UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ- UESPI
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

FELIPE PEREIRA DA SILVA MARTINS
RENAN ALFREDO BEZERRA

TRIÂNGULO E SUAS APLICAÇÕES

TERESINA-PI
2019

FELIPE PEREIRA DA SILVA MARTINS
RENAN ALFREDO BEZERRA

TRIÂNGULO E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Universidade Estadual do Piauí (UESPI), como requisito para obtenção do título de Graduado em Licenciatura Plena em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva.

TERESINA-PI
2019

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradecemos ao nosso supremo Deus, por sua graça e misericórdia em nossas vidas, estando no trono governando tudo e todos, sem ele não teríamos chegado até aqui, e por nos conceder: saúde, sabedoria, perseverança e o dom da vida.

Aos nossos pais: Cicero Martins, Keila Silva, Maria do Amparo (in memoriam) e aos nossos avôs e avós: José Marinho(In memoriam), Rosa Silva, Luís Soares, Teresa Teixeira, e ao tio Orlando Teixeira que mesmo em situações difíceis, não pouparam esforços para estudarmos, nos dando força e coragem, acreditando que poderíamos chegar ao final desta jornada.

A Universidade Estadual do Piauí e aos professores que estiveram durante o período da nossa formação, em especial ao José de Arimáteia, pelo companheirismo e ajuda em situações devidas. Além de Alessandro, Pedro Junior, Pitágoras, Lilane, Rosário, Socorro, Socorro Nunes, Geraldo, Francivaldo, Gladstone, Uchoa, Pinheiro, Juarez que hoje é o coordenador deste curso, Raimundo professor da disciplina de TCC, e ao professor António Luís por sempre está disposto a ajudar quando mais precisamos.

Ao nosso querido Orientador Dr. Afonso Noberto da Silva, por ser um exemplo de profissional a ser seguido, pela paciência e encorajamento. Por estar presente em nossa jornada desde o início, nos aconselhando em como devemos agir em sala de aula, sempre acreditando em nós, desde as orientações no PIBID até a orientação deste trabalho. Expressamos nossa imensa gratidão a sua simplicidade e sabedoria que muito contribuiu na nossa formação.

As nossas amigas: Emília Lorena e Francisca Erycka que ajudaram no decorrer deste trabalho. E aos nossos colegas de turma: Francivaldo do Livramento, António Fernandes, Joice Carvalho, Lucas Lima, Lucas Cordeiro, Thiago Matheus, Christopher, Pedro Alberto, Marcelo, Márcio, Mariana Cunha e Francisca Ericka que contribuíram direta e indiretamente em nossas vidas.

E por fim as nossas namoradas: Bianca Barros e Luzia Alcântara, pelo companheirismo, amor e incentivo nas ocasiões mais complicadas deste curso. Por não nos deixar desistir em momento algum, e serem sempre compreensivas, a vocês o nosso muito obrigado.

DEDICATÓRIA

Aos nossos familiares e amigos e a todos que se dedicam ao ensino ou estudo de triângulos e suas aplicações.

EPÍGRAFE

"O sucesso é como um grande triângulo, tendo como vértices o caráter, a competência e o esforço.".

Ana Fraga

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre triângulos e suas aplicações. Trata-se de um assunto muito relevante para os estudantes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, para o caso daqueles que se dedicam aos cursos das Ciências Exatas. Neste trabalho, definimos triângulos, apontamos seus principais elementos e suas principais características e, por fim, demonstramos os mais recorrentes teoremas e apresentamos algumas aplicações.

Palavras-chave: Triângulos, Demonstração e Aplicações.

ABSTRACT

This paper presents a study about triangles and their applications. This is a very relevant subject for students from the early years of elementary school to higher education, for those who are dedicated to the courses of Exact Sciences. In this paper, we define triangles, point out their main elements and their main characteristics and, finally, demonstrate the most recurring theorems and present some applications.

Keywords: Triangles, Demonstration and Applications.

LISTA DE IMAGENS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática está presente no nosso dia-a-dia, tornando-se cada vez mais necessário o estudo desta ciência exata. Dentre todos os conteúdos que fazem parte do estudo da Matemática, temos o estudo sobre as figuras geométricas, que nos cercam rotineiramente. Em especial destacamos os triângulos. Não sabemos ao certo como surgiram, porém, temos a certeza de sua importância no nosso cotidiano.

Os triângulos estiveram presentes desde a antiguidade, apresentando-se na arquitetura, nas caravelas, nas pirâmides egípcias com suas faces triangulares e até mesmo para o cálculo de áreas de terrenos irregulares, utilizando o artifício da triangulação. Hoje encontramos os triângulos em várias situações do nosso cotidiano, no funcionamento do GPS, utilizando a triangulação de sinais (LIMA, 2013), nas escadas encostadas nas paredes, nas rampas e etc. Empregamos os conhecimentos sobre triângulos também para calcularmos a altura de prédios, torres ou morros, a altura de um avião e distâncias percorridas por ele, além de medidas de distâncias na topografia. Na arquitetura os triângulos ainda são muito usados. É comum, por exemplo, observarmos casas em forma de "A", pelo fato dessa estrutura aguentar peso devido e possuir uma distribuição de energia ao longo da forma triangular, sendo mais eficaz que outras formas geométricas.

Os triângulos são figuras geométricas com três lados, três ângulos e três vértices. O triângulo é o único polígono que não possui diagonais e cada um de seus ângulos externos é suplementar do ângulo interno adjacente. Além disso, seu perímetro é dado pela soma dos seus três lados e denomina-se "região côncava" à região externa e "convexa" à sua região interna, cuja à soma dos seus ângulos é 180°. Os triângulos também podem ser classificados quanto aos seus lados e aos seus ângulos. Podem ser congruentes e semelhantes entre si, e possuem mediatrizes, bissetrizes, pontos médios e alturas. Dessas, ainda podemos estudar os pontos notáveis.

Como vimos, os triângulos estão a nossa volta desde a antiguidade, e à medida em que avançamos em nossa vida escolar vamos frequentemente nos deparando com o estudo dessa figura geométrica. Desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior o estudo de triângulos se mostra importante. É no Ensino Fundamental Maior que temos o primeiro contato com os conhecidos teoremas, a exemplo o de Pitágoras, aplicado nos triângulos retângulos. No Ensino Médio podemos explorar os teoremas dos senos, cossenos e podemos ainda ver várias maneiras de como calcularmos a área de um triângulo, dentre outros assuntos. Assim, é notória a transcendência desta figura geométrica e seus conceitos e aplicações.

Portanto, este trabalho apresenta os principais conteúdos sobre triângulos, bem como sua definição, seus elementos, classificações, teoremas, demonstrações e aplicações, trazendo informações úteis para pesquisas e instrução de discentes em todos os níveis de escolaridade.

No segundo tópico deste trabalho abordaremos a definição de triângulos, bem como suas classificações e critérios de construção. No terceiro tópico trataremos os casos de congruência e as aplicações referentes a congruência como a existência do ponto médio e da bissetriz em um triângulo. Traremos uma abordagem sobre semelhança de triângulos no quarto tópico deste trabalho. Triângulo retângulo e seus elementos e a lei dos senos e cossenos são abordados nos tópicos cinco e seis respectivamente. Já os pontos notáveis serão demonstrados no tópico sete. No sétimo tópico iremos trazer as fórmulas mais comuns de como calcular a área de um triângulo e encerramos este trabalho com algumas aplicações.

2. TRIÂNGULOS: CONCEITOS E CLASSIFICAÇÕES

Dado três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC, diz- se ainda que ABC é um Polígono de três lados.
Indica-se Δ ABC.

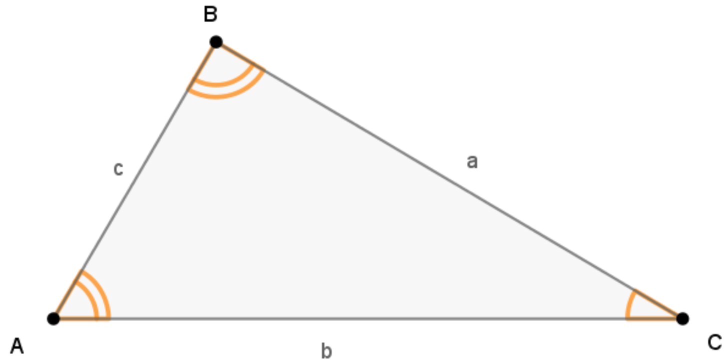


Figura 1: Triangulo ABC

O triângulo possui os seguintes elementos: vértices, lados e ângulos.
Vértices são interseções de duas arestas, representados sempre por letras maiúsculas. Os pontos A, B e C são vértices do Δ ABC.

Lados são os segmentos (arestas) que compõem o triângulo. A representação da medida do lado é dada por letra minúscula. Os segmentos $\overline{AB}$, de medida "c", $\overline{AC}$, de medida "b" e $\overline{BC}$ de medida "a", são os lados do Δ ABC.

Ângulos são regiões delimitadas por duas semirretas que possuem um ponto de interseção em comum. Os ângulos BÂC, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ também representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são os ângulos internos do ΔABC.

Nota-se que os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e os ângulos Â, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são opostos.

2.1. Construção dos Triângulos [1]

A soma dos dois lados menores tem que ser maior do que o lado maior do triângulo (desigualdade triangular). Esse é um parâmetro que deve ser seguido para se construir um triângulo qualquer. A seguir, veremos os casos.

- Caso 1: segmento $\overline{AB} + \overline{CB} > \overline{AC}$, em determinado momento haverá um ponto de interseção entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ formando o polígono de três lados.

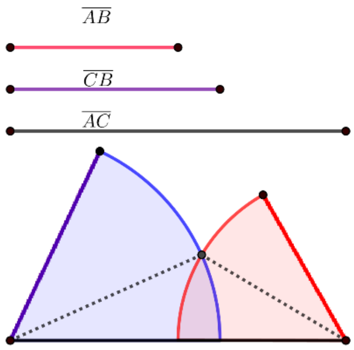


Figura 2: Construção caso 1, possível

- Caso 2: segmento $\overline{AB}$ + $\overline{CB}$ = $\overline{AC}$, vemos que não haverá uma interseção entre os segmentos de tal maneira que não formará o polígono de três lados:

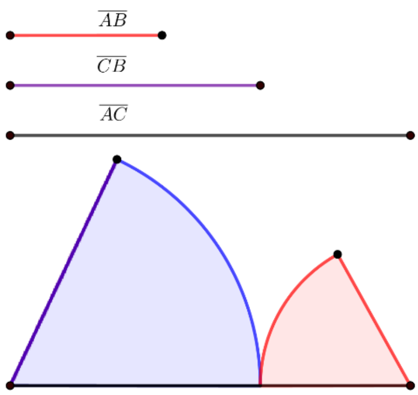


Figura 3: Construção caso 2, impossível

[1] Veja MOREIRA, George Ney Almeida. Desigualdades: uma abordagem através de problema. Campina Grande: 2016, p.19.

- Caso 3: segmento $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{CB}} < \overline{\mathrm{AC}}$, não haverá uma interseção entre os segmentos de tal modo que venha a formar um polígono de três lados:

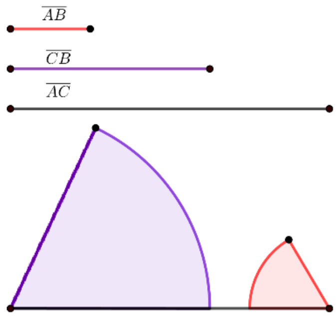


Figura 4: Construção caso 3, impossível

Observando as situações anteriores, é notável que podemos ter variações nos lados e ângulos de um triângulo, sendo assim temos duas classificações, são estas: quanto aos lados e ângulos.

2.2. Classificação quanto aos lados[2]

Os triângulos classificam-se em equilátero, escaleno e isósceles.

Equilátero: triângulo que possui três lados de mesma medida, por essa razão, todos os ângulos internos desse triângulo também possuem a mesma medida.

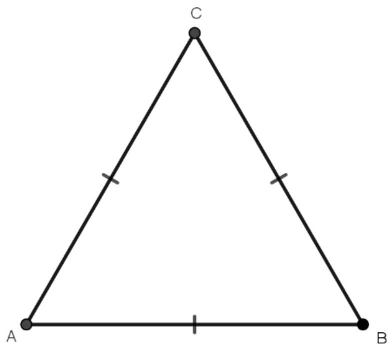


Figura 5: Triângulo ABC equilátero

Note que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são de mesma medida.

[2] Ver: TAVARES, João Nuno. Triângulo. In: Ciência Elementar. Vol.1. Revista de Ciência Elementar. DMFCUL: 2013.

Escaleno: é um triângulo que possui três lados de medidas diferentes e por essa razão todos os seus ângulos internos são diferentes.

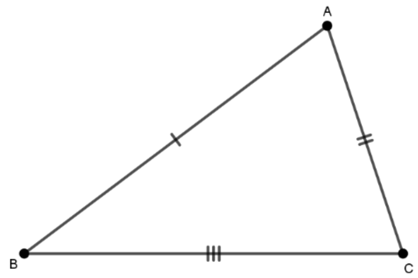


Figura 6: Triângulo ABC escaleno

Vemos na figura 6 que: os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são de medidas distintas.

Isósceles: é um triângulo que possui dois lados com a mesma medida e um com medida diferente dos dois outros lados, consequentemente o mesmo possui dois ângulos internos de medidas iguais e um de medida diferente dos dois outros ângulos.

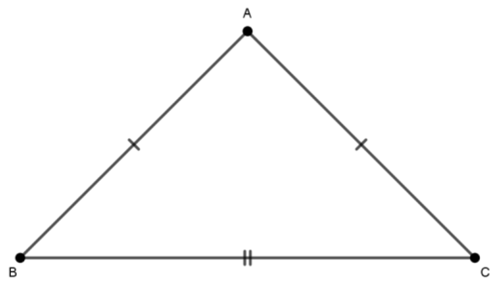


Figura 7: Triângulo ABC isósceles

No Δ ABC, temos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ que possuem mesmas medidas, e o segmento $\overline{BC}$ com medida diferente.

