



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ  
CAMPUS POETA TORQUATO NETO

Maria da Cruz Vieira da Silva  
e  
William Fernando da Silva Rodrigues

Explorando as Integrais Múltiplas com Geogebra:  
Uma abordagem visual e interativa.

TERESINA  
2023



Maria da Cruz Vieira da Silva  
e  
William Fernando da Silva Rodrigues

Explorando as Integrais Múltiplas com Geogebra:  
Uma abordagem visual e interativa.

Trabalho de Conclusão de Curso  
submetido à Universidade Estadual do  
Piauí, como requisito necessário para  
obtenção do grau de Licenciado em  
Matemática.

Orientador: Professor Dr. Pitágoras Pi-  
nheiro de Carvalho.

Teresina, junho de 2023.

S586e Silva, Maria da Cruz Vieira da.  
Explorando as integrais múltiplas com geogebra: uma abordagem visual e interativa / Maria da Cruz Vieira da Silva, William Fernando da Silva Rodrigues. – 2023.  
53 f. : il.

Monografia (graduação) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Licenciatura em Matemática, *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2023.  
“Orientador Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho.”

1. Integral Dupla. 2. Software Geogebra. 3. Simulações.  
I. Rodrigues, William Fernando da Silva. II. Título.

CDD: 510.07





# Agradecimentos

Agradecemos primeiramente a Deus por tudo o que Ele tem nos proporcionado. A nossos familiares: Irismar Rosa da Silva, Antônio Diogo Vieira Matos, Antonio Diogo Vieira Matos Filho, Jeferson Vieira da Silva, Rosimar Rosa da Silva, Maria Rosa da Conceição (in memoriam), Luis Ferdinan Rodrigues, Maria Claudionira de Sousa, Maria Fernanda de Sousa Rodrigues e Rosa Maria Leite Bezerra por todo apoio e incentivo.

A nosso orientador Professor Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho por todo empenho no desenvolvimento deste projeto e também a todos os professores do curso de Matemática da Universidade Estadual do Piauí(UESPI), Campus Poeta Torquato Neto, em especial ao Professor Dr. Afonso Norberto da Silva pela colaboração no trabalho e ao Professor Dr. Alessandro Wilk Silva Almeida por todo ardor e dedicação para com o curso de Matemática.

A todos os nossos amigos, em especial à Maria Cristiele Cunha de Sousa, Leticia Maria Ferreira da Silva, Vinicius de Castro Soares, José Ronalt Gomes de Abreu, Geovani Bezerra de Lima dos Santos, Pedro Leonardo de Sousa Silva e Ana Karollyne Sousa Silva pela motivação e ajuda no decorrer do curso.





# Resumo

O presente trabalho tem como tema a exploração de integrais múltiplas utilizando o software Geogebra. Para tal, faz-se uma breve introdução a respeito do Cálculo Diferencial Integral, bem como as dificuldades enfrentadas para o estudo desse tema atualmente. Nos cursos de nível superior o estudo de integrais múltiplas se caracteriza como um processo abstrato e de difícil representação gráfica em sala de aula com materiais convencionais, gerando dificuldades nas disciplinas que abordam essa temática. À vista disso, neste trabalho desenvolveu-se um manual onde são explicados os passos de elaboração de gráficos tridimensionais e de sólidos geométricos com bases retangulares, seguido de exemplos de integrais múltiplas utilizando o Geogebra. São explorados casos simples de integrais duplas, bem como discutidos casos mais complexos, nos quais são utilizadas técnicas como mudança de variável e coordenadas polares. Ao final de cada problema, é realizada uma análise comparativa entre os resultados obtidos no Geogebra e os métodos tradicionais de resolução de integrais múltiplas. O Geogebra tem inúmeras aplicações e, se utilizado de maneira adequada, pode desempenhar um papel significativo na facilitação do ensino de assuntos mais complexos, contribuindo positivamente para aprimorar as práticas pedagógicas no âmbito do ensino superior.

