UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – CCN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

DISCIPLINA: TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

FRANCISCO BARROS DE OLIVEIRA

A CONEXÃO DA MATEMÁTICA COM A MÚSICA COM FOCO HISTÓRICO NOS ESTUDOS DE PITÁGORAS

Teresina

2022

FRANCISCO BARROS DE OLIVEIRA

A CONEXÃO DA MATEMÁTICA COM A MÚSICA COM FOCO HISTÓRICO NOS ESTUDOS DE PITÁGORAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de graduado em licenciatura pleno em matemática do centro de ciências naturais da universidade estadual do Piauí.

Orientador: Pedro Antônio Soares Júnior

Teresina

2022

Dedico este trabalho em primeiro lugar a Deus que me deu saúde e forças para superar todos os momentos difíceis a que eu me deparei ao longo da minha graduação ao meu professor de vida e irmão Edilson Barros que sempre me incentivou me dando forças para não desistir nessa caminhada. Enfim dedico este trabalho a minha esposa e filhos e toda a minha família que são essenciais na minha vida

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e forças para superar todos os momentos difíceis a que eu me deparei ao longo da minha graduação aos meus pais Maria do Rosário e Vicente Francisco e aos meus irmãos pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações e a minha esposa Sarah Rejane pelo seu amor incondicional e por ser minha companheira de todas as horas e ao meu professor orientador Dr. Pedro Júnior pelas valiosas contribuições dadas durante todo o processo. Agradeço também a todos os meus amigos do curso de graduação que compartilharam dos inúmeros desafios que enfrentamos nessa etapa e a universidade estadual do Piauí juntamente com seu corpo docente que mostrou está comprometido com a qualidade e a excelência do ensino.

RESUMO

O Presente trabalho tem como alvo central mostrar a importância histórica da relação da matemática com a música destacando a importância do estudo de Pitágoras e o seu monocórdio com o objetivo de tornar o tema conhecido e interessante e, seu uso em sala de aula como motivador para o entendimento de conceitos matemático entre os discentes, buscando uma melhor identificação pessoal entre essas duas áreas (matemática e música).

Sabemos que a relação entre a Matemática e a Música é antiga, e se perde no tempo. Hoje podemos observar o ensino da matemática de forma mecanizada, onde a teoria passa longe da prática, fazendo com que os alunos não percebam que a matemática está presente em situações do nosso dia a dia, como na música por exemplo. Por isso partimos do contexto histórico, mais especificamente o estudo de Pitágoras com seu monocórdio até o desenvolvimento da construção das escalas musicais. Mostramos nesse estudo o emprego das operações de frações, potenciação e logaritmo que são ensinadas em salas de aula de forma teórica e pouco de forma prática. Por isso, temos a convicção que dessa forma estamos criando maneiras tanto para o desenvolvimento de práticas em sala de aula como também ensinando um jeito novo de ouvir música conhecendo sua estrutura numérica. Para melhor entendimento do assunto expandimos nossa pesquisa para falarmos sobre teoria musical com foco nos estudos de Pitágoras, pois através desse conhecimento teórico seremos capazes de relacionar melhor essa relação da matemática com a música. Neste trabalho também fizemos experimentos utilizando teclado musical para mostrar na prática a diferença das frequências musicais ao ser tocado à mesma nota resultando em diferentes alturas (grave/agudo) musicais. Através desse experimento prático foi de fato possível mostrar nossos cálculos e consequentemente confirmar que realmente existe uma relação entre a música e a matemática.

Palavras-chave: Relação matemática com a música. Fração na musica. Teoria musical. Compassos e frequência

ABSTRACT

The present work has as its central aim to show the history of the relationship between mathematics and music, highlighting the importance of the study of Pythagoras and his monochord with the objective of making the theme known and interesting and its use in the classroom as a motivating importance for mathematical understanding among students, seeking a better personal identification between these two areas (mathematics and music).

We know that the relationship between Mathematics and Music is old, and is lost in time. Today we can observe the teaching of mathematics in a mechanized way, where theory passes away from practice, making students not realize that mathematics is present in everyday situations, such as music for example. That's why we start from the historical context, more specifically the study of Pythagoras with his monochord until the development of the construction of musical scales. We show in this study the use of fractions, potentiation and logarithm operations that are taught in classrooms in a theoretical way and little in a practical way. Therefore, we are convinced that this way we are creating ways both for the development of practices in the classroom and also teaching a new way of listening to music knowing its numerical structure. For a better understanding of the subject, we expanded our research to talk about music theory with a focus on Pythagoras' studies, because through this theoretical knowledge we will be able to better relate this relationship between mathematics and music. In this work we also carried out experiments using a musical keyboard to show in practice the difference in musical frequencies when played on the same note resulting in different musical pitches (Bass/Treble). Through this practical experiment it was indeed possible to prove our calculations and consequently to show that there really is a relationship between music and mathematics.

Keywords: mathematical relationship with music. Fraction in music. Musical theory. Measures and Frequen

LISTA DE FIGURAS

MATERIAIS ULTILIZADO NO EXPERIMENTO

- Teclado Yamaha modelo PSR E463
- Celular Motorola Z3
- Aplicativo decibelímetro
- Ligas de nylon

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

“A música é um exercício de aritmética secreta e aquele que a ela se consagra ignora que manipula números.” (Leibniz)

Neste trabalho apresentamos uma abordagem da conexão da música com a matemática destacando a importância do estudo de Pitágoras e o seu monocórdio, com o objetivo de tornar o tema mais conhecido para os discentes do Ensino Básico a fim de motivá-los ao entendimento de conceitos matemáticos. As principais motivações foram: Mostrar sua importância histórica desde contribuições de Pitágoras até os dias atuais e também pela necessidade de trabalhar o tema nas escolas de educação básica para maior conhecimento dos alunos e a identificação pessoal com os dois campos do conhecimento (música e matemática).

Segundo Abdounur (ABDOUNUR, Oscar João, 2003), a matemática e a música possuem laços profundos estudados desde a Antiguidade.

Segundo Oliveira (OLIVEIRA; Sabba, 2013), nos dias atuais, qualquer pessoa que estudar a teoria musical, pode notar, de modo simples, a forte relação que existe entre a música e a matemática, pois é necessário ter o conhecimento de frações até mesmo para solfejar (cantar um trecho de música, pronunciando somente notas musicais).

Ao tocar um acorde em um piano ou mesmo ouvir uma banda de orquestra tocando uma sonoridade perfeita qualquer pessoa que possa escutar isso não consegue perceber a relação existente entre a música e a matemática. Contrariando o que muitos pensam a matemática tem um papel fundamental como um instrumento básico da música seja na divisão rítmica ou sonora. Dependendo da maneira de como é feito o estudo da relação da matemática com a música pode ser simples, mas depende muito das ferramentas que serão utilizadas e pode ser complexa do que se pensa (Unifafibe, 2022, online).

Ao estudarmos a teoria musical é possível expor esse assunto matematicamente podendo utilizar diversos conceitos triviais de funções, potência e logaritmo. Ao tratarmos da maneira de como o som se comporta percebemos que isso é bem complexo, pois é preciso diversos conceitos matemáticos. Podemos considerar a música como uma área do conhecimento humano, mas que só foi possível ter o seu avanço significativo a partir de Pitágoras que conseguiu relacionar diversas noções de proporções aritméticas com os conceitos musicais, matematizando assim a música (Folha, 2016, online).

Assim como Pitágoras, os pitagóricos utilizavam os números 2 e 3 e que acreditavam que eles eram números especiais, pois, através deles qualquer número poderia ser gerado e por isso estes números deveriam está presente no campo da matemática e da música e, atualmente ainda hoje são utilizadas em frações para representar as notas musicais. Pitágoras utilizou seu conhecimento de relações matemáticas para definir que elas eram as bases das escalas musicais. Os sons que conhecemos como harmônicos agradáveis aos nossos ouvidos.

Seu principal ponto de partida foi à percepção de que cordas mais curtas emitem sons mais agudos. O musicológico francês Jean Molino escreveu certa vez: "A descoberta pitagórica estabeleceu pela primeira vez na história humana um Elo cientificamente fundado entre o real físico matemático e a psicofisiologia"

2. CONCEITO DE FRAÇÃO

Segundo Asth (ASTH; Rafael, 2011) Fração é a representação matemática das partes de determinada quantidade que foi dividida em pedaços ou fragmentos iguais. As frações são úteis em várias situações, principalmente para representar algo que não conseguimos apresentar através de números naturais.