2.3. Classificação quanto aos ângulos[3]

Quanto aos ângulos os triângulos classificam-se em acutângulo, retângulo e obtusângulo.

Acutângulo: é um triângulo que possui todos os seus ângulos internos menores que 90º graus (ângulos agudos).

[3] TAVARES, João Nuno. Triângulo. In: Ciência Elementar. Vol.1. Revista de Ciência Elementar. DMFCUL: 2013, p. 1-2

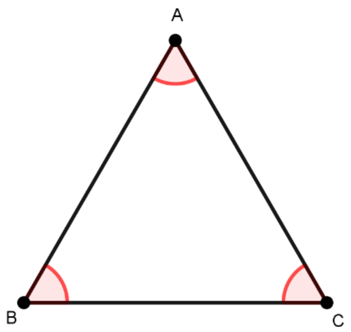


Figura 8: Triângulo ABC acutângulo

No Δ ABC a medida de $\hat{A}$ < 90°, medida $\hat{B}$ < 90° e a medida de $\hat{C}$< 90°, sendo assim todos os ângulos internos são agudos, portanto, o triângulo ABC é acutângulo.

Retângulo: é um triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, igual a 90º graus, e dois ângulos agudos.

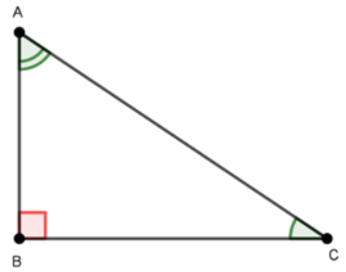


Figura 9: Triângulo retângulo

Temos que $\hat{B}$ = 90°, $\hat{C}$ < 90º e $\hat{A}$ < 90°, assim o triângulo ABC é retângulo, pois possui dois ângulos agudos e um ângulo reto.

Obtusângulo: é um triângulo que possui dois ângulos agudos e um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo maior que 90º graus.

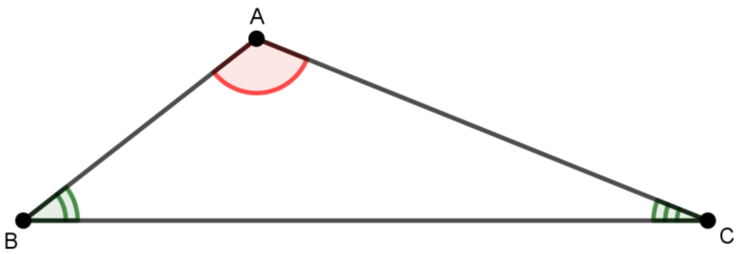


Figura 10: Triângulo ABC obtusângulo

No triângulo da figura 10, temos as seguintes situações para os ângulos: $\hat{A}$ > 90°, $\hat{B}$ < 90° e $\hat{C}$< 90°, assim o triângulo Δ ABC é obtusângulo, pois possui um ângulo maior que 90° e dois ângulos menores que 90°.

3. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS[4]

Um triângulo é congruente a outro quando existe correspondência entre seus elementos, ou seja, quando seus lados são congruentes aos lados do outro e quando seus ângulos são congruentes aos ângulos do outro. A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

Observe na imagem abaixo:

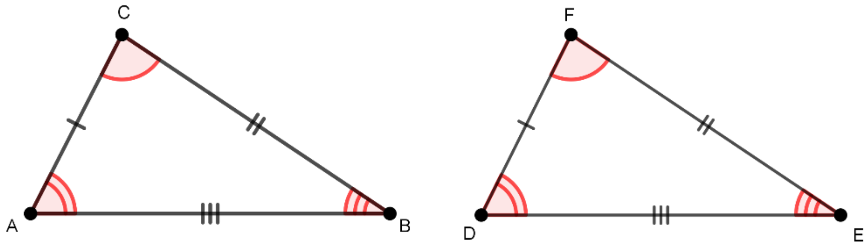


Figura 11: Congruência entre triângulos

O $\Delta ABC \equiv \Delta DEF \leftrightarrow \left(\overline{AB} \equiv \overline{DF}\ , \overline{AC} \equiv\ \overline{DE}\ ,\ \overline{BC} \equiv \overline{EF}\ e\ \hat{A} \equiv \hat{D}\ \hat{B} \equiv \hat{E}\ \hat{C} \equiv \hat{F}\ \right)$

3.1. Casos de Congruência [5]

Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes além das chamadas totais que são seis (três entre lados e três entre ângulos), estas condições mínimas são conhecidas como casos de congruência.

- Caso 1. LAL: triângulos que possuem dois lados congruentes e o ângulo compreendido entre esses lados também congruentes, são congruentes, obrigando que o lado e os ângulos restantes também sejam.

---

[4] PINHEIRO, Rodrigo. Programa Olímpico de Treinamento. In: Curso de Geometria - Congruência de Triângulos.

[5] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana. In: Exercícios resolvidos. Ed. 8ª. São Paulo: Atual, 2005

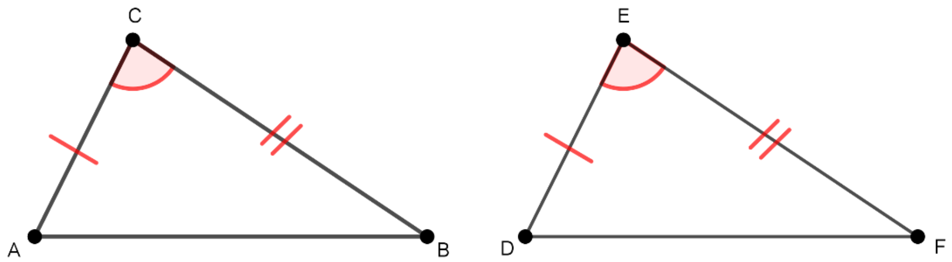


Figura 12: Caso LAL

Da figura 12 decorre: $\overline{CB} \equiv \overline{EF}$, $\hat{C} \equiv \hat{E}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DE}$. Pelo caso LAL o $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ implicando na seguinte informação: $\hat{B} \equiv F, \overline{AB} \equiv \overline{DF}, \hat{A} \equiv \widehat{D}$. O caso LAL é conhecido como um postulado.

3.1.1. Teorema do triângulo isósceles

Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Seja o triângulo ABC, onde $\overline{AB} = \overline{AC}\cdot$, queremos mostrar que o ângulo $\hat{B} = \hat{C}$.

Observe as figuras a seguir:

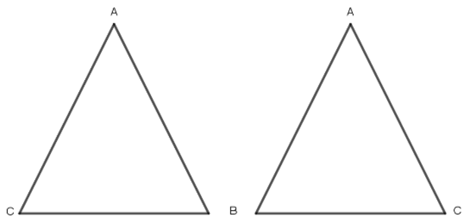


Figura 13: Triângulo isósceles

Note que os vértices correspondem da seguinte maneira; A ↔ A, B ↔ C e C ↔ B, como $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$, além de $\hat{A} = \hat{A}$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos, segue que a correspondência é válida. Logo, tem-se que $\hat{B} = \hat{C}$.

- Caso 2. ALA

Dados dois triângulos, se possuem dois ângulos congruentes e o lado entre esses ângulos forem congruentes, então eles serão congruentes.

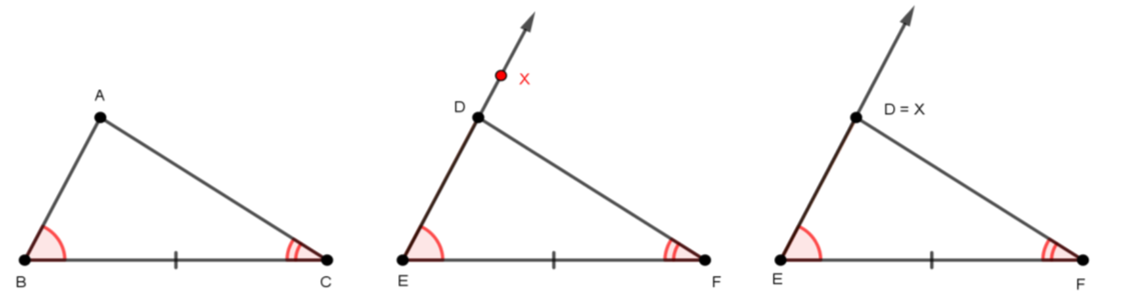


Figura 14: Caso 2, ALA

Sejam os triângulos ABC e EFD, sendo $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, $\hat{E} \equiv \hat{B}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$. Pelo postulado do transporte de segmentos, podemos tomar um ponto X pertencente a $\overline{AC}$, de modo que $\overline{EX} \equiv \overline{BA}$.

Como $\overline{BC} \equiv \overline{EF}, \hat{E} \equiv \hat{B}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}.$, pelo caso 1 de congruência de triângulos (LAL), concluímos que os triângulos ABC e XEF são congruentes. Daí temos que $B\hat{C}A \equiv E\hat{F}X$. Partindo da hipótese de que $\hat{F} = \hat{C}$, com $B\hat{C}A \equiv E\hat{F}X$ e com o postulado do transporte de ângulos temos que $\overline{ED}$ e $\overline{FX} = \overline{FD}$ interceptam-se no ponto X = D.

Como X ≡ D e $\overline{EX} \equiv \overline{BA}$ temos que $\overline{ED} \equiv \overline{BA}$.

Então $\overline{ED} \equiv \overline{BA},, \hat{E} \equiv \hat{B}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ pelo caso LAL concluímos que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

- **Caso 3. LLL**

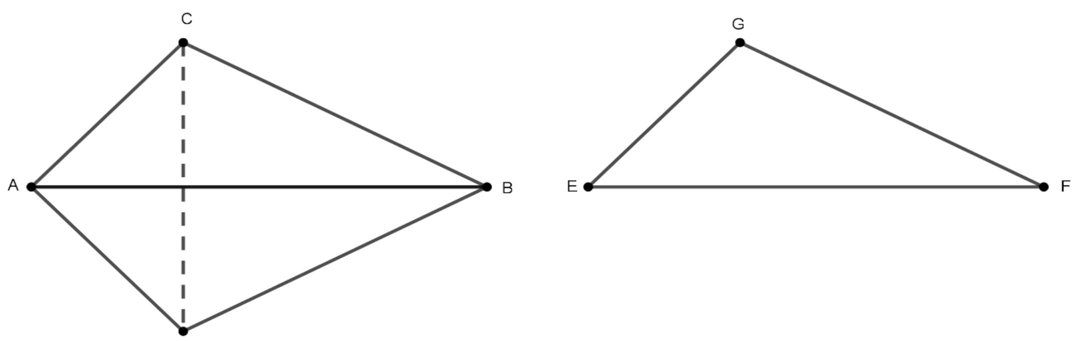


Figura 15: Caso 3, LLL

ABC e EFG são triângulos cujo os segmentos $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$, nosso intuito é mostrar que o triângulo ABC = EFG.

Usando o transporte de ângulos e segmento vamos construir um ângulo igual a GÊF a partir do segmento $\overline{AB}$ este estando no semiplano oposto a C. Daí marcaremos um ponto D, de modo que $\overline{AD} = \overline{EG}$ assim podemos ligar D a B. Como foi dito que $\overline{AB} = \overline{EF}$ e por construção temos que $\overline{AD} = \overline{EG}$ e DÂB = GÊF, então ABD = EFG.

Agora chegaremos a conclusão de que ABD e EFG são congruentes, para isso traçaremos $\overline{CD}$. Note que $\overline{AD} = \overline{EG}$ = $\overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{FG}$ = $\overline{BC}$, então os triângulos ABD e EFG são isósceles, tem-se então que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B \implies A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Porém, pelo caso 1 de congruência de triângulos, concluímos que ABD = ABC, como ABD = EFG, logo ABC = EFG.

3.1.2. Existência do ponto médio

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, usando os postulados de transportes de ângulos e segmentos (Reflexiva, Simétrica e Transitiva), vamos construir conforme a figura:

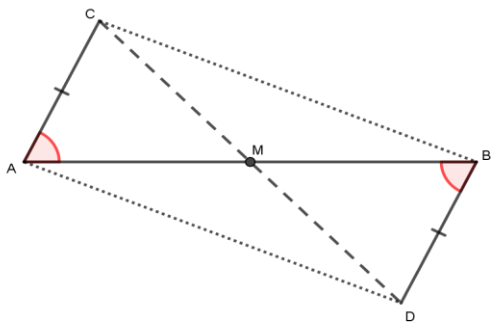


Figura 16: Ponto médio de $\overline{AB}$

CÂB ≡ $D\hat{B}A$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DB}$. Note que C e D estão em semiplanos opostos à reta $AB^{\leftrightarrow}$, e ainda que:

$$\overline{CD}\ intercepta\ o\ segmento\ \overline{AB}\ em\ um\ determinado\ ponto\ que\ chamaremos\ de\ M.$$

Observe então a sequência a seguir de congruência de triângulos:

$\Delta CAB \equiv \Delta DBA$ Pelo caso LAL, $\overline{AB}$ é comum.

$\Delta CAD \equiv \Delta DBC$ Pelo caso ALA ou pelo caso LLL.

$\Delta AMD \equiv \Delta BMC$ Pelo caso ALA.

Da terceira congruência implica que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, então M diz-se ponto médio de $\overline{AB}$.

3.1.3. Existência da bissetriz

Seja um ângulo $A\hat{O}B$ usaremos novamente a idéia de transporte de segmento para obtermos A e A' em $\underline{OA}$ e B e B' em $\underline{OB}$, daí temos que:

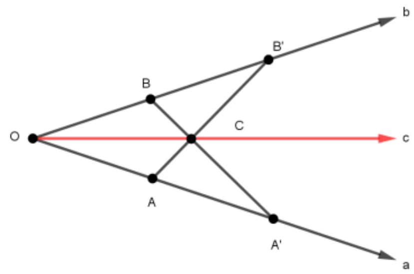


Figura 17: Ângulo AÔB

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \quad (1) \text{ e}$$

$$\overline{OA'} \equiv \overline{OB'} \ (2)$$

Com $\overline{OA'} > \overline{OA}$ e $\overline{OB'} > \overline{OB}$. Tome C o ponto de interseção de $\overline{AB'}$ com $\overline{A'B}$ e consideremos a semirreta $\overrightarrow{OC} = Oc$. De acordo com os casos LAL, ALA e LAL temos respectivamente que $\Delta AOB' \equiv \Delta BOA', \Delta ACA' \equiv \Delta BCB'$ e que $\Delta OAC \equiv \Delta OBC$, Com isso podemos afirmar que $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$, ou seja Oc é Bissetriz de AÔB.

