UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ – UESPI

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – CCN

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NISAEL ISÂNIO PEREIRA DOS SANTOS

ALEXANDRE PEREIRA DA CUNHA LIRA

UM ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS E SUA ABORDAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL

TERESINA

2021

ALEXANDRE PEREIRA DA CUNHA LIRA
NISAEL ISÂNIO PEREIRA DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS E SUA ABORDAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL

Relatório final, apresentado a Universidade Estadual Do Piauí, como parte das exigências para a obtenção do título de licenciatura em matemática.
Orientador: Prof. Msc. José de Jesus Ochôa

TERESINA
2021

S237e Santos, Nisael Isânio Pereira dos.
Um estudo sobre polinômios e sua abordagem no ensino fundamental / Nisael Isânio Pereira dos Santos, Alexandre Pereira da Cunha Lira. - 2021.
33 f. : il.

TCC (graduação) – Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Curso Licenciatura Plena em Matemática, *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2021.
"Orientador(a): Prof. Msc. José de Jesus Ochôa."

1. Polinômios. 2. Ensino fundamental. 3. Expressões algébricas. 4. Ensino de matemática. I. Lira, Alexandre Pereira da Cunha. II. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

ALEXANDRE PEREIRA DA CUNHA LIRA
NISAEL ISÂNIO PEREIRA DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS E SUA ABORDAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL

Relatório final, apresentado a Universidade Estadual Do Piauí, como parte das exigências para a obtenção do título de licenciatura em matemática.

Aprovada em: _______/_________/__________.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. (José de Jesus Ochôa)
Afiliações

____
Prof. (Raimundo Nonato Rodrigues)
Afiliações

____
Prof. (Juarez Silvestre Barbosa)
Afiliações

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos pais, que ofereceram apoio e carinho nessa etapa decisiva da vida acadêmica.

Nosso muito obrigado à Deus, que alimentou nossas almas com força e tornou esse sonho possível.

Somos gratos aos colegas de sala da universidade Estadual do Piauí, tornaram nossos dias de aulas mais felizes, em especial a Silvia Torres, que deu sua contribuição na nossa vida acadêmica.

RESUMO

Ressaltamos a nossa preocupação com ensino da álgebra elementar, que está presente na nossa prática docente. O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre a álgebra no ensino fundamental, em especial a abordagem dos polinômios nessa etapa de ensino. Vamos desenvolver uma proposta didática de ensino que facilite a compreensão das operações básicas em expressões algébricas, com exemplos e definições. Nesse sentido, discutiremos o assunto começando pelo o seu contexto histórico, desde a sua descoberta, pelas primeiras civilizações, e a evolução da álgebra até os dias de hoje. Vamos abordar todo o assunto sobre expressões algébricas, monômios, binômios, trinômios, polinômios, produtos notáveis, operações, e etc. E por fim, daremos sugestões e formas de ensino aprendizagem, que possibilitam uma maior troca de conhecimento entre aluno e professor.

Palavras - chave: Polinômios. Ensino Fundamental. Expressões algébricas. Ensino.

ABSTRACT

We emphasize our concern with teaching elementary algebra, which is present in our teaching practice. The present work aims to present a study on algebra in elementary school, in particular the approach of polynomials in this teaching stage. We will develop a didactic teaching proposal that facilitates the understanding of basic operations in algebraic expressions, with examples and definitions. In this sense, we will discuss the subject starting with its historical context, since its discovery, by the first civilizations, and the evolution of algebra until today. We will cover the whole subject about algebraic expressions, monomials, binomials, trinomials, polynomials, notable products, operations, etc. And finally, we will give suggestions and ways of teaching and learning, which enable a greater exchange of knowledge between student and teacher.

Palavras - chave: Polynomials. Elementary School. Algebraic expressions. Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Introduzir aos alunos do Ensino Fundamental o conhecimento de álgebra se tornou uma tarefa desafiadora para a maioria dos professores. A introdução deste conteúdo, de modo geral, é apresentada aos alunos de maneira descontextualizada, por meio de exercícios de fixação mecânicos, e isso faz com que os alunos não compreendam sua abordagem.

A necessidade em desenvolver esse trabalho surgiu pela experiencia obtida em sala de aula, onde nos deparamos com dificuldades dos alunos no que diz respeito a conceitos de álgebra elementar, principalmente os alunos das séries finais do fundamental, onde a e as operações com expressões algébricas são motivo de desgosto para muitos.

Nessa perspectiva, vamos desenvolver uma proposta didática de ensino que facilite a compreensão das operações básicas em expressões algébricas, com exemplos e definições.

No primeiro capítulo, iniciaremos com um breve resumo sobre a história dos polinômios, desde seu surgimento nas antigas civilizações, documentados em papiros e registros cuneiformes, fazendo a comparação entre a linguagem matemática dessa época com a linguagem moderna.

No segundo capítulo, abordaremos os principais conceitos das expressões algébricas, polinômios e operações, procurando exemplificar cada um deles de uma forma fácil e didática.

E por fim, relataremos os principais erros, causas, para esse problema descrito acima. Daremos sugestões e formas de ensino aprendizagem que facilitem o aprendizado da álgebra elementar.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Uma das dificuldades mais encontradas no ensino da álgebra elementar é a interpretação e a utilização das letras em expressões algébricas.