**Palavras-chave:** Integral Dupla, Software Geogebra, Simulações.



# Abstract

The present study has as its theme the exploration of multiple integrals using the software Geogebra. For this, a brief introduction is made about the Differential Integral Calculus, as well as the difficulties faced for the study of this subject nowadays. In undergraduate courses, the study of multiple integrals is characterized as an abstract process and difficult to graphically represent in classroom with conventional materials, creating difficulties in the subjects that deal with such topic. In view of this, this study developed a manual where the steps for the elaboration of three-dimensional graphs and geometric solids with rectangular bases are explained, followed by examples of multiple integrals using Geogebra. Simple cases of double integrals are explored, as well as more complex cases where techniques such as variable change and polar coordinates are used. At the end of each problem, a comparative analysis is performed between the results obtained in Geogebra and traditional methods of solving multiple integrals. Geogebra has numerous applications and, if used appropriately, can play a significant role in facilitating the teaching of more complex subjects, contributing positively to improve pedagogical practices in undergraduate courses.

**Keywords:** Double Integral, Geogebra Software, Simulates.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivo</b>	<b>14</b>
1.2.1	Objetivo Geral	14
1.2.2	Objetivos Específicos	14
<b>2</b>	<b>O SOFTWARE GEOGEBRA</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Apresentando o Geogebra</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>DEFINIÇÕES</b>	<b>17</b>
<b>3.1</b>	<b>Funções de duas variáveis reais</b>	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>Integral dupla</b>	<b>18</b>
<b>3.3</b>	<b>Propriedades da integral dupla</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>PRINCIPAIS RESULTADOS UTILIZADOS</b>	<b>21</b>
<b>4.1</b>	<b>Teorema de Fubini</b>	<b>21</b>
<b>4.2</b>	<b>Determinação do volume entre duas superfícies</b>	<b>21</b>
<b>4.3</b>	<b>Coordenadas Polares para determinação do volume</b>	<b>22</b>
<b>4.4</b>	<b>Determinação do centroide de uma região plana R</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>INTEGRAIS DUPLAS NO GEOGEBRA 3D</b>	<b>24</b>
<b>5.1</b>	<b>Construção de integrais duplas utilizando o GeoGebra</b>	<b>24</b>
<b>5.2</b>	<b>Mais exemplos de integrais duplas no Geogebra</b>	<b>37</b>
5.2.1	Exemplo 1	37
5.2.2	Exemplo 2	39
5.2.3	Exemplo 3	40
5.2.4	Exemplo 4	41
<b>6</b>	<b>APLICAÇÕES</b>	<b>43</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>53</b>



# 1 Introdução

As integrais desempenham um papel fundamental na Matemática e são utilizadas para resolver uma ampla gama de problemas em diversas áreas do conhecimento. Compreender e dominar as integrais é essencial para resolver problemas complexos, teóricos e práticos que envolvem funções.

A construção das integrais remonta ao século XVII, quando vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Gottfried Leibniz, em particular, desenvolveu seus estudos sobre cálculo entre 1673 e 1676, aprimorando ideias sobre o Teorema Fundamental do Cálculo e várias fórmulas elementares de diferenciação. Foi Leibniz quem introduziu o símbolo  $\int$  para representar a integral, um S alongado que simboliza a primeira letra da palavra latina *summa* (soma), em 29 de outubro de 1675 [1].

Atualmente, existem diversas ferramentas computacionais que auxiliam no cálculo de integrais. O Geogebra, em particular, destaca-se como uma opção versátil e acessível, que permite realizar cálculos numéricos, gráficos e criar ambientes visuais e interativos para explorar conceitos matemáticos de forma intuitiva.

