Universidade estadual do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Graduação em Matemática

Uma Introdução a Teoria dos Jogos : Uma Abordagem para o Ensino Básico

Isaac Batista Rocha de Castro

Teresina - 2022

Isaac Batista Rocha de Castro

Trabalho de Conclusão de Curso:

Uma Introdução a Teoria dos Jogos : Uma Abordagem para o Ensino Básico

Trabalho de Conclusão de Curso à Coordenação do Programa de Graduação em Matemática, da Universidade Estadual do Piauí, como Requisito Parcial para Obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr.Pedro Antonio Soares Junior

Teresina - 2022

Castro, I.B.R.

Uma Introdução a Teoria dos Jogos : Uma Abordagem para o ensino básico.

Isaac Batista Rocha de Castro – Teresina: 2022.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Soares Junior.

1. Teoria dos Jogos

CDD xxx.xx

Dedico este trabalho ao meu avô Manoel Batista da Rocha. (In memoriam).

Agradecimentos

À Deus por me proporcionar a capacidade e sabedoria para concluir esta etapa em minha vida.

A minha mãe Maria do Carmo pelos incontáveis esforços em busca de uma educação melhor para mim.

A minha avó Francisca por todos os conselhos e ensinamentos de vida tão valorosos que uso diariamente.

A todos os meus tios, representados nas figuras dos meus padrinhos Paulo Gilmar e José do Egito e madinha Marta Maria que sempre foram espelhos para que eu pudesse seguir caminhos retos e dignos.

A minha namorada Tauana pela compreensão, força, estimulo e por nunca deixar de acreditar em mim, mesmo quando eu mesmo não acreditava.

À todos os professores que sempre foram presentes em minha vida e contribuiram tanto com minha educação, independente da matéria em sala de aula. Cito dois professores que estiveram comigo nos meus anos de Uespi, meu orientador Professor Doutor Pedro Soares Júnior pelos seus conhecimentos e auxílios que ensinam muito mais que teorias, preparam para a vida e pelo Professor mestre Luiz André pelos seus conhecimentos e atenção sempre que necessário.

Além disso, gostaria de agradeceraos meus colegas do curso de Licenciatura em matemática, agradecer em especial as minhas amigas Daniele Nascimento e Clarohana Grigório que sempre me deram forças para continuar esta jornada, agradecer também aos amigos que iniciaram o curso conosco e não puderam estar conosco neste momento, em especial Cilas e Rubem que estavam presentes em quase todos os momentos da nossa jornada acadêmica.

“*Muitas pessoas devem a grandeza de suas vidas aos problemas que tiveram de vencer.*”.

Robert Stepherson Smith Baden-Powell.

Fundador do Movimento Escoteiro

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem da teoria de jogos para o ensino básico, a teoria dos jogos é o estudo das situações estratégicas das interações humanas, estuda o conflito e a cooperação dos jogadores, isto é, as decisões racionais que melhorarão os resultados dos indivíduos nos mais diferentes setores, onde o resultado de duas ações individuais ou em grupos racionais depende principalmente das ações dos demais indivíduos ou grupos, em outras palavras, deve-se levar em conta sempre as possíveis decisões dos demais jogadores para tomada de uma decisão. Consta da literatura que a teoria dos jogos foi criada para estudo de temas como eleições, competições entre empresas, julgamentos, balança comercial, evolução genética, mas também é uma teoria matemática pura e tem sido assim estudada, sem necessidade de relacioná-la a problemas comportamentais ou jogos. Autores como James Waldegrave, Nicolas Bernoulli, Ernst Zermelo, Von Neumann e John Nash foram pioneiros no estudo do tema. Além dos aspectos hitóricos, apresentamos os elementos que formam um jogo, as principais definições, classificações e vários exemplos comentados para melhor compreensão do tema.

Palavras-chaves: Teoria dos Jogos; Equilíbrio de Nash; Situações-Problemas, Ensino de Matemática.

Abstract

In this work, we present a game theory approach to basic education, game theory is the study of strategic situations of human interactions, it studies the conflict and cooperation of players, that is, the rational decisions that will improve the results of individuals in the different sectors, where the result of two individual actions or in rational groups depends mainly on the actions of the other individuals or groups, in other words, the possible decisions of the other players must always be taken into account when making a decision. It is reported in the literature that game theory was created to study topics such as elections, competitions between companies, judgments, trade balance, genetic evolution, but it is also a pure mathematical theory and has been studied in this way, without the need to relate it to problems behavioral or games per se. Authors such as James Waldegrave, Nicolas Bernoulli, Ernst Zermelo, Von Neumann and John Nash were pioneers in the study of the subject. In addition to the historical aspects, we present the elements that form a game, the main definitions, classifications and several examples commented for a better understanding of the theme.

Key-words: Game Theory; Nash Equilibrium; Problem Situations; Mathematics Teaching.

Lista de Figuras

2.1 James Waldegrave 12
2.2 Von Neumann 13
2.3 John Nash Jr. 14
2.4 Jogo Sequencial na forma estendida 23

Lista de Tabelas

2.1 Dilema do Prisioneiro 15
2.2 A Batalha do Mar de Bismarck. 17
2.3 Jogo de Renovação de Empréstimo dos Bancos A e B 21
2.4 Jogo de dominância estritamente iterada 1 24
2.5 Jogo de dominância estritamente iterada 1.2 24
2.6 Jogo de dominância estritamente iterada 1.3 25
2.7 Jogo de dominância estritamente iterada 1.4 25
2.8 Jogo de dominância estritamente iterada 1.5 25
2.9 Jogo de dominância estritamente iterada 1.6 26
2.10 Jogo lojas esportivas 27

4.1 Jogo dos Casais 39
4.2 Jogo Durão x Medroso 41
4.3 Jogo dos Prisioneiros 43
4.4 Jogo das instituições Bancárias 45

Sumário

Resumo **4**

Abstract **5**

1 Introdução **11**

2 Preliminares Sobre a Teoria dos Jogos **12**

2.1 Um breve Histórico 12

2.2 As bases da Teoria dos Jogos 14

2.3 Porque estudar a Teoria dos Jogos ? 15

2.4 Elementos de um Jogo 18

2.5 Definição de Jogo 19

2.6 Critérios de Classificação de Jogos: 20

2.7 Soluções de um Jogo 21

2.8 Formas de Representação de um jogo sequencial: 22

2.9 Dominância: 24

2.10 Equilíbrio de Nash em Estratégias puras. 26

3 Abordagem via Situações-Problema **28**

3.1 O que é um problema matemático? 28

3.2 Tipos de problemas matemáticos: 30

3.3 Etapas para resolução de problemas matemáticos: 33

3.3.1 1ª Etapa: Entender o Problema 33

3.3.2 2ª Etapa: Elaborar um plano 33

3.3.3 3ª Etapa: Executar o plano 33

3.3.4 4ª Etapa: Revisar a solução 34

4 Resolução de alguns problemas de Teoria dos Jogos via método de Polya: 35

4.1 Problema 01 . . . 35
4.1.1 1ª Etapa: Entender o problema: . . . 35
4.1.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano: . . . 36
4.1.3 3ª Etapa: Executar o Plano: . . . 36
4.1.4 4ª Etapa: Revisar a Solução: . . . 36
4.2 Problema 02 . . . 36
4.2.1 1ª Etapa: Entender o problema: . . . 37
4.2.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano: . . . 37
4.2.3 3ª Etapa: Executar o Plano: . . . 37
4.2.4 4ª Etapa: Revisar a Solução: . . . 37
4.3 Problema 03. . . . 37
4.3.1 1ª Etapa: Entender o problema: . . . 38
4.3.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano: . . . 38
4.3.3 3ª Etapa: Executar o Plano: . . . 38
4.3.4 4ª Etapa: Revisar a Solução: . . . 38
4.4 Problema 04. . . . 39
4.4.1 1ª Etapa: Entender o problema: . . . 39
4.4.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano: . . . 39
4.4.3 3ª Etapa: Executar o Plano: . . . 40
4.4.4 4ª Etapa: Revisar a Solução: . . . 40
4.5 Problema 05. . . . 40
4.5.1 1ª Etapa: Entender o problema: . . . 41
4.5.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano: . . . 41
4.5.3 3ª Etapa: Executar o Plano: . . . 41
4.5.4 4ª Etapa: Revisar a Solução: . . . 42
4.6 Problema 06. . . . 42
4.6.1 1ª Etapa: Entender o problema: . . . 42
4.6.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano: . . . 42
4.6.3 3ª Etapa: Executar o Plano: . . . 43
4.6.4 4ª Etapa: Revisar a Solução: . . . 43

4.7 Problema 07. 43
4.7.1 1ª Etapa: Entender o problema: 44
4.7.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano: 44
4.7.3 3ª Etapa: Executar o Plano: 45
4.7.4 4ª Etapa: Revisar a Solução: 45

5 Considerações Finais **46**

Bibliografia **47**

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho aborda problemas originários da teoria dos jogos, buscando sua resolução através da Metodologia de Resoluções de problemas abordadas por Polya.

