UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ – UESPI

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – CCN

CAMPUS "POETA TORQUATO NETO"

CURSO - LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

DANIELE DA SILVA NASCIMENTO

O USO DA LUDICIDADE PARA O DESENVOLVIMENTO DO COGNITIVO: O JOGO SENHA NA ANÁLISE COMBINATÓRIA

TERESINA – PI

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ – UESPI

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA- CCN

CAMPUS "POETA TORQUATO NETO"

CURSO - LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

DANIELE DA SILVA NASCIMENTO

O USO DA LUDICIDADE PARA O DESENVOLVIMENTO DO COGNITIVO: O JOGO SENHA NA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de conclusão do curso apresentado a Universidade Estadual do Piauí – UESPI, como requisito para obtenção do grau de licenciatura.

Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva

TERESINA – PI

2022

ATA DE APRESENTAÇÃO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 09 dias do mês de março de 2022 às 15:00 horas , na sala virtual do Campus do Campus Torquato Neto, UESPI, na presença da Banca Examinadora, presidida pelo(a) professor(a) Afonso Norberto da Silva e composta pelos seguintes membros: 1) Thassio Luan Alves Rodrigues; 2) Raimundo Nonato Rodrigues e aluno(a) Daniele da Silva Nascimento apresentou o Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática como elemento curricular indispensável à Colação de Grau, tendo como título: O USO DA LUDICIDADE PARA O DESENVOLVIMENTO GOGNITIVO – O JOGO SENHA NA ANÁLISE COMBINATÓRIA. A Banca Examinadora reunida em sessão reservada deliberou e decidiu pelo resultado (aprovado ou Reprovado) Aprovado ora formalmente divulgado ao aluno e aos demais participantes, e eu professor(a) Raimundo Nonato Rodrigues na qualidade de professor titular da disciplina de TCC lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos membros da Banca Examinadora e pelo(a) aluno(a) Daniele da Silva Nascimento apresentador(a) do trabalho.

OBS: ____

Assinaturas:

1 – Professor Titular da disciplina TCC

Prof. Raimundo Nonato Rodrigues

2 - Presidente da Banca Examinadora

Dr. Afonso Norberto da Silva

3 – Membro da Banca

____

Me. Thássio Luan Alves Rodrigues

4 – Aluno(a)

____

Daniele da Silva Nascimento

O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso

Assim, justificados pela fé, estamos em paz com Deus, por meio de nosso Senhor Jesus Cristo. Por meio dele e através da fé, nós temos acesso à graça, na qual nos mantemos e nos gloriamos, na esperança da glória de Deus. E não só isso. Nós nos gloriamos também nas tribulações, sabendo que a tribulação produz a perseverança, a perseverança produz a fidelidade comprovada, e a fidelidade comprovada produz a esperança. E a esperança não engana, pois o amor de Deus foi derramado em nossos corações pelo Espírito Santo que nos foi dado. (Bíblia Sagrada, Romanos 5)

AGRADECIMENTOS

Até aqui nos ajudou o senhor! Dedico este trabalho primeiramente a Deus, meu grande protetor, pai e redentor, Aquele que sempre me manteve de pé e sempre me mostrou o poder que um filho de Deus tem. Agradeço a minha família, em especial ao meu esposo Marcos Paulo Rodrigues da Silva que nunca me deixou estudar sozinha, que muitas vezes precisou aprender o conteúdo e me ensinar, que me motivou a correr atrás dos meus sonhos, que sempre preparou o café da madrugada e estava ao meu lado pronto pra me socorrer. Agradeço de um modo especial ao meu professor orientador Dr Afonso Norberto pela paciência que teve na construção desse trabalho, pelos alertas e motivações, você é um grande mestre.

Quero deixar também registrado o meu muito obrigada aos meus companheiros de estudo Clarohana Grigório e Isaac Batista, pelas caronas, domingos de estudos, motivações e perseverança, vocês foram fundamentais. E por fim a minha Geração Hallelujah que orou comigo em todos os momentos importantes da minha caminhada.

“A matemática intimida a maioria e encanta a poucos. Mas, às vezes sem saber, muita gente gosta de brincar com números. A popularidade do Sudoku e do cubo mágico é uma prova disso, as pessoas podem praticar matemática (sem saber), e ainda por cima curti-la. A matemática é para todos”.

Crilli, Tony 2017

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade apresentar a importância da ludicidade no ensino matemático, abordando um dos conteúdos de análise combinatória que proporcionam o desenvolvimento e aprimoramento do raciocínio lógico do aluno, como permutações, combinações e arranjos, utilizando para isso um antigo jogo chamado Mastermind ou Senha. A principal ideia é mostrar que muitos jogos podem ser utilizados em sala de aula na construção de conceitos matemáticos e até na visualização de conteúdos por meio da prática, onde o aluno pode fazer suas próprias observações desses conceitos com o auxílio de métodos gamificados. Foi apresentado a relação entre os conceitos e fórmulas necessárias e o jogo.

Palavras-chave: Análise combinatória, Permutação, Jogo senha, Lúdico.

ABSTRACT

The present work aims to present the importance of playfulness in mathematics teaching, addressing one of the combinatorial analysis contents that provide the development and improvement of the student's logical reasoning, such as permutations, combinations and arrangements, using an old game called Mastermind or Password. The main idea is to show that many games can be used in the classroom in the construction of mathematical concepts and even in the visualization of contents through practice, where the student can make their own observations of these concepts with the help of gamified methods. The relationship between the necessary concepts and formulas and the game was presented.

Keywords: Combinatorial analysis, Permutation, Password game, Playful.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência capaz de desbravar inúmeros setores sociais, usada para muitos fins como fonte de algoritmos de pesquisas, relações com medidas de tempo e comprimento, presente desde a música ao espaço. Muitas descobertas foram sendo feitas e aprimoradas através da matemática e não irão parar por aí. A matemática possui uma linguagem única, falada em todos os países sem precisar de uma tradução, conseguindo estar presente em todos os setores e contribuindo para o desenvolvimento das relações entre homem – homem e homem – meio.