2.1. ESCRITA DE UMA FRAÇÃO E SIGNIFICADO DE CADA TERMO

Vamos utilizar como exemplo a seguinte situação: Maria comprou uma pizza e dividiu em 5 fatias iguais. Como não estava com muita fome, ela comeu apenas uma fatia. Que fração da pizza Maria conheceu? Vemos no texto acima que das 5 fatias de pizza que Maria tinha, ela comeu apenas uma, ou seja, 1 de 5. Isso pode ser escrito como uma fração. Os termos de uma fração são:

$$\frac{1}{5} \begin{array}{l} \leftarrow \; Numerador \\ \leftarrow Denominador \end{array}$$

Numerador vem do latim *numeratus* e significa “contar”. Denominador tem sua origem do latim *denominatus* e significa “dar nome”.

No nosso exemplo, o número 1 representa o numerador da fração e indica quantas partes foram tomadas. Já o número 5, representa o denominador da fração e indica em quantas partes o todo foi dividida. Por ter dividido a pizza em 5 partes iguais, então uma pizza inteira corresponde à fração $\frac{5}{5} = 1$, ou seja, um inteiro.

2.2. REGRAS PARA LEITURA DAS FRAÇÕES

O denominador de uma fração deve ser diferente de zero e é ele que dá nome à fração. Portanto, repetimos o numerador e mudamos a forma de pronunciar o denominador. Quando o denominador está entre os números 2 e 9, lemos da seguinte forma: 2 (meio), 3 (terço), 4 (quarto), 5 (quinto), 6 (sexto), 7 (sétimo), 8 (oitavo) e 9 (nono).

Já as frações decimais, ou seja, com denominador 10, 100, 1000…, utilizamos a nomenclatura: 10 (décimos), 100 (centésimos), 1000 (milésimos), e assim por diante. Para os demais números, ou seja, os que estão após o 9 e não são decimais, utilizamos a palavra avos após o denominador.

Veja a seguir exemplos de frações, seus termos e como devem ser lidas:

Fração	Numerador	Denominador	Leitura
$\frac{1}{2}$	Um	Dois	Um meio
$\frac{2}{3}$	Dois	Três	Dois terços

Fração	Numerador	Denominador	Leitura
$\frac{3}{4}$	Três	Quatro	Três quartos
$\frac{7}{8}$	Sete	Oito	Sete oitavos
$\frac{8}{11}$	Oito	Onze	Oito onze avos
$\frac{7}{21}$	Sete	Vinte e um	Sete vinte um avos
$\frac{9}{10}$	Nove	Dez	Nove décimos
$\frac{9}{100}$	Nove	Cem	Nove centésimos

3. POTÊNCIAÇÃO

3.1. CONCEITO

Potenciação é uma operação matemática onde um valor chamado base é multiplicado por ele mesmo a quantidade de vezes indicada pelo expoente. Para calcular a potenciação fazemos uma multiplicação de fatores iguais, onde esses fatores são à base da potência. A quantidade de vezes que a base se repete é indicada pelo expoente. Os termos da potenciação são:

$base^{expoente}$= potência

Exemplo 1:

4^2

O número 4 é chamado de base que é o fator que será multiplicado. O número 2 é chamado de expoente que é a quantidade de vezes que o número 4 será multiplicado por ele mesmo:

$4^2 = 4.4 = 16$

Exemplo 2:

5^3

O número 5 é chamado de base que é o fator que será multiplicado. O número 3 é chamado de expoente que é a quantidade de vezes que o número 5 será multiplicado por ele mesmo:

$$5^2 = 5.5 = 25$$

O uso da potenciação na música se dar por conta de dois números que se tornaram especiais para Pitágoras. Esses dois números são: 2 e 3. Para melhor entendimento dessa especialidade observada por Pitágoras explicamos detalhadamente ao explorarmos a tabela de razão das notas musicais na pagina 24.

4. TEORIA MUSICAL

Nota musical é um termo empregado para designar o menor elemento de um som, determinada por uma fonte sonora que durante um tempo de duração emite uma frequência sonora medida em hertz (Hz), a qual descreverá em termos físicos se a nota é grave ou aguda, que pode ser representada por um símbolo em uma partitura ou letra em uma tablatura (WIKIPEDIA, 2022).

O nome de oitava tem a ver com a sequência das oito notas da escala maior: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó, a que se chama igualmente "uma oitava". E diz-se que o segundo dó, o último grau da escala, está "uma oitava acima" do primeiro. O nome tem a ver com os intervalos entre as notas: a partir de uma nota dada (por exemplo, dó), a seguinte está separada por um intervalo "de segunda", a seguinte por um intervalo "de terça", a seguinte por um intervalo "de quarta" e assim adiante até a "oitava", que será nomeada igualmente à primeira nota (a oitava de dó é outro dó) (WIKIPEDIA, 2022).

Antes de tudo devemos lembrar que para podermos ter uma noção de uma nota musical e saber identificar um ritmo e harmonia dentro de uma música e importante ter uma noção de percepção musical.

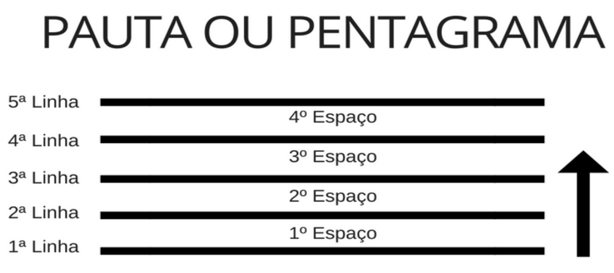
A definição mais exata de percepção musical é “a capacidade de perceber e identificar as ondas sonoras como parte de uma linguagem musical”. Basicamente, desenvolver a percepção musical é como aprender a falar um segundo idioma. Trata-se de conseguir identificar os sons produzidos, nomeá-los e conseguir produzir ‘textos’ naquela linguagem, no caso, improvisações e composições (instituto Canone, 2022, online).

A harmonia musical é a combinação de notas de maneira organizada, para gerar sons que se equilibram entre si. Trata-se de um conjunto de sons dispostos em ordem simultânea ou sobrepostos concebendo o conceito de verticalidade em música, ou seja, som sobre som. Contrapõe-se à melodia, que é a combinação de sons em ordem sucessiva estabelecendo a horizontalidade, uma nota após a outra. A relação dessas notas sobrepostas gera acordes com suas respectivas particularidades (ENCORDA, 2022, online).

4.1. CONHECENDO OS SÍMBOLOS BÁSICOS DA PARTITURA

A pauta ou pentagrama é o conjunto de cinco linhas e quatro espaços entre essas linhas, onde são dispostos os símbolos para leitura:

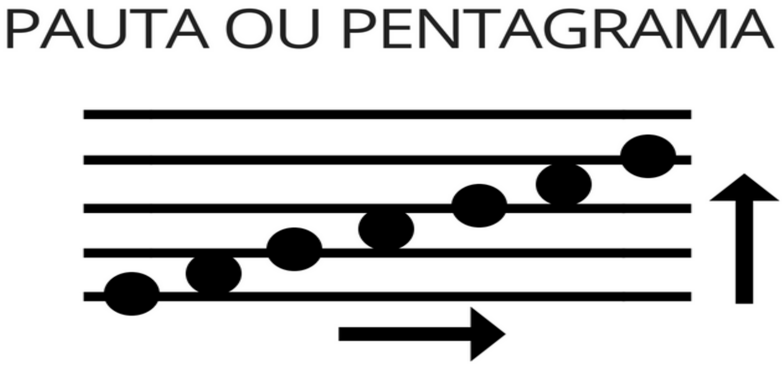
Figura 1: Pentagrama



Fonte: avançando na música (2022)

Percebemos na imagem acima, que devemos ler as linhas e os espaços na partitura de baixo para cima. Agora, passamos para a próxima imagem:

Figura 2: Pentagrama



Fonte: avançando na música (2022)

A leitura da partitura deve ser feita da esquerda para direita e de baixo para cima.