Pensamos que compreender como o pensamento algébrico se desenvolveu historicamente para que possa nos ajudar a compreender melhor algumas dificuldades que os alunos apresentam em relação ao uso das letras em álgebra, principalmente por acreditarmos que existem semelhanças entre o desenvolvimento histórico do pensamento algébrico e o desenvolvimento do pensamento algébrico de nossos alunos.

Inicialmente o homem despertou a necessidade de comparar conjuntos de objetos, animais e pessoas, e fazer uma relação entre eles um a um. Por exemplo, um pastor necessitava controlar o seu rebanho. Passou-se a utilizar pedras: cada animal representava uma. Mas como isso funcionava? Cada animal que ia pastar, uma pedra era colocada dentro de um saco. Ao final do dia, para cada animal que entrava no cercado, uma pedra era retirada. Assim, era possível manter o controle e saber se algum animal havia sido comido por outro animal ou apenas havia se perdido. Partes do corpo como dedos da mão ou dos pés, eram usados no processo natural de contagem, considerando as evidências que o processo de contagem se iniciou com os dedos, deduz-se, que a maneira de as demonstrar foi crucial para a escolha das bases numéricas.

O surgimento das civilizações teve início principalmente em vales de grandes rios, como no Egito, Mesopotâmia, desenvolveram-se cerca de 4000 aC, ambas possuíam formas primitivas de escrita, no qual, os registros psicografados que evoluíram para símbolos mais simples que conhecemos nos dias de hoje.

Diversos registros das civilizações egípcias chegaram até os dias de hoje através de papiros. Papiro de Rhind ou de Ahmes é uma fonte de dados matemática egípcia antiga, que descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso de frações pelos egípcios e seu emprego no método de falsa posição e na solução de problemas de determinação de áreas. Observemos um exemplo:

No papiro de Ahmes, o problema 24, pede o valor de "Aha", se "Aha" e um sétimo de "Aha" é 19.

Para solucionar o problema, os egípcios utilizavam uma técnica chamada **método falsa posição**. Esse método consistia em escolher um valor aleatório para

“Aha” e partir deste valor, eles faziam cálculos e depois comparavam com o resultado, mas provavelmente não era o resultado esperado. Por isso eles utilizavam um fator de correção para obter o valor exato para “Aha”, ou seja, o valor que satisfaz a expressão.

Seguindo esse método egípcio, vamos resolver o problema e encontrar o valor de “Aha”.

Solução:

Escolhemos, ao acaso, uma quantidade inteira divisível por 7, digamos 7. Um sétimo de 7 é igual a 1. Somando 7 $a\,\frac{1}{7}\;de$ 7 é igual a 8 ≠ 19. Então, o fator de correção é um número que multiplicado por 8 é igual a 19, ou seja, $\frac{19}{8}$. Portanto o valor de “Aha”, é igual a $7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$.

■

Escrevendo na linguagem moderna temos:

$$x + \frac{1}{7} \cdot x = 19$$

Encontremos o valor de "x", ou seja, o valor de “Aha” que foi dito anteriormente:

$$x + \frac{1}{7} \cdot x = 19 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{7} \cdot x = 19\right) \cdot 7$$

$\Leftrightarrow 7x + 1x = 133$

$\Leftrightarrow$ ($8x$ = 133)

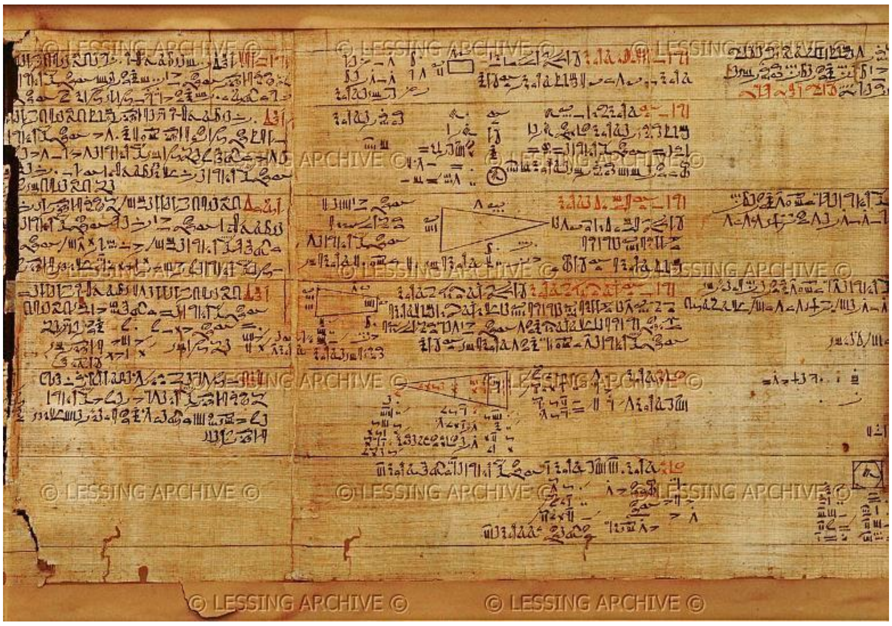
$\Leftrightarrow$ ($8x$ = 133) ÷ 8

$\Leftrightarrow x = \frac{133}{8}$

■

Notemos que o processo de solução do problema é encontrar a raiz da equação $x + \frac{1}{7} \cdot x = 19$, isto é, a raiz do polinômio $P(x) = x + \frac{1x}{7}$ com 19 sendo o valor numérico de $P(x)$.