Como disciplina didática, a matemática é vista nos primeiros anos educacionais do ser humano de forma lúdica, ao pintar um número a criança tem seu primeiro contato com os algarismos, formas geométricas, aprendem a sequenciar os números e tem seus primeiros passos na contagem. Dessa forma o ser humano é inserido no meio educacional da matemática, mas é no seio familiar que ele possui seu primeiro contato com a matemática, porém de forma mais concreta.

No seio familiar as crianças aprendem a dividir por meio de repartições de um alimento ou brinquedo, aprendem sobre o sistema monetário, mesmo que de uma forma superficial. Através da observação e repetição muitas crianças passam a ter contato com muitos dos princípios matemáticos.

A beleza da matemática está no desenvolvimento do raciocínio lógico, no aprimoramento da memória e na criação de estratégias. Enquanto disciplina, dá ao aluno a capacidade de interpretação, independência no raciocínio e chega a despertar curiosidade sobre fatos que regem o mundo.

Infelizmente muitos alunos quando chegam no ensino fundamental acabam perdendo o gosto pela matemática que é despertado em seus primeiros anos de estudo, quando para eles a matemática era um livro de descobertas. E por muito tempo esse “desânimo, “desgosto” e até “medo” em relação a essa disciplina vem se perpetuando por gerações sendo consagrada como “o bicho de sete cabeças” ou até mesmo “o terror das disciplinas”.

Desse modo os alunos acabam por não se dedicarem ou simplesmente não são estimulados a gostarem dessa disciplina. Pela dificuldade encontrada por muitos desses alunos em não entenderem o conteúdo é que se faz necessário aos professores buscarem e até criarem novos estímulos em seus alunos para que eles possam não só entender o conteúdo, mas descobrir o mundo através do olhar matemático.

O lúdico é a forma de aprimorar e até mesmo incrementar conhecimentos por meio de jogos e brincadeiras, tornando o aprendizado mais divertido, instigador de novas ideias e reforçador de interações em grupos. Por meio de jogos e brincadeiras aplicados em sala de aula o rendimento dos alunos se torna maior.

Quando se pede a um aluno que tente resolver um problema matemático dando a ele condições palpáveis e que estejam em sua rotina, o resultado é perceptível. Pois, muito mais do que números ele conseguirá enxergar na prática aquilo que o cálculo está expressando. Alunos que tendem a ter dificuldades em matemática acabam desestimulados e é nesse aspecto que o lúdico vem auxiliar.

OBJETIVOS

Objetivo geral

O principal objetivo dessa pesquisa é trazer ao educador uma proposta que permita tornar as aulas de matemática atraentes e desafiadoras para os alunos e que possibilite o desenvolvimento do cognitivo educacional a partir de um olhar mais lúdico da matemática.

Objetivos específicos

- Incentivar a criatividade do educador para que este possa trabalhar em sala de aula recursos pedagógicos que permitam ao aluno melhorar sua aprendizagem.
- Explicar a construção do cognitivo educacional fornecendo uma base teórica dentro do contexto da psicologia que explica a proposta apresentada.

1 . Lúdico no ensino aprendizado

1.1 Contexto histórico dos jogos e brincadeiras na educação

Lúdico é uma palavra adjetiva que se originou do latim ludos e se refere a jogos e divertimento. A palavra lúdico segundo o dicionário Aurélio significa feito através de jogos, brincadeiras, atividades criativas.

Dentro do processo de aprendizagem e ensino de uma criança é relacionado ao ato de brincar. Uma vez que ao brincar o aluno abre espaço para a comunicação com o professor. O lúdico ainda está relacionado ao sentimento de liberdade e espontaneidade nas ações.

O ato de brincar permite que as crianças possam descobrir o mundo a sua volta, é por meio da exploração que elas tomam ciência dos fatos que acontecem, dando significado ao mundo. Em uma de suas pesquisas Ramos (2014, p 50) relata que através dos jogos há o desenvolvimento de habilidades cognitivas como: memória e aprendizagem, percepção, inteligência fluida, atenção, velocidade de processamento cognitivo.

A ludicidade na educação não é algo novo, apesar de ser pouco comentada e explorada, mas sempre esteve presente no meio social. Kishimoto (1996,p 28) cita que o jogo foi encarado após a antiguidade como um divertimento ou simplesmente uma atividade frívola desprovida de valor em si mesma.

Leonardo Avanço em uma de suas pesquisas sobre a importância dos jogos na educação cita Aristóteles como um dos filósofos daquela época que acreditavam no jogo como uma simples recreação. Aristóteles um dos grandes filósofos gregos durante o período clássico na Grécia antiga, trouxe uma concepção sobre os jogos:

> Ora, esforçar-se e trabalhar com vistas na recreação parece coisa tola e absolutamente infantil. Mas divertir-nos a fim de poder esforçar-nos, como se expressa Anacársis, parece certo; porque o divertimento é uma espécie de relaxação, e necessitamos de relaxação

> porque não podemos trabalhar constantemente. A relação, por conseguinte, não é um fim, pois nós a cultivamos com vistas na atividade.

Em seu pensamento Aristóteles vê os jogos como uma simples atividade sem propósito algum, a não ser por pura recreação. Ao se falar sobre o uso de brincadeiras e jogos em sala de aula temos que ter como base a finalidade deles, algo que não era fonte de estudo do filósofo em questão.

Platão um dos filósofos e matemáticos do período clássico da Grécia antiga e fundador da primeira instituição de educação superior do mundo ocidental, vem trazer uma visão diferente de Aristóteles:

> Em primeiro lugar e a cima de tudo, a educação, nós o asseveramos, consiste na formação correta que mais intensamente atrai a alma da criança durante a brincadeira para o amor daquela atividade da qual, ao se tornar adulta terá que deter perfeito domínio.