4.2. CLAVES

As Claves são os símbolos que dão os nomes as notas na partitura que estão na pauta. Existem três Claves sendo duas delas de uso mais frequente. As Claves de Sol e Fá são as mais usadas. As Claves tem relação histórica de origem diretamente ligada à altura de vozes. De forma bem simples, a intenção de sua criação era classificar a separação de vozes em coral principalmente. Por isso, apesar das imagens abaixo mostrar as posições mais comuns das claves, existem variações das posições das claves na pauta. Essa variação depende da altura das vozes que se quer trabalhar. Confira as imagens com as posições das Claves mais usadas e comuns. Veja a Clave de sol na imagem abaixo:

Figura 3: Claves de sol

Fonte: avançando na música (2022)

Veja a Clave de Fá na imagem abaixo:

Figura 4: Clave de Fá

Fonte: avançando na música (2022)

Veja a Clave de Dó na próxima imagem:

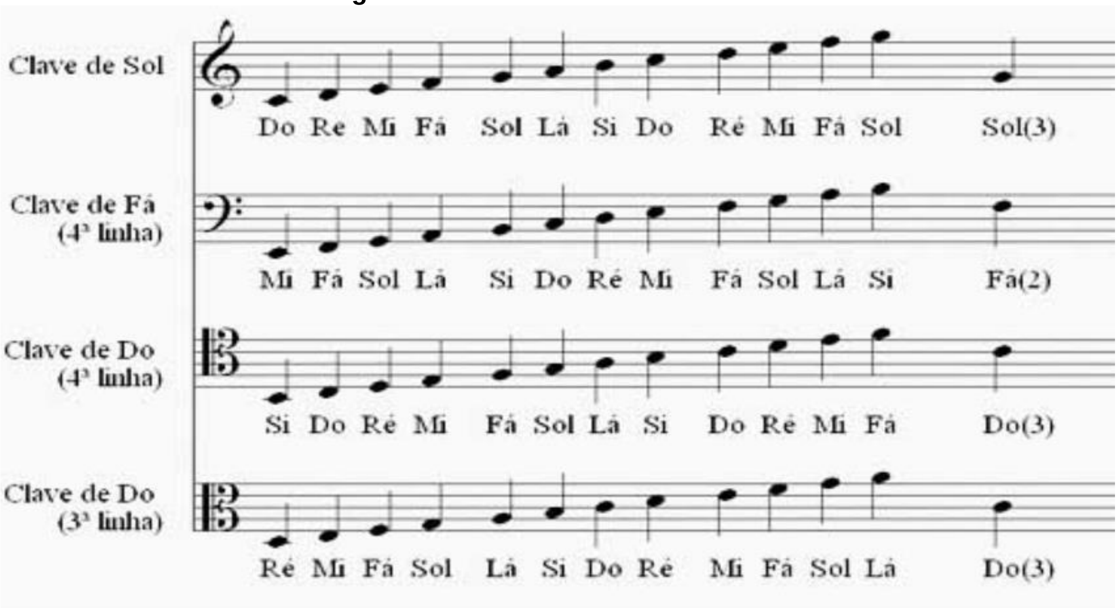
Figura 5: Clave de Dó

Fonte: avançando na música (2022)

A mudança de Clave faz variar o nome de uma determinada nota mesmo que ela permaneça na mesma posição na clave. Mostramos nas imagens que a bolinha azul na Clave de Sol, que está na 2ª linha agora tem o nome de sol. Isso por causa da clave. Nas claves de Fá e Dó devemos seguir o mesmo conceito de distribuição de notas. O Fá na Clave de Fá está na 4ª linha e o Dó na Clave de Dó está na Linha 3.

Na imagem abaixo podemos ver todos os nomes das notas para cada clave.

Figura 6: Altura de cada nota



Fonte: Wikipédia (2011)

4.3. COMPASSO MUSICAL

No compasso musical sua definição se dá pela divisão da música em intervalos de tempos iguais, baseada no seu andamento, que nada mais é do que o tempo. São as fórmulas de compasso, os números depois das Claves (Sol, Fá, Dó e Neutra). Eles ditam quanto tempo cabe dentro de um compasso e como as notas se dividirão. O denominador é quem informa em quantas vezes é necessário dividir uma semibreve (quatro tempos) para obter uma unidade de duração, ou seja, uma semínima. Já o numerador indica quantas unidades de tempo têm naquele compasso. Para facilitar, você deve decorar o valor das figuras. A breve é a com maior valor, com oito tempos, mas é pouco utilizada, enquanto a semifusa tem 1/16 de tempo, sendo a de menor. Entre elas estão à semibreve (4 tempos), a mínima (2), semínima (1), colcheia (1/2), semicolcheia (1/4), e a fusa (1/8), isso quando o denominador da fórmula de compasso é 4, ou seja, são necessárias quatro semínimas de valor 1 para completar uma semibreve de valor 4. Os valores das notas podem alterar ao definir o denominador. Por exemplo, em uma fórmula de compasso cujo denominador é 8, significa que é necessário dividir uma semibreve de 4 tempos em 8 partes. Assim, quem passa valer um tempo é a colcheia, que em um compasso quaternário valeria meio (MUSICDOT, 2022, online). Por exemplo, um compasso classificado em 4/4 possui 4 pulsações de tempo dentro de cada dupla de barra de compasso. Veja imagem abaixo:

Figura 7: Barra de compasso

Fonte: avançando na música (2022)

4.4. DURAÇÃO DOS COMPASSOS EM PARTITURAS

Entender como ler partitura depende muito de entender a divisão das notas nos compassos de acordo com a classificação dele. Para exemplificar um compasso 4/4 temos primeiramente que entender as durações representadas por cada símbolo:

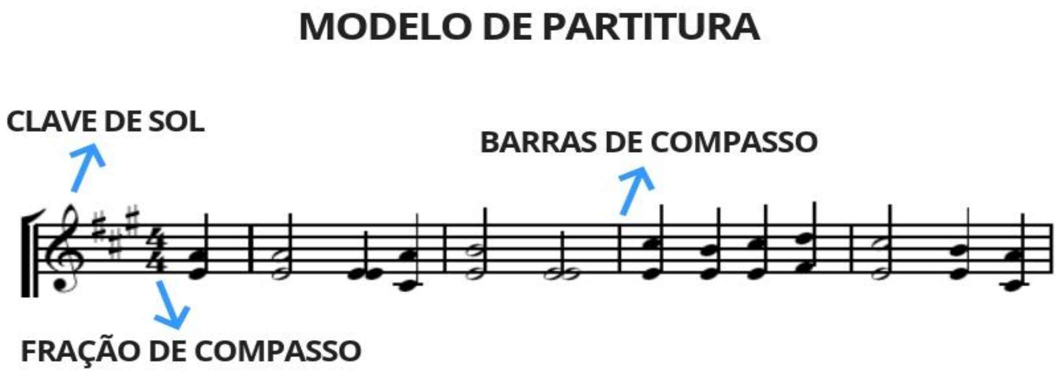
Figura 8: Divisão das notas nos compassos

		Semibreve	$\frac{4}{4}$
		Mínima	$\frac{2}{4}$
		Semínima	$\frac{1}{4}$
		Colcheia	$\frac{1}{8}$
		Semicolcheia	$\frac{1}{16}$
		Fusa	$\frac{1}{32}$
		Semifusa	$\frac{1}{64}$
		Quartifusa	$\frac{1}{128}$

Fonte: Avançando na música (2022).

Na primeira coluna desta imagem temos o símbolo que será inserido na pauta. Cada símbolo desses representa a duração do tempo em que uma nota deverá ser tocada. Na segunda coluna temos a figura de pausa de cada tempo de duração correspondente a sua nota. Pausa e silêncio também é música. Pausa é o momento de silêncio na partitura e tem sua duração representada na coluna quatro. Na coluna três lemos o nome dos símbolos de notas e pausas. Na coluna quatro a duração das notas e pausas. Essas frações estão ligadas a duração de cada nota num compasso. A semibreve é a nota que preenche todo compasso quaternário conhecido também como 4/4. Se você dividir essa fração terá o um como resultado, indicando que uma semibreve somente é necessária para preencher o compasso 4/4(avançando na música, 2021, Online).