Este originou-se nas disciplinas de estágio supervisionado, através da observação de aulas de matemática, onde em contato com a prática docente foi possível observar que muitos professores não trabalham a Metodologia de Resolução de Problemas, e quando propõe problemas para seus alunos, sentem inclusive dificuldades ao resolver, e isto, combinado com o interesse em teoria dos jogos, foram determinantes para a escolha deste tema.

Pesquisou-se as possibilidades de uso, os limites e as especificidades da resolução de problemas de teoria dos jogos utilizando a Metodologia de Resolução de Problemas de Polya, contribuindo para que Professores do Ensino Médio entendam a importância de se trabalhar a metodologia com seus alunos e mostrar como a teoria dos jogos irá nortear cada decisão de sua vida.

Este trabalho inicia-se com dados preliminares sobre a teoria de jogos, mostrando o histórico desta teoria, trás também a importância da teoria para as aplicações diárias, define jogo e os seus elementos, classifica os jogos e mostra sua representação, logo após as definições da teoria de jogos, definimos problemas matemáticos e apresentamos o Método de Resolução de Problemas, desenvolvido por Polya e utilizado na sequência para Resolver oito problemas da teoria dos jogos.

Capítulo 2

Preliminares Sobre a Teoria dos Jogos

2.1 Um breve Histórico

Segundo Prague (PRAGUE 2004 [11]), as primeiras escritas com referência conhecidas sobre a teoria dos jogos são do ano de 1713, em carta James Waldegrave apresenta a Nicolas Bernoulli sua análise do jogo de cartas Le Her, para o qual propõe uma estratégia, porém Waldegrave não se aprofunda muito nas suas análises teóricas.

Figura 2.1: James Waldegrave

Mas a primeira teoria mais formal foi um trabalho sobre o dupólio de Antoine Augustin Cournot, que foi escrito na primeira metade do século XIX (COURNOT,1838 [4]), porém apenas em 1913 foi registrado o primeiro teorema sobre o tema, que tinha como autor Ernst Zermelo, onde o xadrez foi definido como um jogo estritamente dominado, ou seja, um jogo onde em cada jogada pelo menos um dos jogadores possui uma estratégia que vai lhe levar a vitória ou vai conduzir o jogo para o empate, e ele também acreditava já naquela época que a economia e a guerra também poderiam ser estudadas de formas análogas (ZERMELO [15]).

Para (ALMEIDA 2006 [1]), mesmo com todos os avanços feitos nesse período ainda sim a teoria dos jogos era vista como uma área de menor expressão dentro da matemática e apenas com o matemático Húngaro John Von Neumann isto começou a mudar, ele publicou uma série de teses e no ano de 1928, Von Neymann, provou, utilizando topologia e análise, que a solução para jogos de soma zero pode ser determinada utilizando técnicas matemáticas, e no ano de 1937, ele demostrou com o mesmo resultado, de modo mais claro, utilizando o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Figura 2.2: Von Neumann

Von Neumann ainda dividiu com o economista Oscar Morgenstern a autoria do The theory of games and economic Behavior que foi publicado em 1944, obra essa que é tida como um marco histórico para a teoria dos jogos.

E uma década depois, ao longo dos anos 50, John Forbes Nash Junior, em uma série de estudos publicados realizou avanços grandes e definitivos na teoria de jogos. Dentre essa série de estudos, os que tiveram maior relevância foram: Equilibrium Points in n-Person Games e Non-cooperative Games, onde ele prova a existência de um equilíbrio para jogos não cooperativos de estratégia mista, o chamado Equilíbrio de Nash, conforme apresenta (ALMEIDA 2006 [1]).

Figura 2.3: John Nash Jr.

Por suas contribuições à teoria dos jogos e a economia, John Nash, John Harsanyi e Reinhard Seltern receberam o prêmio Nobel de Economia em 1994, e o filme uma mente Brilhante que conta sua biografia ganha o Oscar em 2002, podemos dizer então que John Nash foi a primeira pessoa a receber um Oscar e um Prêmio Nobel.

2.2 As bases da Teoria dos Jogos

A bases da teoria dos jogos podem ser expressas com base em um exemplo bastante difundido que caracteriza uma classe de jogos com fundamentos semelhantes, o dilema do prisioneiro, que foi estudado inicialmente formulado por Merrill Flood e Melvin Dresherno ano de 1950.

Dois ladrões são presos por porte de armas, mas nenhuma evidência de crime é encontrada para ligá-los a crimes mais graves, a polícia então leva os dois presos para salas separadas e faz a mesma proposta a cada um deles: se ele confessar seus crimes e seu parceiro não, ele será libertado e seu parceiro condenado a 20 anos de prisão, se ele se recusar a confessar e seu parceiro confessar então ele pegar os 20 anos de prisão e seu parceiro será libertado. Se ambos confessarem os crimes, cada um será condenado a pegar 5 anos de prisão, mas se nenhum confessar, por falta de provas a polícia deverá condenar os dois por apenas um ano de prisão por porte de arma já que não teria provas que ligassem eles a outros crimes, a polícia informa ainda que a mesma oferta será feita aos dois presos, mas, eles não podem se comunicar e só podem jogar com as suas estratégias disponíveis, que são mostradas no quadro a seguir:

		Preso 02	
Preso 01		Não Confessar	Confessar
	Não Confessar	1 Ano, 1 Ano	20 Anos, Liberdade
	Confessar	Liberdade, 20 Anos	5 Anos, 5 Anos

Tabela 2.1: Dilema do Prisioneiro

É claro que, ao ver as opções, e avaliando as vantagens e desvantagens, seria melhor os dois não confessarem os crimes, porém cada um dos prisioneiros devem analisar o que será melhor para si, considerando sempre a decisão do outro. Então vamos analisar as opções do Preso 01: Se o preso 02 confessar a melhor opção seria confessar e ser preso por 05 anos, ou caso contrário pegaria 20 anos de prisão, porém se o Preso 02 não confessar os crimes, o melhor para o preso 01 seria ele confessar, já que sairia de lá com a liberdade, ao invés de passar um ano de prisão se não confessasse seus crimes, então podemos notar que a independente da decisão do Preso 02 a melhor decisão seria sempre a confissão. Analogamente este raciocínio também vale para preso 02, com isso podemos concluir que, se a decisão racional for tomada por ambos os presos, eles ficarão presos por 5 anos cada.

O jogo do dilema do prisioneiro é um jogo não cooperativo e, como a estratégia dominante para os dois players é a mesma, a solução é chamada de equilíbrio de estratégia estritamente dominante, este tipo de resultado pode ser chamado também de ótimo de Pareto, mas na grande maioria dos jogos não existe um ótimo de Pareto, ou seja, a melhor estratégia para um jogador é diferente da melhor estratégia para o outro jogador.

2.3 Porque estudar a Teoria dos Jogos ?

Todos nós desde criança, pelo menos em algum momento tivemos contato com algum tipo de jogo: Uma brincadeira de pegar, esconder, jogos de tabuleiros, jogos eletrônicos ou disputa esportiva de qualquer tipo e mesmo depois de adultos, alguns jogos ainda estão presentes em nossas vidas, como o futebol, basquete, futebol americano dentre outros que despertam a paixão de milhões de pessoas mundo afora e são encarados no nosso dia-a-dia como algo natural e grande parte das pessoas não considerariam jogos como algo a ser estudado seriamente.

Porém, se pensarmos, vamos ver que em nossa linguagem usaremos a palavra jogo para designar atividades bem mais sérias que aquelas que praticamos nos nossos momentos de lazer. Isso se tornará ainda mais evidente quando usamos expressões como jogo da política internacional, o jogo da livre concorrência, dentre outros.

