UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ (UESPI)

CENTRO DE CIÊNCIA DA NATUREZA - CCN

LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

FERNANDO RODRIGUES MASCARENHAS

AS CÔNICAS: ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

TERESINA - PI

2018

FERNANDO RODRIGUES MASCARENHAS

AS CÔNICAS: ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, do Centro de Ciência da Natureza (CCN), da Universidade Estadual do Piauí (UESPÍ).

Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva

TERESINA - PI

2018

FERNANDO RODRIGUES MASCARENHAS

AS CÔNICAS: ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) submetido ao Corpo Docente do Centro de Ciência da Natureza - CCN da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovada em __ de __________de 2018.

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Prof.Dr. Afonso Norberto da Silva (Orientador)
Professor titular da UESPI
(Presidente)

____

Prof. Esp. Raimundo Nonato Rodrigues
Professor titular da UESPI
(Membro)

____

Prof. Ms. Juarez Silvestre Barbosa
Professor titular da UESPI
(Membro)

Dedico este trabalho a todos
que contribuíram para realização desse
trabalho de conclusão de curso.

AGRADECIMENTOS

Para começar, gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por tudo que me concedeu até o presente momento.

Em segundo lugar, agradeço a todos que acreditaram que conseguiria concluir essa graduação, sempre me transmitindo motivação para continuar nessa jornada, principalmente, devido ao fato das dificuldades ao longo do curso.

Para meu orientador, professor Doutor Afonso Noberto da Silva, por sua indiscutível competência, empenho e disponibilidade sempre que necessitei.

Aos professores da UESPI pelo excelente trabalho, contribuição para minha formação e realização deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer aos meus colegas de sala pelo companheirismo, paciência, união e força para superar todos os obstáculos encontrados durante a realização da graduação.

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida(Jacques Bernoulli).

RESUMO

O trabalho apresentado tem como objetivo descrever o estudo das seções Cônicas. De maneira, que iremos iniciar, trabalhando, o contexto histórico das cônicas, onde relataremos os pensamentos dos gregos até Apolônio sobre as seções cônicas. Conseguintemente, introduziremos as noções de plano cartesiano, distância entre dois pontos, condições de alinhamento dos pontos, equação da reta , translação e rotação de eixos, lugares de geométricos,circunferências, posições relativa entre a reta e a circunferências que são pré-requisitos para adentrarmos nos estudos das cônicas propriamente dito ,com enfoque, nas elipse, hipérbole e parábolas. Nessas cônicas, estudaremos, os elementos de cada uma, as equações reduzidas delas, com centro na origem e fora da origem do plano cartesiano. Também, trouxemos problemas com a reta tangente, à elipse, hipérbole e parábolas, além disso , estudamos a equação geral do segundo grau
e alguns problemas de lugares geométricos para identificarmos os tipos de cônica.
Assim, tentamos esclarecer de maneira mais simples o estudo das seções cônicas.

Palavras- chave: Cônicas, Elipse, Hipérbole, Parábola e Propriedades.

ABSTRACT.

The presented work has as objective describes the study of the conical sections.In way, that we will begin, working, the historical context of the conical ones, where we will tell the Greek thoughts to Apolônio about the conical sections. Conseguintemente , will introduce the notions of Cartesian plan, distance among two points, conditions of alignments of the points, equation of the straight line, translação and rotation of axes, places of geometric, circumferences, relative positions of the among the straight line and the circumference that are pre - requirements for we penetrated in the studies of the conical ones, with focus, in them ellipse, hyperbole and parables. In those conical ones, we will study, the elements of each a, their reduced equations, haul, of when yours points and vertex are out of the origin of the Cartesian plan. Also, we brought problems coma tangent straight line, that to pass in the ellipse, hyperbole and parables, haul ,we learned to build them when they go equation of the second degree and some problems of loci for we identified the type of the conical. Like this trying to explain in a simpler way the study of the conical sections

Keywords: Conical, Ellipse, Hyperbole, Parable and Properties

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 Introdução

1.1. Contextualização Histórica

As cônicas foram estudadas pela primeira vez pelos gregos na resolução do problema de duplicação do cubo. Sendo Menaecmus, um dos discípulos de Eudóxo e membro da academia de Platão que ocupou um lugar especial entre os matemáticos que se propuseram a resolver esse problema, tendo logrado êxito em sua empreitada, o caminho que tomou proporcionou a descoberta das seções cônicas.

As curvas cônicas são conhecidas e estudadas à muitos séculos. Os trabalhos mais antigos sobre o assunto foram feitos por Menaecmus, Aristeu e Euclides. Mas foi Apolônio, conhecido como “O Grande Geômetra” que nasceu por volta de 262.a.C em Perga, no sul da Ásia Menor e morreu por volta de 190.a.C em Alexandria, que desenvolveu um estudo mais completo e detalhado sobre as seções cônicas. Sua grande obra Seções Cônicas supera completamente os trabalhos anteriores sobre o assunto (EVES, 1997).

‘’Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse menor que, igual a, ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cones com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio porém, no livro I de seu tratado,obtinha todas as seções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo’’(EVES,1997)

Séculos mais tarde a obra de Apolônio teria importantes aplicações nos estudos de astronomia de Kepler e na teoria mecânica de Newton. Trata-se de um exemplo notável de como uma teoria matemática produzida a partir de motivações puramente filosóficas e estéticas pode se revelar fundamental para o avanço global da ciência e da técnica.

2. Plano Cartesiano

Definição: Consideremos duas retas concorrentes e perpendiculares em O, as quais determinam um plano α. Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por P duas retas: $x' // x$ e $y' // y$. Denominaremos P_1 a interseção de x com y' e P_2 a interseção de y com x'.Conforme [1].

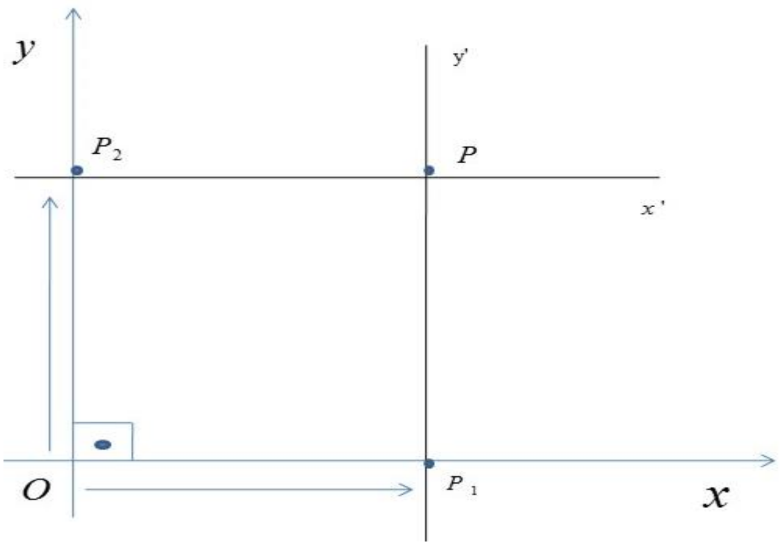


Figura 1 – Plano Cartesiano

Nessas condições definimos:

a) abscissa de P é o número real $x_p = \overline{OP_1}$;

b) ordenada de P é o número real $y_P = \overline{OP_2}$;

c) coordenadas de P são os números reais x_p e y_p, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P), em que x_p é o primeiro termo;

d) eixos das abscissas é o eixo x ou (OX);

e) eixos das ordenadas é o eixo y ou (OY);

f) sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou ortornomal ou retangular) é o sistema XOY;

g) origem do sistema é o ponto O;

h) plano cartesiano é o plano α.

2.1. Quadrantes

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões que denominamos quadrantes e numerados no sentido anti-horário, conforme [2].

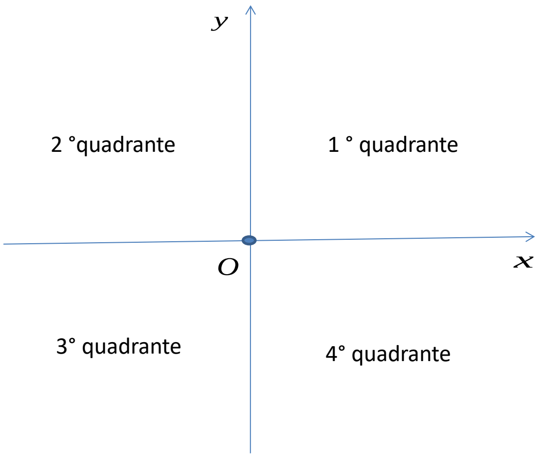


Figura 2–Localização dos Quadrantes

Dizemos que o ponto de coordenada (x, y) está:

a) no primeiro quadrante se $x \geq 0$ e $y \geq 0$;

b) no segundo quadrante se $x \leq 0$ e $y \geq 0$;

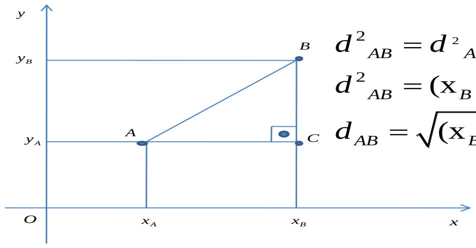
c) no terceiro quadrante se $x \leq 0$ e $y \leq 0$;

d) no quarto quadrante se $x \geq 0$ e $y \leq 0$;

2.2. Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, situado no plano cartesiano, pode ser determinada em função das suas coordenadas.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABC, temos:



$$d^2_{AB} = d^2_{AC} + d^2_{BC}$$
$$d^2_{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_B)^2$$
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Figura 3–Aplicando o Teorema de Pitágoras

2.3. Ponto médio de um segmento

Seja M o ponto médio dos segmentos com extremidade $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Notemos, na figura a seguir, que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois possuem os três ângulos respectivamente congruentes. Veja [8].