Figura 9: Modelo de partitura



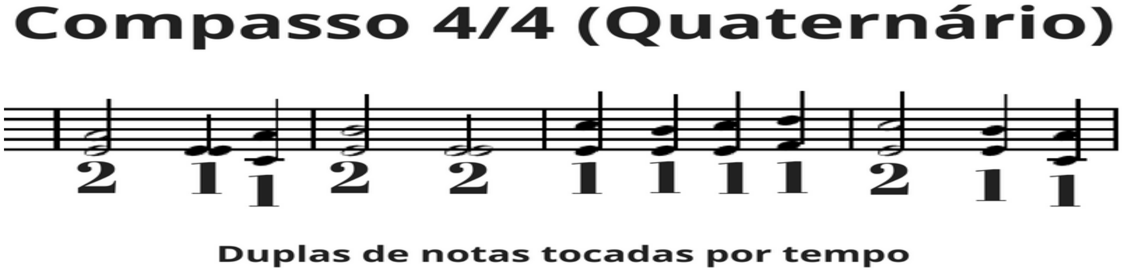
Fonte: avançando na música (2022)

O início e fim dos compassos são marcados por barras verticais, mas elas podem ser diferentes e significar coisas distintas, portanto fique atento:

- Barra simples: é a que faz a separação comum entre os compassos;
- Barra dupla: marca o fim de uma seção e o início de outra, podendo haver mudança de tempo e até mesmo tonalidade;
- Barra de repetição: significa que você deve voltar até o trecho onde havia outra barra igual a esta e repeti-lo. Caso não haja outra, repita a música desde o começo até o aparecimento da barra;
- Barra final: ela informa que a música chegou ao fim. São duas barras, sendo a primeira fina e a segunda mais espessa (MUSICDOT, 2022, online).

Os compassos são inseridos na pauta com o símbolo de barras verticais e dividem a música em partes iguais de tempo. Por exemplo, um compasso classificado em 4/4 possui quatro pulsações de tempo dentro de cada dupla de barra de compasso. Veja a figura abaixo:

Figura 10: Compasso quaternário

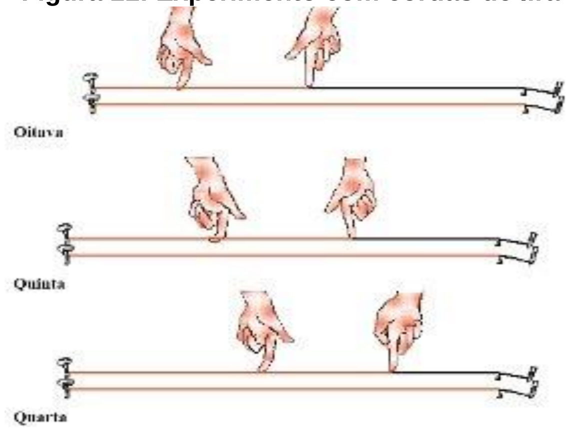


Fonte: avançando na música (2022)

5. A HISTÓRIA DA RELAÇÃO DA MATEMÁTICA COM A MÚSICA

Essa forte relação da matemática com a música teve origem na Grécia antiga. O filósofo Pitágoras (570 - 496 a.C.) utilizando os seus conhecimentos estabeleceu a primeira teoria matemática da música ao estudar as relações dos comprimentos das cordas da Lira e descobrindo que a frequência da vibração de uma corda é diretamente proporcional ao seu comprimento:

Figura 11: Experimento com cordas de lira



Fonte: clube de geometria, 2008

Em seu experimento com uma lira ele conseguiu demonstrar que o tom de uma corda, quando soada na metade de seu comprimento é uma oitava acima do som da corda livre, assim satisfazendo uma razão de 1:2. Quando a corda é soada em $\frac{2}{3}$ de seu comprimento, o som é uma quinta mais alta; em $\frac{3}{4}$, uma quarta mais alta. Estava então construída uma escala musical baseada em razões simples entre os números inteiros.

Figura 12: Instrumento Lira

Fonte: avançando na música (2022)

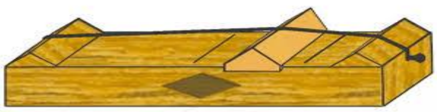
5.1. O PRIMEIRO INSTRUMENTO MUSICAL

"A música oferece à alma uma verdadeira cultura íntima e deve fazer parte da educação do povo." (François Guizot).

Pitágoras (570 - 496 a.C.) foi o primeiro a relacionar razões de cordas vibrantes a intervalos musicais. Segundo Campos (CAMPOS, 2009) foi ele, Pitágoras, o “descobridor” do que viria a ser o quarto ramo da matemática, através de suas experiências com o monocórdio (ABDOUNUR, 2002). O monocórdio é um instrumento de uma só corda colocada sobre dois cavaletes fixos, presos em uma prancha de madeira, e um cavalete móvel que gerava notas de frequências diferentes de acordo com sua posição.

Segundo a lenda, Pitágoras ao passar por uma oficina ouviu som de 5 martelos batendo numa bigorna. Ao ouvir este som ele ficou muito admirado, pois era agradável aos seus ouvidos e pensando inicialmente que a qualidade do som.

Figura 13: Monocórdio



Fonte: docplayer (2022)

Era proveniente das forças das mãos ele teria trocado os martelos, mas cada martelo conservava o som que ele era próprio. E depois de tocado e tirado um som desagradável pesou os outros e constatou que o primeiro pesava 12 o segundo 9 o terceiro 8 o quarto 6 de uma unidade de peso desconhecida.

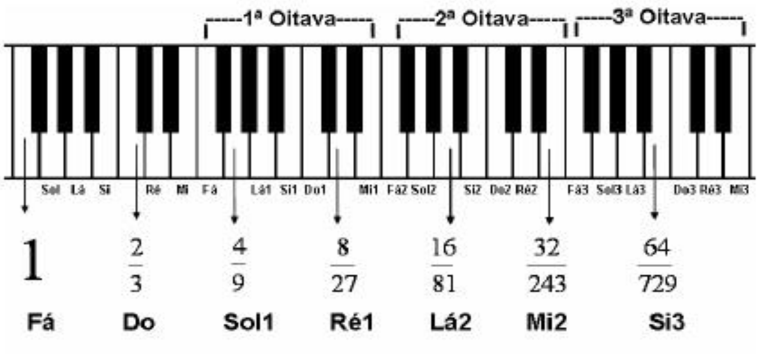
Com essa descoberta, os pitagóricos notaram que a altura de uma nota musical depende do comprimento da corda que a produzia. Como já mencionamos o experimento de Pitágoras ao pressionar a corda num ponto situado à metade do comprimento da mesma produzia um som reconhecido como sendo o mesmo som da corda solta, porém mais agudo o que hoje musicalmente conhecemos como oitava. Somente a partir desses experimentos de Pitágoras é que foi possível a criação de um sistema musical através das relações entre os números inteiros.

Os pitagóricos observaram que notas diferenciadas por intervalo de oitava apresentavam certas semelhanças podendo ser definida como uma classe de equivalência, onde duas notas tornam-se equivalentes se o intervalo existente entre elas for um número inteiro de oitavas, podendo reduzir distintas oitavas apenas uma, possuindo assim notas equivalentes em todas as outras oitavas e na oitava de origem (Abdounur, 2003, p.09).

5.2. A CONSTRUÇÃO DE UMA ESCALA COM SETE NOTAS

Agora vamos nos preocupar em como dividir esta oitava em sons que determine o alfabeto sonoro. Isso não parece ser tão complicado, pois com a utilização das razões de quinta e oitava se torna mais simples e possível o que ajudou os pitagóricos na construção de uma escala com 7 notas através de sucessivas divisões por quintas. Abaixo mostraremos uma ilustração de como isso funciona:

Figura 14: Alfabeto sonoro das notas de um piano



Fonte: descomplicando a música (2022).

Observe que essa é a formação da sequência $Fa, Dó, Sol, Ré, Lá, Mi$ e Si é constituído por quintas puras. Que fique claro estas notas estão em oitavas diferentes. A seguir vamos fazer uma transposição para que essas notas fiquem na ordem $Dó$, $Ré$, Mi, $Fá$, Sol, $Lá$ e Si dentro de uma única oitava. Vamos atribuir à nota $Dó$ primeiramente com cumprimento 1. Calculando $\frac{2}{3}$ de $Dó$ acharemos uma ascendente de $Dó$ ($Dó$ - $Ré$ - Mi - $Fá$ – Sol) que é a nota Sol. Novamente fazendo o cálculo de $\frac{2}{3}$ de Sol (Sol - $Lá$ - Si - $Dó$ - $Ré1$), ou seja, $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Observe que o $Ré1$ está uma oitava acima de $Ré0$, ou seja, seu comprimento foi dividido ao meio. Se dobrarmos o seu comprimento, ou seja, $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$ estamos o reescrevendo após o $Dó0$. Calculando $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$ de $Ré0$ ($Ré0$, $Mi0$, $Fá0$, $Sol0$, $La0$) acharemos o $La0$, ou seja, $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$. Calculando $\frac{2}{3}$ de $La0$ ($La0$, $Si0$, $Dó0$, $Ré0$, $Mi0$), ou seja, $\frac{2}{3}$ de $\frac{16}{27} = \frac{32}{81}$ acharemos o $Mi1$. Se formos fazer uma transposição do $Mi1$ para $Mi0$ teremos um comprimento de $\frac{64}{81}$. Calculando $\frac{2}{3}$ de $Mi0$, ($Mi0$, $Fá0$, $Sol0$, $La0$, $Si0$) corresponde ao $Si0$, ou seja, $\frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$. E para $Fá$ é $\frac{3}{4}$, ou seja, uma quinta descendente ou uma quarta à ascendente. Dito isso temos, portanto, a primeira escala musical com as seguintes proporções:

Figura 15: Razão das notas musicais

NOTA	RAZAO
DÓ	1
RÉ	8/9
MI	64/81
FÁ	3/4
SOL	2/3
LÁ	16/27
SI	128/243
DÓ1	1/2

Fonte: descomplicando a música (2022)

Se continuarmos com a divisão de quinta após o $Si3$ vamos obter outros sons correspondente às notas acidentadas $Fa\#3$, $Do\#4$, $Sol\#4$, $Re\#5$, $La\#5$, $Mi\#6$, $Fa\#6$e $Si\#6$ dessa maneira o intervalo da oitava fica dividido em 12 partes (12 aplicações de quinta que transporta a oitava inicial, resultam aplicações de quinta que transporta a oitava inicial, resulta em uma escala cromática formada por semitons).

5.3. OS NÚMEROS ESPECIAIS

Podemos observar na figura 15 que os números presentes nos numeradores são todos de potência de 2 e os números dos denominadores, de potência de 3 (Com exceção do $Fá$ que a ordem é contrária). Vejamos:

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^6 = 64$

$2^7 = 128$

$3^0 = 1$

$3^1 = 3$

$3^2 = 9$

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$

$3^5 = 243$

Como já havíamos mencionado esse foi o motivo pelo qual os pitagóricos utilizavam os números 2 e 3 por acreditarem que eram números especiais e depois através deles qualquer número poderia ser gerado e, portanto, deveria estar presente na matemática e na música.

5.4. A MATEMÁTICA DAS ESCALAS MUSICAIS

Hoje como sabemos muitos povos e culturas criaram suas próprias escalas musicais. Uns desses povos são os chineses, que utilizando dessa experiência de

Pitágoras criaram suas escalas. Começando com a nota $Dó$ que eles pegaram uma corda esticada e depois dividiram essa corda em 3 partes como no experimento acima. E o resultado desta divisão foi a nota chamada Sol. Ao fazerem isso eles perceberam que essas notas possuíam uma harmonia entre si e da mesma forma eles repetiram o procedimento a partir dessa nota Sol dividindo esse pedaço de corda em 3 partes e resultando numa nota chamada $Ré$. Com isso eles perceberam que essa nota tinha uma harmonia agradável com a nota Sol e também com a nota $Dó$. E assim os procedimentos foram repetidos a partir da nota Ré que deu origem a nota $Lá$ depois partindo de $Lá$ chegou à nota Mi (descomplicando a música, 2002, online).

Não pararam por aí após repetirem esse procedimento e dividir em três partes a corda mais uma vez dando origem à nota Si foi encontrado um problema, pois a nota Si não continha uma harmonia quando tocada junto com a nota $Dó$, o primeiro maior experimento, simplesmente pelo fato dessas notas estarem muito próximas uma da outra o que causava certo desconforto sonoro. Por isso os chineses terminaram suas divisões obtendo somente as notas $Dó$, Sol, $Ré$, $Lá$, Mi deixando a nota Si de lado.

Hoje conhecemos essa escala por nome de escala pentatônica, ou seja, uma escala formada por cinco notas. Foi justamente essa escala que serviu de base para a música chinesa e por ser uma escala agradável e consonante ela representou muito bem a cultura oriental que sempre foi pautado na harmonia e estabilidade. Não somente a cultura oriental como também ela representa uma ótima opção para melodias conhecida de outras culturas.

5.5. O CICLO DAS 12 NOTAS

Hoje a nota Si é muito importante para a cultura ocidental que trabalha com 12 notas. Por esse motivo ela não foi descartada, pois a grande observação feita pelos ocidentais era a proximidade das notas $Dó$ e Si uma da outra, por isso eles tomaram uma decisão de criar uma escala mais abrangente e a principal regra dessa escala era que as notas deveriam ter a mesma distância uma das outras e essa distância deveria ser o mesmo intervalo entre $Dó$ e Si conhecido também de semitom. O que estamos querendo dizer é que entre $Dó$ e $Ré$ (um tom) precisaria existir uma nota intermediária, pois a distância entre $Dó$ e $Ré$ era maior que a distância entre $Dó$ e Si (um semitom) (descomplicando a música, 2002, online).

6. A FREQUÊNCIA NA MÚSICA

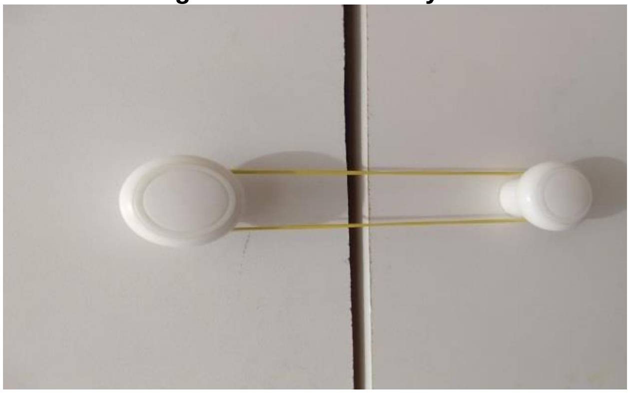
Uma maneira simples de definir o som é dizer que ele é uma onda e que a frequência do som é o que define a nota musical. E como podemos definir frequência? É uma repetição com referência de tempo. Vamos imaginar, por exemplo, um pneu de carro girando. Se ele completa uma volta em um segundo dizemos que a frequência desse pneu é uma volta por segundo ou “um Hertz”. Lembrando que Hertz é apenas um nome dado para representar a unidade de frequência também conhecido por sua abreviação “Hz”. Se esse pneu girando completasse 10 voltas em um segundo sua frequência seria 10 Hertz ($10Hz$). Mas enfim o que isso tem a ver com o som? Tem tudo a ver, pois o som é uma onda e, essa onda oscila com certa frequência.

No entanto podemos afirmar que para cada frequência temos um som diferente (uma nota diferente). A nota $Lá$, por exemplo, corresponde a uma frequência de 440 Hertz. Então diante disso onde entra a matemática nessa história? Basta lembrar que é quando uma frequência é multiplicada por 2 a nota permanece a mesma. A informação de que a nota $Lá$ é 440 Hertz se multiplicarmos por 2 é igual a 880 Hertz, Ou seja, não deixa de ser uma nota $Lá$ só que uma oitava acima, mas aguda. Se fôssemos fazer um cálculo de uma oitava abaixo bastaríamos dividir por 2. Nesse caso podemos concluir que é uma nota e sua respectiva oitava mantém uma relação de $\frac{1}{2}$. Vamos utilizar um exemplo parecido com o que Pitágoras utilizou na idade média de como ele descobriu sobre as oitavas.

6.1. COMO DETECTAR A FREQUÊNCIA NA PRÁTICA

Veja como fizemos um experimento parecido com o que Pitágoras fez: Pegamos uma corda esticada e prendemos suas extremidades e quando tocamos essa corda ela vibra (observe na foto)

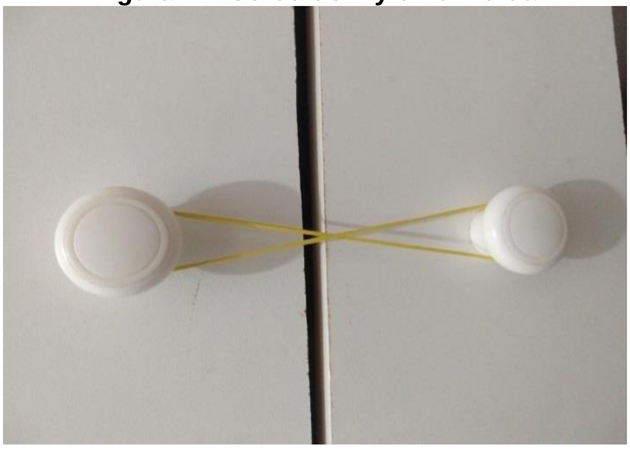
Figura 16: Corda de nylon



Fonte: Própria (2022)

O segundo passo é dividir essa corda em 2 partes e tocar cada extremidade novamente. Após tocar o som produzido é exatamente o mesmo só que mais agudo depois era a mesma nota uma oitava acima.