É importante ressaltar que a sociedade se modifica a cada dia e que ao longo dos anos os jogos vêm sendo vistos sob um aspecto mais pedagógico, ganhando um pouco mais de espaço. Entretanto devido a essas mudanças sociais os recursos didáticos sofrem variações também. A psicologia foi uma das áreas que aderiram a ideia do lúdico a sala de aula como forma de auxiliar na construção do conhecimento da criança/adolescente.

Salienta-se também que o uso dos jogos e brincadeiras possui conceitos diferentes para cada pesquisador, pois professores de história, por exemplo, podem utilizar os mesmos jogos que professores de matemática para auxiliar uma aula, os conceitos são diferentes, porém as finalidades dos jogos é a mesma em um contexto geral, auxiliar na construção do conhecimento.

1.2 O lúdico como ferramenta nas aulas de matemática

Ao ser inserida no ensino fundamental a criança sofre uma transição no seu processo de aprendizagem. O que antes era trabalhado em matemática por meio de desenhos, pinturas e sequências simples, agora passa a exigir mais da capacidade do aluno. A partir do ensino fundamental a criança entra em contato com situações problema, contagens mais complexas e interpretações de fatos.

Essa transição torna-se a cada ano escolar mais exigente. Os jogos como auxiliadores da disciplina de matemática ajudam a formar o raciocínio do aluno, bem como despertam interesses pela disciplina. A matemática básica quando bem reforçada pode abrir portas e despertar a criatividade do aluno, tornando-os grandes promissores no futuro.

Jogos como xadrez, roleta das operações, dominó, entre outros são alguns dos exemplos mais comuns de jogos que auxiliam no raciocínio lógico.A matemática é rica em muitos aspectos que vão desde explicar fenômenos grandes como a queda da bolsa de valores e a frequência de um terremoto ou simplesmente fenômenos pequenos, mas de grande importância como a média de alunos que atingiram rendimento 8 no período letivo. Jogos e brincadeiras que envolvam conteúdo da matemática quando bem aplicados e elaborados podem maximizar a visão dos alunos.

Os jogos fazem parte das culturas humanas, tendo sua existência no século XVI e evoluindo até hoje. O jogo tem por base proporcionar aos jogadores um lazer, diversão e relaxamento. Porém podemos perceber que quando usado para fins didáticos proporcionam agilidade, concentração, raciocínio, desenvolve a coordenação motora do ser humano entre outras capacidades.

O ser humano é por natureza curioso e é através dessa curiosidade que a ciência pode evoluir e trazer muitos benefícios para a qualidade de vida do homem. A curiosidade move muitas crianças e jovens a participarem de brincadeiras, demonstrando prazer em aprender. Aliando esse prazer em brincar com a aprendizagem escolar tornará o ensino não só prazeroso, mas permitirá com que o aspecto afetivo implícito no ato de jogar traga bons rendimentos para o conhecimento do indivíduo.

Ao ensinar matemática estamos desenvolvendo o raciocínio lógico e estimulando a capacidade de resolver problemas. Como professores de matemática é importante motivar o aprendizado e desenvolver meios de auxiliar os alunos em suas descobertas. Ao usar jogos como um auxílio nas aulas o professor estimula o conhecimento e a criatividade, fazendo com que os alunos despertem o interesse por aprender a disciplina.

O cognitivo está relacionado à capacidade de um ser de adquirir ou de absorver conhecimentos. Muitos são os métodos utilizados no processo de aprendizagem de um indivíduo, como destaque para esse trabalho temos o método das descobertas.

De acordo com Haydt (2006, p. 205) O método da descoberta Consiste em propor aos alunos uma situação de experiência e observação, para que eles formulem por si próprios conceitos e princípios utilizando o raciocínio indutivo.

O método da descoberta prioriza a experiência concreta do aluno, além disso tem um foco no ensino voltado para a resolução de problemas. Através desse método o professor torna-se uma facilitador do conhecimento, criando situações para que os alunos possam através da observação e manipulação de materiais chegar a conclusões e poder formalizar os conceitos e princípios matemáticos.

O professor oferece aos alunos uma participação mais ativa, o que permite a eles o desenvolvimento não só físico, mas principalmente mental, reflexivo, uma vez que o aluno estará observando e manipulando o material de estudo e coletando informações.

Muitos jogos que são vistos no dia a dia estão repletos de noções matemáticas que se forem associados as aulas poderiam tornar o ensino mais dinâmico. Outro exemplo de jogo que desperta o interesse do aluno e pode auxiliar nas aulas de matemática é o Rummikub. Este jogo permite que o professor possa ensinar sequencias e anagramas.

Trazer o lúdico para a matemática proporcionaria aos educadores criar uma atmosfera afetiva para os alunos, aumentando a percepção destes de que a matemática não só é divertida como está em tudo.

O lúdico pode proporcionar aos alunos situações de observação onde eles possam ter experiências para formularem por si mesmo conceitos matemáticos, tornando assim uma experiência concreta auxiliando na resolução de problemas. Através dessas situações o aluno pode entender melhor os conceitos matemáticos uma vez que ao participar dos jogos adquiri experiências com a observação e a manipulação dos materiais. Ao fazerem isso coletam informações que serão necessárias para chegarem a conclusões sobre princípios matemáticos que estão sendo estudados em sua série escolar.

É importante ressaltar que a experiência só terá um bom proveito se o professor estiver interado sobre o material. Apesar de um mesmo jogo poder abranger mais de um conceito matemático, para que a aula alcance seu objetivo o professor precisa estudar bem e organizar a aula e os materiais necessários de acordo com o conteúdo programático.

2. Introdução a Análise Combinatória

Conforme Hazzan (1946, p.1) a análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições.

Alguns dos exemplos abaixo podem ajudar a compreender melhor o assunto.

- Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar a partir dos dígitos 7,8 e 9?

Para responder a essa pergunta podemos escrever todas as possibilidades dentro de um conjunto.