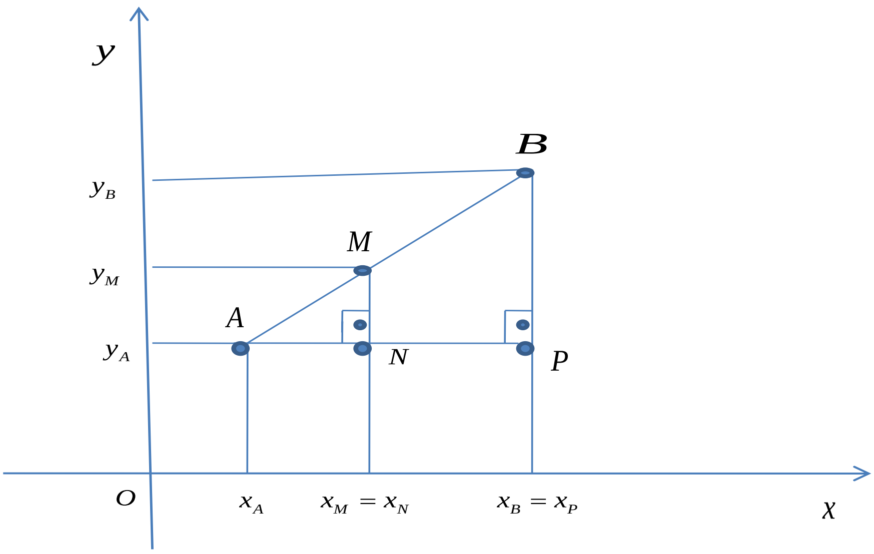


Figura 4–Ponto Médio de um Segmento

Mas $AB = 2.(AM)$,pois M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Logo,

$$\frac{AM}{2.AM} = \frac{AN}{AP} \Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow AP = 2.(AN) .$$

Assim, temos:

$$|x_P - x_A| = 2.|x_N - x_A|$$

Como $x_P > x_A$ e $x_N > x_A$, podemos escrever:

$$x_P - x_A = 2.(x_N - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2.(x_M - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2.x_M - 2.x_A \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

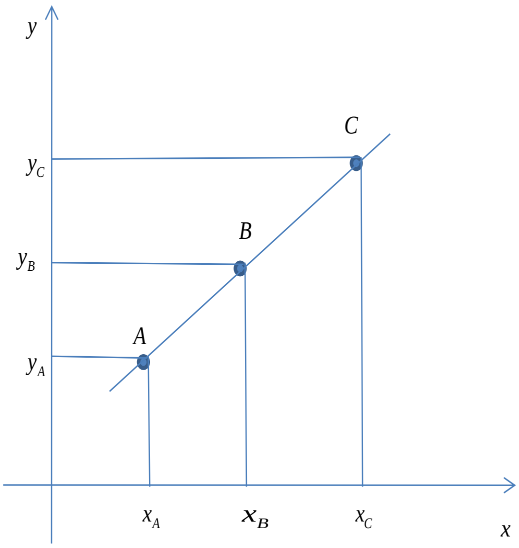
Mediante procedimento análogo, prova que $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Portanto, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$,temos:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

2.4. Condição de Alinhamento de Três Pontos

Três pontos estarão alinhados, ou seja, pertence à mesma reta r se, e somente se, o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos for nulo. Conforme [3].



$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 5–Condição de Alinhamento de Três Pontos

Desenvolvendo o determinante, teremos a seguinte expressão:

$$\begin{array}{ccccc} x_A & y_A & 1 & x_A & y_A \\ x_B & y_B & 1 & x_B & y_B \\ x_C & y_C & 1 & x_C & y_C \end{array}$$

$$-x_C y_B \quad -x_A y_C \quad -x_B y_A \qquad x_A y_B \quad x_C y_A \quad x_B y_C$$

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0$$

2.5. Equação Geral da Reta

Seja A e B pontos distintos pertencentes a uma reta r no plano cartesiano e $P(x, y)$ um ponto qualquer dessa reta. Conforme [6].

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow xy_A + x_Ay_B + x_By - xy_B - x_Ay - x_By_A = 0 \Rightarrow x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Fazendo:

$y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$, $x_Ay_B - x_By_A = c$, temos $ax + by + c = 0$, em que a e b , não podem ser simultaneamente nulos.

Assim, podemos afirmar que:

A toda reta do plano cartesiano é possível associar uma equação da forma $ax + by + c = 0,$ com a , b e c pertencentes aos reais e ou $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, sendo x e y coordenadas de um ponto qualquer da reta.

De maneira recíproca, temos que a toda equação da forma $ax + by + c = 0,$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, é possível associar uma reta do plano cartesiano de modo que as coordenadas de todos os seus pontos sejam soluções dessa equação.

A equação $ax + by + c = 0,$ é chamada de equação geral da reta.

Na equação reduzida: $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = mx + n$, onde $m = -\frac{b}{a}$ e $n = -\frac{c}{a}$, número m é denominado coeficiente angular (ou declividade) da reta.

Exemplo: Seja r a reta que passa pelos pontos $(1,2)$ e $(-2,5)$.Determine a equação geral da reta r:

Solução:
Seja $P(x, y)$ um ponto genérico de r .Temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 5 + 4 - 5x - y = 0 \Rightarrow -3x - 3y + 9 = 0$$

ou dividindo por 3 seus coeficientes, $r: -x - y + 3 = 0$ (equação geral da reta).

Observação: Se A, B e C não estão alinhados, então A, B e C são vértices de um triângulo cuja área é dada por : $\frac{|D|}{2}$,para a demonstração veja [1] .

2.6. Distância entre um ponto e uma reta

Dada uma reta r e um ponto A fora dela $(A \notin r)$, a distância entre eles é a medida de $\overline{AP}$, em que P é a projeção ortogonal de A em r. Indicamos essa distância por $d(A,r)$. Em um plano cartesiano, é possível calcular a distância entre um ponto e uma reta. Conforme [14].

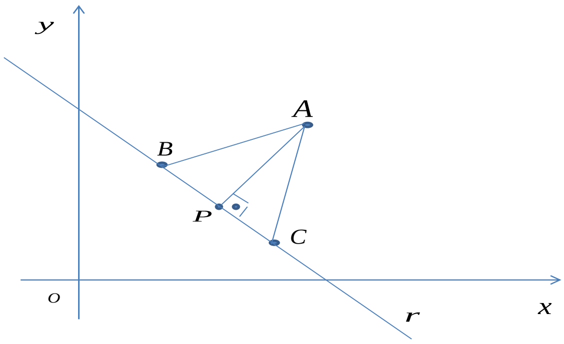


Figura 6–Distância entre um Ponto e uma Reta

Considere no plano cartesiano o ponto $A(x_A, y_A)$ e a reta r. Considere também o ponto $P(x_P, y_P)$, correspondente a projeção ortogonal de A em r, e os pontos $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ em r, de modo que A, B e C sejam vértices do ΔABC.

Podemos calcular a área do ΔABC de duas formas:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2}$$

Segue que :

$$\frac{|D|}{2} = \frac{d(B,C).d(A,P)}{2} \Rightarrow d(A,P) = \frac{|D|}{d(B,C)}$$

Calculando D:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A(y_B - y_C) + y_A(x_C - x_B) + x_B y_C - x_C y_B$$

Fazendo : $a = y_B - y_C, b = x_C - x_B$ e $c = x_B y_C - x_C y_B$ temos:

$$D = ax_A + by_A + c$$

Equação da reta r:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\underbrace{(y_B - y_C)}_{a} + y\underbrace{(x_C - x_B)}_{b} + \underbrace{x_B y_C - x_C y_B}_{c} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

Calculando $d(B,C)$, temos: $d(B,C) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Como $d(A,P) = \dfrac{|D|}{d(B,C)}$, segue que:

$$d(A,P) = \frac{|D|}{d(B,C)} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$ que corresponde a $d(A,r)$.

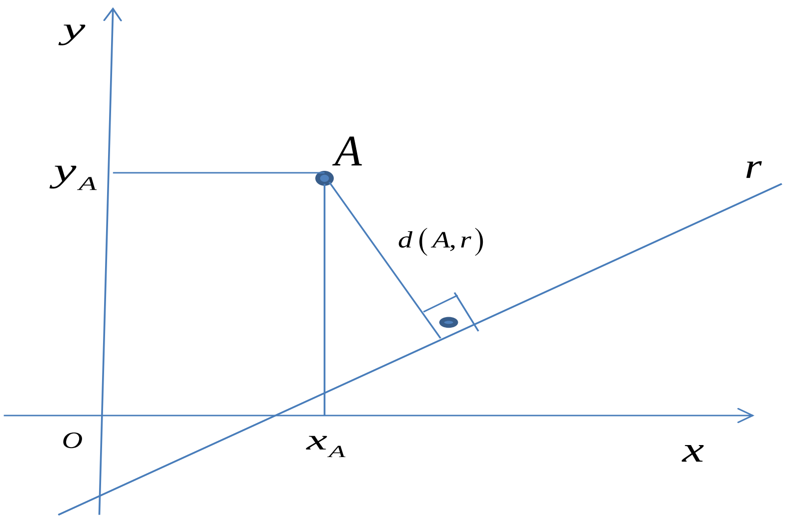


Figura 7–Distância entre um Ponto e uma Reta

Assim:

A distância de um ponto $A(x_A, y_A)$ a uma reta $r: ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d(A,r) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo: Para aplicar esse teorema no cálculo da distância d entre o ponto $P(1,5)$ e a reta r de equação $y = x - 2$,devemos inicialmente representar a reta r por meio de sua equação geral ,isto é , $x - y - 2 = 0$. Assim, na fórmula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Com os valores $a = 1, b = -1, c = -2, x_0 = 1$ e $y_0 = 5$,obtendo:

$$d = \frac{|1.1 + (-1).5 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow d = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

2 .Translação e Rotação de Eixos

2.1 .Translação de Eixos

Sejam OX e OY os eixos primitivos e $O'X'$ e $O'Y'$ os novos eixos, respectivamente paralelos aos primeiros. Admitiremos também que a nova origem referida, aos primitivos eixos, seja o ponto (h,k). Conforme [14].

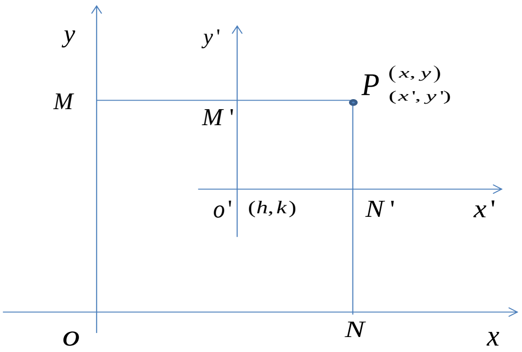


Figura 8 - Translação de Eixos

Seja P um ponto qualquer do plano; admitamos que suas coordenadas referidas aos primitivos eixos sejam (x,y) e referidas aos novos seja (x',y') .Vamos determinar x e y em função de x',y',h e k:

$$x = MP = MM' + M'P = h + x'$$

e

$$y = NP = NN' + N'P = h + y'$$

As fórmulas da translação são,pois,as seguintes:

$$x = x' + h$$

e

$$y = y' + k$$

Exemplo: Considere a curva de equação $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ em relação ao sistema xOy .Faça uma translação de eixos tal que a nova origem seja $O'=(3,4)$.