3.1.4. Mediana de um Triângulo

A mediana de um triângulo é um segmento que liga um vértice de um triângulo ao ponto médio da aresta oposta. Na figura podemos ver a mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$:

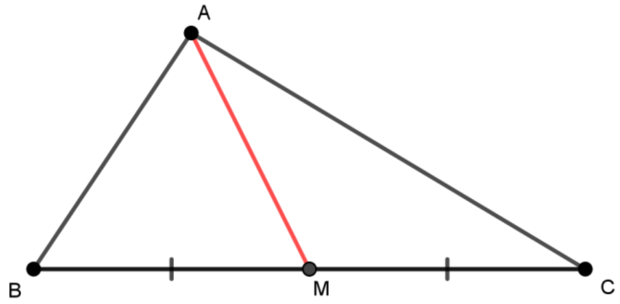


Figura 18: Mediana $\overline{AM}$

3.1.5. Bissetriz interna do Triângulo

O segmento que possui uma das suas extremidades no vértice e a outra extremidade no lado oposto do triângulo e divide o ângulo deste vértice em dois ângulos congruentes é definido como sendo a bissetriz interna do triângulo.

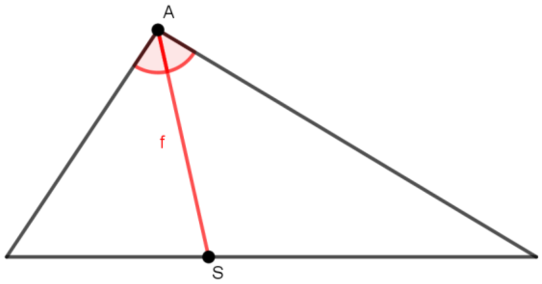


Figura 19: Bissetriz $\overline{AS}$

3.1.6. Teorema do ângulo externo

Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

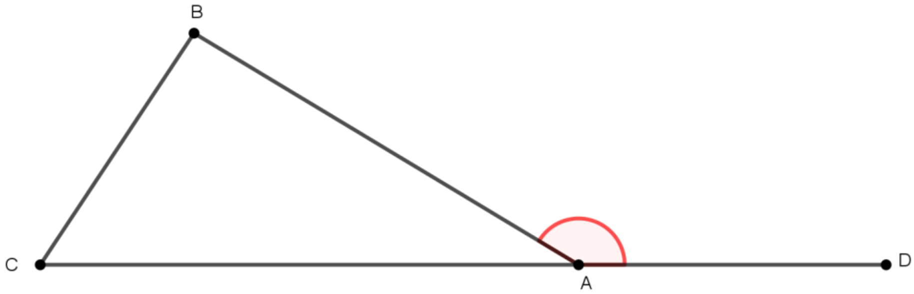


Figura 20: Ângulo externo BÂD

Demonstração: Tomemos ΔABC sendo. Seja D um ponto marcado na reta suporte de $\overline{CA}$ de modo que A esteja entre C e D. Queremos mostrar que BÂD > $\hat{B}$. Para isso consideremos E como sendo o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

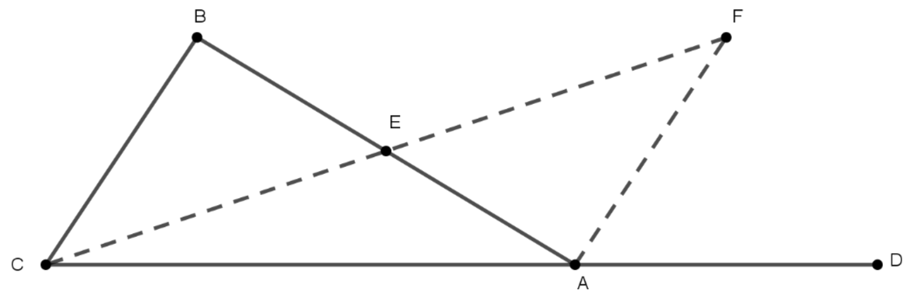


Figura 21: E (médio) de $\overline{AB}$

Na semirreta $\overline{CE}$, marque um ponto F de modo que $\overline{CE}$ = $\overline{EF}$, traçamos $\overline{EF}$. Ao compararmos os triângulos CEB e FAE, como E é ponto médio de $\overline{AB}$,temos que $\overline{BE}$ =$\overline{AE}$ e por construção $\overline{CE}$ = $\overline{EF}$, e ainda BÊC = AÊF por serem opostos pelo mesmo vértice, segue-se então que $\hat{B}$ = EÂF. Observe que $\overline{AF}$ divide o ângulo BÂD, então EÂF < BÂD, portanto $\hat{B}$ = BÂD.

Proposição: A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que 180°.

Seja ΔABC, tome os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, vamos mostrar que a soma desses dois ângulos é menor que 180°.

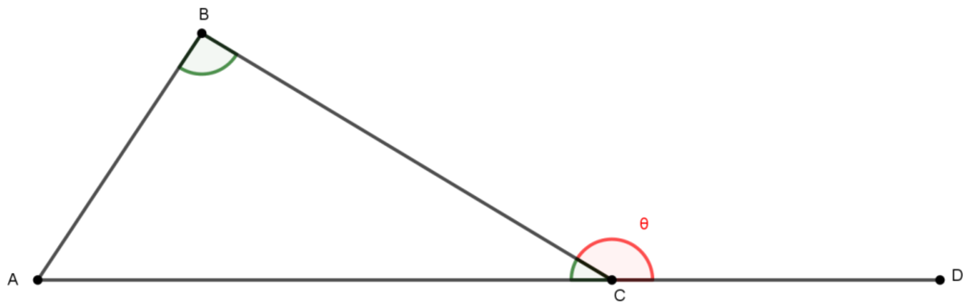


Figura 22: Ângulo $B\hat{C}D$ > $A\hat{B}C$

Seja θ o ângulo externo do triângulo, como mostra a figura acima.

Pelo teorema do ângulo externo temos que θ > $\hat{B}$.

Observe que θ e $\hat{C}$ são suplementares, então $\theta + \hat{C} = 180°$ desta forma $\hat{B} + \hat{C} < \theta + \hat{C} = 180°$.

Desta proposição segue que, todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.

4. SEMELHANÇAS DE TRIÂNGULOS[6]

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos congruentes ordenadamente e lados homólogos proporcionais. Isto é, se os triângulos ABC e DEF são semelhantes e se ocorre que, $\hat{A}$ corresponde $\widehat{D}$, $\hat{B}$ corresponde $\hat{E}$ e $\hat{C}$ corresponde $\hat{F}$, tal que estabeleça uma semelhança, então as seguintes igualdades são validas:

$\hat{A} = \widehat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e ainda, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$ = K, onde "K" é a razão entre as medidas dos lados correspondentes, chamado de razão de semelhança.

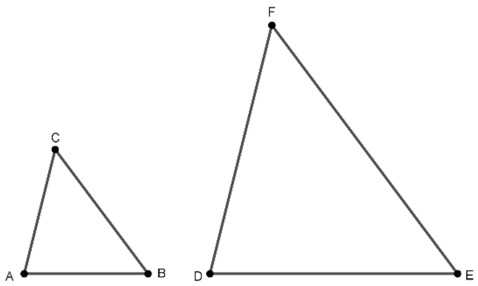


Figura: 23 Semelhanças de triângulo

Caso K = 1, os triângulos são congruentes.

- 1° Caso de semelhança

Dado ΔABC, ΔA'B'C' com Â≡Â' e $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$ então o triângulo ABC é semelhante ao ΔA'B'C'.

Demonstração:

Suponhamos que os triângulos não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

Tomemos em $\overline{AB}$ um ponto D de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e o triângulo ADE Com $\widehat{D} \equiv \widehat{B'}$ e E no lado $\overline{AC}$.

---

[6] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana. In: Exercícios resolvidos. Ed. 8ª. São Paulo: Atual, 2005

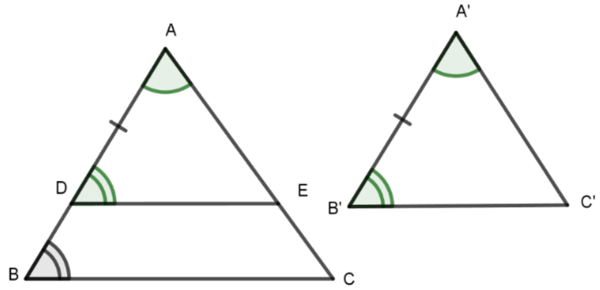


Figura: 24° Caso de semelhança

Como $\hat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e $\widehat{D} \equiv \widehat{B'}$ Pelo caso de congruência ALA temos que ΔADE ≡ ΔA’B’C’. **(1)**

E $\hat{B} \equiv \widehat{B'} \equiv \widehat{D}, então\ \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ implicando em ΔABC ~ ΔADE. **(2)**

De **(1)** e **(2)** temos ΔABC ~ ΔA’B’C’.

- 2° caso de semelhança

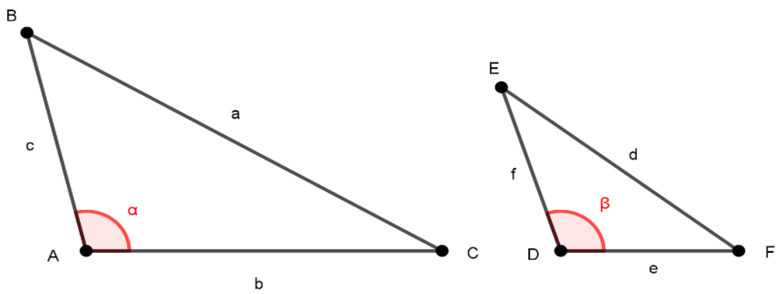


Figura 25: 2° Caso de semelhança

Dados os Triângulos ABC e DEF. Sejam dois segmentos quaisquer do triângulo ABC proporcionais e correspondentes dois segmentos quaisquer do triângulo DEF e os ângulos compreendidos entre esses segmentos sejam congruentes, queremos mostrar que ΔABC ~ ΔDEF

Demonstração:

Analogamente ao caso 1 usando o critério de congruência LAL e proporcionalidade temos:

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = k \qquad \textbf{(1)}$$

$$\hat{a} \equiv \beta \qquad \textbf{(2)}$$

De **(1) e (2)** temos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF.

- 3° Caso Semelhança

Dados os triângulos ABC e DEF queremos mostrar que se existem entre eles dois lados correspondentes proporcionais entre eles logo serão semelhantes.

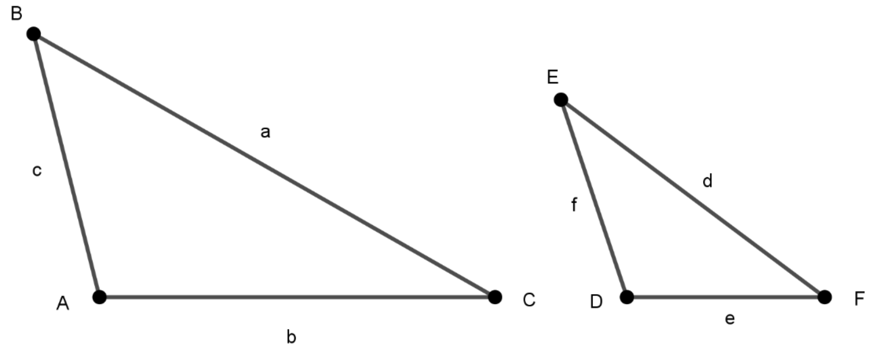


Figura 26: 3° Caso de semelhança

Demonstração:

Análogo aos casos anteriores usando o critério LLL temos: $\frac{a}{d} = \frac{c}{f} = k$ então $\frac{b}{e} = k,$ implicando que os ângulos são congruentes logo os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

5. TRIÂNGULO RETÂNGULO E SEUS ELEMENTOS[7]

O triângulo que possui um ângulo 90° (reto), chama-se triângulo retângulo.

Considere o triângulo ABC retângulo em $\hat{A}$ e conduzindo $\overline{AD}$ perpendicular $\overline{BC}$, marquemos D em $\overline{BC}$. Temos os seguintes elementos:

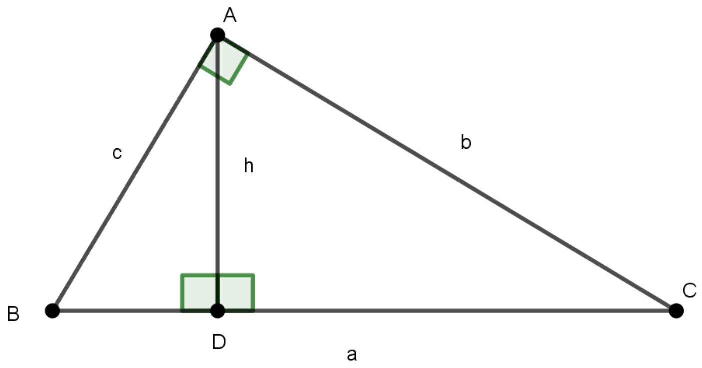


Figura 27: Triângulo retângulo ABC

$\overline{BC}$ = a: hipotenusa

$\overline{AC}$ = b: cateto

$\overline{AB}$ = c: cateto

$\overline{AD}$ = h: altura relativa à hipotenusa

5.1. Semelhança de triângulos retângulos

Dado o triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, tracemos a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa, teremos dois triângulos retângulos DBA e DAC, semelhantes ao triângulo ABC.