Seja A o conjunto formado por todos os possíveis números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 7,8 e 9.

A = {78,79,87,89,97,98}, podemos perceber que ao todo há 6 possibilidades diferentes de números.

- De quantas maneiras distintas podemos formar uma sequencia de letras a partir da palavra AMOR?

B é o conjunto das sequências de letras que se obtém, mudando a ordem das letras da palavra AMOR.

B = {AMOR, MAOR, OAMR, RAMO, AMRO, MARO, OARM, RAOM, AORM, MRAO, ORAM, ROAM, AOMR, MROA, ORMA, ROMA, ARMO, MOAR, OMAR, RMAO, AROM, MORA, OMRA, RMOA}

Podemos perceber que calcular o número de elementos de determinado conjunto torna-se trabalhoso e com a ajuda de alguns métodos de contagem podemos encontrar esses valores sem correr o risco de omitir ou repetir agrupamentos. Nesse trabalho iremos mostrar que o professor pode utilizar o jogo senha como forma de mostrar os conceitos importantes da análise combinatória.

2.1 Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo)

O primeiro conceito que abordaremos é o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo. Usamos este princípio para encontrar o número de possibilidades de um evento constituído de n etapas sucessivas e independentes.

Dado um evento com n possibilidades em sua primeira etapa e k possibilidades em sua segunda etapa, então pelo Princípio Multiplicativo temos que existem um total de n X k possibilidades.

Para determinar o total de possibilidade de um evento qualquer usamos o Princípio Fundamental da Contagem que é dado pela multiplicação das quantidades de opções dadas para a realização desse evento.

Exemplo: Uma loja de doces resolve fazer uma promoção de combos de bolos. Em cada combo há um bolo, uma bebida e um doce. São oferecidos três opções de bolos: chocolate, morango e cenoura. Há dois tipos de bebidas: suco de laranja ou acerola. E há quatro opções de doces: brigadeiro, beijinho, romeu e julieta e goiabinha. Levando em consideração todas as opções oferecidas, de quantas maneiras uma pessoa pode escolher o seu combo?

Para resolver esse problema podemos utilizar o Princípio Multiplicativo e destacar cada uma das possibilidades.

3 (bolos) X 2 (bebidas) X 4 (doces) = 24. Ao todo há 24 possibilidades de montar um combo.

2.2 Fatorial

Quando queremos calcular o fatorial de um número basta calcularmos o produto deste número pelos seus antecessores até o número 1. Podemos escrever o fatorial de um número k por **k!**, onde k é um número natural.

$$k! = k \,.\, (k - 1).(k - 2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

Exemplo: o fatorial de 8 é dado por 8! (lê-se 8 fatorial)

8! = 8 . 7 . 6 . 5 . 4. 3 . 2 . 1 = 40320

Usamos fatoriais em problemas que envolvam arranjos, combinações e permutações dos elementos de um conjunto finito.

2.3 Arranjo simples

Consideremos um conjunto X com m elementos todos distintos, dizemos que qualquer sequência de n elementos (todos distintos) é chamada de arranjo simples onde $0 \leq n \leq m$, com n e m naturais e usaremos a notação $A_{m\,,n}$. E poderemos calcular da seguinte forma:

$$A_{m,n} = \frac{n!}{(m-n)!}$$

Onde, $\mathbf{A_{m,n}}$ é dado pelo Arranjo de m elementos tomados de n em n, **m** é a quantidade de elementos que podem ser escolhidos e **n** é a quantidade de elementos por agrupamento.

Usaremos o arranjo quando a ordem dos elementos agrupados for importante, já que a mudança na ordenação dos elementos formará sempre uma nova sequência.

2.4 Permutação simples

A Permutação nos possibilita determinar quantas jeitos existem de ordenar os elementos de um conjunto finito. Permutar é trocar os elementos de um conjunto de lugar, levando em consideração a ordenação deles.

Definição: Seja M um conjunto com m elementos, isto é, M = { a_1, a_2,...,a_m}. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que r = m. (Hazzan, 1946)

Exemplo: seja M = {1, 2, 3}. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos constituídos de 3 elementos, logo seriam: {1,2,3},{1,3,2},{2,1,3}, {2,3,1},{3,1,2},{3,2,1}.

Para saber a quantidade de permutações possíveis para esse conjunto podemos escrever da seguinte maneira: $P_m = m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2) \,.\, ... \,.\, [m-(m-1)]$. Assim, nesse exemplo teríamos $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$.

2.5 Combinação simples

Definição: Seja M um conjunto com m elementos, isto é, M= {a_1,a_2,...,a_m}.Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos. (Hazzan, 1946)

Como a combinação é um conjunto a ordem dos elementos não é importante, diferentemente de uma sequência que a ordenação dos elementos é importante. O que determinará a resolução de um problema será a natureza do mesmo, se os seus agrupamentos dependem ou não da ordenação dos elementos.

Exemplo: Dado M = { 1, 2, 3, 4}. As possíveis combinações desses elementos, tomados dois a dois, são os seguintes subconjuntos: {1,2} {1,3} {1,4} {2,3} {2,4} {3,4}. Note que {1,2} = {2,1}, uma vez que a combinação é um conjunto e a ordem dos elementos não é importante.

Podemos definir a quantidade de combinações possíveis da seguinte maneira:

$$C_{m,r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

Com m, r ∈ N* e r < m.

Utilizando o exemplo acima temos:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

2.6 Permutações caóticas

Definição: Dada uma sequência a1, a2, ..., an, uma permutação é chamada de caótica quando nenhum dos a_i's se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição. (MENDES, 2014)

Considere as letras (a,b,c). As permutações possíveis são: (a,b,c), (b,a,c),(a,c,b), (c,b,a), (b,c,a), (c,a,b). Perceba que nenhum dos elementos de (b,c,a) e (c,a,b) não estão em seus lugares de origem.