Sempre que um conjunto de indivíduos, empresas, partidos políticos, etc., estiver em uma situação de interdependencia recíproca, isto é, as decisões tomadas por um dos entes influenciam os demais entes reciprocamente, pode-se dizer que eles se encontram em um jogo, com isso, qualquer intereção estratégica de jogadores pode ser considerada um jogo.

Fiani(2011 [6]) analisa o real motivo de se estudar teoria dos jogos através de uma das mais importantes batalhas da Segunda Gerra Mundial: a batalha do mar de Bismarck.

Em dezembro do ano de 1942, o alto comando de guerra do Japão decidiu fazer uma transferência dos seus reforços da China e do Japão para Lae, em Papua Nova Guiné, o que permitiria que os japoneses se recuperassem da derrota de Guadacanal e se preparassem para uma nova batalha. Porém, este movimento tinha um risco muito alto, pois o poderio aéreo aliado era fortíssimo na região, mesmo assim os japoneses no dia 28 de fevereiro de 1943 iniciaram a transferência de suas tropas para Lae, navegando na sua velocidade máxima.

Um dado importante é que as tropas japonesas tinham duas rotas alternativas para fazer o trajeto: a rota pelo sul que tinha um tempo bom e boa visibilidade e a rota norte, que tinha um tempo ruim e baixa visibilidade, por ourto lado, os aliados tinham apenas aviões de reconheciimento para pesquisar uma rota por vez, sendo que as buscas consumiam um dia inteiro.

Assim, se os aliados mandassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque logo em seguida, mas se mandassem para a rota errada, perderiam um dia de ataque. Os aliados sabiam que se os japoneses escolhessem a rota sul e fossem localizados de imediato, com os aliados também escolhendo a rota sul, o bom tempo iria garantir 3 dias de bombardeios, mas se os japoneses escolhessem a rota norte, mesmo com os aliados encontrando eles de imediado, o mau tempo faria com que apenas dois dias de bombardeio fossem possíveis. Ainda poderíamos ter os japoneses escolhendo a rota sul e os aliados escolhendo a rota norte, onde eles perderiam um dia de bombardeio, mas com o bom tempo na rota sul, eles ainda teriam dois dias inteiros de bombardeios ou os japoneses poderiam escolher a rota norte, e os aliados escolhendo a rota sul, perderiam um dia de bombardeio, e com o mau tempo da rota norte só teriam um dia de ataque ao comboio japonês, dados que serão expressados na tabela a seguir:

Forças Aliadas	**Comboio Japonês**	
	Rota Sul	Rota Norte
Busca Rota Sul - Primeiro dia	3 dias de Bombardeio	1 dia de Bombardeio
Busca Rota Norte - Primeiro dia	2 dias de Bombardeio	2 dias de Bombardeio

Tabela 2.2: A Batalha do Mar de Bismarck.

Ao analisar a tabela acima vemos que a melhor situação para o combio Japonês seria eles escolherem a Rota Norte e os aliados escolherem a Rota sul para o primeiro dia de buscas, já que não os encontrariam e o mau tempo da Rota norte tornaria possível apenas um dia de bombardeio, e o pior cenário para os japoneses seria que ambos escolhessem a rota Sul, já que a boa visibilidade tornaria possivel três dias ininterruptos de bombardeios ao combio japonês de tal forma que no dia 01 de março de 1943 o combio japonês saiu em direção a cidade de Lae pela rota norte e ainda no primeiro dia foi avistado pelas tropas aliadas, mas com o mau tempo não conseguiram atacar o comboio japonês devido ao mau tempo, porém no dia seguinte iniciaram os bombardeios que duraram os dois dias, destruindo todo o comboio japonês.

Os aliados tinham conhecimento prévio que em um dia de bombardeio não atingiriam seu objetivo de destruir todo o comboio japonês, porém em dois dias tal objetivo seria atingido. Observando a tabela 2.2 que representa as possibilidades da batalha de Bismarck, podemos ver na linha 1, que se iniciassem a busca pela rota sul, poderiam ter o melhor cenário possível com os três dias de bombardeio, mas também teriam o pior cenário possível com apenas um dia de bombardeio e não conseguindo seu objetivo final, porém ao analisar a linha 2, para qualquer movimento dos japoneses eles teriam dois dias de bombardeios, o que já era suficiente para suas pretensões, com isso eles puderam prever o movimento japonês e derrotá-los, utilizando elementos da teoria dos jogos e mostrando na prática sua importância, a teoria dos jogos vem para ajudar a desenvolver a habilidade que tempos de raciocinar estrategicamente, ampliando as possibilidades de interação dos jogadores.

2.4 Elementos de um Jogo

Antes de iniciarmos e definirmos o que é um jogo iremos mostrar os diversos elementos básicos que compõe um jogo, denifindo cada um deles, os quais podem ser encontrados em Fiani (FIANI 2011 [6]).

1. Agentes ou Jogadores:

   Definição 1. *Um jogador ou agente na teoria dos jogos é qualquer indivíduo ou grupo de indivíduos que que tem capacidade para tomar decisão, cada jogador é um ser racional e sempre baseia suas interações buscando o melhor resultado possível para si.*

2. Interações:

   Definição 2. *São as ações de cada um dos jogadores, e cada uma destas interações afetam diretamente os demais jogadores, e estas interações podem ser simultâneas ou alternadas.*

3. Incertezas: Mesmo com o agente escolhendo suas ações sempre buscando os melhores resultados, nem sempre resultado obtido é o esperado pelo jogador, deve-se levar em consideração as consequências de cada uma das ações e estas incertezas estão presentes nos jogos.

4. Estratégia: É cada uma das escolhas que o jogador pode fazer em um determinado momento do jogo. Cada um dos agentes tem um conjunto de estratégias. Estas estratégias podem ser de dois tipos:

   - Determinística: Quando a escolha do jogador é baseada em dedução racional, sendo esta chamada também de estratégia pura.
   - Probabilística: Quando a escolha do jogador é acontece depois que ele possa calcular suas chances de ganhos ou perdas, uma estratégia assim, determinada por um conjunto de estratégias puras, sendo chamadas também de estratégias mistas.

5. Payoff ou Recompensa: É o ganho ou perda que um jogador recebe após utilizar sua estratégia, sempre sendo dada por um número Real e é atribuido através de uma função, chamada função utilidade do jogo, podemos dizer que esta função utilidade é o resultado da escolha dos jogadores.

2.5 Definição de Jogo

Segundo Sartini (SARTINI 2004 [13]), a teoria dos jogos pode ser definida como sendo a teoria onde os modelos matemáticos que vem a estudar as escolhas decisórias de condições de conflitos, e tem como elemento básico seus jogadores que deles participam e cada um desses jogadores tem um conjunto de estratégias a serem utilizadas e quando cada jogador escolhe uma estratégia temos um lance, e cada jogador ao realizar cada um dos lances tem interesses ou preferências, em suma, cada jogador tem uma função que atribui um número real (ganho ou payoff) em cada uma das situações do jogo.

De forma mais específica, um jogo tem os seguintes elementos básicos: possui um número finito de jogadores, representado pelo conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ...a_n\}$. Cada jogador $a_i \in A$, possui um conjunto finito de de soluções $B_i = \{B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}, ..., B_{imi}\}$, denominadas estratégias puras do jogador $a_i \, (m_i \geq 2)$. Um vetor $u = (u_{1j_1}, u_{2j_2}, u_{3j_3}, ..., u_{kj_k})$, onde u_{kj_k} , é uma estratégia pura para o jogador $a_i \in A$, denominado como um perfil de estratégia pura, o conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam o produto cartesiano:

$$\prod_{i=1}^{n} B_i = B_1 \times B_2 \times B_3 \times ... \times B_n,$$

denominado espaço de estratégia pura do jogo. Para o jogador a_i , existe uma função utilidade, definida por:

$$\begin{aligned} u_i &: B \to \mathbb{R} \\ u &\to u_i\,(u)\,, \end{aligned}$$

que relaciona o ganho $u_i\,(u)$ do jogador a_i a cada perfil de estratégia pura $u \in B$.