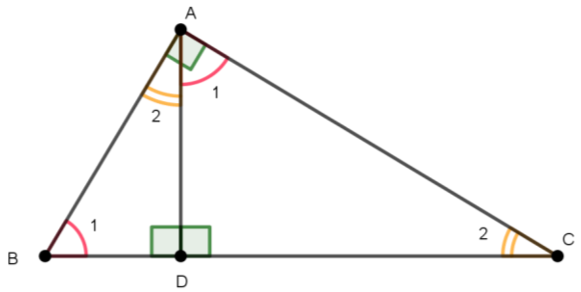


Figura 28: Semelhança no ΔABC retângulo

[7] THIAGO, Cícero. Polos Olímpicos de treinamento. In: Curso de Geometria- Relações métricas no triângulo.

$\widehat{B} \equiv \hat{1}$ (complementos de $\hat{C}$)

$\hat{C} \equiv \hat{2}$ (complementos de $\hat{B}$)

Temos:$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBA$ e o $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DAC$ e $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DAC$, pois tem ângulos congruentes.

5.1.1. Relações Métricas [8]

Dados os triângulos a seguir e usando os conhecimentos à adquiridos sobre triângulos retângulos, temos:

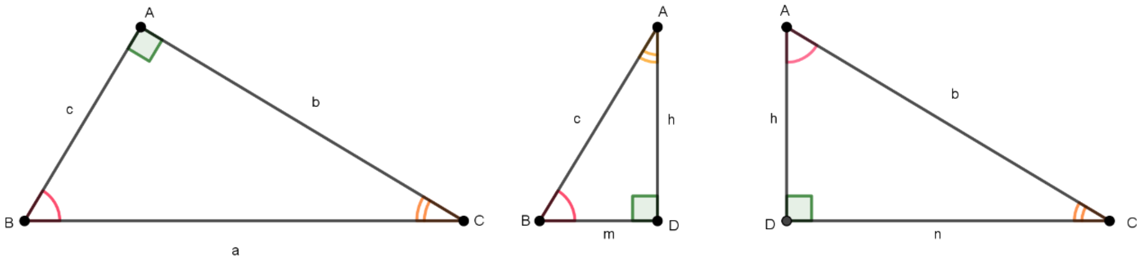


Figura 29: Relações métricas no triângulo retângulo

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow bc = ah$

$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = am$

$\frac{b}{h} = \frac{c}{m} \rightarrow ch = bm$

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = an$

$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \rightarrow bh = cn$

$\Delta DBA \sim \Delta DAC$

$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = mn$

5.1.2. Teorema de Pitágoras[9]

A soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida hipotenusa.

Queremos mostrar: $a^2 = b^2 + c^2$

Usando as seguintes relações do triângulo retângulo temos: $b^2 = a \,.\, n$ **(I)** e $c^2 = a \,.\, m$ **(II)**.

---

[8] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 9.

[9] WAGNER, Eduardo. Teorema de Pitágoras e Áreas. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015, p. 6-7.

Demonstração: seja um triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, e segmento $\overline{AH}$ a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, então:

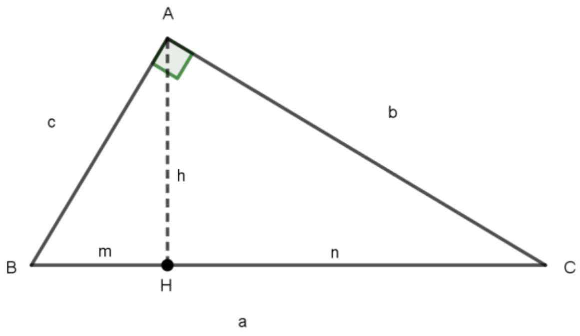


Figura 30: ΔABC retângulo em A

$\overline{BH}$ → projeção ortogonal de segmento $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$.

$\overline{HC}$ projeção ortogonal de segmento $\overline{AC}$ sobre segmento $\overline{BC}$

- Segmento $\overline{BC}$ → hipotenusa
- Segmento $\overline{AC}$ → cateto
- Segmento $\overline{AB}$ → cateto

$\overline{BC}$ = a	$\overline{BH}$ = m
$\overline{AB}$ = c	$\overline{HC}$ = n
$\overline{AC}$= b	

Somando as equações I e II temos:

$$b^2 + c^2 = a.n + a.m$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

Como $m + n = a$, temos:

$$b^2 + c^2 = a.a$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

6. LEI DOS SENOS E COSSENOS[10]

- Senos:

Seja um triângulo ABC, vamos considerar a circunferência circunscrita de centro “O” e raio “R”.

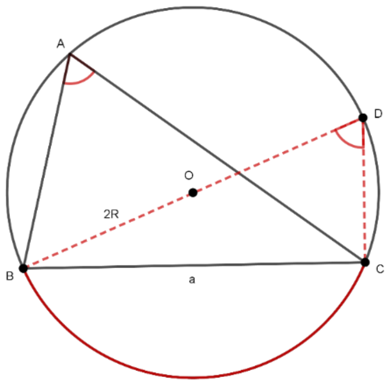


Figura 31: Lei do seno no ΔABC

Traçando o diâmetro BD, teremos que $\widehat{D} = \frac{arc\ BC}{2}$, sendo $\hat{A} = \frac{arc\ BC}{2}$, então $\widehat{D} = \hat{A}$. Já no ΔDCB retângulo em C, temos:

$$sen\ D = \frac{a}{2R} \Longrightarrow sen\ A = \frac{a}{2R} \Longrightarrow \frac{a}{sen\ A} = 2R$$

Analogamente temos que, $\frac{b}{sen\ B} = 2R\ e\ \frac{c}{sen\ C} = 2R$

Logo segue a lei dos senos: $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} = 2R$

[10]MANUEL, Paula Cristina Felisberto. Tópicos de geometria do triângulo. Dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática para o Ensino. Faro: UALG, 2007. Disponível em: https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/718/1/Microsoft%20Word%20-%20Resumo..pdf

- Cossenos

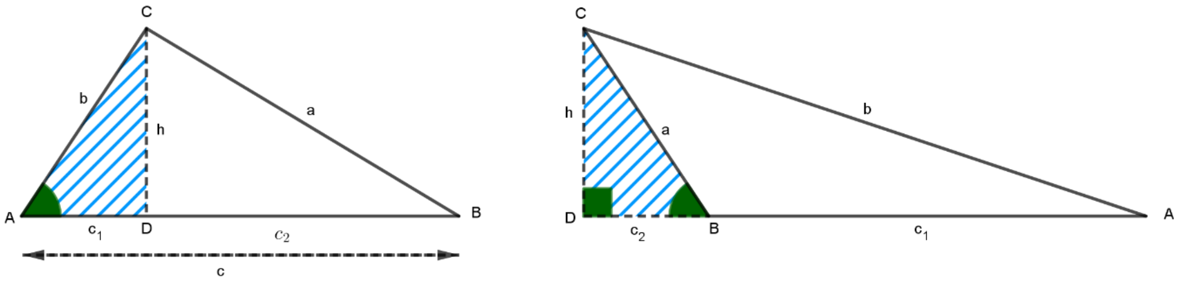


Figura 32: Lei do cosseno

Seja D o ponto da reta suporte do segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{CD}$ seja perpendicular $\overline{AB}$, sendo assim $\overline{CD}$ será altura de ΔABC.

Analisaremos 2 casos.

No primeiro caso temos:

Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ forem ambos agudos, o ponto D está entre A e B.

Já no segundo caso temos:

Se $\hat{A}$ é agudo e $\hat{B}$ é obtuso, então o ponto B está entre A e D.

Em ambos os casos, os catetos do ΔADC são h e c_1, e os do ΔBCD são h e c_2, sendo

$$c_1 = b \,.\, \cos \hat{A}$$

$$c_2 = a \,.\, \cos \hat{B}$$

$$\text{note que: } c = c_1 + c_2$$

Dos triângulos retângulos DBC e ADC, por Pitágoras temos:

$$a^2 = h^2 + c_2^2$$

$$b^2 = h^2 + c_1^2$$

É fácil perceber $a^2 = b^2 + c_2^2 - c_1^2$, como $c_2 = c - c_1$ obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cc_1, \text{ logo:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A}$$

6.1. Teoremas das medianas de um triângulo [11]

Seja o triângulo ABC de lados a, b, c conforme figura a seguir:

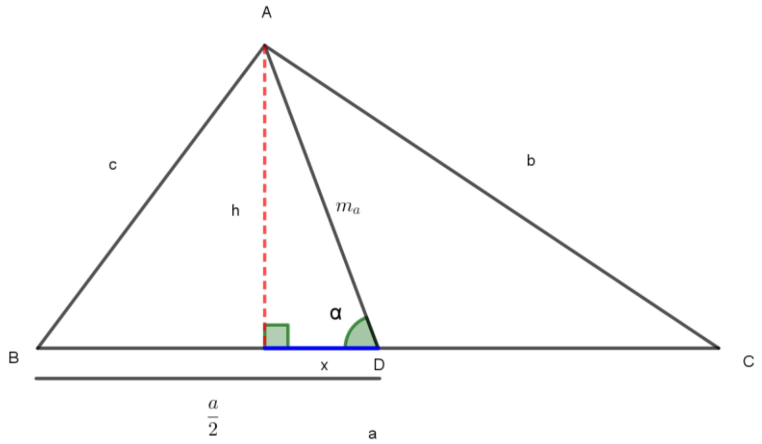


Figura 33: Teorema da mediana no ΔABC

Onde m_a, m_b e m_c são as medianas a qual devemos calcular.

Observe que o triângulo ABD, aplicando a lei dos cossenos temos:

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{2} - 2.\cos\alpha.\frac{a}{2}.m_a \ \textbf{(I)}$$

Figura 34: Cosseno de α

Note que:

Cosα = $\frac{x}{m_a} \Longrightarrow$ x = m_a . cosα, daí podemos reescrever **(I)** como:

$$c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.\ a.\frac{x}{2}$$

[11] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana. In: Exercícios resolvidos. Ed. 8ª. São Paulo: Atual, 2005.

Analogamente aplicando a lei dos cossenos no triangulo ADC, chegaremos a seguinte expressão:

$$b^2 = (m_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{ax}{2} \quad \textbf{(II)}$$

Somando **(I)** e **(II)**

$$b^2 + c^2 = 2\,(m_a)^2 + 2.\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 + c^2 = 2(m_a)^2 + \frac{a^2}{2}$$ Multiplicando ambos os lados por (2)

$$2(b^2 + c^2) = 4\,(m_a)^2 + a^2$$, logo

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$$

Analogamente encontramos m_b e m_c

6.2. Relações de Stewart[12]

Dado um triangulo ABD com um ângulo α em D. Usando a lei dos cossenos temos:

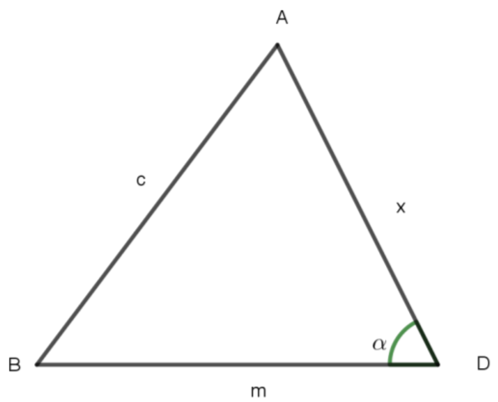


Figura35: Lei do cosseno em α

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2xm. \cos \alpha \ \textbf{(I)}$$

Agora tomemos o triângulo DEF, com um ângulo β em D

[12] THIAGO, Cícero. Polos Olímpicos de treinamento. In: Curso de Geometria- Relações métricas no triângulo. Disponível em: https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/dj006unq9pckg.pdf.

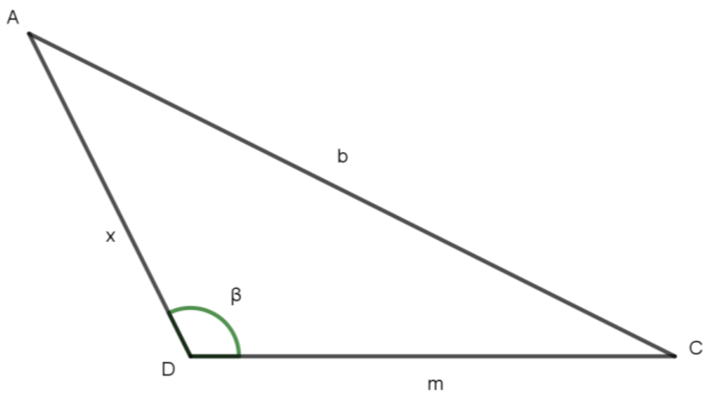


Figura 36: Lei do cosseno em β

Aplicando a lei dos cossenos: $b^2 = x^2 + n^2 - 2xn - \cos(180 - \alpha)$ **(II)**
Multiplicando (I) por n e (II) m chegamos a seguinte expressão:

$$c^2n = x^2n + m^2n - 2x\,mn.\cos\alpha$$

$$b^2m = x^2m + n^2m - 2xmn\,.\cos(180 - \alpha)$$

Somando (I) e (II) E fazendo $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$,temos:

$$c^2n + b^2m = x^2(m + n) + mn\,(m + n)\text{, como } m + n = a$$

$$b^2m + c^2n = x^2a + m.n.a\text{, colocando a em evidencia obtemos:}$$

$$b^2m + c^2n = a\,(x^2 + m.n)$$

7. PONTOS NOTÁVEIS[13]

São pontos que expressam características importantes do triângulo, são denotados: baricentro, incentro e ortocentro.

7.1. Baricentro

Definição: O ponto de interseção das três medianas de um triângulo é denotado baricentro.