Obtenha a equação da curva em relação ao novo sistema $x'Oy'$.

Solução:

Fórmula de translação:

$$\begin{cases} x = x'+3 \\ y = y'+4 \end{cases}$$

Substituindo x e y seus valores na equação dada obtemos

$$(x'+3)^2+(y'+4)^2-6(x'+3)-8(y'+4)+21=0$$

Efetuando-se:

$$x'^2+y'^2=4$$

A curva de $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ se transforma na equação $x'^2+y'^2=4$ mediante uma translação de eixos, sendo a nova origem $O'=(3,4)$ e raio igual a 2.

2.2 .Rotação de Eixos

Sejam OX e OY os eixos primitivos e OX' e OY' os novos eixos. O é a origem comum dos dois sistemas, conforme [14].

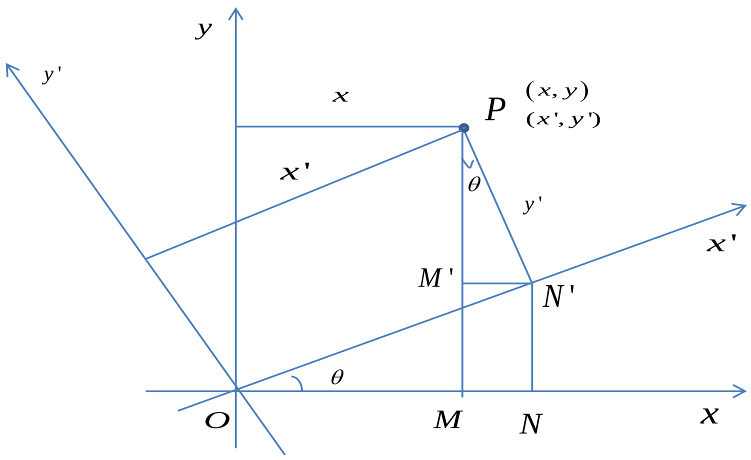


Figura 9 - Rotação de Eixos

Consideremos o ângulo $X^{'}OX$, segundo o qual os eixos giraram, e designemo-lo por θ. Seja ainda P um ponto qualquer do plano, de coordenadas (x, y), quando referidas aos primitivos eixos, e (x', y'), referidas aos novos eixos. Determinemos x e y em função de x', y' e θ:

$x = OM = ON - MN = x'\cos\theta - y'sen\theta$;

$y = MP = MM^{'} + M^{'}P = NN^{'} + M^{'}P = x'sen\theta + y'\cos\theta$.

Portanto, as fórmulas de rotação dos eixos, segundo um ângulo θ,são:

$$x = x'\cos\theta - y'sen\theta$$
$$y = x'sen\theta + y'\cos\theta$$

Exemplo*:* Transformar a equação $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$,por rotação de eixos coordenados de um ângulo de 30^0.

Solução:

As equações de transformação são:

$$\begin{cases} x = x'\cos 30^0 - y'sen30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = x'sen30^0 + y'\cos 30^0 = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

Substituindo estes valores de x e y na equação obtemos:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 4$$

Após desenvolvimentos e simplificação obtemos a equação transformada pedida $5x'^2 + y'^2 = 8$, veremos posteriormente que é uma elipse.

3 Cônicas

3.1 .Lugares Geométricos

Um conjunto de pontos do plano que tem uma propriedade característica, expressa por uma sentença possível de se traduzir matematicamente é chamado, tradicionalmente, um lugar geométrico de pontos. Conforme[13].

3.2 .Seções Cônicas

As seções cônicas estão mais presentes no nosso universo bem mais do que possa aparentar. Você provavelmente já ouviu falar que a terra percorre uma orbita elíptica em torno do sol. Um corpo sobre ação puramente gravitacional descreve um movimento que é representado geometricamente por uma seção cônica. Dependendo da energia do sistema, esta órbita pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. No caso da órbita terrestre, a órbita é uma elipse, tendo o sol como um dos focos desta elipse , segundo [16].

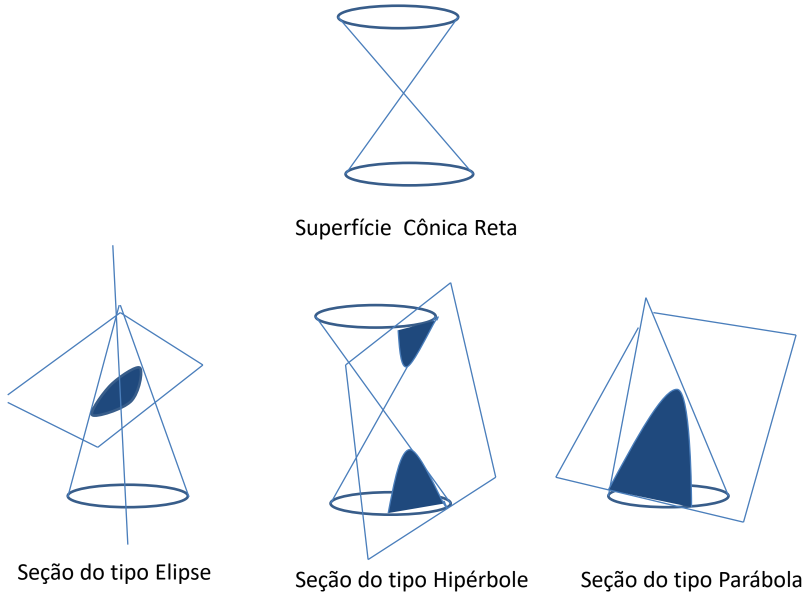
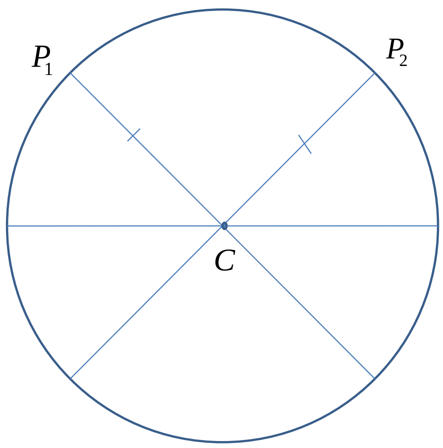


Figura 10– Seções Cônicas

4.2.1. A Circunferência

Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo.

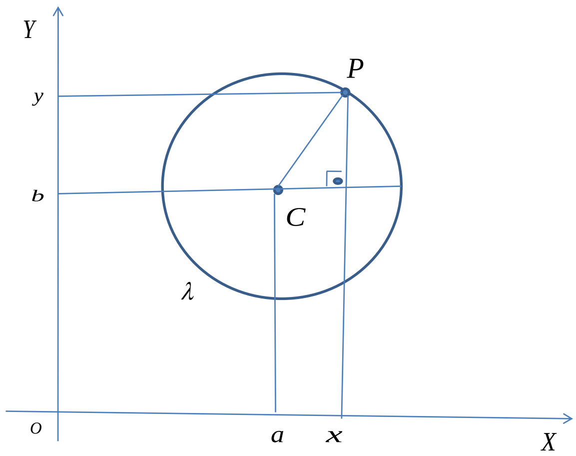


$$d(P_1,C) = d(P_2,C) = ... = CONSTANTE$$

Figura 11– A Circunferência

4.2.1.1. Equação da Circunferência

Sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma circunferência λ de centro $C(a,b)$ e raio r $(r>0)$, a equação de λ é ; de acordo com a definição dada por :



$$\lambda : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Figura 12 – Equação da Circunferência

De fato. Observe que $d\left(P,C\right)=r$ *,ou seja ,*

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$, elevando ao quadrado, obteremos :

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (equação reduzida da circunferência)

A equação reduzida da circunferência λ de centro $C(a,b)$ e raio r escrita na forma $\lambda:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ é chamada de equação reduzida de λ. Efetuando as operações indicadas, obtemos uma equação equivalente, desenvolvida, assim:
$\lambda: x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ (equação geral da circunferência).

Exemplo: Escreva a equação da circunferência de centro no ponto $(-2,3)$ e raio 4.
Solução:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4^2 \Rightarrow \underbrace{(x+2)^2+(y-3)^2=16}_{\substack{equação\\reduzida\\da\\circunferência}}$$

ou

$$\underbrace{x^2+y^2+4x-6y-3=0}_{\substack{equação\\geral\\da\\circunferência}}$$

4.2.1.3.Posições Relativas entre a reta e a circunferência

No plano cartesiano, temos três posições relativas entre uma reta e uma circunferência. Conforme [10].

a) Exterior

s é exterior a λ se, e somente se: $d_{Cs} > R$

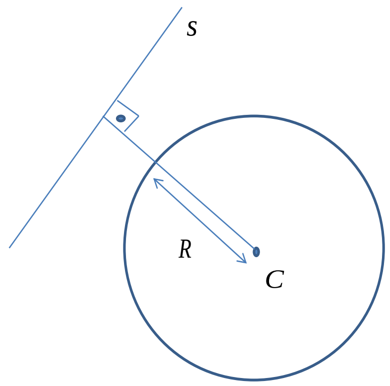


Figura 13 – Posição Relativa entre a Reta e a Circunferência (Exterior)

b) Tangente

s é tangente a λ se , somente se: $d_{Cs} = R$

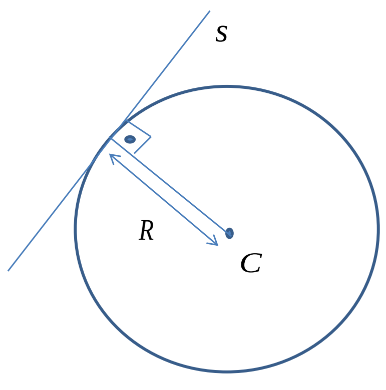


Figura 14 – Posição Relativa entre a Reta e a Circunferência (Tangente)

c) Secante

S é secante a λ se, somente se: $d_{Cs} < R$

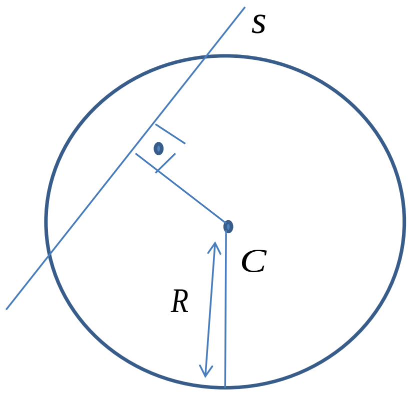


Figura 15 – Posição Relativa entre a Reta e a Circunferência (Secante)

4.2.2. Elipse

Fixados dois pontos, F_1 e F_2, de um plano α, tal que $F_1F_2 = 2c$, com $c > 0$, chama-se elipse o conjunto de pontos P do plano α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, com $2a > 2c$ .Pela definição .

