quantidade é determinada pela combinação de 3 elementos escolhidos de 2 a 2, ou seja $\binom{3}{2} = 3$.
4. Subconjuntos com examente 3 elemento
   - $\{a, b, c\}$, A sua quantidade é determinada pela combinação de 3 elementos escolhidos de 3 a 3, ou seja $\binom{3}{3} = 1$.

Assim , o número total de subconjuntos de A é $1 + 3 + 3 + 1 = 8$. Note que esse número corresponde exatamente à soma dos elementos da quarta linha do Triângulo de Pascal, que, de acordo com o Teorema das Linhas, vale $2^3 = 8$.

Generalizando o que foi descrito, para um conjunto finito A com n elementos, seus subconjuntos podem ter de zero até n elementos. A $(n + 1) - ensima$ linha do Triângulo de Pascal representa o total de subconjuntos distintos com cada uma dessas quantidades de elementos. Portanto, o número total de subconjuntos de um conjunto finito com n elementos é igual à soma de todos os elementos da $(n + 1) - ensima$ linha do Triângulo de Pascal, o que resulta em 2^n.

(MORGADO et al., 2020) Se A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A?

Solução. Como foi visto na seção 5.9 o número total de subconjuntos de um conjunto é dada pela fórmula do teorema das linhas 4.3, logo $2^n = 512$. assim $n = 9$, pois $2^9 = 512$. Assim o conjunto A possui 9 elementos. □

(MORGADO et al., 2020) Determine um conjunto que possua exatamente 48 subconjuntos.

Impossível, pois não existe n natural tal que $2^n = 48$.

5.10 Sequência Didática para Resolução de Questões com Triângulo de Pascal

Segundo (ZABALA, 2015) as Sequências Didáticas(SDs) no ensino de competências, sendo estas definidas como: "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". As SDs tem como um de seus objetivos proporcionar aos professores a sistematização do objeto de estudo, que o leva a uma melhor organização das atividades a serem desenvolvidas para se alcançar o objetivo da aprendizagem ((ARAUJO, 2013). (ZABALA, 2015) propõe uma tríade formada por planejamento, aplicação e avaliação no design da SD, que promove uma intervenção reflexiva e permite que o professor refine suas práticas de ensino.

Com isso iremos abordar e trabalhar questões do ensino fundamental e desenvolver a capacidade dos alunos em resolver questões que envolvem o Triângulo de Pascal, compreendendo seus fundamentos e utilizando as propriedades de coeficientes binomiais.

Aplicação 5.2. Encontre o valor da seguinte soma:

$$S = \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \cdots + \binom{10}{10}.$$

Solução.

- Revisão do Triângulo de Pascal e Teorema das Linhas
  Os estudantes relembram o Triângulo de Pascal e preenchem a linha 10, identificando as combinações binomiais relevantes. Explora-se o teorema das linhas, que afirma que a soma dos coeficientes em qualquer linha do Triângulo de Pascal é 2^n. Identificam-se as parcelas faltantes na linha 10.

- Resolução da Questão Aplicada
  Explicação de que a soma S pedida não corresponde a uma linha inteira do Triângulo de Pascal, mas sim a uma parte da linha 10. Cálculo das parcelas faltantes da linha 10:

$$\begin{aligned} S &= 2^{10} - \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}\right) \\ &= 1024 - (1 + 10 + 45) \\ &= 968 \end{aligned}$$

  Cálculo das combinações binomiais:

$$\binom{10}{0} = 1, \quad \binom{10}{1} = 10, \quad \binom{10}{2} = 45$$

Destaca-se a eficiência de calcular apenas os três primeiros termos, em vez dos oito restantes.

□

Aplicação 5.3. Qual o valor da expressão $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 98 \cdot 99 \cdot 100$?

As duas soluções que apresentaremos para este problema utilizam propriedades dos coeficientes binomiais que podem ser visualizadas no Triângulo de Pascal.

Solução 2.1

Se $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 98 \cdot 99 \cdot 100$, então:

$$\frac{x}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} + \ldots + \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{3!}. \tag{1}$$

Pela definição de Combinação 3.2, tem-se que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, logo por (1), segue que:

$$\frac{x}{3!} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{100}{3}. \tag{2}$$

Nota-se que a expressão (2) representa a soma dos 98 primeiros termos da 4ª coluna do Triângulo de Pascal, aplicando o teorema das colunas 4.4 na expressão 2, obtemos:

$$\frac{x}{3!} = \binom{101}{4}$$

donde segue que:

$$x = 3! \cdot \binom{101}{4}$$

$$x = 3! \cdot \frac{101!}{97!.4!}$$

$$x = 3.2.1.\frac{101.100.99.98}{4.3.2.1}$$

$$x = 24497550.$$

Concluímos que $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 98 \cdot 99 \cdot 100 = 24\,497\,550$ □