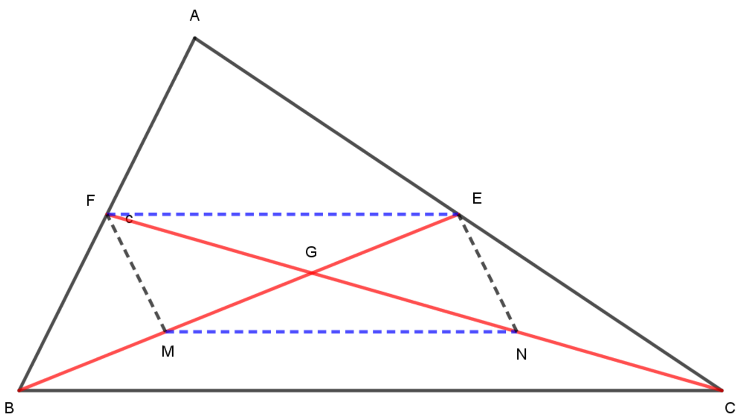


Figura 37: G (interseção) medianas $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$

Demonstração: Dado um triângulo ABC e sejam M, N pontos médios de $\overline{BG}\ e\ \overline{CG}$ respectivamente, seja ainda E e F pontos médios de $\overline{AB}\ \ e\ \overline{AC}$ respectivamente, note que $\overline{EF}$ é base média do ΔGBC, daí têm-se que este segmento é paralelo a $\overline{BC}$ e possui a medida igual a $\frac{\overline{BC}}{2}$.

FENM é um paralelogramo, logo decorre que $\overline{FG} = \overline{GN}$ e $\overline{MG} = \overline{GE}$.

[13] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana. In: Exercícios resolvidos. Ed. 8ª. São Paulo: Atual, 2005, p.

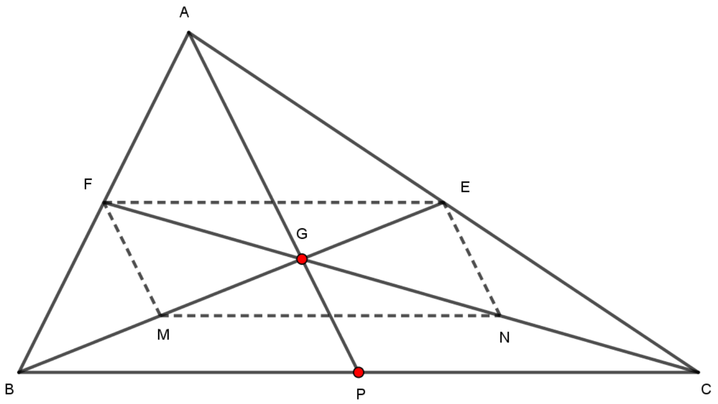


Figura 38: Paralelogramo FEMN

Tomemos $\overline{AP}$, queremos mostrar que P é ponto médio em $\overline{BC}$ e que passa pelo ponto G. Para isso, observe o ΔAGC, Note que E e N são pontos médios e $\overline{NE}$ é base média, logo $\overline{NE}//\overline{AG}$.

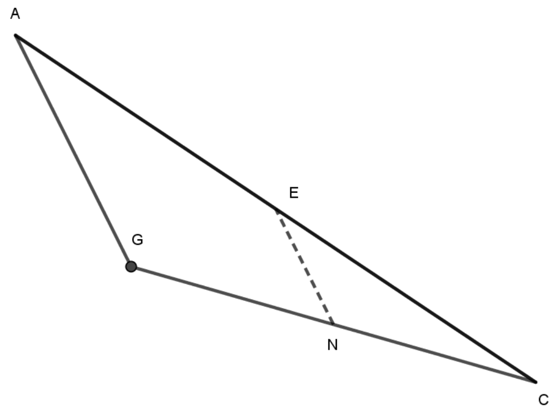


Figura 39: $\overline{EN}$ base média ΔAGC

Agora prolongando o $\overline{EN}$ de tal modo que a interseção com $\overline{BC}$ seja o ponto Q.

Olhando para o triângulo APC temos $\overline{EQ}$ $//\overline{AP}$, onde $\overline{EQ}$ é base média logo Q é ponto médio de $\overline{PC}$, note que é base média

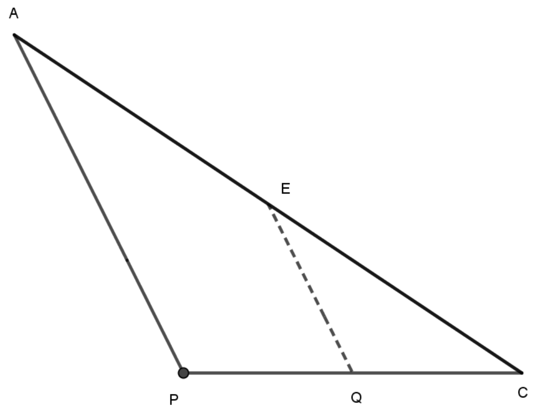


Figura:40 $\overline{EQ}$ base média ΔAPC

Agora observe o ΔAGB sabendo que F, M São pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{GB}$ respectivamente, $\overline{FM}$ é base média do triângulo AGB, logo $\overline{FM} // \overline{AG}$.

Prolongando $\overline{FM}$ em relação $\overline{BC}$ temos o ponto S. Olhando para o ΔABP, como $\overline{FS}//\overline{AP}$ e passa por um ponto médio, logo S é ponto médio de $\overline{AP}$.

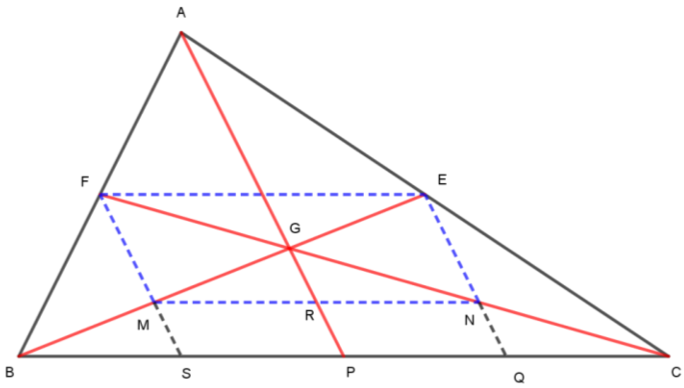


Figura 15: G (interseção) de $\overline{BE}$, $\overline{CF}$e $\overline{AP}$

Note que a interseção $\overline{AP}$ ao segmento $\overline{MN}$ é o ponto R, note ainda que $\overline{GR}//\overline{FM}//\overline{EN}$ e como G é o encontro das diagonais de FENM, logo $\overline{GR}$ é base média do ΔFMN então R é ponto médio de $\overline{MN}$ então: $\overline{MR} = \overline{RN} = \overline{SP} = \overline{PQ}$ então P é ponto médio de $\overline{BC}$ e G é o encontro de $\overline{AP}, \overline{BF}, \overline{CF}$ que são as medianas do triângulo ABC, do qual chama-se Baricentro.

7.2. Incentro

Definição: O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo define-se incentro.

Hipótese: Sejam o ΔABC, com $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ bissetrizes deste triângulo.

Suponha: $\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF}$ = H **(I)** e $\overline{HF} = \overline{HD} = \overline{HE}$. **(II)**

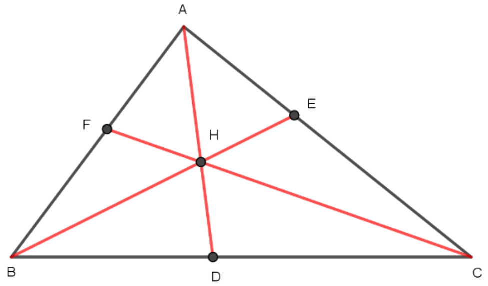


Figura 42: Bissetrizes do ΔABC

Temos: H como interseção de $\overline{BE}$ com $\overline{CF}$. Então:

H $\in \overline{BE}$ → distância de H à $\overline{AC} = \overline{HB} \rightarrow \overline{HE} = \overline{HF}$

H $\in \overline{CF}$ → distância de H à $\overline{AC} = \overline{BC} \rightarrow \overline{HE} = \overline{HD}$

Logo, $\overline{HD} = \overline{HF}$ Então H $\in \overline{AD}$.

Portanto $\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF}$ e $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$, Assim H é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo chamado Incentro.

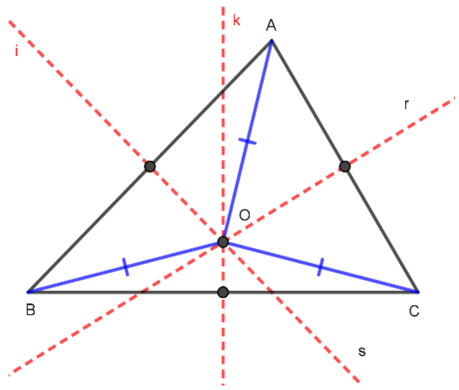


Figura 43: Mediatrizes do ΔABC

7.3. Circuncentro

Definição: O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo define-se circuncentro.

Seja o ΔABC e r, s, t mediatrizes de $\overline{AC}, \overline{AB}\ e\ \overline{BC}$ respectivamente. Provaremos que $r \cap s \cap t$ = O e $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

Para isso, tome o ponto O tal que r ∩ s = O, então:

$$O \in r \cap s \Longrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC}$$

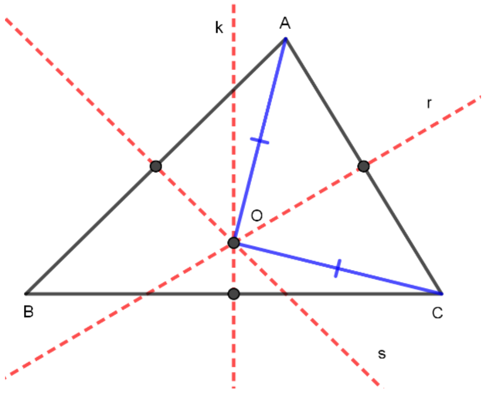


Figura 44: $\overline{OA} \equiv \overline{OC}$

$$O \in s \cap k \Longrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB}$$

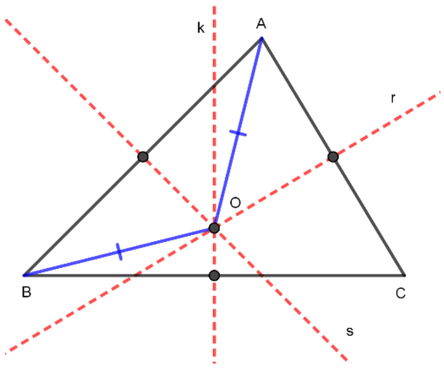


Figura 45: $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$

Isto é;

$$\overline{OB} \equiv \overline{OC} \Longrightarrow O \in k$$

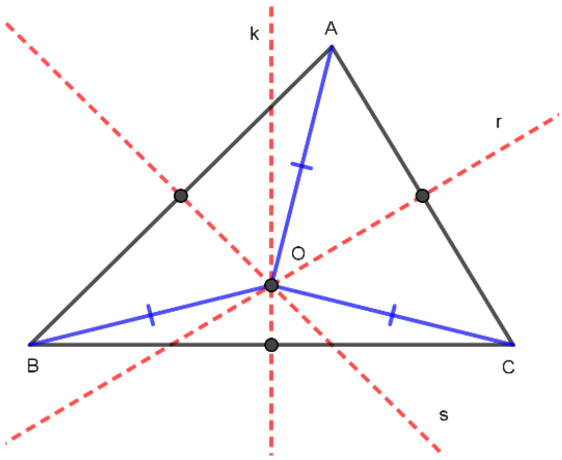


Figura 46: $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$

Logo: $r \cap s \cap t =$ O e $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$. Concluímos então que o ponto O é a interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo. Dizemos que o Circuncentro é o centro de circunferência circunscrita ao triângulo.

7.4. Ortocentro

Definição: O ponto de interseção das retas suporte das alturas de um triângulo é chamado de ortocentro.

Seja o ΔABC, mostraremos que as retas suportes das alturas desse triângulo se encontram em um único ponto.

Para isso tomaremos:

$$\{B \in r // \overline{AC},\ A \in s // \overline{BC}, C \in t // \overline{AB}\} \Longrightarrow \{r \cap s = D\ s \cap t = F\ r \cap t = E\}$$

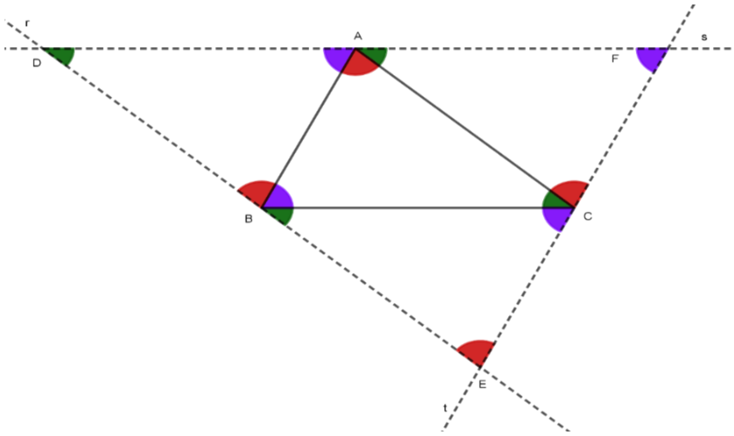


Figura 47: Retas paralelas aos lados do ΔABC

Note que agora temos quatro triângulos congruentes. Pelo caso de congruência ALA, A é ponto médio de $\overline{DF}$, B é ponto médio de $\overline{DE}$ e C é ponto médio de $\overline{EF}$. Neste caso o ΔABC é o triângulo medial do ΔDEF.

Agora, tomemos uma reta perpendicular à $\overline{EF}$ passando por C, esta reta também é perpendicular $\overline{AB}$, notamos que esta reta é a altura do triângulo ABC. Analogamente ocorre para $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$.