2.6 Critérios de Classificação de Jogos:

Para Fiani (FIANI 2011 [6]), existem diversos critérios de classificação de jogos:

- Podemos classificá-los quanto ao número de jogadores que deles participam, com isso temos os jogos com 2 (dois) jogares, jogos com 3 (três) jogadores, jogos com 4 (quatro) jogadores, até jogos com n jogadores, considerando n como sendo um número Natural maior ou igual a 2. Porém ao dizer que um jogo é para n jogadores não quer dizer nacessariamente que apenas n pessoas podem participar, porém, as regras são para n jogadores, e cada jogador pode ser um grupo exclusivo de pessoas que tenham interesses em comum, e na estrutura do jogo, cada um desses grupos é considerado um jogador.

- Podemos ainda classificá-los quanto ao número de lances, podendo os jogos serem então finitos ou infinitos:

  1. Finitos: Quando os players tem um número finitos de lances ou alternativas;
  2. Infinitos: Quando os players tem um número infinito de lances ou alternativas.

- Os jogos ainda podem ser completos e perfeitos, quando cada um dos jogadores tem informações completas para desempenhar qualquer um dos lances, a altura que estes são realizados, ou caso contrário este jogo é tido como imperfeito.

- Temos ainda a classificação quanto a soma dos jogadores:

  1. Jogos de soma zero são jogos estritamente determinados e os ganhos de um jogador estão em uma proporção de igualdade, relativamente as perdas do outro, são aqueles em que a soma dos payoffs dos jogadores é zero, isto é, um jogador só pode sair vencedor, se o outro jogadar sair derrotado, como temos no xadrez, no pôquer, etc. É neste tipo de jogo que se aplica o teorema minimax.
  2. Nos jogos com soma significativa acontece o contrário dos jogos de soma zero, ou seja, os jogos não são estritamente determinados e nem os ganhos de um jogador não estão em uma proporção de igualdade com as perdas do outro. Este tipo de jogo termina em uma estratégia mista.

3. Já nos jogos de soma constante temos que a soma dos payoffs dos jogadores é a mesma, indiferente das distribuições entre os participantes do jogo. No jogo de soma constante, há uma única estratégia a seguir. O jogador não tem outra alternativa.

2.7 Soluções de um Jogo

Uma solução de um jogo para Fiani (FIANI 2011 [6]), é uma previsão de todas os resultados que aquele jogo pode assumir.

Consideremos então dois bancos, o Banco A e o Banco B e eles tem que decidir se renovam ou não renovam os empréstimos de uma empresa em dificuldade financeira. A empresa tomou R$ 5 milhões de cada um dos bancos, mas por péssimas escolhas nos negócios a empresa tem seus ativos valendo R$ 6 milhões, insuficientes para pagamentos dos empréstimos e cada um dos bancos tem apenas duas opções: renovar ou não renovar o empréstimo.

Se ambos os bancos decidirem renovar seus empréstimos a empresa consegue se manter operando por um ano, pagando normalmente o juros de R$ 1 milhão de reais para cada banco, decretando após isso falência, resultando então no pagamento de R$ 4 milhões de reais para cada um dos bancos, porém se um banco renovar o empréstimo e o outro não renovar, a empresa não consegue se manter e decreta falência, com isso o banco que não renovou o empréstimo recebe todo o valor emprestado, no caso R$ 5 milhoes e a que renovou recebe a diferença de R$ 1 milhão, já se as duas se recusarem a renovar o empréstimo, a empresa decreta falência e cada um dos bancos recebe R$ 3 milhões.

Banco A	Banco B	
	Renova	Não Renova
Renova	R$ 4 milhoes, R$ 4 Milhões	R$ 1 milhoes, R$ 5 Milhões
Não Renova	R$ 5 milhoes, R$ 1 Milhões	R$ 3 milhoes, R$ 3 Milhões

Tabela 2.3: Jogo de Renovação de Empréstimo dos Bancos A e B

Se analisarmos do pondo de vista do banco A, caso a banco B resolvesse Renovar o empréstimo, o Banco A poderia renovar, recebendo com isso R$ 4 milhões ou ainda não renovar, recebendo com isso R$ 5 milhoes, porém se o Banco B não renovasse o empréstimo o Banco A poderia renovar, recebendo com isso R$ 1 Milhão ou não renovar recebendo então 3 milhões. Observe que para qualquer uma das escolhas do Banco B, o banco A teria a opção de não renovar como sendo pelo menos tão boa quanto qualquer outra solução disponível, o que de forma análoga também acontece com B, com isso ambos não renovarão os empréstimos e receberão R$ 3 Milhões cada. Como temos para cada jogador uma estratégia dominante, isto é, todas as outras estratégias exceto a estratégia dominante são estritamente dominadas.

2.8 Formas de Representação de um jogo sequencial:

Jogos simultâneos como o demonstrado na tabela 3, não nos fornecem informações de possíveis desdobramentos futuros das escolhas dos jogadores, no caso dos bancos envolvidos, contudo, muitas vezes os players fazem escolhas a partir do que outros jogadores já decidiram anteriormente, os chamados jogos sequenciais. Isto exige um modelo para representar e analisar um jogo diferente dos modelos apresentados para jogos simultêneos, um jogo mais adequado, para todos os desdobramentos sucessivos das interações estratégicas.

A figura abaixo representa um jogo entre duas empresas de carros, a empresa denominada consolidada e a empresa de nome Inovações, esta última deseja entrar no Mercado de carros elétricos que já é dominado pela empresa consolidada, e para entrar neste Mercado ela terá que analisar se sua concorrente manterá o preço ou reduzirá o preço dos seus carros elétricos.

Se ela lançar e a empresa consolidada mantiver seu preço, a empresa Inovações terá um faturamento de R$ 4 milhões de reais, enquanto a consolidada ficará com um faturamento de R$ 1 milhão de reais, porém se a empresa consolidada reduzir seu preço e ela decidir por entrar entrar neste Mercado as duas concorrerão arduamente pelo Mercado ficando cada uma com R$ 2 milhões de faturamento.

Porém se a empresa inovadora decidir por manter o preço e a empresa inovações não entrar no Mercado, a empresa consolidada irá faturar R$ 4 milhões, enquanto a empresa Inovações faturará R$ 1 milhão, e por ultimo se a empresa consolidada reduzir o preço dos seus carros elétricos e a empresa inovações não adentrar no Mercado, a empresa consolidada irá faturar R$ 3 Milhões e a empresa Inovaçãos vai faturar R$ 1 milhão, conforme demonstrado na árvore de jogos a seguir:

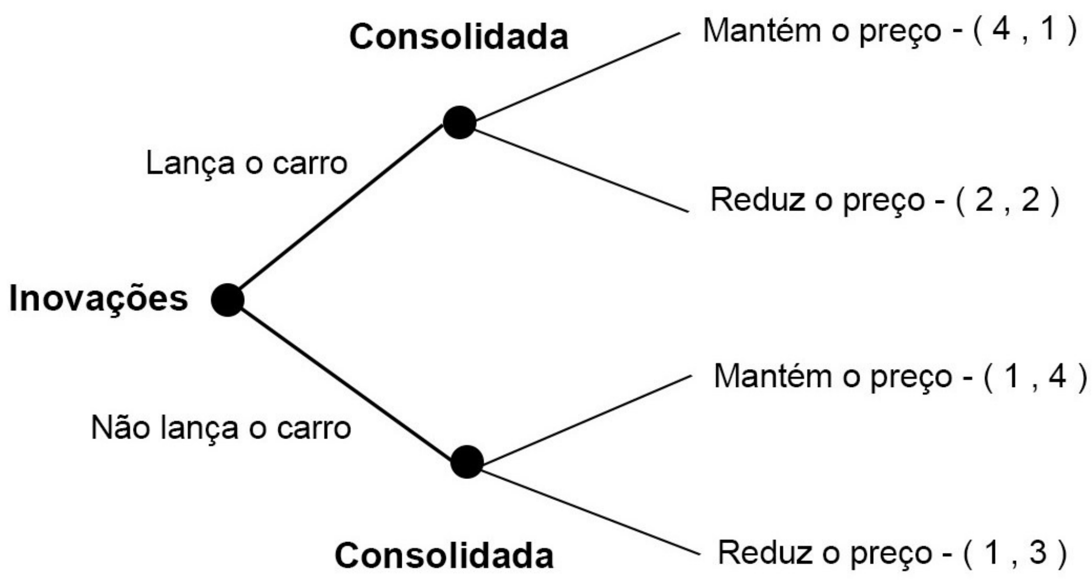

Figura 2.4: Jogo Sequencial na forma estendida

Na árvore de jogos cada nó, representado pelos pontinhos representa uma etapa do jogo, em que um dos jogadores tem que tomar uma decisão, como o jogo deve ter um início, sempre teremos um nó inicial, que não possui um nó predecessor, e também teremos os nós terminais, aqueles que não possuem nós sucessores, onde são expressas as recompensas, expressas em numerous, sempre na ordem em que os jogadores entram no jogo.