Podemos calcular a quantidade de desarranjos de um conjunto com n elementos, Dn da seguinte forma:

$$D_n = n! - \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n . \frac{1}{n!} \right]$$

Usando o exemplo acima temos que:

$$D_3 = 3! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right] = 2$$

Há casos em que há a necessidade de uma permutação caótica onde o número de elementos disponível é diferente do número de vagas. Vejamos um caso para melhor compreensão.

(Pinheiro et al, 2009, p 44) Dados n objetos ($x_1,x_2,...,x_p,y_1,y_2,...y_s$), (Veja que n= p+s) qual o número de permutações dos n objetos que não mantém nenhum dos x_i(i = 1,2,...p) na posição original?

Analisando o problema podemos identificar alguns pontos importantes que devem ser levados em consideração, como o caso de nenhum dos objetos permanecer em sua posição inicial, então teríamos $D_n = C_{s,0} \times D_n$.

Suponhamos agora que apenas um dos objetos dos y_j ($j = 1,2,3...s$) permaneçam em suas posições de origem, então teríamos que escolher quem seria fixado, o que pode ser feito pela $C_{(s,0)}$ maneiras, em seguida seria necessário uma permutação caótica dos n-1 elementos restantes, que poderia ser feito pelo D_{n-1}, utilizando o princípio multiplicativo teríamos $C_{(s,1)} \times D_{n-1}$. O mesmo vale para o caso de apenas dois dos elementos de y_j permaneçam fixos em seus lugares de origem, teríamos $C_{(s,2)} \times D_{n-2}$ permutações.

Se todos os elementos de y_j permanecerem em seus respectivos lugares teríamos $C_{(s,s)} \times D_{n-1}$. Podemos perceber que é necessário levar em consideração os casos onde há elementos que permanecerão em seus respectivos lugares de origem. Logo o resultado para as permutações caóticas de $x_1, x_2,...x_p$ é dado por $C_{s,0} \times D_n + C_{(s,1)} \times D_{n-1} + C_{(s,2)} \times D_{n-2} + ... + C_{(s,s)} \times D_{n-s}$.

Como vimos anteriormente $n = p + s$, podemos reescrever da seguinte maneira $s = n - p$. Então o número de permutações referentes aos x_i seria $C_{(n-p)} \times D_n + C_{(n-p,\,1)} \times D_{(n-1)} + ... + C_{(n-p,n-p)} \times D_{(n-(n-p))}$ que também pode ser escrito como $\sum_{k=0}^{n-p}(C(n-p.k).D(n-k)$, com n sendo o número total dos elementos e p os elementos que serão permutados caoticamente.

3 Utilizando o Jogo senha como recurso no ensino dos métodos de contagem

3.1 Apresentação do Jogo Senha

O jogo Senha, também conhecido como Mastermind, foi inventado por Mordechai Meirowitz e publicado em 1971, é jogado por dois participantes sendo um deles o desafiante e o desafiado que tentará adivinhar o código que o oponente inventar.

Material (ver modelo em anexo)**:**

1 tabuleiro

30 pinos brancos e 30 pinos pretos.

72 pinos com seis cores diferentes (12 de cada cor).

Figura 1: Peças do jogo.

Como jogar

Para jogar este jogo o desafiante deve formar uma combinação escolhendo 4 pinos coloridos distintos dentre as 6 cores que há, com exceção das cores brancas e pretas, ordenando-os sem revelá-lo ao jogador desafiado, essa será a senha. O tabuleiro possui uma fileira de buracos escondida que será usada para esconder a senha.

O jogador desafiado por sua vez terá 6 chances de achar a combinação correta da senha através de palpites feitos, para isso ele colocará no tabuleiro sua primeira tentativa usando uma combinação de 4 cores distintas dentre as 6 cores e pedirá ao desafiante que analise sua tentativa. Após analisar o desafiante irá responder se a combinação feita está correta, porém ele usará apenas os pinos brancos e pretos para responder.

O pino **branco** será usado sempre que na combinação houver um pino na cor correta da senha, mas na posição errada. Já o pino **preto**, será usado para dizer que na combinação há pinos nas cores certas e em posições corretas. O jogo segue sempre com o desafiado fazendo uma nova combinação e o desafiante respondendo com os pinos brancos e pretos até achar a combinação que corresponde à senha escondida ou as tentativas acabarem.

3.2 A análise combinatória por trás do jogo Senha

Chamaremos as cores dos pinos das sequencias por **V** (vermelho), **A** (azul), **Am** (amarelo),**L** (laranja), **Ve** (verde), **R** (rosa) e as cores de respostas por **B** (branco) e **P** (preto). Tomemos como base a senha **V, Am, L, Ve** respectivamente nessa ordem e exploraremos as combinações da senha.

Um dos nossos objetivos é apresentar a análise combinatória por trás do jogo e mostrar que ele pode ser uma das estratégias utilizadas pelo professor para a exploração deste conteúdo em sala de aula.

Podemos iniciar fazendo o seguinte questionamento aos alunos: quantas possibilidades de senhas podem ser criadas pelo desafiante?

Para tentar responder quantas senhas o jogador desafiante pode formar, abordaremos o conteúdo sobre Arranjo simples. No jogo há seis cores disponíveis para a criação da senha. Porém a senha é formada por apenas quatro cores sem repetição.

O professor poderia sugerir aos alunos que tentassem resolver da forma que lhes convém. Depois de um determinado tempo poderia sugerir que usassem anagramas, por fim, após observar o desempenho dos alunos iniciaria explicando sobre arranjos.

Seria muito trabalhoso se os alunos tentassem responder utilizando anagramas, pois as possibilidades são muitas e levaria um tempo bastante considerável para formar todos os anagramas, além disso, os alunos correriam um grande risco de omitir ou repetir as combinações.

Após abordar o conteúdo pediria novamente aos alunos que respondessem o primeiro questionamento. Estes por sua vez munidos da informação sobre arranjo tentariam achar a solução usando a fórmula de arranjos.

$$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

Há 360 possibilidades de senhas que podem ser criadas pelo desafiante.