Solução 2.2

Se $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 98 \cdot 99 \cdot 100$, então:

$$\frac{x}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} + \ldots + \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{3!}.$$

Pela definição de Combinação 3.2, tem-se que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, logo por (1), segue que:

$$\frac{x}{3!} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{100}{3}.$$

Pela relação de Stifel 4.1, temos que:

$$\binom{k}{t} = \binom{k+1}{t+1} - \binom{k}{t+1}.$$

assim, podemos reescrever os termos da expressão 2 nas seguintes formas:

$$\binom{4}{3} = \binom{5}{4} - \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{3} = \binom{6}{4} - \binom{5}{4}$$

$$\binom{6}{3} = \binom{7}{4} - \binom{6}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\binom{100}{3} = \binom{101}{4} - \binom{100}{4}.$$

Somando membro a membro as igualdades acima podemos cancelar os vários termos semelhantes opostos e obter:

$$\binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{100}{3} = \binom{101}{4} - \binom{4}{4}$$

Como

$$\binom{4}{4} = \binom{3}{3} = 1.$$

teremos que:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{100}{3} = \binom{101}{4}.$$

Assim, segue que:

$$x = 3! \cdot \binom{101}{4}$$

$$x = 3! \cdot \frac{101!}{97!.4!}$$

$$x = 3.2.1.\frac{101.100.99.98}{4.3.2.1}$$

$$x = 24497550.$$

concluímos que $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 98 \cdot 99 \cdot 100 = 24\,497\,550$ $\square$

Aplicação 5.4. Encontre o valor da soma:

$$A = \binom{9}{3} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{20}{3}.$$

Solução. Sejam

$$B = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{19}{3} + \binom{20}{3}.$$

e

$$C = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{8}{3}.$$

perceba que $A = B - C$, utilizando o teorema das colunas (4.4) em B e C temos:

$$B = \binom{21}{4}$$

$$C = \binom{9}{4}$$

Assim temos:

$$A = \binom{21}{4} - \binom{9}{4}$$

$$A = 5985 - 126 = 5859.$$

$\square$

Aplicação 5.5. (UFRGS - 2014) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas abaixo:

Figura 27: UFRGS 2014

	coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5	coluna 6	coluna 7	...
linha 0	1								
linha 1	1	1							
linha 2	1	2	1						
linha 3	1	3	3	1					
linha 4	1	4	6	4	1				
linha 5	1	5	10	10	5	1			
linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Fonte: (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2020).

O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é:

Solução. Com os conhecimentos vistos no Capítulo 4, em que o Triângulo de Pascal é compostos por coeficientes binominais $\binom{n}{p}$ onde n indica a linha onde está localizado o termo ep a coluna. Para saber qual termo está localizado na linha 15 e coluna 13 basta substituir:

$$\binom{15}{13} = \frac{15!}{(15-13)!.13!} = \frac{15!}{2!.13!} = \frac{15.14}{2} = 105.$$

□

Aplicação 5.6. Tem-se n comprimidos de substâncias distintas, solúveis em água e incapaz de reagirem entre si. Quantas soluções distintas podem ser obtidas dissolvendo-se um ou mais desses comprimidos em um copo com água?

Solução. Observa-se:

- Que com 1 comprimido, há $\binom{n}{1}$ soluções;
- Que com 2 comprimidos, há $\binom{n}{2}$ soluções;

  ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
- Que com n comprimidos, há $\binom{n}{n}$ soluções.

Assim temos:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Observe que essa soma é uma soma da linha n do Triângulo de Pascal, menos o primeiro elemento $\binom{n}{0}$, ou seja:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}\right] - \left[\binom{n}{0}\right].$$

Pelo teorema das linha 4.3 temos que:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}\right] - \left[\binom{n}{0}\right] = 2^n - 1.$$

□

Aplicação 5.7. (UFRJ 2009) Um capital é aplicado por doze anos e seis meses a juros compostos de meio por cento ao mês. Ao final desse período, o rendimento acumulado será igual, inferior ou superior a 100% ? justifique sua resposta.

Solução. No primeiro momento, verificamos que 12 anos e seis meses são equivalentes a 150 meses. Aplicando á uma taxa de 0,5% ao mês, resulta na multiplicação por 1+0,005=1,005. Quando aumentamos 100% do valor estamos duplicando o capital.

Assim, no regime de Juros Compostos, temos:

$M = C.(1,005)^{150}$, aonde C é o capital inicial.

Devemos mostrar se $M = C.(1,005)^{150} > 2C$ ou não.