Na árvore de jogos temos algumas regras que devem ser respeitadas, são elas: Todo nó deve ser precedido por no máximo um outro nó, nenhuma trajetória pode ligar um nó a ele mesmo e todo nó na árvore de jogos deve ser successor de um único nó, com excessão do nó inicial.

2.9 Dominância:

Estratégia Dominante: Uma estratégia é dita dominante quando é ótima para um jogador independente das estratégias escolhidas pelos demais jogadores, e quando cada jogador possui uma estratégia dominante, dizemos que a combinação dessas estratégias é um equilíbrio de estratégias dominantes.

- Dominância estrita iterada nada mais é do que um processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas.

Exemplo: Considere o jogo determinado pela matriz de pagamentos abaixo:

		G2			
		S21	S22	S23	S24
G1	S11	(5,2)	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	S12	(0,0)	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	S13	(7,0)	(2,2	(1,1)	(5,1)
	S14	(9,5)	(1,3)	(0,2)	(4,8)

Tabela 2.4: Jogo de dominância estritamente iterada 1

Observe que para o jogador G2, a estratégia S21 é estritamente dominada pela estratégia S24, assim, a coluna S21 da tabela pode ser eliminada, ficando:

		G2		
		S22	S23	S24
G1	S11	(2,6)	(1,4)	(0,4)
	S12	(3,2)	(2,1)	(1,1)
	S13	(2,2	(1,1)	(5,1)
	S14	(1,3)	(0,2)	(4,8)

Tabela 2.5: Jogo de dominância estritamente iterada 1.2

Observe ainda que para o jogador G2, a estratégia S23 é estritamente dominada pela estratégia S22, assim a coluna S23 da tabela poderá ser eliminada, restando:

	G2		
G1		S22	S24
	S11	(2,6)	(0,4)
	S12	(3,2)	(1,1)
	S13	(2,2	(5,1)
	S14	(1,3)	(4,8)

Tabela 2.6: Jogo de dominância estritamente iterada 1.3

Podemos ver agora que a para o jogador G1, a estratégia S11 é estritamente dominada pela estratégia S12, assim a linha S11 ta tabela poderá ser eliminada, onde obteremos então:

	G2		
G1		S22	S24
	S12	(3,2)	(1,1)
	S13	(2,2	(5,1)
	S14	(1,3)	(4,8)

Tabela 2.7: Jogo de dominância estritamente iterada 1.4

Note agora que, para o jogador G1, a estratégia S14 é estritamente dominada pela estratégia S13, assim a linha S14 da tabela poderá ser eliminada, restando:

	G2		
G1		S22	S24
	S12	(3,2)	(1,1)
	S13	(2,2	(5,1)

Tabela 2.8: Jogo de dominância estritamente iterada 1.5

Agora temos que para o jogador G2 a estratégia S24 é estritamente dominada pela estratégia S22, assim a coluna S24 poderá ser eliminada, ficando:

		G2
		S22
G1	S12	(3,2)
	S13	(2,2

Tabela 2.9: Jogo de dominância estritamente iterada 1.6

Por último, vemos que a estratégia S13 é estritamente dominada pela estratégia S12. Vemos então que o resultado do jogo é (3,2), isto é, o jogador 1 escolhe a estratégia S12e o jogador 2 vai ser a estratégia S22.

2.10 Equilíbrio de Nash em Estratégias puras.

Para Fiani (FIANI 2011 [6]), diz-se que uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores, e isso é verdade para todos os jogadores.

Nash observou a chance de uso das melhores estratégias por parte de todos os jogadores, de forma que o Estado regulador utilize a melhor estratégia regulatória e o regulado também se utilize da melhor estratégia para atingir seus objetivos. Quando isso ocorre diz-se que estão em equilíbrio de Nash, simples de ser exposto em um jogo com dois jogadores mais bastante complexo quando se tem um número maior de participantes com um jogo de múltiplas ações.

Considere que duas lojas esportivas na cidade de Teresina, a Teresina Esportiva e a loja Piauí esportes vendem a mesma camisa do 4 de Julho, time da cidade de Piripiri por R$ 80,00, e ambas devem decidir se fazem uma promoção para aumentar as vendas das camisas, mesmo que isso afete o lucro destas camisas. Se ambas venderem suas camisas a R$ 80,00 cada uma fatura R$ 72.000,00, já que cada uma delas conseguiria vender 900 camisas, se ambas vendessem as camisas a preço promocional de R$ 70,00, cada uma venderia 1.000 camisas, tendo um faturamento de R$ 70.000,00. Porém se uma das duas fizesse a promoção e a outra não, a que vendeu a preço promocional de R$ 70,00 venderia 1.700 camisas, faturando R$ 119.000,00 e a que vendeu ao preço normal de R$ 80,00 venderia 300 camisas, totalizando um faturamento de 24.000,00, conforme a tabela de payoff a seguir:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Piauí Esportes</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Teresina Esportiva</td><td>R$ 80,00</td><td>R$ 70,00</td></tr>
<tr><td>R$ 72.000,00 ; R$ 72.000,00</td><td>R$ 24.000,00 ; R$ 119.000,00</td></tr>
<tr><td>R$ 119.000,00 ; R$ 24.000,00</td><td>R$ 70.000,00 ; R$ 70.000,00</td></tr>
</table>

Tabela 2.10: Jogo lojas esportivas

Note que para empresa Teresina esportiva agir ela deve considerar todas as opções da empresa Piauí Esportes, e ela vê que se a Teresina Esportes decidir manter o preço a R$ 80,00 , para a Teresina Esportiva é melhor fazer a promoção, pois terá um maior payoff, já se a Piauí Esportes decidir fazer a promoção e baixar o valor da camisa para R$ 70,00, a empresa Teresina Esportiva deverá novamente fazer a promoção que tem um valor de payoff maior, analogamente a empresa Piauí Esportes deverá fazer o mesmo estudo das suas possibilidades encontrando o mesmo resultado, logo, elas ambas tem mesma estratégia dominante que responde melhor as necessidades de cada empresa, com isso dizemos que elas estão em um Equilíbrio de Nash, e que ambas deverão fazer a promoção e ficando com isso com um faturamento de R$ 70.000,00 cada.

Capítulo 3

Abordagem via Situações-Problema

3.1 O que é um problema matemático?

Dante (2002 [5]) define problema matemático como: um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado.

Para os Parâmetros curriculares Nacionais (PCN): Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início. No entando é possível construi-la. (BRASIL, 1997 p.44 [3]).

Para Dante(2002 [5]) e Silva (SILVA,2018 [14]), os objetivos da resolução de problemas matemáticos são: fazer o aluno pensar, desenvolver o raciocínio, dar a oportunidade ao estudante de se envolver com as aplicações da matemática, equipar o estudante com estratégias para resolver os problemas e dar uma boa base matemática as pessoas.

Baseado nas informações acima de conceitos e objetivos dos problemas matemáticos, vejamos o problema abordado por Fisher (FISHER, 2008 [7]) para um maior entendimento do que são problemas matemáticos.

- Uma pessoa vai a um restaurante com seus amigos, sabe-se que a conta será dividida igualmente entre cada um deles. O restaurante serve três diferentes pratos, com valores diferentes cada, sendo eles: O primeiro prato é peixe, que custa R$ 30,00, o segundo é camarão, que custa R$ 50,00 e o terceiro é lagosta que custa R$ 70,00. Se você fosse Pedro, qual o prato que você escolheria ?

Notemos que, para resolvermos o problema inicialmente precisamos entender o problema. O que precisamos buscar ? Quais todos os dados do problema ? Logo após defirmos o que devemos encontrar e os dados problemas matemáticos devemos então elaborar um plano de ação e executá-lo.