3.3 Analisando as possibilidades de senhas com base nas respostas do desafiante

Suponhamos que o primeiro chute do jogador desafiado obtenha como resposta por parte do desafiante **B =0 e P =4**, então o jogo terminará pois a senha já será descoberta. Iremos então analisar os outros casos possíveis para descobrir a quantidade de possibilidades que o jogador desafiado poderá fazer em seu segundo palpite.

Figura 2: Palpite B = 0 e P = 4

Caso o primeiro chute dado tenha obtido como resposta **B = 0 e P = 3** teremos as seguintes informações: das 4 cores escolhidas entre as 6 possíveis,3 estão corretas em seus devidos lugares, restando apenas um lugar a ser preenchido por uma das 2 cores que não tinham sido escolhidas inicialmente.

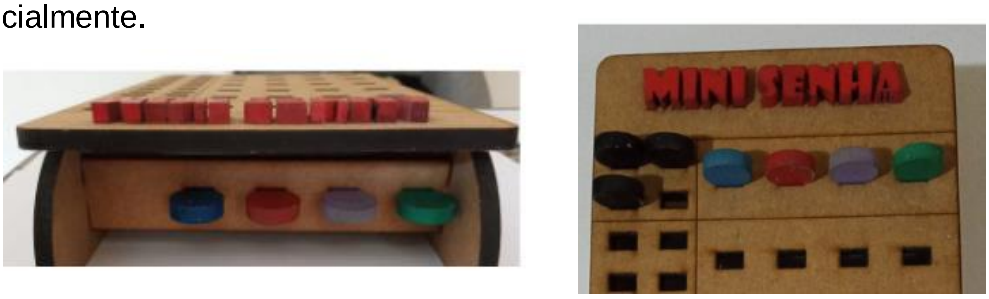


Figura 3: Palpite B = 0 e P = 3

Para calcular a quantidade das possíveis senhas para o próximo chute deixaremos três das cores escolhidas fixa em seus lugares e usaremos a fórmula da combinação.

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{24}{6} = 4$$

Como há ainda um espaço a ser preenchido e duas possíveis cores a serem utilizadas multiplicaremos o resultado da combinação por 2, logo:

$$\mathbf{4 \times 2 = 8}$$

Há 8 possibilidades para acertar a senha no segundo palpite.

Agora usaremos como base a resposta **B = 0 e P = 2** para o primeiro chute. Sabemos que das quatro cores escolhidas apenas 2 delas estão corretas e em seus respectivos lugares. Para calcular a quantidade de possíveis senhas que podem resultar dessa informação para o próximo chute precisamos fixar duas cores e trocar as outras duas pelas cores que não tinham sido escolhidas e permutá-las nos dois espaços que faltam. Assim temos uma combinação $C_{4,2}$ para as duas cores fixadas e $C_{2,2}$ para as duas novas cores além disso precisamos fazer a permutação das duas novas cores P_2. Usando o princípio multiplicativo temos:

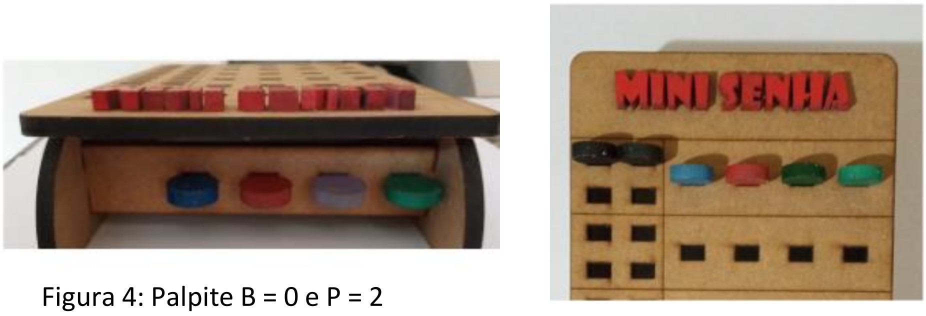


Figura 4: Palpite B = 0 e P = 2

$$\mathbf{C_{4,2} \times C_{2,2} \times P_2}$$

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{2!}{2!(2-2)!} \times 2! = 12$$

Há 12 possíveis senhas com uma delas sendo a correta.

Suponhamos agora que após o primeiro chute o desafiante responda da seguinte maneira **B =1 e P = 2.** Sabemos então que há 3 cores corretas mas apenas duas delas estão em suas respectivas posições corretas. Então escolheremos duas cores para deixá-las fixas, depois iremos escolher uma das duas cores restantes para fazer a permutação caótica, após escolhermos faremos a permutação caótica de uma cor em dois lugares e por fim iremos escolher uma das duas cores que não tinham sido usadas (ficaram de fora) para trocar por uma das cores que restou. Assim temos $\mathbf{C_{4,2}}$ (para as duas cores que foram fixadas) **x** $\mathbf{C_{2,1}}$ **x 1** (Para a cor que sofrerá a permutação caótica) **x** $\mathbf{P_2}$ (para as duas cores que estavam de fora). Logo teremos 24 possíveis senhas na próxima jogada com uma delas sendo a correta.

Figura 5: B = 1 e P = 2

Caso o primeiro chute receba como resposta **B =1 e P =1** nesse caso teremos duas cores corretas, como uma delas está na posição correta iremos fixar uma das cores, depois escolheremos uma cor para permutá-la caoticamente nos três espaços e por fim iremos escolher duas cores das que estavam de fora da jogada para trocá-las por duas cores das que estavam na jogada e permuta-lás nos dois espaços restantes. Usando o princípio multiplicativo teremos:

$C_{4,1}$ X $C_{3,2}$ X 2 X $C_{2,2}$ X P_2 = 48 possíveis senhas com uma delas sendo a correta.