O estudo em questão visa explorar as integrais múltiplas utilizando o Geogebra como ferramenta principal. Mostraremos resultados importantes das integrais duplas e, a partir disso, utilizaremos recursos do Geogebra para criar representações visuais e demonstrar sua aplicação em problemas concretos. Além disso, faremos uso das funcionalidades interativas do software, permitindo ao usuário explorar e modificar parâmetros, visualizar resultados em tempo real e compreender de forma mais profunda os conceitos abordados.

Este trabalho encontra-se estruturado em cinco capítulos, além da introdução e da conclusão. No capítulo dois apresentaremos o software, mostrando algumas de suas ferramentas. No terceiro capítulo, serão abordadas as principais definições e propriedades das integrais múltiplas, elucidando suas aplicabilidades. No capítulo seguinte, serão discutidos os principais resultados utilizados nas aplicações dessas integrais. Já no capítulo subsequente será, detalhadamente, demonstrado o processo de construção gráfica de uma função bidimensional e o cálculo da integral delimitada por uma área  $R$  abaixo da função utilizando o Geogebra, para tal construção utilizamos como base a referência [2]. Adicionalmente, serão exibidos exemplos ilustrativos visando melhorar a compreensão do tema e, por fim, apresentaremos aplicações da integral dupla em problemas mais complexos, evidenciando a versatilidade do software em contextos mais abstratos.

Ao combinar a teoria matemática das integrais múltiplas com as capacidades do Geogebra, esperamos facilitar a compreensão e aprendizagem desse tema complexo, tornando-o mais acessível e atraente para estudantes e profissionais da área. Através dessa abordagem visual e interativa, pretendemos fornecer uma nova perspectiva sobre

as integrais múltiplas, permitindo uma compreensão mais intuitiva e prática de seus fundamentos e aplicações.

## 1.1 Justificativa

Na atualidade, uma das grandes dificuldades do ensino da Matemática reside na capacidade dos estudantes de compreenderem visualmente os conceitos apresentados de forma algébrica. Com o intuito de superar esse desafio, são normalmente utilizadas representações visuais. Entretanto, quando chegamos ao ensino superior, a utilização dessas representações acaba sendo mais complexa, uma vez que reproduzi-las apenas em um quadro com as ferramentas habituais torna-se difícil e não se tem o conhecimento para utilizar softwares que possam auxiliar nesta representação.

Considerando o exposto, este trabalho tem o propósito de mostrar uma maneira didática de usar o software Geogebra para a representação e o cálculo de integrais de funções de duas variáveis, através de exemplos e aplicações para melhor entendimento do leitor. O resultado deste estudo poderá beneficiar tanto estudantes quanto professores, fornecendo uma alternativa acessível para o ensino e aprendizagem das integrais múltiplas, visto que o software é livre e de fácil acesso. Além disso, os materiais e recursos fornecidos poderão ser compartilhados e utilizados em cursos, disciplinas e ambientes educacionais diversos, desejando o aprimoramento do ensino de Matemática como um todo e contribuindo para o avanço do conhecimento nessa área, bem como para a formação de estudantes e profissionais interessados em explorar as integrais múltiplas de maneira mais dinâmica e envolvente.

## 1.2 Objetivo

### 1.2.1 Objetivo Geral

Explorar as integrais múltiplas com o auxílio do software Geogebra, utilizando uma abordagem visual e interativa.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Calcular integrais duplas utilizando o software Geogebra.
- Explorar visualmente as integrais duplas utilizando o software Geogebra.
- Verificar, mediante manipulações computacionais, alguns exemplos e aplicações.
- Desenvolver ferramentas interativas no Geogebra para auxiliar na visualização, compreensão e cálculo das integrais múltiplas.



## 2 O software Geogebra

O software Geogebra é um aplicativo interativo de Matemática, que pode ser acessado por múltiplas plataformas como Windows, MacOS, Linux, Android, iOS, e tem funções algébricas, geométricas, estatísticas e também de cálculo. Este aplicativo traz várias funcionalidades como construções geométricas utilizando pontos, retas, segmentos de reta, polígonos e pode ser usado para todos os níveis de ensino [3, 4].