3.2 Tipos de problemas matemáticos:

Polya (1995 [10]) dividiu os problemas matemáticos em quatro tipos: Problemas rotineiros, problemas de determinação, problemas de demonstração e problemas práticos:

- Problema rotineiro - pode ser considerado o que consiste em resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, caso a resolução da forma geral da equação quadrática haja sido previamente ensinada e exemplificada, de tal maneira que o aluno nada mais tenha a fazer do que substituir algumas letras, que aparecem na solução geral, pelos números -3 e 2. Mesmo que a equação quadrática não tenha sido resolvida genericamente sob a forma literal, mas se meia dúzia de equações desse tipo, com coeficientes numéricos, o tenham sido pouco antes, o problemas poderá ser chamado ?rotineiro?. De modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido. Ao apresentar um problema, o professor põe à frente do aluno uma resposta imediata e decisiva à indagação: Conhece um problema correlato? Desse modo, o aluno de nada mais precisa, além de um pouco de cuidado e de paciência para seguir uma fórmula preestabelecida, sem ter a oportunidade de usar o seu discernimento nem as suas faculdades inventivas. (p. 124).

- Problemas de determinação - tem por objetivo encontrar um certo objeto, a incógnita. Os problemas de determinação podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas.

Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos. (p. 124).

- Problemas de demonstrações - têm por objetivo mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa. Temos de responder à pergunta: esta afirmativa é verdadeira ou falsa? E temos de respondê-la conclusivamente, quer provando-a verdadeira, quer provando-a falsa. (p. 124).

- Problemas práticos - são diferentes, em diversos aspectos, dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmo e ambos os casos. Os problemas práticos da Engenharia geralmente envolvem problemas matemáticos. Um exemplo muito ilustrativo de problema prático é a construção de uma barragem sobre o rio. (p.124)

Dante (2002 [5]) também classifica os problemas matemáticos, e por Dante, eles são classificados em: Problemas-padrão, problemas-processo, problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça.

- Problemas-padrão: a solução já está contida no enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, com o objetivo de recordar e xar os fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações;
- Problemas-processo ou heurísticos: sua solução envolve as operações que não estão contidas no enunciado, exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação;
- Problemas de aplicação: também chamados de situações-problema, são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos;
- Problemas de quebra-cabeça: constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque. (Dante, 2002[5], p. 16)

Além de Polya (1978 [10]) e Dante (2002 [5]), Huete e Bravo (2006 [13]) apresentam outra classificação para os problemas matemáticos, eles classificam os problemas em bem estruturados e os que não apresentam uma estrutura bem definida.

> Problemas bem estruturados são aqueles que geralmente aparecem na instrução ou nos livros-textos de matemática. Nesse tipo de problemas, a informação para resolvê-lo é parte do enunciado, as regras para encontrar a solução são claras, além de existirem critérios definidos para resolvê-los. Por outro lado os problemas mal estruturados são aqueles que de modo geral, se encontram no cotidiano. Aqui é freqüente que não exista informação suficiente para resolvê-lo ou talvez demasiada informação. Assim, quem tente resolvê-los necessita reformulá-los e fornecer ou eliminar certa informação na fase de resolução. (HUETE E BRAVO, 2006, p.140).

3.3 Etapas para resolução de problemas matemáticos:

3.3.1 1ª Etapa: Entender o Problema

Ao iniciar a resolução do problema, primeiramente é necessário entender o que o problema pede, e para isso o aluno deverá responder perguntas como:

1. O que o problema pede ?
2. O que se procura no problema ?
3. Quais os dados e as condições do problema ?
4. É possível desenhar graficamente um esboço, tabela ou diagrama do problema em questão ?
5. É possível estimar ou garantir a resposta do problema ?

3.3.2 2ª Etapa: Elaborar um plano

Nesta etapa o estudante deve desenvolver um plano de ações para resolver o problema em si. Aqui, deve-se traçar as ações estratégicas que levarão à solução do problema por uma série de caminhos: Representação do problema, tentativa e erro, dentre outros.

Nesta etapa podemos elaborar perguntas como:

1. Você já respondeu problemas como este anteriormente ?

2. Você conhece algum problema semelhante que possa ajudar na resolução deste problema ?

3. As informações deste problema pode ser representada na forma de uma tabela, gráfico ou um diagrama ?

3.3.3 3ª Etapa: Executar o plano

Nesta etapa iremos executar o plano estratégico desenvolvido, verificando-o a cada passo dado, aqui podemos executar todas as estratégias pensadas, sendo possível então, obter-mos várias formas de resolução de um mesmo problema.

3.3.4 4ª Etapa: Revisar a solução

Nesta etapa é analisada a execução do planejamento estratégico desenvolvido, a verificação faz com que o aluno reveja cada passo utilizado na obtenção da solução, esta análise é um excepcional exercício de aprendizagem e é nesta análise que pode-se detectar e corrigir possíveis enganos.

Após esta verificação podemos formular alguns questionamentos:

1. Existe uma outra forma de resolver o problema proposto ?

2. Pode-se utilizar esta estratégia para resolver problemas semelhantes ?

Capítulo 4

Resolução de alguns problemas de Teoria dos Jogos via método de Polya:

4.1 Problema 01

Um problema tratado por Benevides (BENEVIDES 2012 [2]) foi:

Exemplo 1. *Cada aluno deve escolher um número entre 0 e 100, após a escolha de todos os alunos, faremos a média aritmética entre os números escolhidos, vence o aluno que tiver o número mais perto para menor que 2/3 da média obtida.*

4.1.1 1ª Etapa: Entender o problema:

O que o problema pede ?

Ele deve achar o número mais próximo de 2/3 da média dos números que os alunos escolherem.

Quais os dados e as condições do problema ?

O aluno deverá escolher um número entre 0 e 100 e número vencedor não pode ultrapassar o valor de 2/3 da média.

4.1.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano:

As informações do problema podem ser representadas de alguma forma?

Não podemos colocar na forma de gráfico pois não sabemos os valores dos demais alunos, porém temos algmas informações relevantes, primeiro, os números variam de 0 a 100, e estatisticamente podemos dizer que a média entre eles deverá algo próximo de 50, sendo 2/3 de 50 igual a 33.

4.1.3 3ª Etapa: Executar o Plano:

Nesta etapa o aluno executa o plano desenvolvido e responde a problema proposto colocando no papel o valor de 33.

4.1.4 4ª Etapa: Revisar a Solução:

Agora analisaremos os resultados, e vamos verificar que a estratégia usada é bem eficiente, porém se todos os alunos tiverem o mesmo pensamento, a média então ficaria em 33 e 2/3 de 33 seria 22, sendo o número mais próximo menor que 33 o 21. E novamente se todos colocarem o 21, a média seria 21, ficando então 2/3 de 21 igual a 14, tendo o número mais próximo menor que 14, o 13, e assim, sucessivamente, tendendo com isso o resultado ao zero, então ele deve sempre pensar no que os outros estão pensando, pensar nos demais alunos da turma como seres pensantes e tentar sempre antecipar as estratégias dos demais, buscando sempre a melhor jogada.

4.2 Problema 02

Benevides (BENEVIDES, 2012 [2]) também trás o seguinte problema:

Exemplo 2. *Uma rifa as cegas de uma barra de cereal com uma quantidade determinada de pessoas, aquela que der o maior lance de todos leva a barrinha.*

4.2.1 1ª Etapa: Entender o problema:

O que o problema pede ?

O jogador deve dar o maior lance.

Quais os dados e as condições do problema ?

O lance dado não pode ser acima do valor de mercado do produto, ou então o leilão não seria vantajoso.

4.2.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano:

As informações do problema podem ser representadas de alguma forma?

Não podemos colocar na forma de gráfico pois não sabemos os valores dos demais alunos, porém temos algmas informações relevantes, sabemos o valor valor aproximado de uma barrinha de chocolate semelhante a barra leiloada, sabemos que temos que dar o maior valor possível, porém não pode ultrapassar o valor do produto, então, daremos um lance bem próximo ao valor da barra de chocolate e sairemos vencedores do leilão.

4.2.3 3ª Etapa: Executar o Plano:

Nesta etapa o aluno executa o plano desenvolvido e responde a problema proposto dando o lance de um valor muito próximo ao valor de mercado da barra de chocolate.