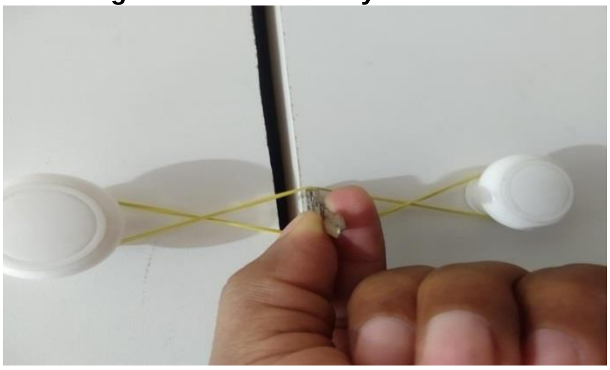
Figura 17: Corda de nylon dividida



Fonte: Própria (2022)

Depois resolvemos experimentar como ficaria o som se a corda fosse dividida em 3 partes:

Figura 18: Corda de nylon dividida



Fonte: Própria (2022)

Dessa vez percebemos porque o novo som que surgiu é diferente do anterior, ou seja, não é a mesma nota uma oitava acima mais uma nota diferente que precisa ter outro nome.

Esse mesmo experimento foi feito por Pitágoras. Apesar dessa nota não ter um nome, ela combinava bem com som da nota anterior no qual dava para se criar uma harmonia muito agradável ao ouvido. É bom observar que essas divisões até aqui mostradas possuem relações matemáticas $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$. E foi exatamente dessa mesma forma que Pitágoras continuou fazendo subdivisões combinando os sons matematicamente e criando escalas que mais tarde estimularam a criação de instrumentos musicais que pudesse reproduzir essas escalas.

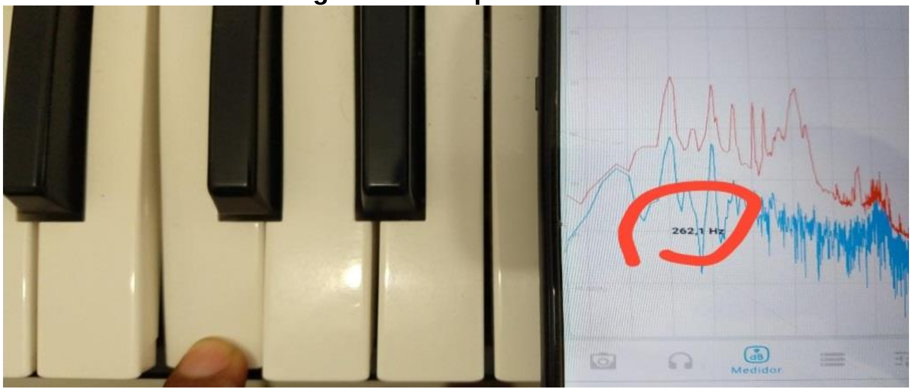
6.2. CALCÚLO DAS FREQUÊNCIAS COM USO DO FREQUENCÍMETRO

Atualmente hoje através de aparelhos que fazem análise de frequência descobriu-se que é multiplicando a frequência da nota Si pelo número 1,0595 chegava se a frequência de $Dó$.

Sabemos que a frequência da nota Si é 246,9Hz e a frequência da nota $Dó$ é 261,6 Hertz. Então se multiplicarmos a frequência da nota $Dó$ por 1,0595 temos: 246,9 · 1,0595 = 261,6Hz (nota $Dó$)

Para fazermos um teste experimental utilizamos um aplicativo de frequencímetro em um aparelho, Android para medirmos a frequência aproximada das notas:

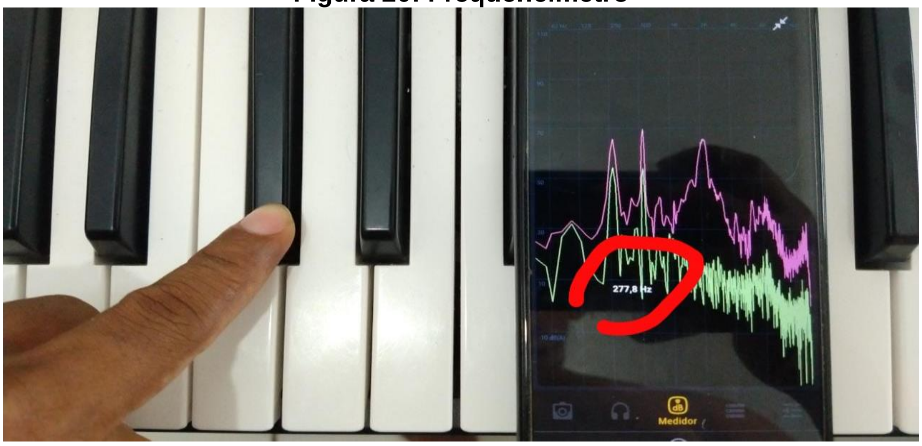
Figura 19: Frequencímetro



Fonte: Própria (2022)

Vamos nos basear somente nessa distância para as demais notas para mantermos o nosso objetivo e com isso descobrir qual nota que virá depois de Dó multiplicando sua frequência por 1,0595: 261,6 × 1,0595 = 277,2 Hz e Chamamos de nota $Dó$ sustenido. Veja no experimento:

Figura 20: Frequencímetro



Fonte: Própria (2022)

Vamos mais adiante e ver o que vem depois do $Dó$ sustenido: 277,2 x 1,0595 = 293,6 Hz (nota $Ré$)

Utilizando esse mesmo procedimento e usando a mesma lógica podemos formar toda escala cromática. Entretanto se multiplicarmos a frequência da nota $Dó$

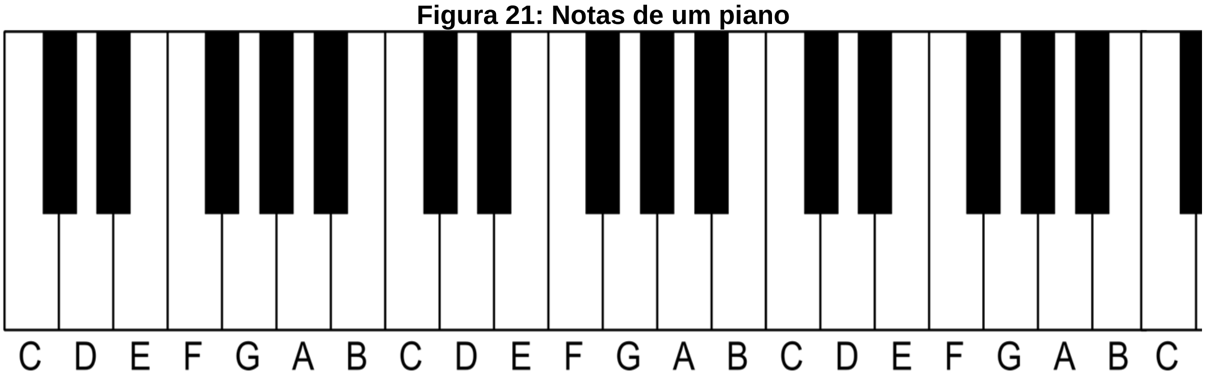
pelo número 1,0595 e 12 vezes voltamos a nota $Dó$ e isso só é possível porque "1,0595" corresponde ao resultado da raiz: $\sqrt[12]{2}$. Podemos observar que essa raiz multiplicada cada por ela mesmo 12 vezes é igual a 2: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$

Na música quando multiplicamos uma mesma nota duas vezes ela é considerada uma oitava acima, ou seja, a mesma nota tocada só que mais aguda. Como podemos ver a conclusão que temos é que essas notas não surgiram por acaso. Na verdade, o que gostaríamos de mostrar desde o início era divisão de uma escala em 12 partes iguais, de uma maneira que é a última nota voltasse a ser a primeira. E foi exatamente dessa maneira que surgiu a chamada escala cromática (descomplicando a música, 2002, online).