Figura 1.



Fonte:https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipciapapiro-rhind-ahmes.html

São notáveis as contribuições que o Papiro de Rind deixou para a matemática, este documento é a fonte principal da álgebra, sobretudo no surgimento dos polinômios. Agora vamos estudar sobre as expressões algébricas:

3 EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Definição: São expressões que envolvem variáveis e números com operações da aritmética. As variáveis podem assumir qualquer valor numérico. As letras são chamadas de incógnitas, que são números que não conhecemos.

Exemplos:

(1) mn (2) $3n + 6n$ (3) 8

As expressões algébricas podem ser classificadas da seguinte forma:

Expressão algébrica $\left\{ \begin{matrix} \text{Irracionais} \\ Racionais \\ Racional\ inteira \\ Racional\ fracionária \end{matrix} \right\}$

Veremos abaixo cada uma delas:

Irracionais: É toda expressão algébrica que apresenta letras no radicando

Exemplo:

(1) $\sqrt{m} + n$ (2) $5\sqrt{x} + \frac{y}{2}$

Racionais: Não apresentam letras dentro de raízes.

Exemplos:

(1) $m + n + \sqrt{3}$ (2) $x^2 + 5x + 1$

Racional inteira: Expressões racionais que não têm letras em denominador.

Exemplos:

(1) $\frac{m+n}{2}$ (2) $x^2 + 5x + 1$

Racional fracionária: Expressões racionais que têm letras em denominador.

Exemplos:

(1) $\frac{m+n}{2}$ (2) $\frac{x+\sqrt{y}}{x+y}$

3.1 Valor numérico de uma expressão algébrica

O valor numérico de uma expressão algébrica é o número que pode **substituir** as incógnitas para que seja efetuada a operação e obtido um resultado final.

Exemplo: Calcule o valor numérico da expressão $Q(x) = \frac{2x^2-2x}{x+2}$ para x = 3.

Solução: Substituindo x pelo seu valor, que é 4, na expressão $Q(x) = \frac{2x^2-2x}{x+2}$

obtemos:

$$Q\ (3) = \frac{2\ \cdot 3^2 - 2\ \cdot 3}{3+2}$$

Q (3) = $\frac{2\ \cdot\ 9 - 6}{6}$

$$Q(3) = \frac{18-6}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

■

3.2 Monômios

Monômio é o nome dado a expressões que apresentam apenas o produto entre coeficientes (parte numérica) pelas variáveis (parte literal).

Exemplos:

(1) $4xy$: monômio onde o número 4 (coeficiente) multiplica as variáveis $x\ e\ y$ (parte literal);

(2) $8x^2yz^2$: monômio com o coeficiente 8 e a parte literal x^2yz^2;

(3) 10: monômio com coeficiente 10 e parte literal x^0, pois x^0 é 1, e 10 vezes 1 é 10.

3.2.1 Grau de um monômio

Para um monômio com coeficientes não nulos, temos que seu grau se dará através da soma entre os expoentes da parte literal.

- $5x^2y^2z^4$ → esse é um monômio do 9º grau $(2\ +\ 3\ +\ 4\ =\ 9)$;
- $3bcd$ → esse é um monômio do 3º grau $(1\ +\ 1\ +\ 1 + =\ 3)$.

- $25 \rightarrow$ esse é um monômio de grau zero (ausência da parte literal);
- Entre os monômios $8x^2$, $7x^3$ e $0{,}7x^3$ o de maior grau é $0{,}7x^5$, pois $5 > 3 > 2$

3.2.2 Monômios Semelhantes

Dois monômios são ditos semelhantes se possuírem a mesma parte literal (mesmas letras e mesmas potências em cada letra). Os seguintes monômios são semelhantes:

(1) $-x$ e $5x$

(1) $6ab$ e $2ab$

(2) y^2 e y^2

3.2.3 Adição e subtração de monômios

Só podemos efetuar a adição e subtração de monômios entre termos semelhantes. E quando os termos envolvidos na operação de adição ou subtração não forem semelhantes, deixamos apenas a operação indicada.

Dado os termos $5xy^2$, $20xy^2$, como os dois termos são semelhantes eu posso efetuar a adição e a subtração deles.

Exemplos:

(1) $2xy^2 + 11xy^2$ devemos somar apenas os coeficientes e conservar a parte literal. R.:$13\,xy^2$

(2) $8xy^2 - 21xy^2$ devemos subtrair apenas os coeficientes e conservar a parte literal. R.: $-13\,xy^2$

(3) $4x^2 + 12y^3 - 7y^3 - 5x^2$ devemos primeiro unir os termos semelhantes.

R.: $4x^2 - 5x^2 + 12y^3 - 7y^3 = -x^2 + 5y^3$

3.2.4 Multiplicação de monômios

Quaisquer dois monômios podem sempre podem ser multiplicados. As regras são:

- Multiplicar os coeficientes (“número com número”);

- Somar os coeficientes das letras em comum;
- justapor as outras letras.