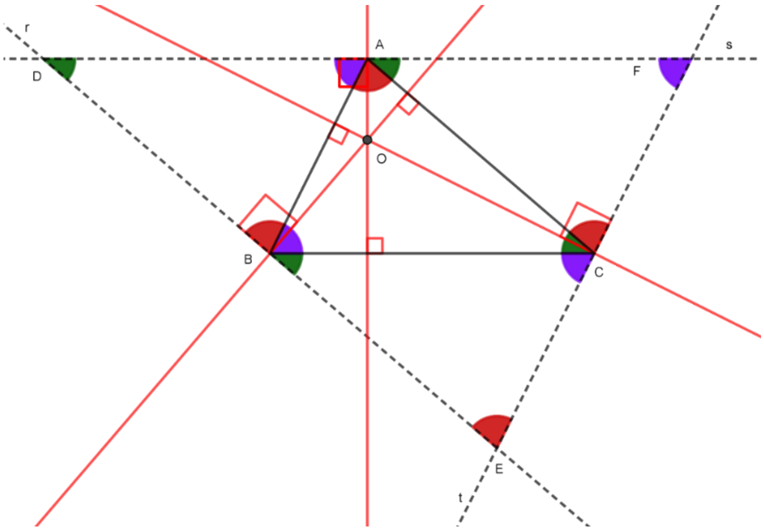


Figura 48: O (interseção) das alturas de ΔABC

Como as mediatrizes do triângulo DEF serão perpendiculares aos lados do ΔABC e passão pelos seus vértices e ainda é um triângulo medial, temos que as mediatrizes de um triângulo e as alturas se encontram em um mesmo ponto O.

8. TEOREMA DAS BISSETRIZES INTERNA E EXTERNA

- Interna

"Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes." (DOLCE & POMPEO, 2005. p.190)

Demonstração:

Dado o ΔABC, tracemos a bissetriz $\overline{AD}$ no ângulo Â, tomemos uma paralela r a bissetriz $\overline{AD}$ e prolongamos o segmento $\overline{AC}$, da intercessão entre eles marcamos o ponto E. O ΔAEB é isóscele, pois ao observarmos os ângulos temos que α_1 e $\widehat{B}'$ são alternos internos e ainda se têm que Ê e α_2 são concorrentes, logo $\overline{EA} = \overline{AB}$.

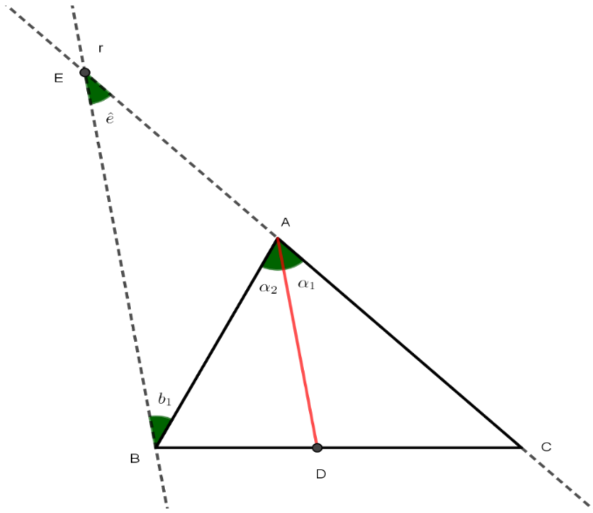


Figura 49: Bissetriz interna $\overline{AD}$

Pelo Teorema de Tales temos:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EA}}$$

Como $\overline{EA} = \overline{AB}$;

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \ , logo \ \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

- Externa

"Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.". (DOLCE & POMPEO, 2005. p.191)

Seja o ΔABC, tomemos a bissetriz $\overline{AD}$ do suplemento de Â e prologando o segmento BC de tal modo que a interseção da bissetriz e do prolongando seja o ponto D. Têm-se o triângulo ADB. Agora tomemos uma paralela a bissetriz $\overline{AD}$ passando pelo ponto B de tal modo que a interseção entre paralela e o segmento $\overline{AC}$ seja o ponto E. Daí temos o ΔABE isósceles pois ao observarmos os ângulos α e β são alternos internos, e γ e δ são correspondentes. Logo, $\overline{AB} = \overline{AE}$.

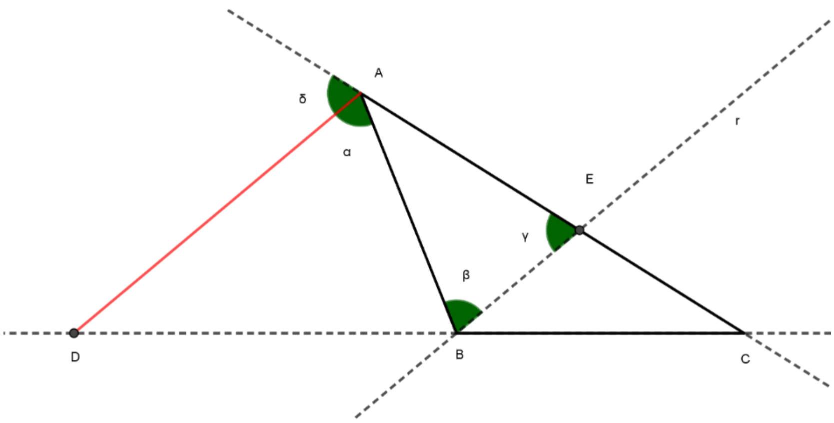


Figura 50: Bissetriz externa $\overline{AD}$

Pelo teorema de tales temos:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Como $\overline{AB} = \overline{AE}$

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

9. ÁREAS [14]

Para entendermos a demonstração da área do triângulo, assumiremos que a área do paralelogramo seja S = b(base). h(altura).

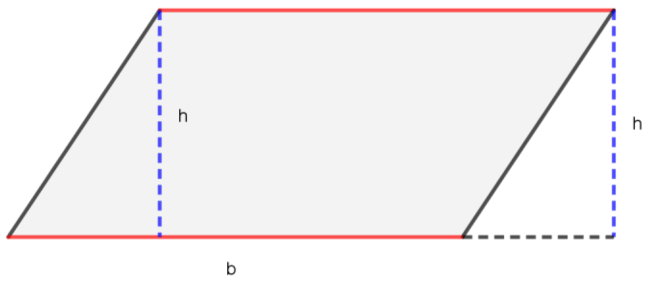


Figura51: Altura (h) paralelogramo

Segue a demonstração da área do triângulo:

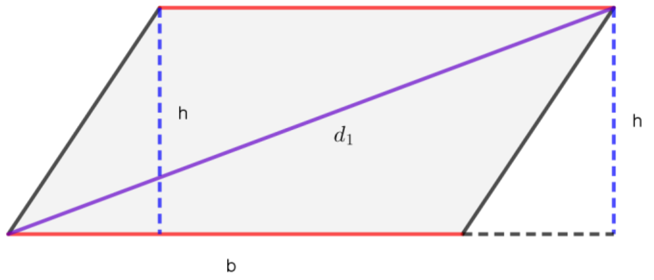


Figura 52: Relação triângulo e paralelogramo

Dado o paralelogramo "A", traçando a diagonal d_1 obtemos pelo terceiro caso de congruência (LLL) dois triângulos congruentes de áreas S. Como visto anteriormente à área do paralelogramo é dado pelo produto da base pela altura. Neste caso temo que:

S+ S = b. h ⟹ 2S = b.h, dividindo ambos membros desta equação por 2, temos:

$$S = \frac{b\ .\ h}{2}$$

[14] MANUEL, Paula Cristina Felisberto. Tópicos de geometria do triângulo. Dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática para o Ensino. Faro: UALG, 2007.

9.1. Área triângulo equilátero

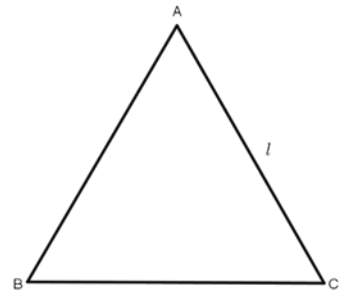


Figura 53: ΔABC equilátero de lado l

Seja o triângulo ABC de lado l, como mostra a figura a seguir:

A área de um triângulo qualquer é dada por:

$$S = \frac{base\ .\ altura}{2}$$

No caso do triângulo da imagem a cima, não conhecemos a medida da altura. Porém, podemos determina-la, para isso basta notarmos que a altura de um triângulo equilátero é também mediana, bissetriz e mediatriz, com isso temos:

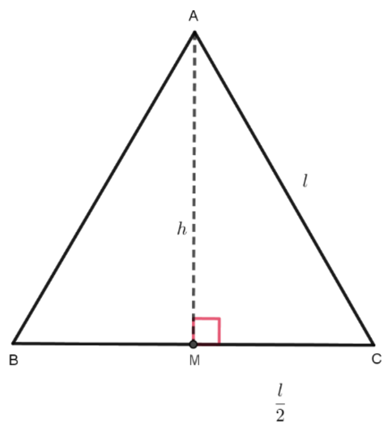


Figura 54: Altura de ΔABC equilátero

Sabemos que M é o ponto médio do lado BC, usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \text{, assim}$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \implies h^2 = \frac{3l^2}{4} \text{, daí}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{. Como } S = \frac{b\ .\ h}{2} \text{ e l é a base teremos:}$$

$$S = \frac{l\ .\ \frac{l^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

9.2. Formula de Herão[15]

Dado o triângulo ABC com sua altura perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ no ponto H. Vamos encontrar o cosseno de â, para isso basta olharmos para o triângulo AHB.

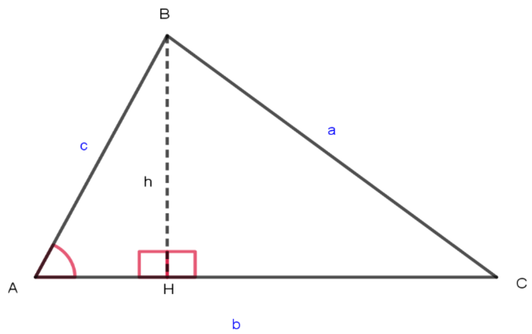


Figura 55: ΔABC qualquer

Usando Pitágoras:

$$c^2 = h^2 + (\overline{AH})^2$$

$$(\overline{AH})^2 = c^2 - h^2$$

$$\overline{AH} = \sqrt{c^2 + h^2}$$

Assim cos â $= \frac{\sqrt{c^2-h^2}}{c}$, pela lei dos cossenos temos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{a}$, substituindo cos â na expressão a cima temos:

15 JIAGU, Xi. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses. In: Mathematical Olympiad Series, vol. 6. p. 85-86.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2}$$

Isolando h^2encontramos

$$2b\sqrt{c^2 - h^2} = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\sqrt{c^2 - h^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$c^2 - h^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2$$

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \text{ } \mathbf{(I)}$$

Como a área do triângulo qualquer é dada por $S = \frac{b\,.\,h}{2}$, elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$S^2 = \left(\frac{b\,.\,h}{2}\right)^2 \Longrightarrow S^2 = \frac{b^2.\,h^2}{4} \text{ } \mathbf{(II)}$$

Substituindo I e II, temos:

$$S^2 = \frac{b^2\left[c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2\right]}{4}$$

$$S^2 = \frac{b^2.c^2 - b^2.\frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}}{4}$$

$$S^2 = \frac{4b^2.c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}$$

$$S^2 = \frac{2bc^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}$$

Agora podemos aplicar a formula da diferença de dois quadrados, que é

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - Y)$$

$$S^2 = \frac{[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)]\,.[2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]}{16}$$

$$S^2 = \frac{[a^2 - (b - c)^2].\ [(b + c)^2 - a^2]}{16}$$

Novamente a diferença entre quadrados:

$$S^2 = \frac{\big(a - (b - c)\big).(a + b - c).(b + c - a).(b + c + a)}{16}$$

$$S^2 = \frac{(a - b + c).(a + b - c).(b + c - a).(b + c + a)}{16}$$

$$S^2 = \frac{(a - b + c)}{2}.\frac{(a + b - c)}{2}.\frac{(b + c - a)}{2}.\frac{(b + c + a)}{2}$$

Agora, fazemos aparecer o $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$S^2 = \frac{(a + b + c - 2b)}{2}.\frac{(a + b + c - 2c)}{2}.\frac{(a + b + c - 2a)}{2}.\frac{(b + c + a)}{2}$$

$$S^2 = \left(\frac{a + b + c}{2} - b\right).\left(\frac{a + b + c}{2} - c\right).\left(\frac{a + b + c}{2} - a\right).\left(\frac{a + b + c}{2}\right)$$

Então é só substituir $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$S^2 = (p - b).(p - c).(p - a).p$$

$$S = \sqrt{(p - b).(p - c).(p - a).p}$$

9.3. Área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido

Observe as duas figuras:

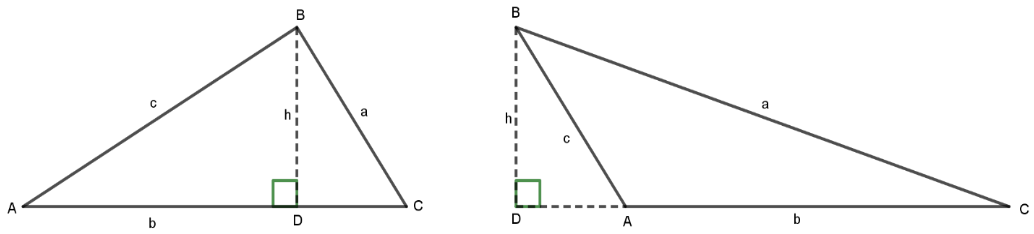


Figura 56: Área dado 2 lados e 1 ângulo

No primeiro caso da figura 56, temos que a área é dada por $\frac{b.h}{2}$ porém, no triangulo ADB temos que h: c . sen A. Daí, $S = \frac{b.c}{2}\ .sen\ A$.

No segundo caso da figura 56, temos que: $S = \frac{b.h}{2}$, porém no triângulo ADB: h= c . sen (180º - A) = c . sen. A. Daí, $S = \frac{b.c}{2}\ .sen$ A.

Nota: No caso de o triângulo ser retângulo em A, a demonstração é imediata.

$S = \frac{b.c}{2}\ .sen\ A$, analogamente tem-se para os triângulos retângulos nos demais ângulos.

9.4. Área do Triângulo Inscrito

Seja um triângulo cuja as medidas dos lados são a, b, c inscrito em uma circunferência e S a área deste triângulo.