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$(2a > 2c > 0)$$

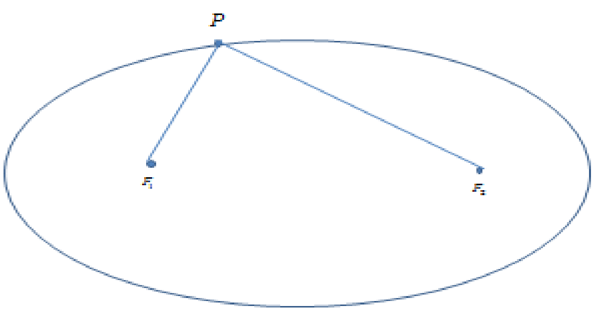


Figura 16 – A Elipse

4.2.2.1. Elementos da Elipse

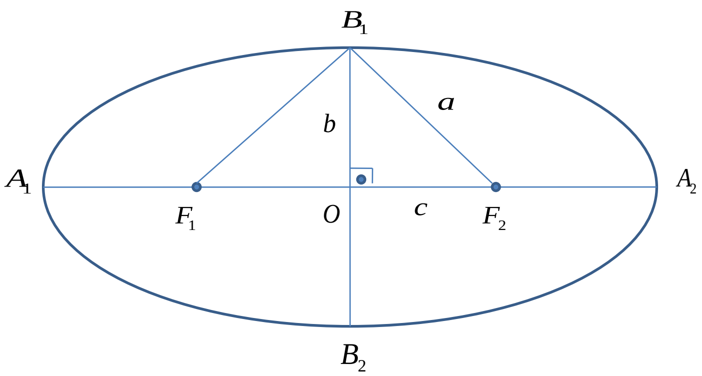


Figura 17 – Elementos da Elipse

F_1 e F_2 = focos;

O = centro ;

A_1A_2 = eixo maior;

B_1B_2 = eixo menor;

$2c$ = distância focal;

$2a$ = medida do eixo maior;

$2b$ = medida do eixo menor;

$\frac{c}{a}$ = excentricidade (*);

Relação notável no triângulo retângulo (teorema de Pitágoras)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidade da Elipse

Em geral, a razão $\varepsilon = \frac{c}{a}$ é utilizada para medir o "achatamento" de uma elipse. Chama -se excentricidade da elipse,sendo um número compreendido entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 0 é o valor de ε, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Poderíamos dizer que uma circunferência é uma elipse com $\varepsilon = 0$, e um segmento de reta é uma elipse com $\varepsilon = 1$.Conforme [13].

4.2.2.2. Equação Reduzida da Elipse

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que $A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$.

É evidente que os focos são os pontos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

Nestas condições, chama-se equação reduzida da elipse a equação que $P(x,\mathrm{y})$, ponto genérico das curva , verifica. Veja [1].

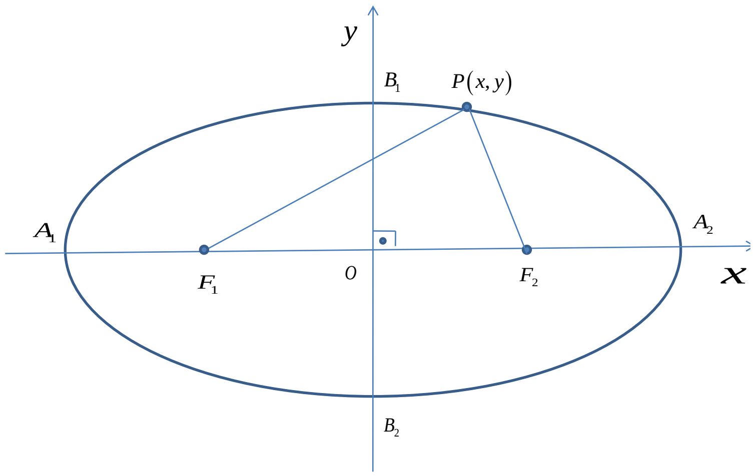


Figura 18 – Equação Reduzida da Elipse

Observe é imediata :

$$P \in Elipse \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

então:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y+0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$,cancelando x^2, y^2, c^2 , e simplificando, obtemos:

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$ elevando ambos os lados ao quadrado,

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=(a^2-cx)^2$$

$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$, cancelando $-2a^2cx$,

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}x^2+a^2y^2=a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}$$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, dividindo por, a^2b^2 , concluímos que :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Analogamente, se a elipse apresenta $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$,temos:

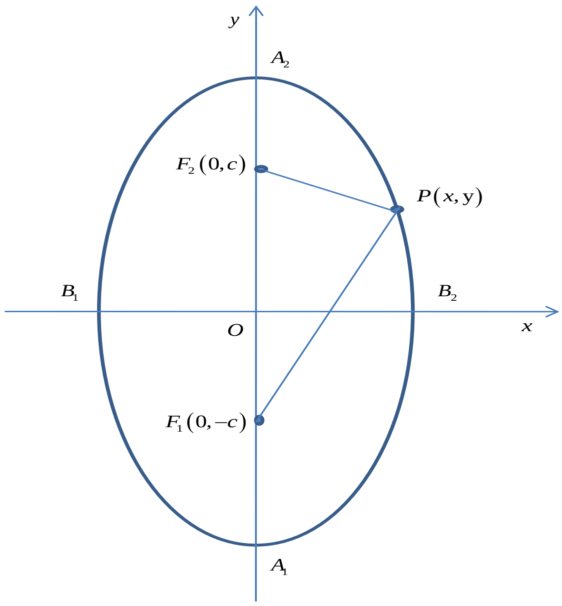


Figura 19 – Equação Reduzida da Elipse

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$\sqrt{(x-0)^2+(x+c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=2a$, esta é a mesma que se obtém permutando x com y na relação inicial e, daí decorre a equação da elipse.

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Exemplo: Determine a equação reduzida da elipse com focos sobre o eixo y , com eixo maior medido 12 , eixo menor 8 e o centro na origem.

Solução:

Temos que $2a = 12 \Rightarrow a = 6$ e $2b = 8 \Rightarrow b = 4$,

logo:

$\frac{y^2}{6^2}+\frac{x^2}{4^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{16}=1$, que é a equação reduzida da elipse.

4.2.2.3. Elipses com o centro fora da origem

Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} // x$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'Oy'$ é , conforme [8].

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

Portanto, de acordo com as fórmulas da translação vistas, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

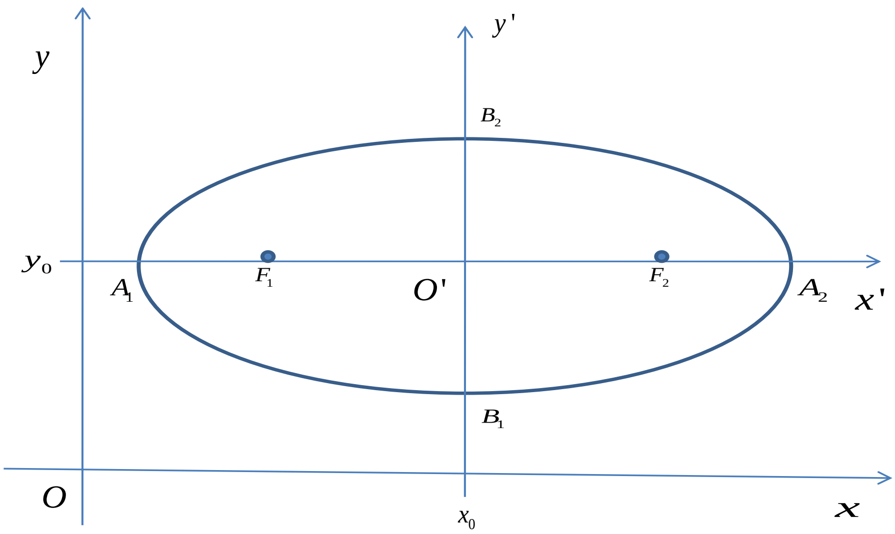


Figura 20 – Elipse com o centro fora da origem

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Analogamente, se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} \,//\, y$,sua equação relativamente ao sistema xOy é:

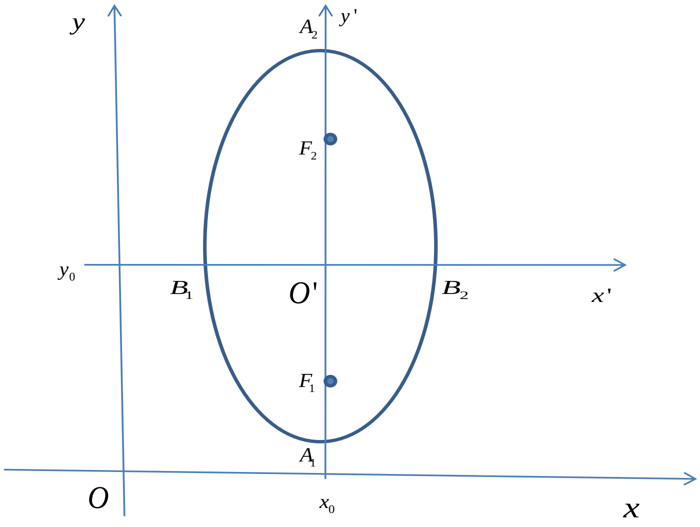


Figura 21 – Elipse com o centro fora da origem

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

Exemplo: Determine a equação de uma elipse que tem centro no ponto $O'(3,5)$, semieixo maior $a = 2$ e semieixo menor $b = 1$.