OBS :No produto entre duas potências de mesma base, o resultado é a própria base elevada à soma dos expoentes. Matematicamente:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Exemplo:

(1) Calcule o **produto** entre os **monômios** $4xyz$ e $7x^2y^2$.

Solução: primeiro passo, escreva os monômios na forma de multiplicação e, depois, aplique os passos acima.

$$4xyz \cdot 7x^2y^2$$

Coeficiente que são os números $4\,x\,7 = 28$, parte literal que são as letras x conserva, e soma os expoentes $1 + 2 = 3$, parte literal y, os expoentes $1 + 2 = 3$, e por último apenas um expoente na parte literal z, $1 + 0 = 1$. Assim temos como resposta da multiplicação: 28 · x^3y^3z.

3.2.5 Divisão de monômios

Para dividirmos os monômios não é necessário que eles sejam semelhantes, basta dividirmos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. Sendo que quando dividirmos as partes literais, devemos usar a propriedade da potência que diz:

Obs.: $a^m : a^n = a^{m+n}$

Exemplo: ($-40x^2y^3$) : ($-4xy^3$), na divisão dos dois monômios, devemos dividir os coeficientes -20 e -4 e na parte literal dividirmos as que têm mesma base para que possamos usar a propriedade citada acima.

Solução:

$$(-40):(-4) \cdot x^2 : \cdot \mathrm{y}^3 : \mathrm{y}^3$$

$$10 \cdot x^2 - 1 \cdot \mathrm{y}^{3-3}$$

$$10x^1\mathrm{y}^0 = 10x$$

3.3 Polinômios

Os polinômios são a adição e subtração de dois ou mais monômios, o prefixo *poli* que dizer muitos, e são expressões algébricas formadas por números (coeficientes) e letras (partes literais). As letras de um polinômio representam os valores desconhecidos da expressão

Chamamos de polinômio uma função $P: C \rightarrow C$ na variável **x** que possui a seguinte forma:

$$P(x) = a^n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a^1 x + a^0$$

Onde que:

1. a_n, a_{n-1}, ..., a_1 e a_0 são os coeficientes do polinômio;
2. Os expoentes são formados por números naturais.

Exemplos:

(1) $4x^2 + 7x + 3$

(2) $7x^3 – 5xy + 6x$

(3) $9ab + 6a + 3$

3.3.1 Grau dos Polinômios

O grau de um polinômio é dado pelos expoentes da parte literal. Para encontrar o grau de um polinômio devemos somar os expoentes das letras que compõem cada termo. A maior soma será o grau do polinômio.

Exemplos:

(1) $4x^2 + z$: O expoente do primeiro termo é 2 e do segundo termo é 1. Como o maior é 2, o grau do polinômio é 2.

(2) $6x^3y + 7x^4y^3 − 2xy^5$

Solução: Vamos somar os expoentes de cada termo:

$6x^3y$ => 3 + 1 = 4

$8x^3y^3$ => 4 + 3 = 7

$2xy^4$ => 1 + 5 = 6

Como a maior soma é 6, o grau do polinômio é 6.

Obs.: o polinômio nulo é aquele que possui todos os coeficientes iguais a zero. Quando isso ocorre, o grau do polinômio não é definido.

3.3.2 Polinômio com uma Variável

Será um polinômio com uma variável apenas quando a expressão apresentar apenas uma parte literal.

Exemplos:

(1) $C = 6y + y^3 - 7 + 10y^2$ $(variável\ y)$

(2) $C = z^3 + 3z^2 + 4z - 8$$(variável\ z)$

Costuma-se apresentar os polinômios com uma variável, ordenados segundo os expoentes decrescentes dessa variável. Exemplo:

(1) $-5y^3 + 2y^2 - y + 1$

3.4 Operações com Polinômios

3.4.1 Adição com polinômios

Considere os polinômios $-4x^2 + 6x - 3$ e $-3x^3 + 2x - 1$. Vamos efetuar a adição.

Veja como fazer a Adição**:**

- $(-4x^2 + 6x - 3) + (-3x^3 + 2x - 1)$ → eliminar os parênteses realizando o jogo de sinal.

$-4x^2 + 6x - 3 - 3x^3 + 2x - 1$ → reduzir os termos semelhantes

$-4x^2 + 8x - 3x^3 - 4$ → ordenar de forma decrescente de acordo com a potência.

$$-3x^3 - 4x^2 + 8x - 4.$$

3.4.2 Subtração com polinômios

Considere os polinômios $-4x^2 + 6x - 7$ e $-2x^3 + 3x - 2$. Vamos efetuar a subtração entre eles.

Vejamos como fazemos a subtração:

- $(-4x^2 + 6x - 7) - (-2x^3 + 3x - 2)$ → eliminar os parênteses realizando o jogo
de sinal.

$-4x^2 + 6x - 7 + 2x^3 - 3x + 2$ → reduzir os termos semelhantes.

$-4x^2 + 3x - 5 + 2x^3$ → ordenar de forma decrescente de acordo com a potência.

R.: $2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$

3.4.3 Multiplicação com polinômios

A multiplicação com polinômio (com dois ou mais monômios) pode ser realizada de três formas: Multiplicação de monômio com polinômio, multiplicação de número natural com polinômio, multiplicação de polinômio com polinômio.