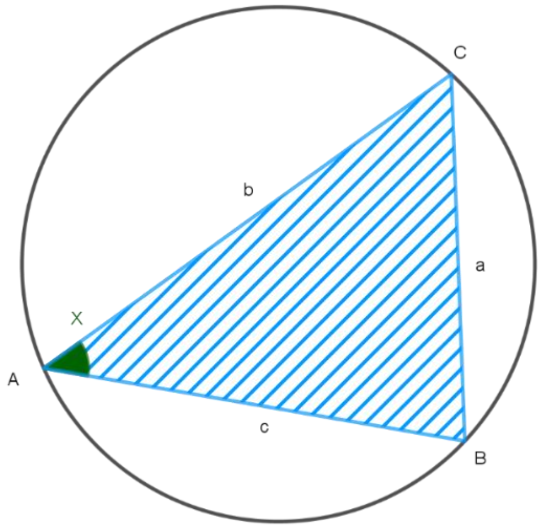


Figura 57: Área do triângulo inscrito na circunferência

Aplicando a lei dos senos encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{a}{sen\,x} = 2R \rightarrow sen\,x = \frac{a}{2R} \quad \textbf{(I)}$$

Porém, pelo teorema das áreas temos que $S = \frac{c\,.b\,.\;sen\,x}{2}$ **(I).**

Substituindo (1) em (2) chegamos a expressão onde é dada a área de um triângulo inscrito. $S = \frac{a\,.b\,.c}{4R}$

9.5. Área do Triângulo Circunscrito

Seja uma circunferência de raio R circunscrito a um triângulo cujos lados possuem medidas a, b, c.

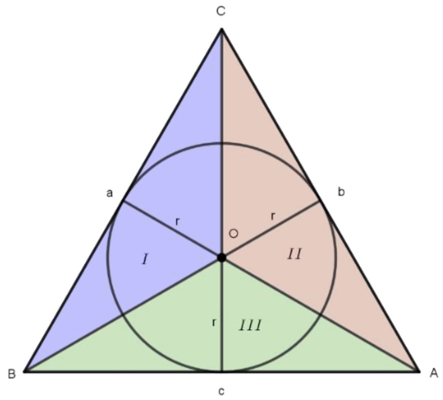


Figura 58: Área do triângulo circunscrito

Tracemos o raio r relativo aos lados de medida a, b e c. Agora Observe os triângulos I, II III, sendo S1, S2, S3 áreas dos triângulos I, II, III respectivamente, onde a área do triângulo circunscrito S, é dado por:

S= S1+S2+S3

$$S = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2}$$

Colocando r em evidencia obtemos:

$S = r.\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$, onde $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$ é o semiperimetro P,

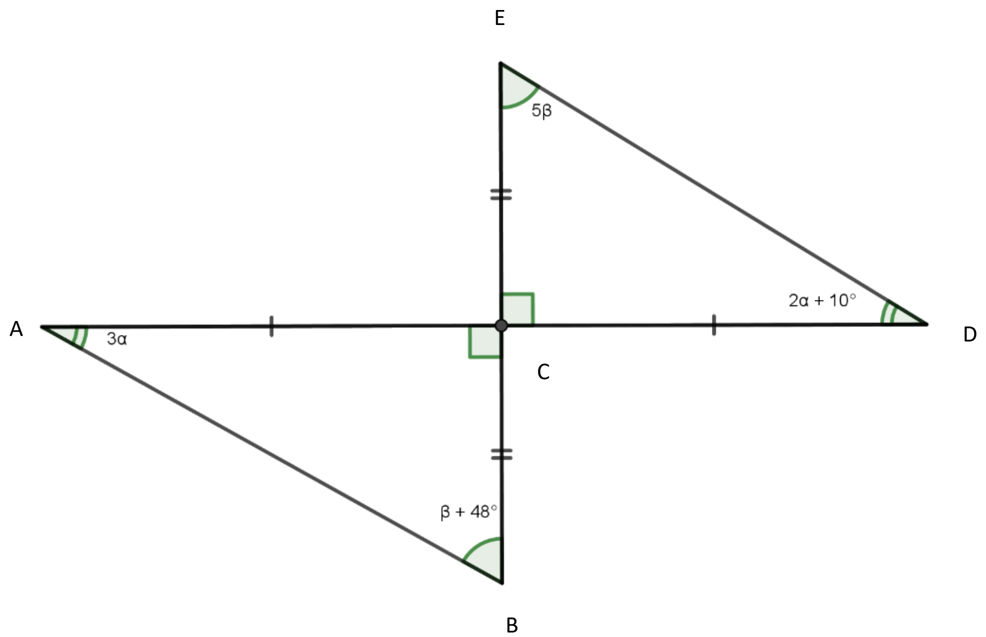
Logo S= P. r

10. ALGUMAS APLICAÇÕES

- **Congruência de triângulos**

1. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β.

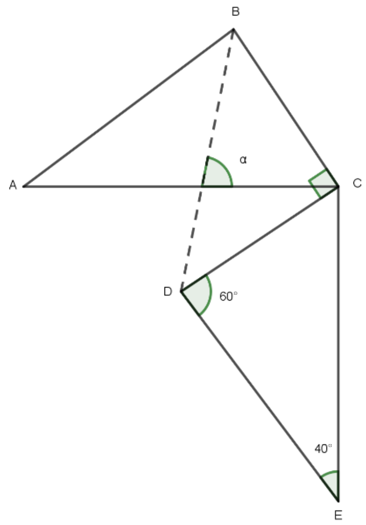
$$\hat{A} = 3\alpha \,, \qquad \hat{B} = \beta + 48°, \;\; \hat{E} = 5\beta, \qquad \hat{D} = 2\alpha + 10°$$



De fato, os triângulos são congruentes pelo primeiro caso (LAL) então:

$$3\alpha = 2\alpha + 10°$$
$$\alpha = 10°$$
e
$$5\beta = \beta + 48$$
$$4\beta = 48$$
$$\beta = \frac{48}{4}$$
$$\beta = 12$$

2. (OBM 2011) O triângulo CDE pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC de 90° no sentido anti-horário ao redor de C, conforme mostrado no desenho abaixo. Qual o valor α ?



Solução:

Note que $\Delta ABC \equiv \Delta CDE$ pelo caso (LLL) e ainda que $A\hat{B}C \equiv C\widehat{D}E$ = 60° e $B\hat{A}C \equiv D\hat{E}C$= 40, como o ΔCDE foi rotacionado em 90° em C têm-se que $A\hat{C}E \equiv B\hat{C}D = 90°$.

Daí:

$$D\hat{C}E + E\widehat{D}C + D\hat{E}C = 180°$$

$$D\hat{C}E + 60° + 40° = 180°, \text{ logo } D\hat{C}E = 80°$$

Temos que oΔBCD é isóscele e retângulo, portanto, D$\hat{B}C \equiv C\widehat{D}B = 45°$ deste modo temo que:

Como: $B\hat{C}D = 90°$

$$D\hat{C}A + A\hat{C}B = B\hat{C}D$$

$$D\hat{C}A + 80 = 90$$

$$D\hat{C}A = 10°$$

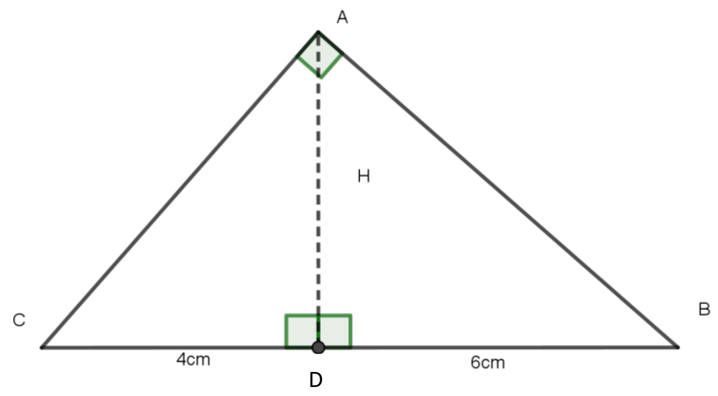
Pelo teorema do ângulo externo temos:

$$\alpha = B\widehat{D}C + A\hat{C}D$$

$$\alpha = 55°$$

- **Semelhança de triângulos**

3. (PM ES 2013 – FUNCAB). A figura abaixo (meramente ilustrativa e fora de escala) representa um triângulo ABC retângulo em A, dividido em dois triângulos, ACD e ABD, ambos retângulos em D.



Determine o valor de $\overline{AD}$ = H.

Resolução:
Observe que o ΔADC é semelhante ao ΔADB pelo 2° caso de Semelhança (LAL).
Então:

$$\frac{4}{h} = \frac{H}{9} \Longrightarrow H\,.\,H = 4\,.\,9$$

$$H^2 = 36$$

$$H = \sqrt{36}$$

$$H = 6$$

- **Teorema de Pitágoras**

4. (SAP SP 2013) Roberto irá cercar uma parte de seu terreno para fazer um canil. Como ele tem um alambrado de 10 metros, decidiu aproveitar o canto murado de seu terreno (em ângulo reto) e fechar essa área triangular esticando todo o alambrado, sem sobra. Se ele utilizou 6 metros de um muro, quantos metros ele irá utilizar do outro muro?

Solução

Temos claramente um triângulo retângulo, como vimos o triângulo retângulo possui catetos e hipotenusa, etc. caso a hipotenusa é 10m e um dos catetos vale 6m, precisamos encontrar o valor do outro cateto que chamaremos de x. então basta aplicarmos o teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 6^2 + x^2$$

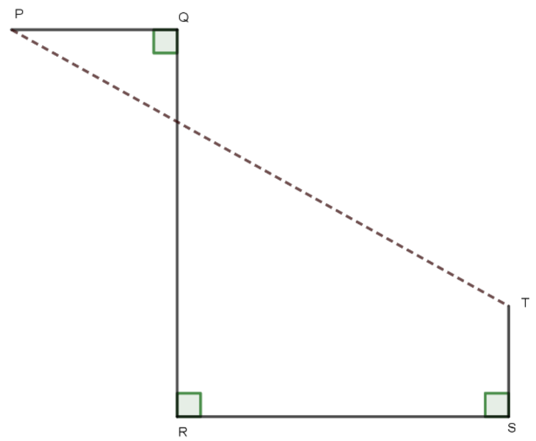
$$100 = 36 + x^2$$

$$x^2 = 100 - 36$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8$$

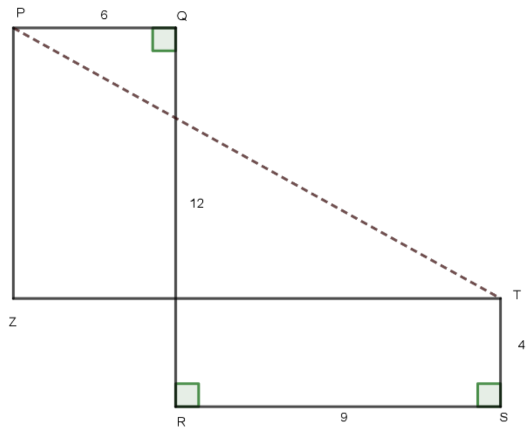
5. (IBGE 2016 – CESGRANRIO) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.



Determine a distância entre os pontos P e T.

Resolução:

Seja um ponto Z, de modo que tenhamos um triângulo retângulo onde PT é a medida da hipotenusa.



Daí usando o teorema de Pitágoras temos:

$\overline{PT}$ = hipotenusa

$\overline{PZ}$ = 12 – 4 = 8

$\overline{ZT}$ = 6 + 9 = 15

$(\overline{PT})^2 = 8^2 + 15^2$

$(\overline{PT})^2 = 64 + 225$

$(\overline{PT})^2 = 289$

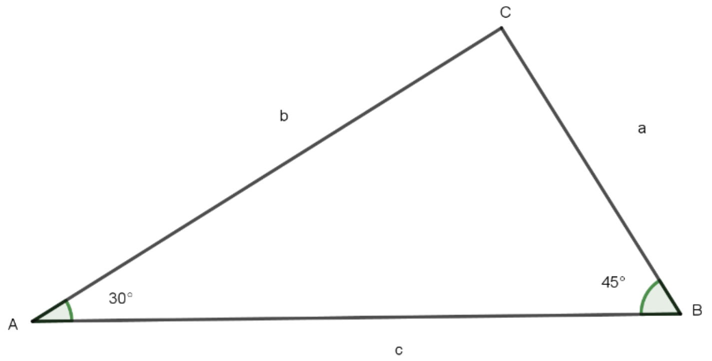
$\overline{PT}$ = 17

- **Lei dos senos**

6. Num triângulo ABC temos $\hat{A} = 30°, \hat{B} = 45°\ e\ a = \sqrt{2}$. Determine o lado b deste triângulo.

Solução

Conforme os dados da questão podemos construir o seguinte triângulo:



Aplicando a lei dos senos temos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{sen\,30°} = \frac{b}{sen\,45°} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Tomando a primeira igualdade:

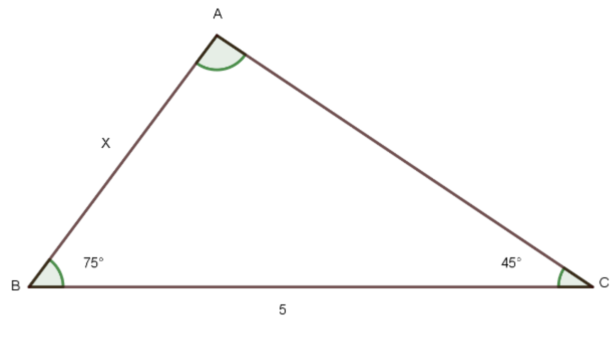
$$\frac{\sqrt{2}}{sen\,30°} = \frac{b}{sen\,45°} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{1}}{2} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sqrt{2}\,.\,2 = b\,.\,\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\,2}{2}$$

$$b = 2$$

7. (FUVEST) Calcule o x da figura:



Solução:

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Portanto, o ângulo ABC é igual a 180 – (75 + 45) = 60º.