Usando o Binômio de Newton 3.3, temos:

$$(1{,}005)^{150} = (1 + 0{,}005)^{150} = \left(1 + \frac{1}{200}\right)^{150} =$$

$$\binom{150}{0} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{0} + \binom{150}{1} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{1} + \binom{150}{2} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{2} + \binom{150}{3} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{3} + \cdots +$$

$$+\binom{150}{150} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{150}.$$

É inviável analisar detalhadamente todos os 151 termos resultantes desse desenvolvimento. Contudo, ao observarmos apenas os quatro primeiros valores, podemos notar que:

$$\binom{150}{0} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{0} = 1;$$

$$\binom{150}{1} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{1} = \frac{75}{100}$$

$$\binom{150}{2} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{2} = \frac{11175}{40000}$$

$$\binom{150}{3} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^{3} = \frac{551300}{8000000}$$

logo

$$1 + \frac{75}{100} + \frac{11175}{40000} + \frac{551300}{8000000} \cdots =$$

$$1 + 0,75 + 0,279375 + 0,0689125 + \cdots = 2,0983575 + \cdots > 2.$$

Portanto como com os 4 primeiros termos já dão um valor maior que 2, podemos concluir que no final dos 150 meses ou 12 anos e 6 meses o rendimento será superior a 100%. $\square$

6 CONCLUSÃO

A incorporação do Triângulo de Pascal nas partes posteriores do Ensino Fundamental pode ser valiosa para o processo de aprendizagem dos alunos. Ao trabalhar com isso, não apenas estão familiarizados com tópicos específicos de combinatória e probabilidade, mas com um ponto de vista mais profundo em termos de sequências, padrões e relações numéricas em geral.Uma abordagem desta natureza expande a base educacional, permitindo que os alunos vejam a disciplina de forma mais conectada, o que pode levar a uma melhor retenção e aplicação em situações práticas. Atualmente, o currículo da educação básica ainda apresenta uma limitação no uso de metodologias que vão além das tradicionais. No entanto, este trabalho propôs uma reinvenção de conceitos antigos, com o objetivo de tornar as aulas mais atrativas e didáticas. O professor trazendo a melhor maneira de facilitar o uso do Triângulo de Pascal na sala de aula seria em forma de atividades interativas e atraentes que poderiam despertar a atenção divertida dos alunos. Por exemplo, ao resolver problemas de contagem usando o triângulo, pode-se discutir o coeficiente binomial e a conexão entre combinatória e habilidades de probabilidade com um nível mais alto de detalhes.

Em conclusão, o Triângulo de Pascal é um processo de ensino que desenvolve o raciocínio lógico examinando padrões e relações matemáticas. Não apenas fornece informações adicionais úteis que são relevantes para o desenvolvimento posterior do aluno, mas também ensina, em essência, a aprender. Portanto, acredito que este trabalho possa oferecer ao professor uma perspectiva diferente sobre os temas discutidos, incentivando-o a aplicar essas novas metodologias sempre que possível. Dessa forma, suas aulas se tornarão mais envolventes, estimulando o interesse dos alunos em explorar novas possibilidades de conhecimento.

REFERÊNCIAS

AFFONSO, A. O triângulo de pascal e o binômio de newton. 2014. 13, 14, 15, 17, 18, 22

ARAUJO, D. L. de. O que é (e como faz) sequência didática? *Entrepalavras*, v. 3, n. 1, p. 322–334, 2013. Disponível em: http://www.entrepalavras.ufc.br/revista/index.php/Revista/article/viewFile/148/181. 47

BLOGUEIRO, A. *História do Triângulo Aritmético (Parte I)*. 2010. https://matematica-na-veia.blogspot.com/2010/02/historia-do-triangulo-aritmeticoparte.html. Acessado em: 22 jul. 2024. 19

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2ª. ed. São Paulo: Ed. Blucher, 1996. 22

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. 2002. Acesso em: 27 jul. 2024. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/conaes-comissao-nacional-de-avaliacao-da-educacao-superior/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. 34

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *Matemática discreta*. 2. ed. Brasil: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT). PROFMAT, MA12 – Matemática discreta. 22, 24, 26, 27, 36, 37

FORA, U. F. de Juiz de. *Triângulo de Sierpinski*. 2021. Acessado em: 12 ago. 2024. Disponível em: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/22/triangulo-de-sierpinski/. 43

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020. 22, 23, 29, 31, 32, 46

OBMEP. *O Segredo das Potências - Segredo 16*. 2020. Acessado em: 12 ago. 2024. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/segredo-16/. 44

ROSADAS, V. D. S. *Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2016. 16, 36, 45

SANTOS, N. L. P. *O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional)) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", novembro 2017. 38, 39, 41

SILVA, D. L. da. *Números Tetraédricos*. 2024. Acesso em: 06 ago. 2024. Disponível em: https://acervolima.com/numeros-tetraedricos/. 8, 42

SILVA, M. O. de. *Do Triângulo à Pirâmide de Pascal*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Bahia, 2015. PROFMAT. 13

Universidade Federal do Rio Grande do Sul. *Provas Comentadas 2020*. 2020. https://www.ufrgs.br/coperse/wp-content/uploads/2022/03/PROVAS-COMENTADAS-2020-DIGITAL.pdf. Acessado: agosto 2024. 50

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015. 47