4.2.4 4ª Etapa: Revisar a Solução:

Agora analisaremos os resultados, e vamos verificar que a estratégia usada é bem eficiente, porém todos os alunos usarão da mesma estratégia, o que deixará o jogo bastante acirrado, e a média tenderá a aproximar-se do preço real do produto.

4.3 Problema 03.

Fisher (FISHER 2008 [7]) trás o problema a seguir:

Exemplo 3. *Você e três colegas de sala irão a um restaurante, e comprometeram-se a dividir a conta igualmente, neste restaurante existem três opções de pratos, o primeiro é um peixe que custa R$ 30,00, o segundo é camarão que tem um custo de R$ 50,00 e o terceiro é uma lagosta, que está custando R$ 70,00. Qual prato você pediria ?*

4.3.1 1ª Etapa: Entender o problema:

O que o problema pede ?

Que escolha um prato dentre as três opções disponíveis

Quais os dados e as condições do problema ?

Temos três pratos diferentes para escolhermos, com três valores também diferentes, e todos dividirão a conta de forma igualitária.

4.3.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano:

As informações do problema podem ser representadas de alguma forma?

Podemos verificar que os três pratos tem valores diferentes e se eu pedir um peixe, que custa R$ 30,00 e outro colega pedir uma lagosta que tem o preço de R$70,00, dividiríamos a conta de forma igualitária, ficando cada um responsável pelo pagamento de R$ 50,00. Note que quando eu peço um prato no valor inferior, eu acabo pagando um valor maior que o prato que foi consumido, então, para que eu evite o prejuízo eu pedirei lagosta, que é o prato mais caro.

4.3.3 3ª Etapa: Executar o Plano:

Nesta etapa o aluno executa o plano desenvolvido e responde a problema proposto escolhendo então lagosta para o jantar.

4.3.4 4ª Etapa: Revisar a Solução:

Agora analisaremos os resultados, e vamos verificar que a estratégia usada é bem eficiente, porém todos os alunos usarão da mesma estratégia e a tendência é cada um escolher a lagosta e portanto cada um deverá pagar o valor consumido.

4.4 Problema 04.

Fiani (FIANI 2011 [6]) problematiza:

Exemplo 4. *Um casal pretende sair junto para passear, o homem pretende assistir um jogo de futebol e a mulher prefere ir ao cinema. Ambos dão preferência por passarem a noite juntos. Se eles forem ao futebol juntos, então o homem tem satisfação maior que a da mulher, caso ambos forem juntos ao cinema a mulher terá a satisfação maior. Finalmente, se optarem sair sozinhos ambos ficarão insatisfeitos.*

4.4.1 1ª Etapa: Entender o problema:

O que o problema pede ?

Que um casal defina qual programa farão para se divertir.

Quais os dados e as condições do problema ?

O homem prefere futebol e a mulher prefere ir ao cinema, se eles saírem juntos ficarão insatisfeitos e se forem juntos ao cinema a mulher ficará mais satisfeita que o homem e se forem ao futebol juntos, o homem ficará mais satisfeito que a mulher.

4.4.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano:

As informações do problema podem ser representadas de alguma forma?

Podemos representar em uma tabela, conforme representado abaixo:

<table>
<tr><td rowspan="4">Mulher</td><td></td><td colspan="2">Homem</td></tr>
<tr><td></td><td>Futebol</td><td>Cinema</td></tr>
<tr><td>Futebol</td><td>(1 , 2)</td><td>(-1 , -1)</td></tr>
<tr><td>Cinema</td><td>(-1 , -1)</td><td>(2 , 1)</td></tr>
</table>

Tabela 4.1: Jogo dos Casais

Se a mulher escolher futebol e o homem também, então ela terá um nível de satisfação 1, enquanto ele tem um nível de satisfação 2, se ambos escolherem cinema, a mulher terá um nível de satisfação 2 enquanto o homem tem um nível de satisfação 1, já se ambos saírem separados eles terão níveis de satisfação -1.

Com isso eles deveriam conversar entre si e escolherem um local, onde eles saiam juntos, já que quando o homem sai para o futebol, a recompensa para ambos seria maior se a mulher também escolhesse futebol, o mesmo acontece com o cinema, pois se o homem escolhe cinema, a recompensa para ambos seria maior se ela também escolhesse cinema.

4.4.3 3ª Etapa: Executar o Plano:

Nesta etapa os jogadores conversam, já que trata-se de um jogo cooperativo e escolhem um e apenas um lugar para eles irem juntos.

4.4.4 4ª Etapa: Revisar a Solução:

Agora analisaremos os resultados, e vamos verificar que a estratégia usada é bastante eficaz, pois se cada um tivesse escolhido o local onde sua satisfação é maior, eles iriam separados para esse locais e teriam um payoff menor.

4.5 Problema 05.

Outro problema trazido por Benevides (BENEVIDES, 2012 [2]) é que:

Exemplo 5. *Luís e Carlos estão em lados opostos de uma ciclovia em alta velocidade, aproximando-se cada vez mais de forma bastante perigosa, eles devem decider se mantém ou desviam a trajetória. Se ambos mantiverem sua trajetória, eles irão colidir, tendo um nível de satisfação negativo(-1), porém se ambos desviarem eles não colidirão, mas terão o aborrecimento de terem mudado seu percurso, e terão níveis de satisfação baixos (1), porém se um desviar e o outro se mantiver, então aquele que desviou terá nível de satisfação mais baixo (0) e o que manteve sua trajetória ficará com um nível alto de satisfação (2).*

4.5.1 1ª Etapa: Entender o problema:

O que o problema pede ?

Definir se mudamos de trajetória ou não.

Quais os dados e as condições do problema ?

Se mudarmos a trajetória e a outra pessoa não ela terá uma satisfação maior que a nossa, porém se ela mudar a trajetória e a gente não, teremos uma satisfação maior que ela, por outro lado se ambos mantivermos o percurso, ocorrerá o choque e ambos ficaremos bastante insatisfeiros.

4.5.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano:

As informações do problema podem ser representadas de alguma forma?

Podemos representar em uma tabela, conforme representado abaixo:

		Carlos	
		Mantém	Desvia
Luis	Mantém	(-1 , -1)	(0 , 2)
	Desvia	(2 , 0)	(1 , 1)

Tabela 4.2: Jogo Durão x Medroso

Se Luís escolher se manter na pista, a melhor estratégia para Carlos seria desviar, pois nela ele teria um maior payoff, porém se Luís escolher desviar, a melhor estratégia para Carlos, aquela que vai gerar um maior payoff é ele se manter na pista, analogamente o mesmo vale para Luís. Então o melhor é esperar o máximo que conseguir, esperar a decisão do outro e fazer exatamente o movimento oposto ao do concorrente.

4.5.3 3ª Etapa: Executar o Plano:

Nesta etapa os jogadores avançam e esperam a decisão do rival, para que quando o outro jogador faça sua jogada, ele faça a jogada exatamente oposta a do jogador concorrente.

4.5.4 4ª Etapa: Revisar a Solução:

Agora analisaremos os resultados, e vamos verificar que a estratégia usada é muito eficiente, pois se ambos tiverem a mesma decisão eles ou se chocarão, ou ambos mudarão sua trajetória, rendendo payoff menores que os pagamentos das jogadas onde eles usam estratégias opostas.

4.6 Problema 06.

Outro problema bastante difundido e trazido por Fiani (FIANI 2011 [6]) é:

Exemplo 6. *Duas pessoas são presas por porte de armas e por lei, devem cumprir 3 anos de prisão, o delegado acredita que eles cometeram outros crimes e ao prender os colocam em selas separadas e sem comunicação alguma, por acreditar que eles cometeram outros crimes o delegado faz a cada um a seguinte proposta, se ele confessar os outros crimes e seu colega não confessar, ele é liberado e seu amigo pega 10 anos de prisão, porém se ele não confessar o crime e o colega confessar então o colega é libertado e ele cumpre 10 anos de prisão, se ambos confessarem, ambos pegam 5 anos de prisão, porém se ambos negarem, ele por falta de provas os prende apenas por porte de armas, o que os levam a 3 anos de cárcere, o delegado deixa claro que a mesma proposta feita a um sera levada para o outro preso. Se você fosse um dos prisioneiros, o que você faria ?*

4.6.1 1ª Etapa: Entender o problema:

O que o problema pede ?

Escolher entre confessão ou não confessar seus crimes.

Quais os dados e as condições do problema ?