❖ Multiplicação de monômio com polinômio:

Exemplo:

(1) Se multiplicarmos $3x$ por $(5x^2 + 3x - 1)$, teremos:

$3x. (5x^2 + 3x - 1)$ → aplicar a propriedade distributiva.

$3x. 5x^2 + 3x. 3x + 3x. (-1) = 15x^3 + 9x^2 - 3x$

■

❖ Multiplicação de número natural:

Exemplo:

(1) Se multiplicarmos 3 por $(2x^2 + x + 5)$, teremos:

$3 \cdot (2x^2 + x + 5)$ → aplicar a propriedade distributiva.

$3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5$

$6x^2 + 3x + 15$.

Portanto: $3 . (2x^2 + x + 5) = 6x^2 + 3x + 15$.

■

❖ Multiplicação de polinômio com polinômio:

Exemplo:

Se multiplicarmos $(3x - 1)$ por $(5x^2 + 2)$

$(3x - 1) \cdot (5x^2 + 2)$ → aplicar a propriedade distributiva.

$3x\ 5x^2 + 3x . 2 - 1 . 5x2 - 1 . 2 = 15x^3 + 6x - 5x^2 - 2$

Portanto: (3x – 1) . (5x^2 + 2) = 15x^2 + 6x – 5x^2 – 2

3.5 Divisão com polinômio

3.5.1 Método da chave

Consiste em realizar a divisão entre polinômios seguindo a mesma ideia da divisão entre dois números, o chamado algoritmo da divisão. Veja o exemplo a seguir.
Exemplo: Vamos considerar os polinômios $P(x)$ =$4x^3$ – x^2 $+\ 2$ e D (x) = x^2 + 1, e agora vamos dividi-los utilizando o método da chave.
Solução: ($*$) Completar o polinômio dividendo com coeficientes nulos, caso necessário.
P (x) = $4x^3$ – $x^2 + 0x +\ 2$

($**$) Dividir o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor e, em seguida, multiplicar o quociente por todo divisor.

$$\begin{array}{rr|l} - & 4x^3 - x^2 + 0x + 2 & x^2 + 1 \\ \cline{3-3} & 4x^3 \qquad + 4x & 4x \\ \cline{2-2} & -x^2 - 4x + 2 & \end{array}$$

($***$) Dividir o resto do passo 2 pelo quociente e repetir esse processo até que o grau do resto seja menor que o grau do quociente.

$$\begin{array}{rr|l} & 4x^3 - x^2 + 0x + 2 & x^2 + 1 \\ - & 4x^3 \qquad + 4x & 4x - 1 \\ \cline{2-3} & -x^2 - 4x + 2 & \\ - & -x^2 \qquad - 1 & \\ & -4x + 3 & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Logo, $\boldsymbol{Q(x) = 4x - 1}$ **e** $\boldsymbol{R(x) = -4x + 3}$

■

3.6 Produtos notáveis

Os **produtos notáveis** são expressões algébricas que aparecem com muita frequência no cálculo algébrico. São utilizados no processo de fatoração de polinômios no processo de simplificação dos mesmos.

Obs.: **Quadrado**: quando elevamos ao expoente 2;

3.6.1 O quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos utiliza-se da potencialização para elevar a soma de dois termos ao quadrado. Assim, temos a seguinte expressão:

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

Onde:

- $\boldsymbol{a}$: representa o primeiro termo da expressão;
- $\boldsymbol{b}$: representa o segundo termo da expressão.

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, podemos mostrar que o quadrado da soma de dois termos é o primeiro termo ao quadrado, mais a soma dos produtos do primeiro termo com o segundo, mais o segundo termo ao quadrado.

Logo, temos que:

$(a + b)^2 = (a + b).\ (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^2$

■

3.6.2 O quadrado da diferença de dois termos

O quadrado da diferença de dois termos que se utiliza da potenciação para elevar a subtração de dois termos ao quadrado. Portanto, temos a seguinte expressão:

$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

Onde:

- **a**: representa o primeiro;
- **b**: representa o segundo.

Utilizando os conhecimentos da potenciação e da multiplicação, mais precisamente da propriedade distributiva, vamos desenvolver o problema.

Então:

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$

Assim, o quadrado da diferença de dois termos é o primeiro termo ao quadrado, pela diferença de duas vezes o produto do primeiro termo com o segundo, mais o segundo termo ao quadrado.

■

3.6.3 O produto da soma pela diferença de dois temos

O produto da soma de dois termos pela diferença ocorre quando multiplicamos uma soma entre dois termos com a subtração entre outros dois termos. Logo, temos a seguinte expressão:

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \,.\, (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

Então:

$(a + b).\,(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = \boldsymbol{a^2 - b^2}$

■

O produto da soma pela diferença é o primeiro termo ao quadrado menos o segundo termo ao quadrado.