Solução:

Temos o centro $O'(3,5)$ fora da origem, e os semieixos $a = 2$ e $b = 1$, logo:

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-5)^2}{1^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{1} = 1$, (se o eixo maior

é paralelo ao eixo x) ou:

$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-5)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^2}{1^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-5)^2}{4} + \frac{(x-3)^2}{1} = 1$,(se o eixo maior

é paralelo ao eixo y).

4.2.3. Hipérbole

Denominamos ***hipérbole*** ao lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a diferença das distâncias a dois pontos dados, F_1 e F_2, do plano, é em valor absoluto igual a uma constante $2a$, menor que a distância F_1F_2. Segundo [2].

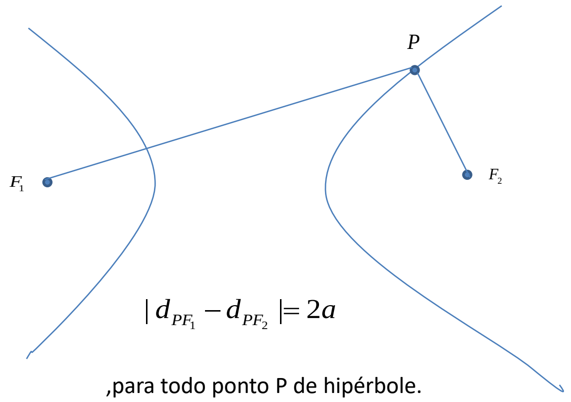


Figura 22 – Hipérbole

4.2.3.1. Elementos da Hipérbole

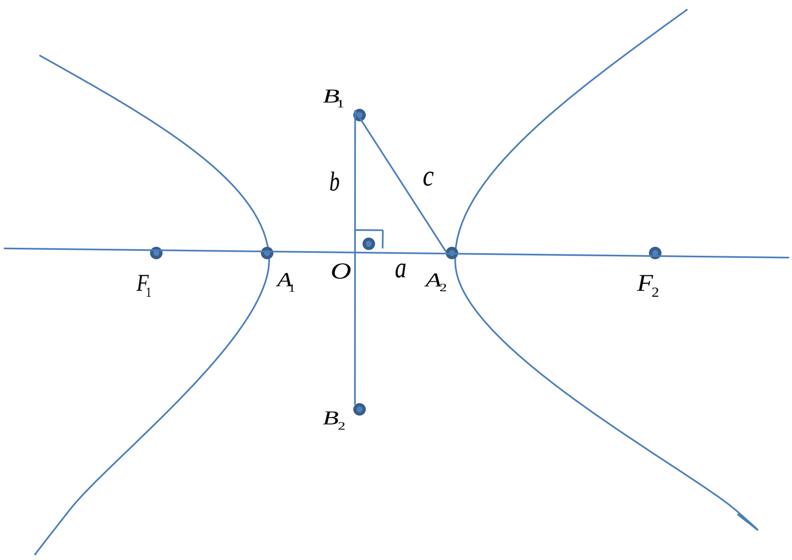


Figura 23 – Elementos da Hipérbole

F_1 e F_2 = focos;

$O =$ centro ;

$A_1A_2 =$ eixo real;

$B_1B_2 =$eixo imaginário;

$2c =$distância focal;

$2a =$medida do eixo real;

$2b =$medida do eixo imaginário;

$\frac{c}{a} =$excentricidade

Relação notável no triângulo retângulo (teorema de Pitágoras)

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidade da Hipérbole:

Em geral, a razão $\varepsilon = \frac{c}{a}$ é utilizada para medir o "fechamento" de uma hipérbole, sendo chamada **excentricidade**. A excentricidade de uma hipérbole é sempre maior que 1 . Quanto maior o valor de ε ,mais "aberta" é a hipérbole. Para a hipérbole equilátera, temos $\varepsilon = \sqrt{2}$ .Conforme [13].

4.2.3.2. Equação Reduzida da Hipérbole

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que $A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$.

É evidente que os focos são os pontos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

Nestas condições, chama-se a equação reduzida da hipérbole a equação que $P(x,y)$, ponto genérico da hipérbole, verifica.Veja[1].

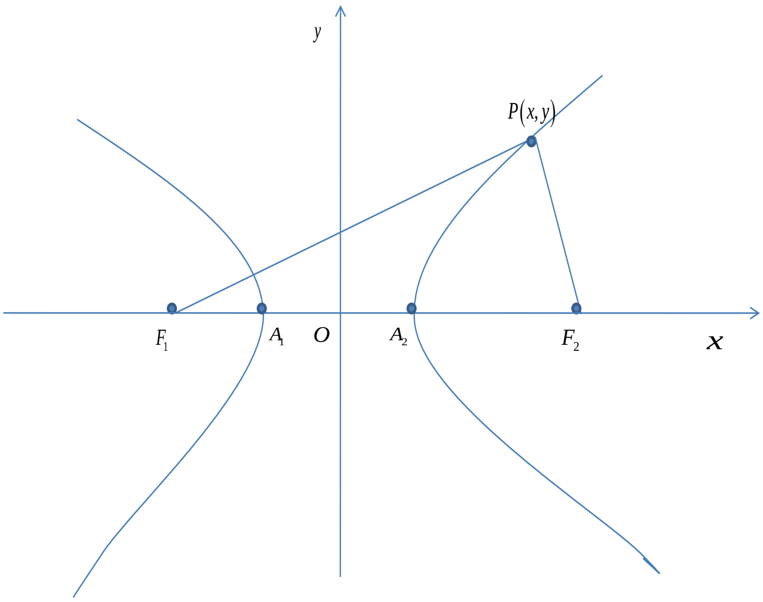


Figura 24 – Equação reduzida da Hipérbole

Note que :

$$P \in Hipérbole \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$$

então:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$$

$x^2+2xc+c^2+y^2 = x^2-2xc+c^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$, cancelando x^2, y^2, c^2,

Obtemos ::

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$4(xc-a^2) = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, dividindo por 4,

$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, elevando ao quadrado ambos os lados,

$x^2c^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + c^2a^2 + y^2a^2$,cancelando $-2xca^2$,

$x^2c^2 - a^2x^2 - y^2a^2 = c^2a^2 - a^4$

$$\underbrace{\left(c^2 - a^2\right)}_{b^2} x^2 - y^2a^2 = a^2\underbrace{\left(c^2 - a^2\right)}_{b^2}$$

$b^2x^2 - y^2a^2 = a^2b^2$,dividindo por a^2b^2 ,obtemos :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, se $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$,temos :

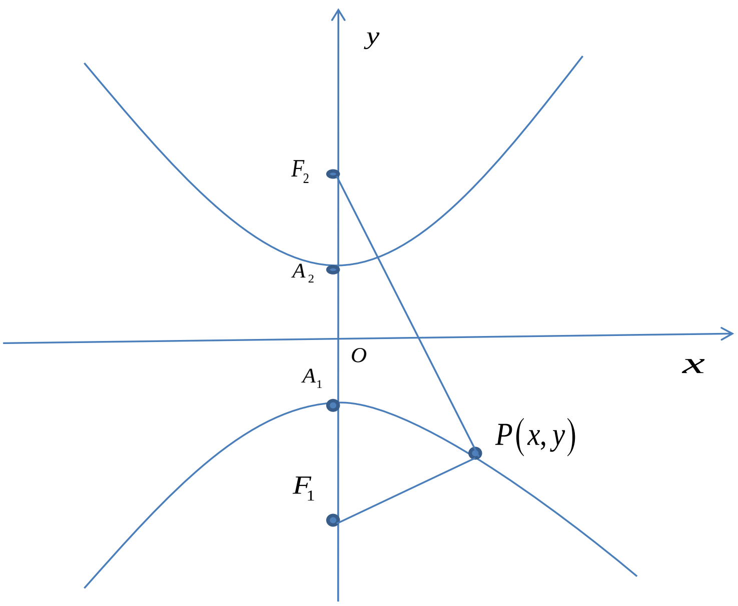


Figura 25 – Equação reduzida da Hipérbole

$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=\pm 2a$, notemos que esta é a mesma que se obtém permutando x com y na relação inicial e, daí decorre a equação da hipérbole.

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Exemplo: Obtenha a equação reduzida de uma hipérbole com eixo real 8 e distância focal 10 .

Solução:

Temos eixo real (a) : $2a=8 \Rightarrow a=4$,e a distância focal (c): $2c=10 \Rightarrow c=5$, aplicando o teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 - b^2 \Rightarrow b = 3$.

Se a posição da hipérbole é $\overline{A_1A_2} \subset x$ e $\overline{B_1B_2} \subset y$,

então sua equação é: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

4.2.3.3. Hipérboles com o centro fora da origem

Se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} \,//\,$ eixo x sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'Oy'$ é:Conforme [8].

$$\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

Portanto, de acordo com as fórmulas da translação vistas, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

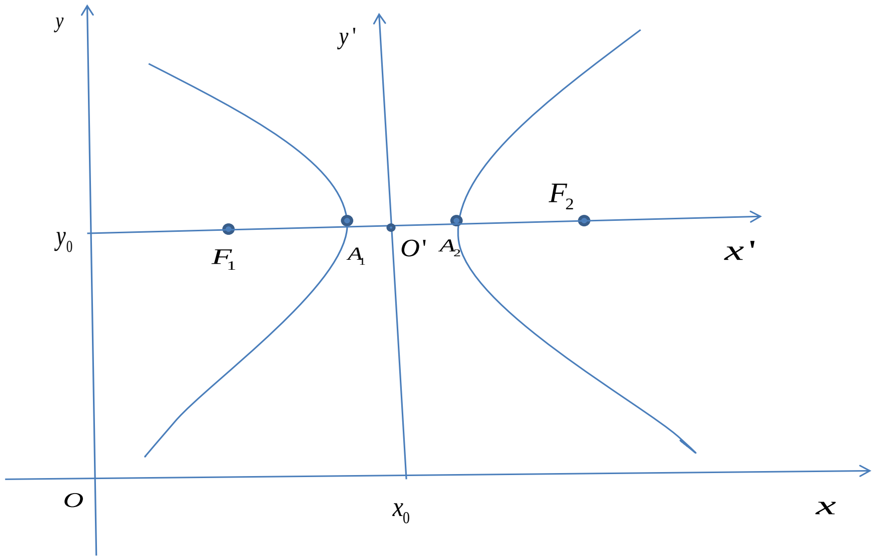


Figura 26 – Hipérbole com centro fora da origem

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Analogamente, se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} \,//\, y$,sua equação relativamente ao sistema xOy é:

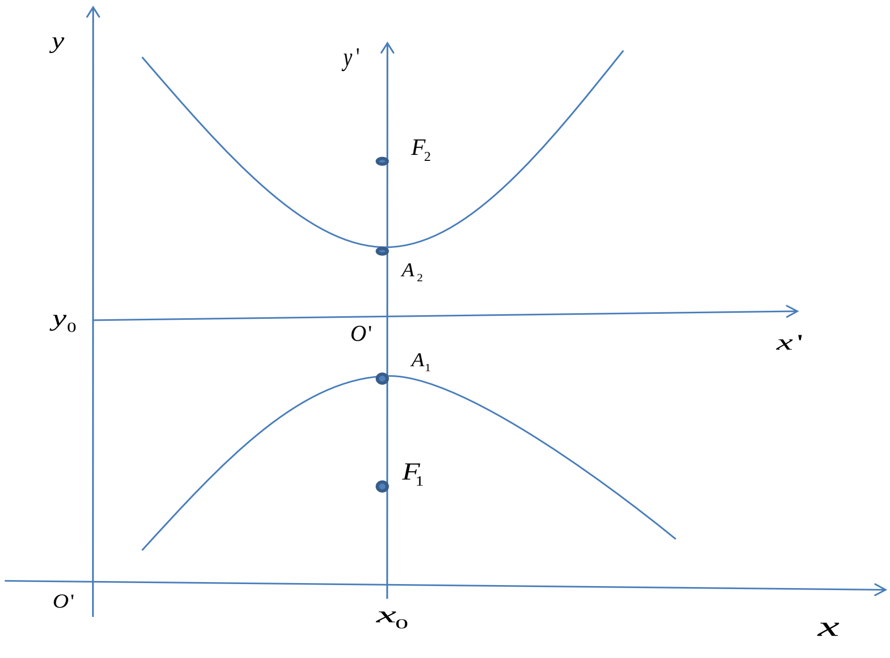


Figura 27 – Hipérbole com centro fora da origem

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Exemplo: Obtenha a equação reduzida de uma hipérbole que tem centro no ponto $O'(7,8)$, semieixo real $a=4$ e semieixo imaginário $b=3$.

Solução:

Temos centro fora da origem $O'(7,8)$ e $a=4$ e $b=3$,logo

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{(x-7)^2}{4^2}-\frac{(y-8)^2}{3^2}=1\Rightarrow\frac{(x-7)^2}{16}-\frac{(y-8)^2}{9}=1\text{(Se }\overline{A_1A_2}//x)$$

ou:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{(y-8)^2}{4^2}-\frac{(x-7)^2}{3^2}=1\Rightarrow\frac{(x-8)^2}{16}-\frac{(y-7)^2}{9}=1\text{(Se }\overline{A_1A_2}//y)$$

4.2.2. Parábola

Denominamos parábola ao lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistante de uma reta dada d e de um ponto F, $F\notin d$, do plano. Veja [2].

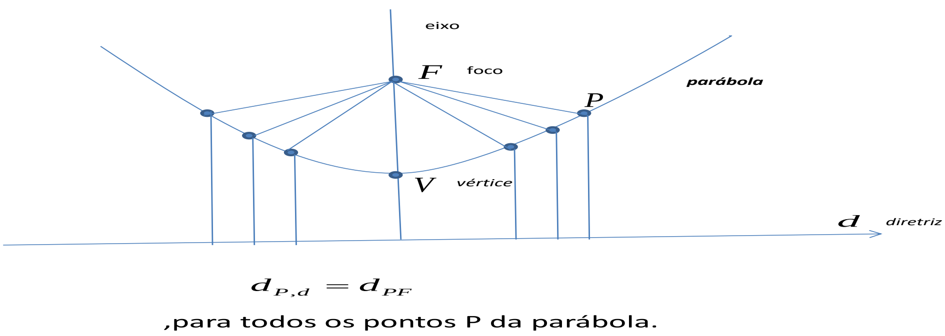


Figura 28 – Parábola

4.2.4.1.Elementos da Parábola

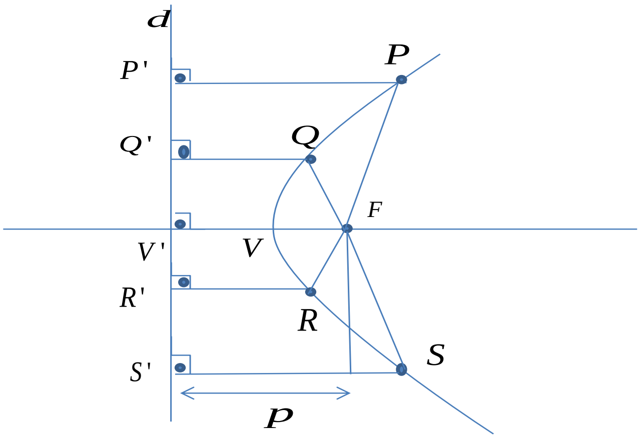


Figura 29 – Elementos da Parábola

$F =$ FOCO;

$d =$ diretriz;

$p =$ parâmetro;

$V =$ vértice;

reta $VF =$ eixo de simetria;

relação notável: $VF = \frac{p}{2}$.

$\varepsilon = \frac{PP'}{PF} = 1$ *(excentricidade)*

4.2.4.2.Equação Reduzida da Parábola

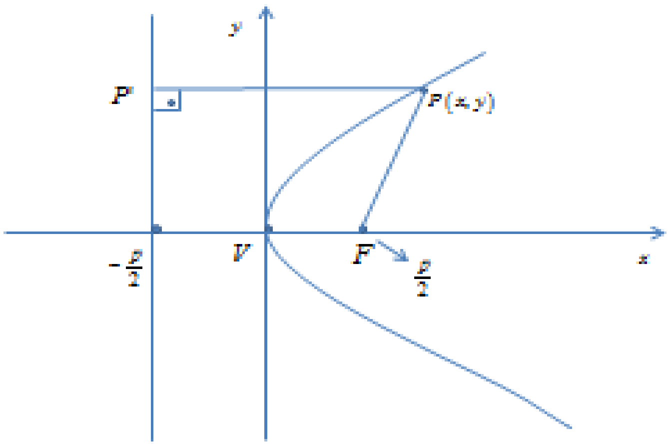


Figura 30 – Equação reduzida da Parábola

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. É evidente que o foco é: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ e a diretriz d tem equação $x=-\frac{p}{2}$.

Nestas condições, chama-se equação reduzida da parábola a equação que $P(x,y)$, ponto genérico da curva, verifica , conforme[1].

A dedução é imediata:

$$P \in parábola \Leftrightarrow PF = PP'$$

então:

$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$, elevando os dois lados ao quadrado

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$, cancelando x^2 , $\frac{p^2}{4}$,logo :

$y^2 = 2px$, se F é à esquerda de V ,então $y^2 = -2px$

Exemplo: Uma parábola com parâmetro $p = 2$, vértice na origem e foco no eixo do x, tem a equação:

$$y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 2.2x \Rightarrow y^2 = 4x \text{, se } F \text{ à direita de } V$$

ou:

$$y^2 = -2px \Rightarrow y^2 = -2.2x \Rightarrow y^2 = -4x \text{, se } F \text{ à esquerda de } V$$

Analogamente ao que vimos, se a parábola apresenta vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, temos:

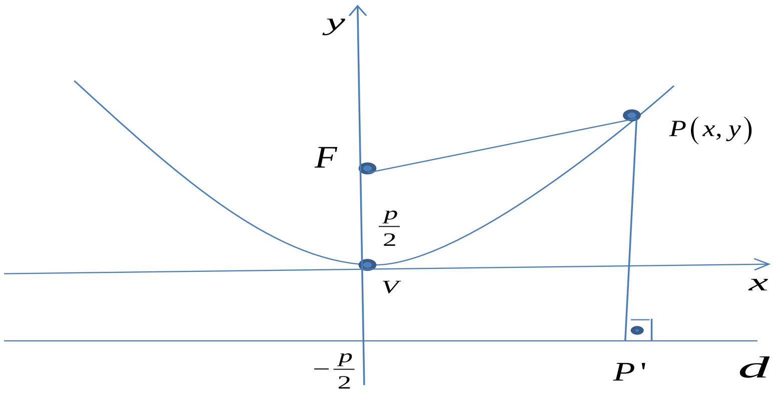


Figura 31 – Equação reduzida da Parábola

$$PF = PP'$$

$$\sqrt{(x-0)+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2},$$

Notemos que esta relação é a mesma que se obtém permutando x com y na relação inicial e daí, decorre a equação da parábola:

$$x^2 = 2py$$

Exemplo: Uma parábola com parâmetro $p = 2$,vértice na origem e foco no eixo y, tem a equação:

$x^2 = 2py \Rightarrow x^2 = 2.2y \Rightarrow x^2 = 4y$,se F acima de V

ou:

$x^2 = -2py \Rightarrow x^2 = -2.2y \Rightarrow x^2 = -4y$,se F abaixo de V

4.2.4.3.Parábola com o vértice fora da origem

Se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{VF}$ // eixo Ox, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$ é conforme [8].