6.3. COMO ENCONTRAR AS NOTAS PARTIR DAS FREQUÊNCIAS

Nesse caso iremos utilizar as notas de um piano para discutirmos esses cálculos com mais clareza:

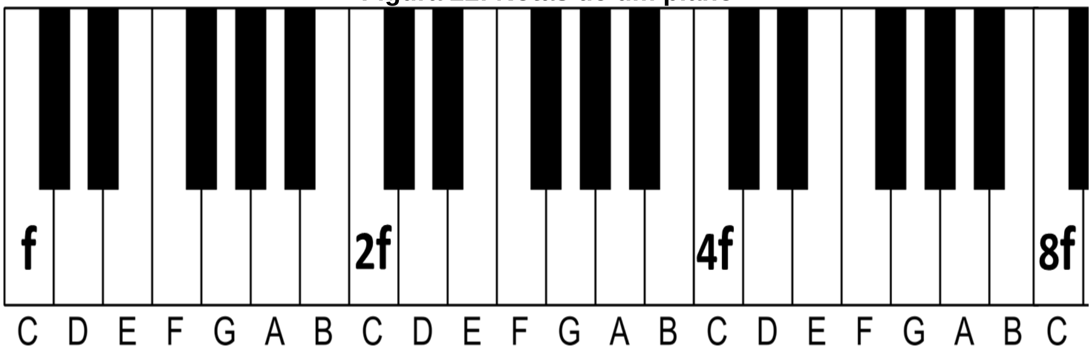
Figura 21: Notas de um piano



Fonte: descomplicando a música (2022)

Olhando para a esquerda encontramos a primeira nota chamada de $Dó$ (C). Vamos considerar que ela possui uma frequência chamada f e, o segundo $Dó$ que é oitava acima terá uma frequência chamada $2f$. Para chegar ao próximo $Dó$, teremos que pegar o $Dó\ 2f$ e multiplicar por 2 novamente, chegando no $Dó\ 4f$. Repetindo o processo, o último $Dó$ desse piano será o $Dó\ 8f$. Acompanhe a lógica:

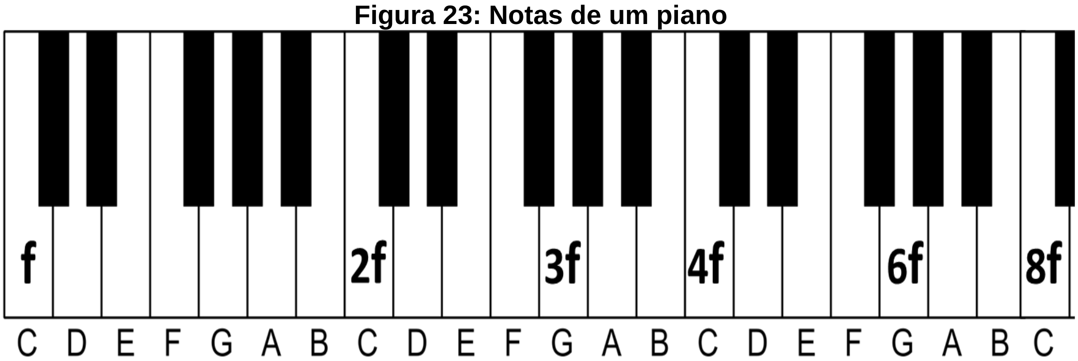
Figura 22: Notas de um piano



Fonte: descomplicando a música (2022)

O que faremos se quisermos descobrir quais notas pertencem às frequências $3f$, $5f$, $6f$ e $7f$? Primeiramente para descobrirmos a nota da frequência $3f$ olhamos para a sua localização. Vemos que ela está entre as frequências $2f$ e $4f$. Sabemos que $1{,}5 \cdot 2 = 3$, portanto precisamos avançar uma quantidade k de semitons (onde cada semitom equivale a aproximadamente 1,0595 como já vimos) até resultar em $3f$. Ou seja, $(1{,}0595^k) \cdot 2f = 3f$. Resolvendo para k, descobrimos que esse valor é 7, pois $1{,}0595^7$ = 1,5 (aproximadamente). Em outras palavras, precisamos avançar 7 semitons partindo de $2f$ até chegar à nota $3f$. A conclusão é que a nota $3f$ é a nota sol (G):

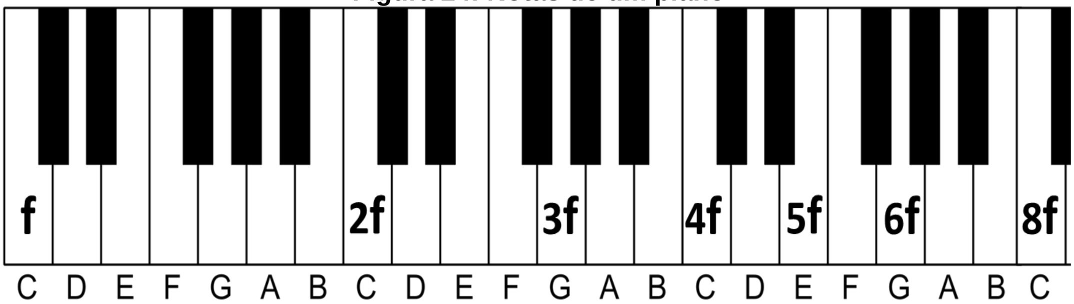
Figura 23: Notas de um piano



Fonte: descomplicando a música (2022)

Olhando para o piano fica fácil também identificar a nota da frequência $6f$. Pois ela será uma oitava acima de $3f$: $3f \cdot 2 = 6f$. Por isso ela também já foi identificada acima. Utilizando o mesmo método fica fácil descobrir as notas das frequências $5f$ que está no meio do caminho entre as frequências $4f$ e $6f$:

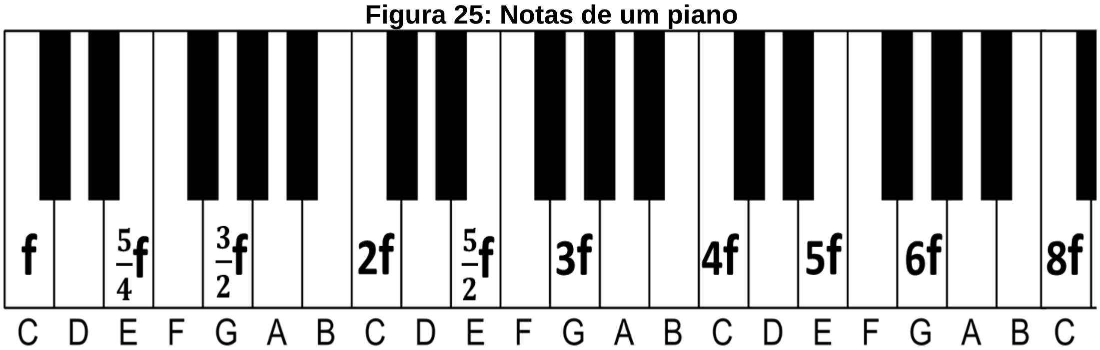
Figura 24: Notas de um piano



Fonte: descomplicando a música (2022)

Todos esses procedimentos foram para encontrar as notas oitavadas, ou seja, as notas mais agudas de uma mesma nota. Agora vamos imaginar o contrário: qual o procedimento para se calcular uma nota oitavada mais grave? Para encontrar as notas oitavadas mais agudas sempre avançamos multiplicando por 2 e para encontrarmos as notas oitavadas mais graves o processo é feito o inverso. Neste processo é só dividir por 2. Ou seja, a nota “E” (Mi) denotada como $5f$ localizada uma oitava abaixo será $\frac{5}{2} \cdot f$ e reduzindo mais uma oitava será $\frac{5}{4} \cdot f$. O mesmo vale para a nota $3f$ (descomplicando a música, 2022, online).

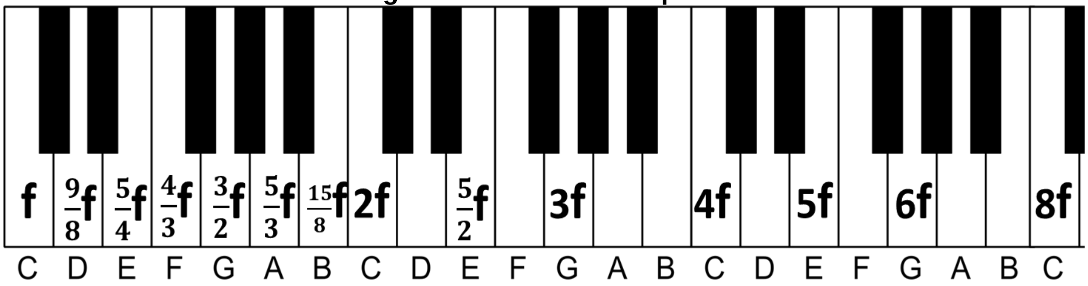
Figura 25: Notas de um piano



Fonte: descomplicando a música (2022)

E finalmente começamos a ver que tudo faz sentido. As relações $\frac{5}{4}$ e $\frac{3}{2}$ que começamos falando nesse projeto quando mencionamos o experimento de Pitágoras estão se materializando em nosso piano. Através de um método e técnicas apresentados aqui podemos estabelecer com precisão todas as frações da primeira oitava:

Figura 26: Notas de um piano



Fonte: descomplicando a música (2022)

Conforme já explicado anteriormente as notas com frequência de fração complexa não são muito agradáveis aos nossos ouvidos. Já as notas com fração na forma básica são consideradas agradáveis aos nossos ouvidos. Através dos nossos cálculos podemos saber se duas notas tocando ao mesmo tempo são agradáveis aos nossos ouvidos. Para fazer esse cálculo basta dividir suas frações e reduzir a expressão à sua forma mais básica. Se o resultado for um valor grande no denominador, a sensação será desagradável.