3.6.4 Cubo da soma de dois termos

Com a propriedade distributiva, é possível criar uma "fórmula" também para **produtos** com o seguinte formato:

$(a + b).(a + b).(a + b)$

Na notação de potência, ele é escrito da seguinte maneira:

$(a + b)^3$

Por meio da propriedade distributiva e simplificando o resultado, encontraremos o seguinte para esse **produto notável**:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Assim, em vez de fazer um cálculo extenso e cansativo, podemos calcular $(x + 5)^3$, por exemplo, facilmente da seguinte maneira:

Solução: $(a + 5)^3 = a^3 + 3a^25 + 3a5^2 + 5^3 = a^3 + 15a^2 + 75a + 125$

■

3.6.5 Cubo da diferença de dois termos

O cubo da diferença é o produto entre os seguintes polinômios:

$(a - b).(a - b).(a - b)$

Por meio da propriedade distributiva e simplificando os resultados, encontraremos o seguinte resultado para esse produto:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

vamos calcular como exemplo o seguinte cubo da diferença:

(1) $(x - 2y)^3$:

Solução:

$(x - 2y)^3 = x^3 - 3x^2 2y + 3x(2y)^2 - (2y)^3$

$= x^3 - 3x^2\, 2y + 3x\, 4y^2 - 8y^3$

$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

Exemplo:

Represente a forma expandida do binômio $(5 + y)^3$:

Solução: Como o expoente do binômio é 3, vamos multiplicar os termos da seguinte forma:

$(5 + y).\ (5 + y).\ (5 + y) = (25 + 10y + y^2).\ (5 + y)$

$= 125 + 50y + 5y^2 + y^3$

3.7 Fatoração de polinômios

Fatoração é um processo utilizado na matemática que consiste em representar um número ou uma expressão como produto de fatores.

3.7.1 Propriedade distributiva ou "colocar em evidencia"

Usamos esse tipo de fatoração quando existe um fator que se repete em todos os termos do polinômio.

Logo, vamos fazer os seguintes passos:

(1) Identificar se existe algum número que divide todos os coeficientes do polinômio e letras que se repetem em todos os termos.

(2) Colocar os fatores comuns (número e letras) na frente dos parênteses (em evidência).

(3) Colocar dentro dos parênteses o resultado da divisão de cada fator do polinômio pelo fator que está em evidência. No caso das letras, usamos a regra da divisão de potências de mesma base.

Exemplo: aplique a propriedade distributiva em $6ab$ + $10abc$:

Solução:

$6ab$ + $10abc$ = 2.3. $a.\ b$ + 2.5. $a.\ b,\ c$

Obs.: note que os fatores "2" e "b" são comuns aos dois termos do polinômio.

2.3. $a.\ b$ + 2.5. $a.\ b.\ c$ = $2b.\ (3a + 5c)$

3.7.2 Fatoração por agrupamento

No polinômio que não exista um fator que se repita em todos os termos, podemos usar a fatoração por agrupamento.

Para isso, devemos identificar os termos que podem ser agrupados por fatores comuns. Nesse tipo de fatoração, colocamos os fatores comuns dos agrupamentos em evidência.

Exemplo:

(1) Fatore o polinômio $px + 3nx + py + 3ny$.

Solução: Os termos $\boldsymbol{px}$ e $\boldsymbol{3nx}$ tem como fator comum o $\boldsymbol{x}$. Já os termos $\boldsymbol{py}$ e $\boldsymbol{3ny}$ possuem como fator comum o $\boldsymbol{y}$.

Aplicando a propriedade distributiva, obtemos:

$x\ (p + 3n) + y\ (p + 3n)$

Note que o $(p + 3n)$ agora também se repete nos dois termos.

Usando novamente a propriedade distributiva, encontramos a forma fatorada do polinômio:

$px + 3nx + py + 3ny = (p + 3n)\ (x + y)$

3.7.3 Fatoração da diferença de Dois Quadrados

Para fatorar polinômios do tipo $a^2 - b^2$, usamos o produto notável da soma pela diferença. Assim, a fatoração de polinômios desse tipo será:

$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$

Para fatorar, devemos calcular a raiz quadrada dos dois termos. Depois, escrever o produto da soma dos valores encontrados pela diferença desses valores.

Exemplo:

(1) Fatorar o binômio $9x^2 - 25$.

Solução:

Primeiro, encontrar a raiz quadrada dos termos:

$$\sqrt{9x^2} = 3 \ e \ \sqrt{25} = 5$$

Escrever esses valores como produto da soma pela diferença:

$9x^2 - 25 = (3x + 5).(3x - 5)$

■

3.7.4 Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Trinômios são polinômios com 3 termos.

Os trinômios quadrados perfeitos $a^2 + 2ab + b^2 \ e \ a^2 - 2ab + b^2$ resultam do produto notável do tipo $(a + b)^2 \ e \ (a - b)^2$.

Assim, a fatoração do trinômio quadrado perfeito será:

$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$ (quadrado da soma de dois termos)

$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$ (quadrado da diferença de dois termos)

Para saber se realmente um trinômio é quadrado perfeito, fazemos o seguinte:

1. Calcular a raiz quadrada dos termos que aparecem ao quadrado.
2. Multiplicar os valores encontrados por 2.
3. Comparar o valor encontrado com o termo que não apresenta quadrados. Se forem iguais, é um quadrado perfeito.

Exemplo:

(1) Fatorar o polinômio $x^2 + 6x + 9$

Solução: Primeiro, temos que testar se o polinômio é quadrado perfeito.

$$\sqrt{x^2} = x \ e \ \sqrt{9} = 3$$

Multiplicando por 2, encontramos: $2.\,3.\,x = 6x$

Como o valor encontrado é igual ao termo que não está ao quadrado, o polinômio é quadrado perfeito.