Figura 6: B = 1 e P = 1

Analisemos a situação em que a resposta seria **B =2 e P = 2**.Sabemos que as quatro cores estão corretas, mas duas delas estão em posições erradas. Fixaremos duas cores e permutaremos as outras duas cores caoticamente e usando o princípio multiplicativo logo teremos $C_{4,2}$ X D_2.

$$\frac{4!}{2!2!} \times 2!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right] = 6$$

Há 6 possibilidades de senhas para o segundo palpite.

Figura 7: B =2 e P = 2

Diante da situação em que a resposta tenha sido **B=2 e P=1** teremos então 3 cores corretas com apenas uma cor na sua posição certa. Para calcular as possibilidades de senhas iremos fixar uma das cores escolhidas ($C_{4,1}$) e escolheremos duas cores entre as três restantes para permutá-las caoticamente ($C_{3,2}$). Permutando-as caoticamente teremos $\sum_{k=0}^{3-2=1} (C(3-2,k)\,.\,D_{(3-k)}) = C(1,0).D_3 + C(1,1).D_2 = 3$. Como ainda resta uma vaga a ser preenchida e duas possíveis cores para ela, iremos trocar uma das cores escolhidas por uma das duas cores que não tinham sido usadas(P_2). Assim, usando o princípio multiplicativo temos: $C_{4,1}$ X $C_{3,2}$ X 3 X P_2 = 4X3X3X2 = 72 senhas possíveis.

Figura 8: B = 2 e P = 1

Se após o primeiro chute o desafiante responder com **B = 2 e P = 0** teremos como informação sobre a senha apenas que duas cores estão corretas e em posições erradas. Para calcularmos a quantidade de possibilidades neste caso precisaremos selecionar duas das cores para permutá-las caoticamente. Depois substituiremos as duas cores restantes pelas duas que não tinham sido usadas. Por fim distribuiremos as quatro peças de forma que duas cores não permaneçam nas mesmas posições. Dessa forma teremos:

$C_{4,2}$ x $C_{2,2}$ x ($C_{2,0}$ x D_4 + $C_{2,1}$ x D_3 + $C_{2,2}$ x D_2) = 6 x (1 x 9 + 2 x 2 + 1 x 1) = 6 x 14 = 84 possíveis senhas com uma delas sendo a verdadeira.

Figura 9: B = 2 e P = 0

Para o caso de a resposta ser **B = 3 e P = 1**, temos quatro cores corretas onde apenas uma delas está na posição certa. Fixaremos uma das cores e utilizaremos a combinação $C_{4,1}$, depois com as outras três cores faremos uma permutação caótica delas nos três espaços restantes. Assim temos: $C_{4,1}$X D_3.

$$\frac{4!}{1!3!} \times 3!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = 8$$

Logo há 8 possibilidades de senhas para o segundo chute.

Figura 10: B = 3 e P = 1

Recebendo a resposta para o chute como **B = 3 e P = 0**, nesse caso sabemos que das quatro cores selecionadas três estão corretas, mas em posições contrárias as da senha. Neste caso selecionamos três das cores do chute ($C_{4,3}$). Como as três cores estão em posições erradas, precisarão ser permutadas de forma caótica nos 4 espaços, para isso temos: $C_{1,0} \times D_4 + C_{1,1} \times D_3 = 11$. Por fim, uma das quatro cores estava errada, então precisa ser trocada por uma das duas cores que ficaram de fora (P_2). Usando o princípio multiplicativo teremos $C_{4,3} \times 11 \times P_2 = 88$ possibilidades para a senha ser a certa no segundo chute.

Figura 11: B = 3 e P = 0

Suponhamos agora que após o primeiro palpite a resposta do desafiante tenha sido **B = 4 e P = 0**. Com base nessa informação sabemos que as quatro cores estão corretas, mas encontram-se em posições erradas da senha original. Para calcular o número de possibilidades usaremos apenas a permutação caótica dessas quatro cores. Assim teremos:

$$4!\left[\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right]=9$$

Assim, neste caso temos 9 possibilidades de senha para o próximo palpite.

Figura 12: B = 4 e P = 0

No final obteremos o seguinte quadro de possibilidades com base na resposta do desafiante:

B = 0 P = 4	B = 0 P = 3	B = 0 P = 2	B = 1 P = 2	B = 1 P = 1	B = 2 P = 2	B = 2 P = 1	B = 2 P = 0	B = 3 P = 1	B = 3 P = 0	B = 4 P = 0
1	**8**	**12**	**24**	**48**	**6**	**72**	**84**	**8**	**88**	**9**

3.4 Proposta para a utilização do jogo senha em sala de aula

O estudo da análise combinatória estimula o raciocínio lógico do aluno. Os conteúdos apresentados neste trabalho são vistos geralmente no 2º ano do ensino médio. O professor como mediador do conteúdo pode em sala de aula após a apresentação do conteúdo propor que os alunos joguem o jogo senha e registrem suas experiências. Para isso foi elaborado uma proposta de atividade usando este jogo para os alunos do ensino médio que estejam estudando estes conteúdos.

Os objetivos a serem alcançados nessa atividade são:

- Mostrar que há uma relação entre o jogo senha e os métodos de contagem.
- Estimular a percepção, bem como a capacidade do aluno em descrever possíveis soluções para problemas que envolvam a contagem.

Metodologia da atividade

A proposta seria iniciar a aula explorando os conteúdos e como forma de aprimorar os conhecimentos apresentaria-se o jogo, com suas regras e como jogar. É importante que os alunos se familiarizem com a forma de jogar, para então fazer suas análises.

O professor pode inicialmente dividir a turma em duplas e distribuir o jogo entre eles, para que joguem como forma de testar se os alunos conseguiram compreender as regras do jogo. Além disso o professor pode ir auxiliando as duplas em suas jogadas.

Este jogo pode ser feito por meio de tabuleiros de mdf, cartões de papel ou até mesmo de forma online.

Descrição da atividade

A primeira coisa a ser feita é elaborar algumas situações onde os alunos precisam identificar os métodos de contagem, como por exemplo.