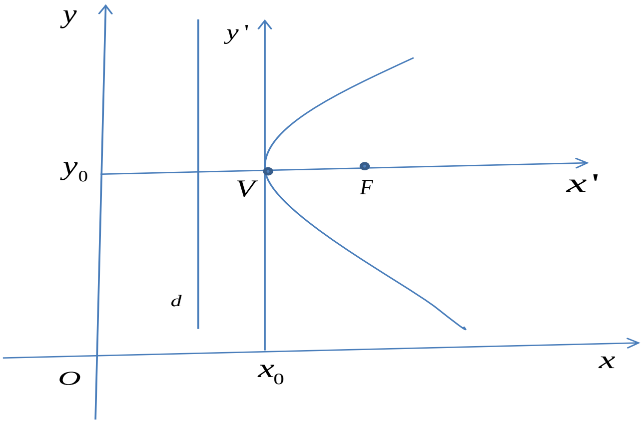


Figura 32 – Parábola com o vértice fora da origem

$$(y')^2 = 2px'$$

Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{VF}$ // eixo Oy ,sua equação relativamente ao sistema xOy é:

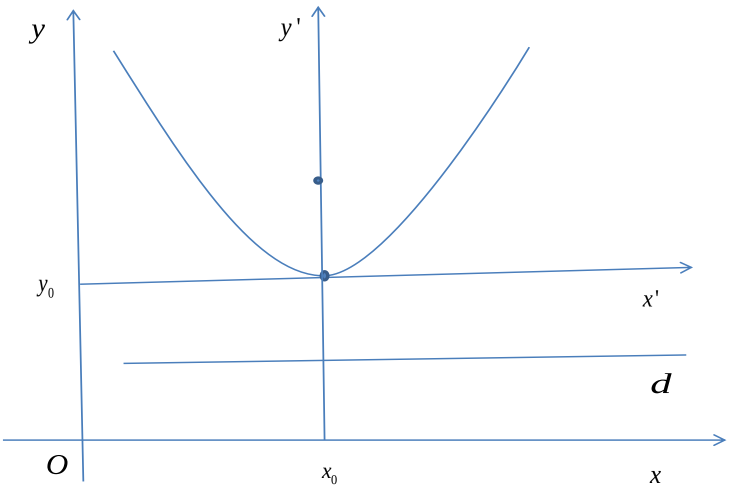


Figura 33 – Parábola com o vértice fora da origem

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$$

Exemplo: Uma parábola com vértice $V(7,8)$ e parâmetro 3 apresenta equação:

solução :

$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \Rightarrow (y-8)^2 = 2.3(x-7) \Rightarrow (y-8)^2 = 6(x-7)$,se $VF//x$ e F à direita de V ou:

$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0) \Rightarrow (x-7)^2 = 2.3(x-8) \Rightarrow (y-7)^2 = 6(x-8)$,se F é acima de V.

Nota-se ainda que uma parábola de vértice $V(7,8)$ e parâmetro 3 apresenta a equação:

$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0) \Rightarrow (y-8)^2 = -2.3(x-7) \Rightarrow (y-8)^2 = -6(x-7)$,se $VF//x$ e F à esquerda de V ou:

$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0) \Rightarrow (x-7)^2 = -2.3(x-8) \Rightarrow (y-7)^2 = -6(x-8)$, se $VF//y$ e

F abaixo de V .

4 Problemas com reta tangente

4.1 .Elipse

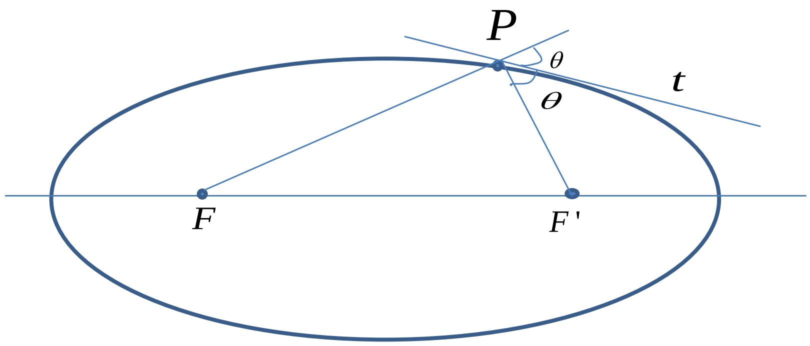


Figura 34 – A reta tangente com à Elipse

Teorema: Considere uma elipse de focos F e F' e seja P um ponto desta elipse. No triangulo PFF', a bissetriz externa relativa ao vértice P é a tangente à elipse. Veja [15].

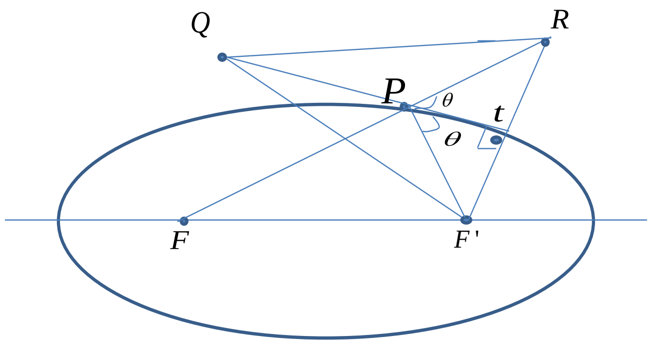


Figura 35 – Demonstração da reta tangente à elipse

Demonstração: Seja t a bissetriz do ângulo externo $\angle FPF'$, com P pertence à elipse de focos F e F'. Q é um ponto da reta t distinto de P. Seja R o ponto simétrico de F' com relação a reta t.

Assim: os triângulos $\Delta PRF'$ e $\Delta QRF'$ são isósceles:

$PR = PF'$ e $QR = QF'$

Assim: $2a = PF + PF' = PF + PR = FR$

Pela desigualdade triangular em ΔQFR:

$$QF + QR > FR \Rightarrow QF + QF' > 2a$$

Conclui-se, portanto que o ponto Q está no exterior da elipse. Desde que Q pode assumir qualquer ponto da reta t distinto de P, segue que P é o único ponto de t que pertence à elipse, ou seja, t é a tangente à elipse no ponto P.

Exemplo: Vamos obter as retas tangentes da elipse $\psi : 9x^2 + 4y^2 = 25$ que são paralelas a reta $r : y = 2x$.

Solução:

As retas tangentes têm equações $y = 2x + h$.

Para resolver o sistema $\begin{cases} y = 2x + h \\ 9x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases}$,

obtemos a equação $9x^2 + 4(2x + h)^2 = 25$,ou seja, $25x^2 + 16hx + (4h^2 - 25) = 0$,

cujo discriminante é $\Delta = -144h^2 + 2500$.

Logo, para que a reta seja tangente à elipse, devemos ter $\Delta = 0$,ou seja, $h = \pm \frac{25}{6}$.

As retas tangentes são: $t_1 : \mathrm{y} = 2x + \frac{25}{6}$ e $t_2 : \mathrm{y} = 2x - \frac{25}{6}$.

4.2 Hipérbole

Teorema: Seja P um ponto sobre uma hipérbole de focos F e F'. Por P traça-se uma reta t que é tangente à hipérbole. A reta t é a bissetriz do ângulo $\angle FPF'$. Segundo [15].

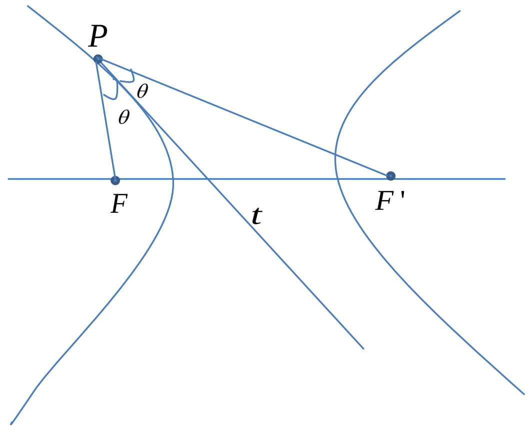


Figura 36 – Demonstração da reta tangente à hipérbole

Demonstração: A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do teorema das tangentes para elipses, onde se deve demonstrar que para qualquer outro ponto Q da bissetriz de $\angle FPF'$, tem-se que $|QF - QF'| < 2a$,implicando que Q não pertence à hipérbole. Deste modo, P é o único ponto da reta t que pertence à hipérbole, fazendo com que a bissetriz de $\angle FPF'$ seja tangente à hipérbole.

Exemplo: Vamos obter as retas tangente à hipérbole $\psi : x^2 - y^2 = 4$ passando pelo ponto $P_0 : (1,0)$.

Solução:

As retas tangentes têm equações $y = m(x-1)$.

Temos o sistema $\begin{cases} y = m(x-1) \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$,

que conduz à equação $(1-m)x^2 + 2mx - (m+4) = 0$,sendo $\Delta = 16 - 12m^2$.

Logo, para que a reta seja tangente à hipérbole, devemos ter $m = \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

As retas tangentes são: $t_1: y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)$ e $t_2: y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)$.

4.3 .Parábola

Teorema: Considere um ponto P pertence a uma parábola de foco F e diretriz d. Seja D a projeção de P sobre a diretriz d .Trace em P a tangente t à parábola. A reta t é a bissetriz do ângulo $\angle FPD$ [15].

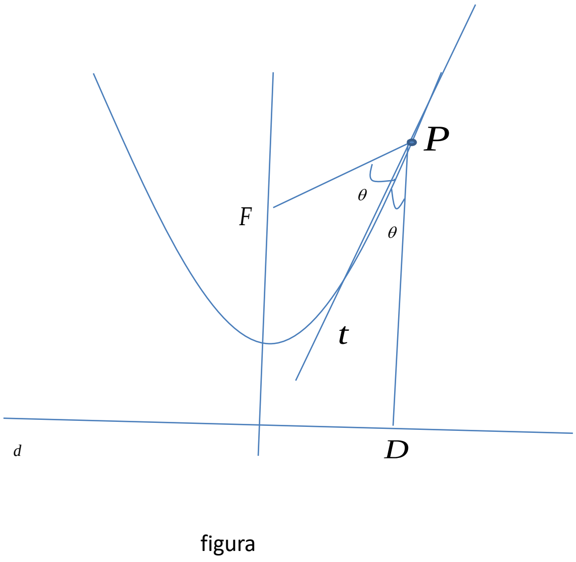


Figura 37 – A reta tangente à parábola

Corolário1: O ponto D é simétrico de F com relação à reta t.

Corolário 2: Em um espelho parabólico todo o raio luminoso que incide na parábola paralelamente ao eixo de simetria reflete ao longo de uma reta que passa pelo foco da parábola.