Assim, a fatoração será:

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

■

Neste capítulo abordaremos sobre a forma de ensino-aprendizagem da álgebra, o que ocasiona a dificuldade da transmissão e entendimento do assunto, abordagem do assunto nos livros didáticos, os erros mais comuns mais comuns que são cometidos em álgebra e principalmente nas possíveis melhorias e métodos educativos que servirão como auxílio para o educador quando for repassar o conhecimento para o educando.

4 DIFICULDADES ENCONTRADAS E SUGESTÕES, NO ENSINO DE ÁLGEBRA NO FUNDAMENTAL

4.1 Erros mais comuns em álgebra

● Parênteses mal colocados ou em falta:

Ocorre principalmente pela falta de atenção ou preguiça, por parte dos alunos. Essa "preguiça" influencia diretamente em problemas que necessitam de interpretação. É notório, que já em aritmética, se a preguiça do aluno persistir e não utilizar os parênteses corretamente ocasiona erro de sinal, por exemplo, que é um dos erros mais comuns cometidos no estudo das potências de números negativos e consequentemente será prejudicado no estudo da álgebra.

Exemplos:

(1) *Eleve* -2 *a quarta potência*.

O aluno escreve:

$-2^4 = -2.2.2.2. = -16$

Maneira correta:

$(-2)^4 = (-2).\ (-2).\ (-2).\ (-2) = 16$

Note que:

$$-16 \neq 16$$

A falta do parêntese levou o aluno a cometer um erro inicialmente simples, mas que pode ser causa de vários outros.

(2) *Eleve* $3x$ *ao quadrado*.

O aluno escreve

$3x^2$

Maneira correta

$(3x)^2 = 9x^2$

$3x^2 \neq 9x^2$, novamente o mesmo erro cometido, a não utilização do parêntese no termo.

(3) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ está errado, o certo é $a^2 - 2ab + b^2$, outro erro bastante cometido $(a + b)^2 = a^2 + b^2$,onde o correto e $a^2 + 2ab + b^2$,

(4) $\sqrt{x^2} = x$, onde o correto seria $\sqrt{x^2}$=$|x|$, $ou\ seja$, $módulo\ de\ x$.

(5) Erros de simplificação:

(a) $\frac{4x+2}{2} = 4x - 1$

(b) $\frac{5x^2+x}{x} = 5x^2 + 1$

Onde o correto seria:

(a) $\frac{4x+2}{2} = 2x - 1$

(c) $\frac{5x^2+x}{x} = 5x + 1$

4.2 Dificuldades encontradas

As dificuldades no ensino da álgebra se dão principalmente por conta da forma pronta e direta com que o assunto é abordado no ensino fundamental, fazendo com que os alunos não consigam compreender e consequentemente não sabem aplicar a álgebra de forma significativa, já que eles não conseguem visualizar suas aplicações práticas. Uma das maiores dificuldades é a falta de interpretação por parte do alunado, os mesmos não conseguem compreender o enunciado matemático e o julgam como complexo e assim não conseguem absorver as informações descritas. Também é perceptível que o aluno apresenta muita resistência em aceitar que as letras representam números, ou seja, representam quantidades e isso causa certo bloqueio na aprendizagem da álgebra, e acabam desistindo o conhecimento.

Um dos principais problemas encontrados na aprendizagem de álgebra e a noção de variável. Um fator influente na apropriação do conceito algébrico está na relação com aritmética.

4.3 Principais causas

De acordo com a nossa experiência em sala de aula, foi perceptível alguns fatores que fazem com que as dificuldades no ensino atrapalhem na transmissão de conhecimento: a má alfabetização é um dos maiores fatores, os alunos são aprovados mesmo ser tem o conhecimento necessário, já que a política de ensino impede que os mesmos fiquem retidos, e por consequência, os alunos são lesados e não conseguem acompanhar e compreender tudo que é repassado. Outro fator que existe principalmente em alunos da escola pública: é a desvalorização do ensino por parte da família, onde os filhos não tem um incentivo e com isso ficam “acomodados”, e a evolução no ensino fica cada vez mais distante. A tecnologia foi criada para auxiliar e melhorar a vida do ser humano, mas na área do ensino o uso da mesma ainda é muito defasado já que o Estado não investe em equipamentos e nem na capacitação dos seus profissionais, e desse modo os alunos perdem o interesse, pois a maioria já possui acesso à tecnologia e são mais atraídos por tudo que a Era Digital tem para oferecer e demonstram desinteresse ou preguiça de solucionar os exercícios sozinhos. O último fator que conseguimos detectar foi em relação ao profissional de ensino: onde na escola pública, o mesmo precisa lidar com a superlotação nas salas de aulas, baixos salários, acúmulos de atividades e cargos, falta de infraestrutura e equipamentos... tudo isso faz com que o rendimento escolar e a transmissão de conhecimento fiquem estagnados.

Podemos analisar que alguns professores não conseguem abordar o conteúdo de forma adequada pois os mesmos não tiveram uma formação adequada. Uso de letras e números juntos, a falta de conteúdo dos alunos vindo das series anteriores.