- Com base nas 6 cores utilizadas para formar a senha, quantas possibilidades de senha podem ser feitas?

Aqui espera-se que o aluno consiga entender que para formar a senha ele terá que escolher 4 cores dentre as seis e dispô-las em seus respectivos lugares. Podem surgir questionamentos como “usarei arranjo ou combinação?”.

O professor pode elaborar uma senha, convidar uma dupla para fazer um palpite colocando-o no quadro. Após isso revela-se a senha original e faz os seguintes questionamentos:

- Com base na senha, de que forma eu poderia responder ao jogador desafiado?

Neste caso espera-se que os alunos possam responder qual a quantidade de pinos brancos e pretos seriam utilizados.

- Caso a senha não tivesse sido revelada, quantas são as possibilidades para o segundo palpite?

Aqui entraria a etapa da descrição dos passos necessários para a construção da resposta. O Professor auxiliaria nessa construção com base nos pinos brancos e pretos que foram respondidos na pergunta anterior, apresentando quais métodos de contagem são necessários para resolver este problema.

Após esses questionamentos, o professor pode solicitar que em dupla (um como jogador desafiante e o outro desafiado) os alunos tentem fazer esses mesmos registros agora com a senha criada pelo colega. Das possíveis senhas criadas em sala de aula surgirão descrições de métodos diferentes que podem ser socializados durante as aulas posteriores. Como o tempo de uma aula é curto para que os alunos possam descrever cada um dos 11 casos vistos anteriormente, pode-se dividir essa experiência em aulas posteriores.

4. Conclusão

O desenvolvimento do raciocínio de um indivíduo passa não só pela observação, mas pelas experiências adquiridas ao longo de sua jornada. O professor no papel de facilitador desse processo de descobertas na aprendizagem torna tudo mais leve quando entende que o aluno também precisa ter uma participação ativa nos conteúdos vistos em sala de aula.

Dessa forma os jogos associados ao que está sendo trabalhado nas aulas permitem ao aluno uma experiência mais concreta com os conceitos matemáticos, dando a eles uma oportunidade de desenvolverem a sua capacidade de observação, reflexão e resolução de problemas, além disso podem incentivar o gosto pela pesquisa e experimentação.

A atividade educativa proposta neste trabalho é apenas uma das muitas amostras que podem ser feitas em sala de aula. Através das adaptações, as atividades lúdicas podem ser trabalhadas em várias séries do ensino fundamental ou médio. Além da construção de conceitos matemáticos, através dos jogos os alunos podem despertar seu senso de sociedade.

Por fim, espera-se que este trabalho possa contribuir para os educadores na percepção do lúdico diante do processo de aprendizagem escolar.

REFERÊNCIAS

HAYDT, Regina Célia Cazaux. **Curso de didática geral.** 8ª ed. São Paulo: Ática, 2006. 327p.

LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 6. Ed. São Paulo: Atlas, 2015.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a matemática de 5ª a 8ª série**. 2.Ed. São Paulo: Respel Ltda, 2004.170p.

RAMOS, Sandra Lima de Vasconcelos. **Jogos e brinquedos na escola.** Respel Ltda, 2014.192p.

FERREIRA, Aurélio Buarque H. **Mini dicionário Aurélio da língua portuguesa.** 8 ed. Curitiba: Positivo,2010.

AVANÇO, Leonardo Dias; LIMA, José Milton de. A concepção Aristotélica acerca dos jogos e dos divertimentos e suas implicações pedagógicas**. X JORNADA DE ESTUDOS ANTIGOS E MEDIEVAIS. II JORNADA INTERNACIONAL DE ESTUDOS ANTIGOS E MEDIEVAIS**. Maringá, 2011.

AVANÇO, Leonardo Dias; LIMA, José Milton de. Jogo e educação no contexto da República Platônica: algumas reflexões. **X CONRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (EDUCERE).** Curitiba, 2011.

FILHO, Humberto Silveira Gonçalves. **O jogo senha como recurso didático para o ensino dos métodos de contagem**. Orientador: Liliana Angelina León Mescua. 2016. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de matemática, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/26102016Humberto-Silveira-Gon%C3%A7alves-Filho.pdf Acesso em: nov.2021

PINHEIRO, L. F. et al. **Explorando os métodos de contagem no jogo senha**.

Trabalho apresentado como atividade do PIPE na disciplina Matemática Finita do Curso de Matemática: FAMAT em Revista, 2009.

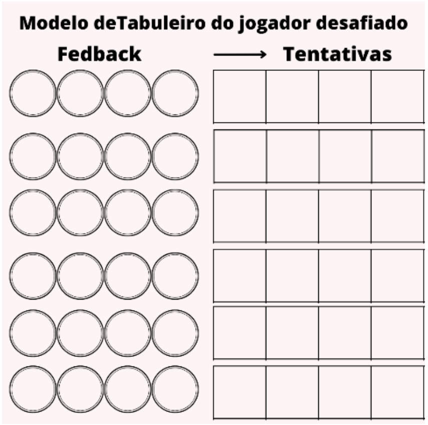
SALVO, Letícia Soares. **A importância do lúdico na aprendizagem.** Disponível em:https://www.portaleducação.com.br/conteudo/artigos/pedagoia/a-importância-do-ludico-na/ acesso em 10 jan.2020

SILVA, Joelson Honoratto dos Santos. **O lúdico na aprendizagem escolar.** Disponível em:https://pt.slideshare.net/mobile/Johss/tcc-slides-7817961 acesso em: 13 Jan.2020

SILVA, Luciana Verêda da; ANGELIM, Clenilson Panta. **O lúdico como ferramenta no ensino da matemática.** Disponível em:https://www.somatematica.com.br/artigos/ acesso em 11 jan.2020

ANEXOS

Modelo de tabuleiro e cores para serem impressos



Modelos de jogos reproduzidos pelas revendedoras.