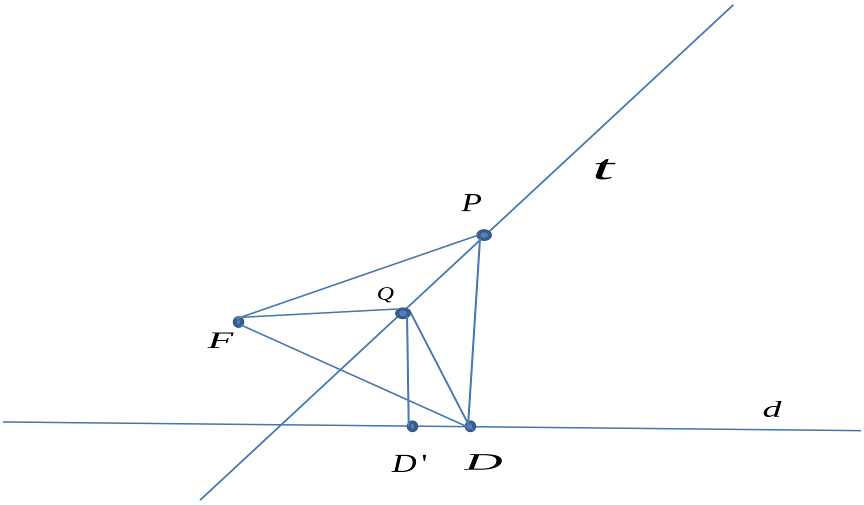


Figura 38 – A demonstração da reta tangente à parábola

Demonstração: Considere um ponto P sobre a parábola, e trace a bissetriz t do ângulo $\angle FPD$. Tome um ponto Q qualquer,distinto de P, na reta t. Trace $\overline{FQ}$ e seja D' a projeção de Q sobre a diretriz d.

Como P pertence à parábola então $\overline{PF}=\overline{PD}$,fazendo com que ΔFPD,seja isósceles. Assim, a bissetriz t é mediatriz de $\overline{FD}$, implicando que $\overline{QF}=\overline{QD}$.

Como D' é a projeção de Q sobre a reta diretriz d segue que $\overline{QD'}<\overline{QD}=\overline{QF}$,fazendo com que Q seja externo á parábola (se ele estivesse sobre a parábola teríamos $\overline{QD'}=\overline{QF}$, que não ocorre).

Como Q representa um ponto qualquer sobre a reta t distinto de P, conclui-se que P é o único ponto da reta t que pertence à parábola. Logo, segue que t é tangente á parábola.

Sobre o corolário 1 , observe que a reta t é mediatriz do segmento $\overline{FD}$, fazendo com que as distâncias de F ate t e de D até t sejam iguais.

Para demonstração corolário 2 basta notar que o ângulo formado por um raio paralelo ao eixo de simetria e a reta t é igual a α, implicando que o raio refletido percorra o segmento $\overline{FD}$,passando, portanto, pelo foco F da parábola.

Exemplo: Vamos obter as retas tangentes à parábola $\psi: x=4y^2$, passando pelo ponto $P_0:(0,3)$.

Solução:

Procuramos retas $y-3=mx$ tangentes à parábola.

Temos o sistema $\begin{cases} y-3=mx \\ x=4y^2 \end{cases}$, Que conduz à equação $\frac{y-3}{m}=4y^2$, ou seja, $4my^2-y+3=0$.Como $\Delta=1-48m$,para temos $\Delta=0$, temos $m=\frac{1}{48}$. Logo existe apenas uma reta tangente com equação $y-3=\frac{1}{48}x$; a outra é paralela ao eixo OY e sua equação é $x=0$.

5 .Equação Geral do 2° Grau

Sabemos que uma equação geral do 1° grau, em x e y, $Ax+By+C=0$ (A ou $B\neq 0$) sempre representa uma reta. Veremos, agora, o que se pode afirmar sobre uma equação geral do 2° grau, em x e y, $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (A, B ou $C\neq 0$).Segundo[13].

Já vimos que, quando escolhemos os eixos coordenados paralelos aos eixos de simetria, as equações da circunferência, parábolas, elipse e hipérboles são do tipo acima, com $B=0$.

a) Circunferência:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

As equações são do tipo : $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $(A=C)$

Exemplos: $3x^2+3y^2+6x+6y-1=0$; $-2x^2-2y^2+4x+4y+3=0$

b) Elipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=r^2$$

As equações são do tipo : $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (A e C de mesmo sinal,$A\neq C$).

Exemplos:

$2x^2+y^2+4x-6y-11=0$; $x^2+4y^2-x-y=0$ e $-3x^2-4y^2+12x-8y-4=0$.

c) Hipérbole:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=r^2$$

As equações são do tipo: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (A e C de sinais contrários, $A \neq C$).

Exemplos : $3x^2-2y^2-6x-4y-5=0$; $4x^2-y^2-2x-3=0$ e $-x^2+6y^2-4x=0$.

d) Parábolas:

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right)^2 \text{ ou } x-x_0=k\left(y-y_0\right)^2$$

As equações são do tipo : $Ax^2+Dx+Ey+F=0$ $\left(A \neq 0, C=0\right)$ ou: $Cx^2+Dx+Ey+F=0$ $\left(A=0, C \neq 0\right)$

Exemplos:

$x^2+4x-4y+5=0$; $3x^2-7x+2y-1=0$; $7x^2-3x+2y-5=0$; $4x^2+7y=0$ e $-8x^2+3y+x=0$.

6 Problemas Envolvendo Lugares Geométricos

Definição: Lugar geométrico é o conjunto dos pontos do plano que guardam determinada propriedades. Principais lugares geométricos são: circunferência, mediatriz, bissetriz, arco capaz, eixo radical, elipse, hipérbole, parábola. Veja [15].

Exemplo 1: Deduzir o lugar geométrico dos vértices dos ângulos retos de todos os triângulos retângulos, cuja a hipotenusa comum é o segmento que liga os pontos $\left(0,b\right)$ e $\left(\mathrm{a},b\right)$.

Solução:

Seja $\left(x,y\right)$ o vértice de qualquer um dos ângulos retos. Como os dois catetos são perpendiculares, a declividade de um deles deve ser o inverso da declividade do outro, com sinal trocado. Temos, pois:

$$\frac{y-b}{x-0}=\frac{1}{\frac{y-b}{x-a}}=-\frac{x-a}{y-b}$$

simplificando, obtemos:

$\left(y-b\right)^2=-x\left(x-a\right)$ ou $x^2+y^2-ax-2by+b^2=0$ (circunferência).

Exemplo 2: Determine o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$,tais que os produtos dos coeficiente angulares das retas que os ligam a $(3,-2)$ e a $(-2,1)$ é -6.

Solução:

$$\frac{y+2}{x-3}.\frac{y-1}{x+2}=-6 \text{ ou } 6x^2+y^2+y-6x=38 \text{ é uma (elipse).}$$

Exemplo 3: Deduzir a equação do lugar geométrico gerada por $P(x,y)$ que se desloca de modo que o produto dos coeficientes angulares das retas que o unem a $(-2,1)$ e $(4,5)$ é 3.

Solução:

$$\frac{y-1}{x+2}.\frac{y-5}{x-4}=3 \ ,$$

simplificamos obtemos,

$3x^2-y^2+6y-6x+29=0$ que é a equação de uma hipérbole.

7 Conclusão

Este trabalho visa abordar a compreensão do estudo das seções cônicas, com ênfase na elipse, hipérbole e parábola. Iniciamos com noções preliminares de plano cartesiano, distância entre dois ponto, equação da reta, translação e rotação de eixos, lugares geométricos, circunferência até chegarmos nas cônicas , no qual ,abordamos elementos , equações reduzidas, equação com centro fora da origem ,retas tangentes ,também aplicamos alguns problemas de lugares geométricos para identificar o tipo de cônicas.

REFERÊNCIAS

[1] IEZZI, Gelson***; Fundamentos Da Matemática Elementar*** :Geometria Analítica Vol: 7 ,Gelson Iezzi O - 5.Ed.- São Paulo;Atual,2005.

[2] MACHADO, Antônio dos Santos, Geometria Analítica e Polinômio/ Antônio Dos Santos Machado- São Paulo : Atual ,1986 (***Matemática, Temas e Metas***).

[3] SILVA, Claudio Xavier da, Matemática Aula Por Aula /Claudio Xavier Da Silva,Benigno Barreto Filho- 2 Ed. .Renov.- São Paulo: FTD,2005.- (***Coleção Matemática Aula Por Aula).***

[4] FACCHINI, Walter, ***Matemática-Volume Único/***Walter Facchini- 2.Ed.- São paulo, 2001.

[5] PAIVA, Manoel ***Matemática Volume Único***/Manoel Paiva-1 ed.-São Paulo: moderna, 2005.

[6] RIBEIRO, Jackson, ***Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*** 3:Ensino Médio/Jackson Ribeiro - São Paulo: Scipione, 2010.

[7] DANTE, Luiz Roberto ***Matemática: Livro Do Aluno***/Luiz Roberto DANTE -1 ed.- São Paulo: Ática,2004(vol.3).

[8] ***Matemática: Ciência E Aplicações***, 3: Ensino Médio/Gelson Iezzi- [Et.Al.].- 6 Ed- São Paulo:Saraiva,2010. Outros Autores:Osvaldo Doce,David Degenszajan, Roberto Perigo,Nilze De Almeida.

[9] SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática -Volume 3 -Ensino Médio/Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez De Sousa Vieira Diniz -3 Ed.Reforma-São Paulo:Saraiva,2003.

[10] PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática:Paiva /Manoel Rodrigues Paiva -1° ed. -São Paulo: Moderna,2003.(vol.3).

[11] SOUSA, Joamir Roberto. ***Novo Olhar Matemática*** /Joamir Roberto De Sousa -São Paulo:FTD,2010-(Coleção Novo Olhar,Vol .3)

[12] VENTURI, Jacir J.,1949- ***Cônicas e Quadricas*** /Jacir J. Venturi- 5°Ed. – Curitiba.

[13] MACHADO, Jose Nilson. ***Matemática por assunto (vol.7)*** /Nilson Jose Machado – editora sepcione,1988.

[14] KINDLE, Joseph H. ***geometria Analítica Plana e no Espaço*** (Coleção Schaum), EDIÇÃO1968.

[15] OLIVEIRA, Marcelo RUFINO ***Coleção Elementos Da Matemática vol. 4***, números complexos, polinômios,geometria analítica /Marcelo Rufino de Oliveira,-1 ed.,- BELÉM-2003.

[16] GUIMARÃES, Caio Dos Santos. ***Matemática Em Nível IME ITA*** / Caio Dos Santos Guimarães- Fortaleza.

[17] EVES, Howard. (1997) – ***Introdução à história da matemática*** –2ª ed. Campinas, SP. Editora da Unicamp.