Os dois presos estão separados, onde não podem se comunicar.

4.6.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano:

As informações do problema podem ser representadas de alguma forma?

Podemos representar em uma tabela, conforme representado abaixo:

Preso 01		Preso 02	
		Confessa	Não Confessa
	Confessa	(-5 , -5)	(0 , -10)
	Não Confessa	(-10 , 0)	(-3 , -3)

Tabela 4.3: Jogo dos Prisioneiros

Suponhamos que somos o preso 01, então tentaremos antecipar os passos do Preso 02 e vamos analisar os passos que ele pode ter, primeiro, caso o Preso 02 confesse, temos duas opções, também confessar, ficando detidos por 5 anos, ou não confessar, ficando detidos por 10 anos, logo, para o casa do Preso 02 confessar, nossa melhor jogada seria também confessar. Porém se o Preso 02 não confessar, temos também duas opções, a primeira delas confessar, o que nos libertaria imediatamente ou ainda podemos não confessar, o que nos daria 3 anos de prisão, logo, para o caso do preso 02 não confessar a melhor solução seria confessar. Então, em todos os cenários possíveis, confessar é a melhor solução para o preso 01.

4.6.3 3ª Etapa: Executar o Plano:

Nesta etapa o jogador 01 escolhe a solução que tem um payoff mais atrativo em todos os cenários e confessa o crime.

4.6.4 4ª Etapa: Revisar a Solução:

Agora analisaremos os resultados, e vamos verificar que a estratégia usada é muito eficiente pois ele é estritamente dominante em relação as outras, porém, deve-se observar que o Preso 02 tem exatamente as mesmas opções e deve escolher igual ao preso 01. Então como a melhor solução para um dos jogadores é a melhor solução para os demais jogadores temos um equilíbrio de Nash.

4.7 Problema 07.

Fiani (FIANI 2011 [6]) ainda trás o seguinte problema:

Exemplo 7. *Temos dois bancos, o Banco Houdini e o Banco Hateen e eles tem que decidir se renovam ou não renovam os empréstimos de uma empresa em dificuldade financeira. A empresa tomou R$ 5 milhões de cada um dos bancos, mas por péssimas escolhas nos negócios a empresa tem seus ativos valendo R$ 6 milhões, insuficientes para pagamentos dos empréstimos e cada um dos bancos tem apenas duas opções: renovar ou não renovar o empréstimo.*

Se ambos os bancos decidirem renovar seus empréstimos a empresa consegue se manter operando por um ano, pagando normalmente o juros de R$ 1 milhão de reais para cada banco, decretando após isso falência, resultando então no pagamento de R$ 4 milhões de reais para cada um dos bancos, porém se um banco renovar o empréstimo e o outro não renovar, a empresa não consegue se manter e decreta falência, com isso o banco que não renovou o empréstimo recebe todo o valor emprestado, no caso R$ 5 milhoes e a que renovou recebe a diferença de R$ 1 milhão, já se as duas se recusarem a renovar o empréstimo, a empresa decreta falência e cada um dos bancos recebe R$ 3 milhões. Se você é o Banco Houdini, você renova ou não o empréstimo ?

4.7.1 1ª Etapa: Entender o problema:

O que o problema pede ?

Devemos escolher como o banco Houdini vai agir, se renova ou não o empréstimo.

Quais os dados e as condições do problema ?

A empresa tomou um empréstimo de R$ 5 milhões de cada um dos dois bancos, mas não consegue honrar com o pagamento deles.

4.7.2 2ª Etapa: Elaborar um Plano:

As informações do problema podem ser representadas de alguma forma?

Podemos representar em uma tabela, conforme representado abaixo:

		Hateen	
Houdini		Renova	Não Renova
	Renova	(R$ 4 Milhões , R$ 4 Milhões)	(R$ 1 Milhão , R$ 5 Milhões)
	Não Renova	(R$ 5 MIlhões , R$ 1 Milhão)	(R$ 3 MIlhões , R$ 3 Milhões)

Tabela 4.4: Jogo das instituições Bancárias

Como somos o Banco Houdini, vamos analisar a partir das opções que ele pode escolher, mas não podemos esquecer que o Banco Hateen é racional e seus movimentos são sempre pensado, então devemos antecipar suas ações.

Inicialmente veremos as possíveis opções de jogadas do Banco Hateen, se o Hateen renovar, o banco Houdini tem duas opções, renovar, recebendo R$ 4 Milhões ou ainda pode não renovar, tendo um pagamento de R$ 5 Milhões, já se o banco Hateen não renovar, caberá ao houdini as seguintes opções, renovar, recebendo a quantia de R$ 1 Milhão ou não renovar, que lhe renderia R$ 3 Milhões.

Observe que para o banco Houdini, sempre será vantajoso não renovar o empréstimo.

4.7.3 3ª Etapa: Executar o Plano:

Nesta etapa o Banco Houdini escolhe a solução que tem um rendimento maior, em qualquer um dos cenários e decide não renovar o empréstimo.

4.7.4 4ª Etapa: Revisar a Solução:

Agora analisaremos os resultados, e vamos verificar que a estratégia usada é extremamente eficaz pois ele é estritamente dominante em relação as demais, mas, deve-se observar que o Banco Hateen tem exatamente as mesmas opções e deve escolher igual ao Banco Houdini. Então como a melhor solução para um dos jogadores é a melhor solução para os demais jogadores, logo elas estão em equilibro de Nash, e a Jogada onde os dois não renovam o empréstimo é um Ótimo de Pareto.

Capítulo 5

Considerações Finais

O estudo da teoria dos jogos nos auxiliam a entender melhor o funcionamento das relações humanas, e esta teoria pode ser utilizada mesmo que de forma intuitiva em diversos tipos de relações interpessoais, como política, guerras, julgamentos, disputas empresariais, entretenimento, dentre outras, e com os avanços da matemática esta teoria está a cada dia sendo modelando novas interações alternadas e independentes.

O equilíbrio de Nash, em resumo, mostra que, um jogo não pode ser ganho de uma forma unilateral, ou seja, embora o jogador busque a melhor solução possível para aumentar seus ganhos, os resultados só podem ser maximizados dependendo das decisões adversárias, e quando há uma convergência de escolhas que apresentem os melhores resultados para todos os adversários, temos então o equilíbrio de Nash, logo, para infinitas soluções possíveis, teremos uma solução estável.

Esperamos que este trabalho de conclusão de curso possa ser utilizado para que o leitor busque conhecer os conceitos básicos da teoria dos jogos, e serve também como uma introdução do leitor a teoria dos jogos, para que posteriormente possa se aprofundar mais no assunto.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, A. N. de. Teoria dos jogos: As origens e os fundamentos da teoria dos jogos. UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 2006.

[2] BENEVIDES, Mario. Introdução a Teoria dos Jogos, Rio de Janeiro, 2012.

[3] BRASIL. Parâmetros curriculares Nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental- Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: Acesso em: 21/01/2018.

[4] COURNOT, A.-A. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. L. Hachette (Paris), 1838

[5] DANTE, Luiz Roberto. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. Ática, 2002.

[6] FIANI, R., Teoria dos jogos. Com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais, 3 a ed. Sao Paulo: Editora Campus, 2011.

[7] FISHER, Len, Rock, Paper, Scissors: Game Theory in Everyday Life, 2008.

[8] J. F. Nash Jr., Non-Cooperative Games. Annals of Mathematics, pp. 286?295, 1951.

[9] NEUMANN. John Von e O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1944.

[10] POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto de método matemático; tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995

[11] PRAGUE, M. H. Several Milestones in the History of Game Theory. VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien, 2004. 49,56 p.

[12] SÁNCHEZ HUETE, Juan Carlos; FERNÁNDEZ BRAVO, José A. O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006, 232 p.

[13] SARTINI, Brígida Alexandre , Gilmar Garbugio, Humberto José Bortolossi Polyane Alves Santos e Larissa Santana Barreto Uma Introdução a Teoria dos Jogos. USP, São Paulo, 2004.

[14] SILVA, Antunino da. Resolução de Situações-problema da OBMEP por alunos da 3ª série do Ensino Médio da cidade de União - Pi: uma investigação acerca da análise combinatória, Teresina, 2018.

[15] ZERMELO, E. F. F. Über eine Anwendung der Mengdenlehre auf die theories des Schachspiels. 1913. 501,504 p.