Aplicando a lei dos cossenos temos:

$$\frac{x}{sen\ 45°} = \frac{5}{sen\ 60°}$$

5 . sen45° = x . sem 60°

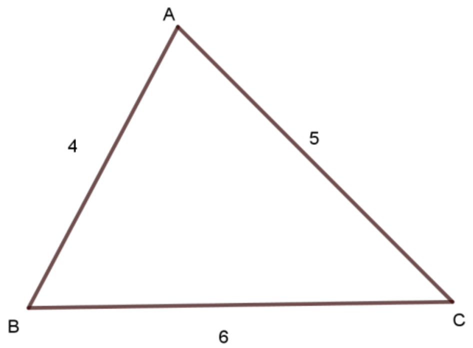
$$x = \frac{5\ .\ sen\ 45°}{sen\ 60°}$$

$$x = 5\ .\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

- **Lei dos cossenos**

8. (FUVEST) Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. Determine o cosseno do maior ângulo de T.



Solução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2.\ 4.\ 5.\ \cos \hat{A}$

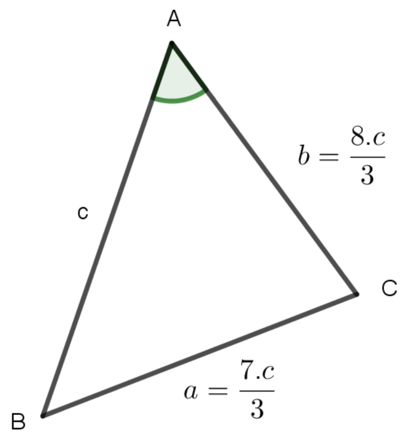
$36 = 16 + 25 – 40.\ \cos \hat{A}$

$- 5 = - 40.\ \cos \hat{A}$

$\text{Cos}\ \hat{A} = \frac{5}{40}$

9. (ITA) Os lados de um triângulo medem **a, b** e **c** (centímetros). Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede **a** centímetros, se forem satisfeitas as relações: **3a = 7c** e **3b = 8c?**

Solução



Aplicando a lei dos cossenos:

$$\left(\frac{7c}{3}\right)^2 = \left(\frac{8c}{3}\right)^2 + c^2 - 2\,.\frac{8c}{3}\,.c.\cos\hat{A}$$

$$\frac{49c^2}{9} = \frac{64c^2}{9} + \frac{9c^2}{9} - 2\,.\frac{24c^2}{9}\,.\cos\hat{A}$$

$$49\,.\left(\frac{c^2}{9}\right) = 64\,.\left(\frac{c^2}{9}\right) + 9\,.\left(\frac{c^2}{9}\right) - 2\,.24\,.\cos\hat{A}\,.\,\left(\frac{c^2}{9}\right)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $\left(\frac{c^2}{9}\right)$temos:

$$49 = 64 + 9 - 2.\ 24.\ \cos\hat{A}$$

$$-\cos\widehat{A} = \frac{49-64-9}{2\,.\ 24}$$

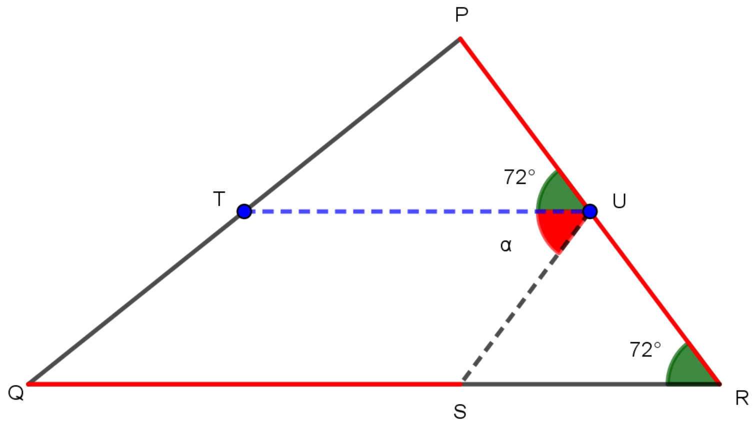
$$\cos\hat{A} = \frac{24}{48}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{1}{2}$$

Logo Â = 60°

10. (NUCEPE-2017) Sobre o lado $\overline{QR}$ de um triângulo PQR toma-se um ponto S tal que $\overline{SQ}$ seja congruente com $\overline{PR}$. Se T e U são os respectivos pontos médios de $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, e o ângulo interno P$\hat{R}$Q mede 72°, qual a medida do ângulo T$\hat{U}$Q?

Resposta: de acordo com o enunciado temos a seguinte figura.



Onde:

$$PR \equiv \text{SQ}$$

T e U são pontos médios logo $\overline{TU}$ é base media do triangulo PQR, então $\overline{TU}$ // $\overline{QR}$, dai temos que $\overline{PR}$ é uma transversal que corta as retas suporte de $\overline{TU}$ e $\overline{QR}$, logo $P\hat{U}T$ e $U\hat{R}S$ são ângulos correspondentes e $T\hat{U}R$ e $U\hat{R}S$ são colaterais.

$$T\hat{U}R + \angle U\hat{R}S = 180°$$

$$T\hat{U}R + 72° = 180°$$

$$T\hat{U}R = 108°$$

Logo:

$$R\hat{U}S = T\hat{U}R - T\hat{U}S$$

$$R\hat{U}S = 108 - \alpha$$

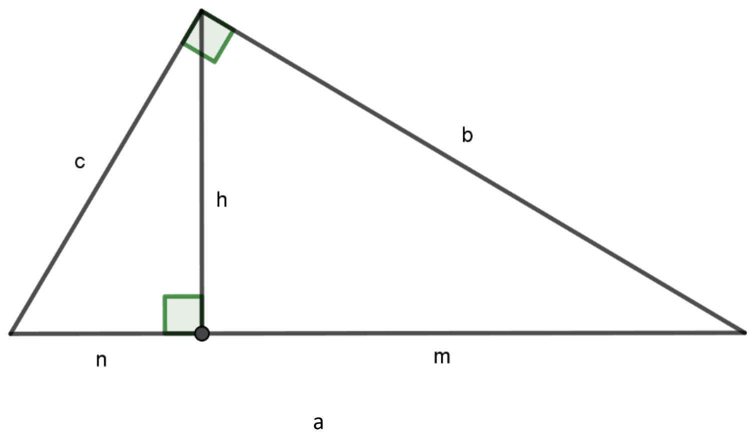
$$P\hat{U}T + R\hat{U}S + T\hat{U}S = 180°$$

$$72° + 72° + \alpha = 180°$$

$$\alpha = 180° - 144°$$

$$\alpha = 36°$$

11. NO Triângulo retângulo, b é o dobro de c, determine m/n.



Resposta:

Chame de a = m+ n, então:

$b^2 = m. a$

m = $\frac{b^2}{a}$ como b =2c

m = $\frac{(2c)^2}{a}$

m = $\frac{4c^2}{a}$

c^2= n. a

n = $\frac{c^2}{a}$

$\frac{m}{n} = \frac{\frac{4c^2}{a}}{\frac{c^2}{a}} = 4$

12. Dado um triângulo de lados 20 cm, 8 cm e 16, calcule sua área.

Solução:

Note que a figura é um triângulo escaleno, utilizaremos a formula de Heron para calcular a área.

$$p = \frac{20 + 8 + 16}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

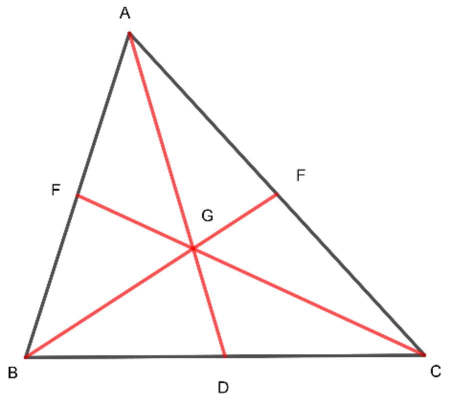
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{22(22-20)(22-8)(22-16)}$$

$$S = \sqrt{3696}$$

$$S = 4\sqrt{231}\text{cm}^2$$

13. Sabendo que na figura a baixo, $\overline{AD}, \overline{BE}\ e\ \overline{CF}$ são as bissetrizes do triangulo ABC e que $\overline{DC} = \overline{AG} = 8cm, \overline{BF} = 4cm\ e\ \overline{AE} = 5cm$, calcule a área do triângulo ABC.



Solução:

G é o baricentro, logo $\overline{AG} \equiv \overline{CG} \equiv \overline{BG} = 8cm, \overline{GD} \equiv \overline{GF} \equiv \overline{GE} = 4cm$, D,E e F são pontos médios de $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ respectivamente, então $\overline{AC} = 10\ cm, \overline{AB} = 8\ cm\ e\ \overline{BC} = 16\ cm$.

Agora aplicando a formula de Heron, teremos:

$$p = \frac{10+8+16}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

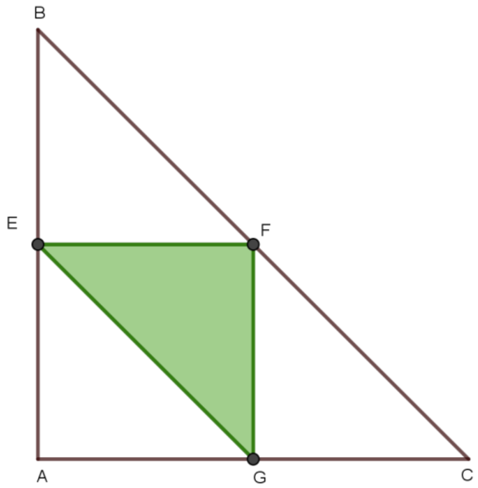
$$S = \sqrt{17(17-10)(17-8)(17-16)}$$

$$S = \sqrt{1071}$$

$$S = 3\sqrt{119}\ \text{cm}^2$$

14. (VUNESP -2016). Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo retângulo ABC, obtém-se outro triângulo retângulo EFG, conforme mostra a figura.

Sabendo que $\overline{AB}$ = 12 cm e que $\overline{BC}$ = 20 cm. Qual é a área do triângulo EFG em cm²?



Resolução

Já conhecemos a medida de dois lados do triângulo ABC.

Vamos utilizar o teorema de Pitágoras para descobrirmos o terceiro:

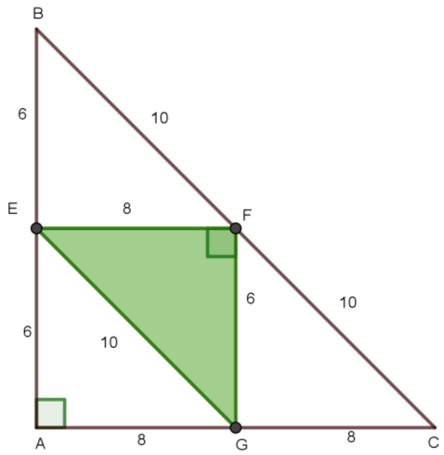
$(20)^2 = (12)^2 + (\overline{AC})^2$

$400 = 144 + (\overline{AC})^2$

$(\overline{AC})^2 = 400 - 144$

$(\overline{AC})^2 = 256$

$\overline{AC} = 16$



Calculando a área de EFG:

$S = \frac{8\ .\ 6}{2}$

S = 24 cm²

15. (NUCEPE 2015) Dado um triângulo ABC, no qual dois lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente 7cm e 22cm. Quanto poderá medir o perímetro, sabendo que o terceiro lado é múltiplo de 8?

Resolução:

Chamaremos o lado desconhecido de X, então pela desigualdade triangular temos:

$22 - 7 < X < 22 + 7$

$15 < X < 29$

Como X é múltiplo de 8 podemos ter as seguintes situações:

Ou X = 16 implicando no perímetro igual a 45, ou X = 24 implicando no perímetro igual a 53.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostra um estudo sobre triângulos e suas aplicações, como observado, diversas características apresentadas tem aplicações diretas e indiretas no nosso cotidiano, ressalta-se que a geometria se aplica além da matemática em diversas áreas profissionais, tendo como exemplo a engenharia, arquitetura e a topografia, todas fazem uso do tema abordado.

Tentamos usar uma linguagem simples e direta, objetivando alcançar todos os níveis acadêmicos, de tal modo que foram apresentadas as noções preliminares mostrando suas características, classificações, elementos, condições de construção e teoremas. Observamos que o mesmo pode ser base para futuras explorações dentro do tema apresentado.

Esperamos que este trabalho possa ajudar alunos dos níveis fundamental, médio e superior, e venha ser mais uma opção de pesquisa e leitura, já que este contém definições, enunciados, demonstrações e aplicações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria euclidiana plana. Reimpressão: 1997, p.34-40; 49-50; 59-61. S.I.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana. In: Exercícios resolvidos. Ed. 8ª. São Paulo: Atual, 2005, 39-45, 122-126, 198-206, 220-224,247-266.

JIAGU, Xi. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses. In: Mathematical Olympiad Series, vol. 6. p. 85-86. Disponível em: https://mathematicalolympiads.files.wordpress.com/2012/08/lecture_notes_on_mathematical_olympiad_courses__for_junior_section_vol_1__mathematical_olympiad_series_.pdf. Acesso em: 10 de Junho de 2019.

LIMA, Davi Dantas. Desvendando a Matemática do GPS. In: Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional). São Cristóvão: UFS, 2013. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/6507/1/DAVI_DANTAS_LIMA.pdf Acesso em: 12 de Junho de 2019.

MANUEL, Paula Cristina Felisberto. Tópicos de geometria do triângulo. Dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática para o Ensino. Faro: UALG, 2007

MOREIRA, George Ney Almeida. Desigualdades: uma abordagem através de problema. Campina Grande: 2016, p.19.

PINHEIRO, Rodrigo. Programa Olímpico de Treinamento. In: Curso de Geometria - Congruência de Triângulos. Disponível em: https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/dhs9zlcjnz4g8.pdf. Acesso em: 20 de Abril de 2019.

ROCHA, Helder Borges de Vieira Laranjeira da. Problemas selecionados de geometria plana. Parnaíba: Sieart, 2016, p. 17-23.

TAVARES, João Nuno. Triângulo. In: Ciência Elementar. Vol.1. Revista de Ciência Elementar. DMFCUL: 2013, p. 1-2.

WAGNER, Eduardo. Teorema de Pitágoras e Áreas. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015, p. 6-7. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf. Acesso em: 05 de Maio de 2019.