Exemplo:

Verifique o intervalo das notas entre Mi e Si?

$$Mi = \frac{5}{4}$$

$$Si = \frac{15}{8}$$

$$\frac{Mi}{Si} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{15}{8}} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

Como podemos constatar o resultado foi uma fração simples com um denominador pequeno logo podemos afirmar que o som é agradável musicalmente falando aos nossos ouvidos. Diante disso há uma observação a fazer: na música esse intervalo entre Mi e Si é chamado de quinta justa. Geralmente Nesse tipo de intervalo os sons são agradáveis aos ouvidos e isso pode ser provado através desse cálculo.

Verifique o intervalo das notas entre $Dó$ e Si?

$$D\acute{o} = \frac{2}{1}$$

$$Si = \frac{15}{8}$$

$$\frac{Si}{D\acute{o}} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{2}{1}} = \frac{15}{16}$$

Segundo a teoria musical, notas separadas por um semitom de distância tocadas juntas não soam muito bem porque existe um choque sonoro entre elas. Como podemos ver nos cálculos o valor do denominador é grande, ou seja, é uma fração complexa que significa que o som é desagradável aos ouvidos.

7. O USO DO LOGARITMO NA MÚSICA

7.1. DEFINIÇÃO

Logaritmo é uma função matemática que está baseada nas propriedades da potenciação e exponenciação. O valor do logaritmo corresponde ao expoente que se deve elevar uma determinada base, positiva e diferente de 1, para que o resultado seja igual a um número positivo b.

Originalmente, o conceito do logaritmo foi criado pelo matemático escocês John Napier (1550 – 1617), no século XVII, com o propósito de simplificar os cálculos trigonométricos complexos. O matemático inglês Henry Briggs (1561 – 1630) também contribuiu com os estudos sobre o logaritmo, considerado um dos responsáveis por aprimorar esta função e criar a sua atual lei de formação. Etimologicamente, a palavra “logaritmo” é formada pela junção de dois termos gregos: *lógos* e *arithmós*, que significam, respectivamente, “razão” e “número” (significados, 2022, online).

.

De modo geral, a operação logaritmo é definida por:

$$log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

x → logaritmo

b → base

a → logaritmando

- Exemplos

Calcule o valor dos logaritmos a seguir.

a) $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$.

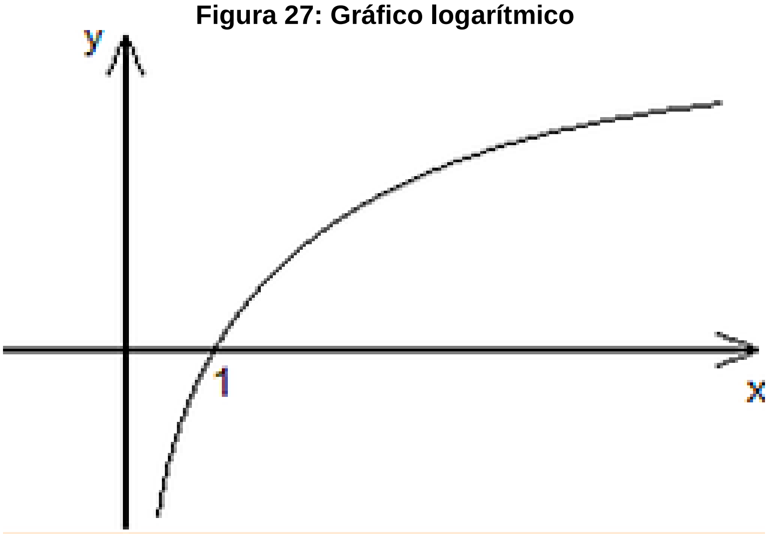
b) $\log 100 = 2$, pois $10^2 = 100$ (como não havia valor para a base, ela é igual a 10).

c) $\log_2 1024 = 10$, pois $2^{10} = 1024$.

Como podemos reparar que os cálculos de frequência e raízes foram trabalhados intrinsecamente com o logaritmo de base 2. Talvez ainda não tenham percebido, mas o formato de parte de um corpo de um piano é um gráfico de logaritmo. Os construtores de piano criaram essa forma para fazer uma referência há essa descoberta Matemática musical

Observe um gráfico logarítmico:

Figura 27: Gráfico logarítmico



Fonte: descomplicando a música (2022)

O corpo de um piano:

Figura 28: Piano

Fonte: descomplicando a música (2022)

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

> **No século XVII, a Matemática desempenhou papel fundamental para a comprovação e generalização de resultados. Surgiu a concepção de lei quantitativa que levou o conceito de função e do cálculo infinitesimal. Esses elementos caracterizaram as bases da matemática como se conhece hoje. (PARANÀ, 2008, p. 40)**

Acredita-se que este trabalho corresponde uma tentativa inicial de incorporar ao ensino da matemática às teorias musicais e que poderá favorecer significativamente no que diz respeito ao uso de novas abordagens de ensino para as funções, potenciação e logaritmo.

Nesse intuito, procuramos aproximar essas duas áreas de conhecimentos no âmbito escolar, resgatando historicamente a conexão entre elas, onde a matemática possa ser ensinada através da interdisciplinaridade.

Acredita-se também que a utilização dessa abordagem é uma tentativa de quebrar esse padrão de que uma aula de matemática deve ser totalmente expositiva, em que o professor passa ao aluno aquilo que ele acredita ser importante sem analisar os conhecimentos prévios dos estudantes. Devemos alertar que não queremos substitui a aula expositiva, mas mostrar que isso é suficiente para tornar a aula mais atraente e fluir o interesse por parte dos alunos.

Como portador desse conhecimento sobre música e sua conexão com a matemática, uma proposta pessoal é a de dar continuidade a este projeto no decorrer dos anos seguintes, incentivando essa maneira de compreender operações matemáticas e despertando a curiosidade e promovendo a interatividade entre os alunos da escola.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados**. 3ª ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

INSTITUTO CÂNONE. “**Porque estudar percepção musical**”. http://institutocanone.com.br/porque-estudar-percepcao-musical-instituto-canone/. Acesso em: 20.05.22

ENCORDA. “**O que e harmonia na musica**”. Disponível em: https://www.encorda.com.br/blog/o-que-e-harmonia-na-musica/. Acesso em: 20.05.22

MUSICDOT. “**O que é compasso musical**”. Disponível em: https://www.musicdot.com.br/artigos/o-que-e-compasso-musical Acesso em: 20.05.22

AVANÇANDO NA MUSICA. “**Como ler partituras**”. Disponível em: HTTPS://avancandonamusica.com.br/como-ler-partitura/ .Acesso em: 20.05.22

DESCOMPLICANDO A MUSICA. “**Matemática na música**” Disponível em: https://www.descomplicandoamusica.com/matematica-na-musica/ Acesso em: 20.05.22

RODRIGUES**,** SOFIA**.** **“Pitágoras e as cordas**”. Disponível em: http://clubedegeometria.blogspot.com/2008/04/pitgoras-e-as-cordas.html**.** Acesso em: 20.05.22

FOLHA. “**Pitágoras os números e a música cósmica**” Disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/pitagoras-os-numeros-e-a-musica-cosmica/. Acesso em: 20.05.22

SIGNIFICADOS. ”**Logaritmos**”. Disponível em: https://www.significados.com.br/logaritmo/#:~:text=Logaritmo%20%C3%A9%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica,a%20um%20n%C3%BAmero%20positivo%20b. Acesso em: 20.05.22

TODA MATÉRIA. “**O que é fração**“ Disponível em: https://www.todamateria.com.br/o-que-e-fracao/ Acesso em: 22.05.22