4.4 Formas de ensino-aprendizagem

O ensino da matemática por meio de resoluções de problemas é de extrema importância no processo de ensino-aprendizagem, pois o ser humano sempre é desafiado a resolver problemas e é por isso que essa prática é um instrumento valioso e deveria ser utilizada como metodologia de ensino, principalmente nas séries iniciais, já que durante a infância é mais fácil conseguir com que o cérebro absorva diversas informações e por consequência algumas dificuldades serão extinguidas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização”

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (BRASIL, 1998, p. 63).

A resolução de problemas pode e deve ser vista como um meio importante para o ensino e a construção da matemática, pois assim os alunos conseguirão raciocinar sobre a importância e necessidade dos conceitos matemáticos. No entanto, a maioria dos professores não utilizam a “resolução de problemas” como método de ensino por não ser uma tarefa fácil, visto que os professores se sentem obrigados a mudar o direcionamento da aula para conseguir suprir as exigências dos seus alunos; e isso ocasiona insegurança nos educadores.

Os educadores matemáticos devem ser incentivados a utilizar metodologia em suas aulas; precisam fazer com que os problemas deixem de ser considerados como meros exercícios, fórmulas ou processos operatórios e que deixem ser resolvidos de forma mecânica.

De acordo com o CBC de Matemática do estado de Minas Gerais (2007, p.16), entende-se que situação-problema envolvem o processo de tradução do enunciado e a tomada de decisão sobre quais ferramentas matemáticas serão usadas em sua resolução. No mesmo documento, os problemas são aqueles que levam a uma compreensão do que realmente é a Matemática, pois se passam em um ambiente onde coexistem os pensamentos formal e intuitivo, bem como as linguagens formal e verbal. É estimulado o trabalho em grupo, a crítica dos modelos adotados e o confronto dos resultados obtidos com o enunciado do problema.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais: Um problema matemático e uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, geralmente, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução (BRASIL, 1998, p.41). (Brasil, 1998)

Ainda de acordo com o CBC de Matemática (Op. Cit., p.14) resolver situações-problemas, sabendo solucionar e validar estratégias e resultados, desenvolver formas de raciocínio e processos como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa e utilizando métodos e conceitos matemáticos, bem como a utilização da tecnologia que é de suma importância para a compreensão e atuação na sociedade. A prática da resolução de problemas deve ser levada como uma forma bastante eficaz de desenvolver o raciocínio e criatividade do aluno, a fim de estabelecer uma meta a ser alcançada e um método para que isso ocorra. Também vai fazer com que ele seja capaz de trocar opiniões com os colegas, enfrentar diversas situações e principalmente aplicar os conhecimentos matemáticos em fatos concretos.

4.5 Sugestões

O estudo da álgebra poderia começar no 5º ano com uma pequena introdução. Seria iniciado com pequenos problemas e exercícios simples. Podemos tomar como exemplo, as atividades com quadrados vazios e fazer a substituição por letras, como segue abaixo:

Complete o quadro para que a sentença seja verdadeira:

a) 5 + □ = 15 depois fazer como 5 + a = 15

b) □ - 8 = 17 depois fazer como b – 8 = 17

c) 8 + 2 = □ depois fazer como 8 + 2 = c

Também é válida a utilização de jogos, resolução de problemas, modelagem matemática e atividades diversificadas que estimulem o ensino e aprendizagem da álgebra.

É extremamente necessário que no ensino fundamental II que o professor faça com que o aluno se depare com problemas onde a equação seja mais eficaz do que recursos aritméticos, fazendo com que assim o estudo da álgebra tenha mais significado. No sétimo ano normalmente o aluno aprende que uma equação é uma igualdade numérica da qual não se sabe o valor da incógnita e assim o aluno se limita a decorar regras onde é possível “isolar” a letra. Assim, ele não consegue compreender equações lineares de uma variável sem solução ou com infinitas soluções e menos ainda equações quadráticas com duas ou mais soluções.

A maneira mais eficiente de ensinar álgebra diminuir as dificuldades nesse ensino é fazendo a introdução nas séries iniciais, através de atividades pedagógicas que deem embasamento ao ensino algébrico no oitavo ano. E também é necessário enfatizar no ensino da aritmética e a importância de conteúdos e regras que serão utilizados também em álgebra, como por exemplo, a fatoração, aplicação da propriedade distributiva, divisão por zero, e entre outros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluímos, afirmando, que desenvolver este trabalho nos trouxe satisfação como imensa como educadores. Trabalhar essa alfabetização algébrica é uma tarefa desafiadora, mas com essas ferramentas podemos analisar, e detectar, e encontrar meios onde possamos mudar essa realidade.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática).** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no Ensino Fundamental**: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas / Adriana Bonadiman. - 2007.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

MURAKAMI, C.; IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos. Funções.** 8. ed. Vol. 1. Editora: Atual. 2004.

OLIVEIRA, Alcione A. de. **Construindo o conceito de álgebra: monômios e polinômios.** Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2013.

SOUZA, Ivson Praxedes de. **Polinômios e aplicações [manuscrito**]. Trabalho de Conclusão de Curso. Graduação em Matemática. Universidade Federal da Paraíba, 2016.

SANTOS, André Oliveira dos. **A Álgebra no Ensino Fundamental como ferramenta de generalização**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.