Este software foi criado por Markus Hohenwarter, que deu início ao projeto no ano de 2001 na Universidade de Salzburg, e presentemente o mesmo se localiza na Universidade de Linz. Desde então, sua popularidade tem crescido e é atualmente usado em 190 países e traduzido para 55 idiomas. Além disso, são mais de 300000 downloads mensais e 62 Institutos Geogebra em 44 países para dar suporte para seu uso [5].

O Geogebra tem duas ferramentas mais utilizadas: a Calculadora gráfica que permite a visualização e o cálculo de funções em 2D e a Calculadora 3D. Esta última é um software de Geometria dinâmica que permite a criação e visualização de objetos geométricos em três dimensões. Com esta ferramenta, é possível construir figuras tridimensionais complexas e explorar suas propriedades, além de criar animações e simulações interativas.

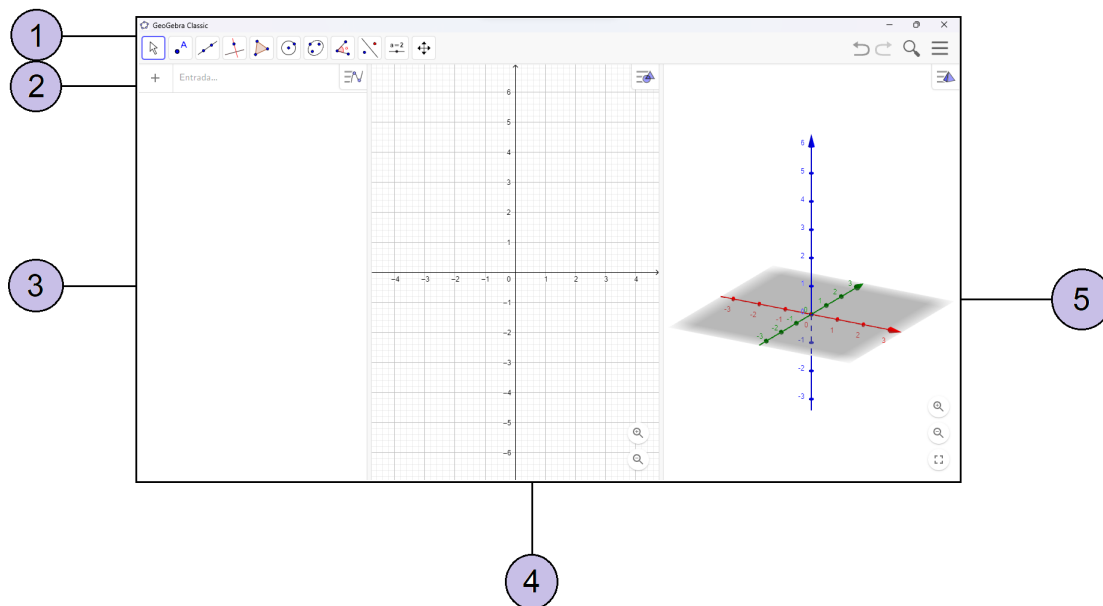
O programa apresenta uma interface intuitiva, que permite ao usuário manipular os objetos de forma fácil e visualizar as mudanças em tempo real. O GeoGebra 3D também possui recursos avançados, como a capacidade de realizar cálculos e equações, que permitem aos usuários experimentar suas funcionalidades com diferentes variáveis e parâmetros.

O caso 3D é utilizado em diversas áreas, incluindo Matemática, Física, Engenharia e Arquitetura. Na educação, é uma ferramenta poderosa para ensinar conceitos geométricos de forma interativa, tornando o aprendizado mais acessível.

### 2.1 Apresentando o Geogebra

No presente trabalho, utilizou-se o software Geogebra na versão 6.0.729, o qual apresenta a possibilidade de utilização por meio da plataforma online ou de sua instalação local. Ao iniciar o referido programa, torna-se visível a barra de ferramentas, o campo de entrada, a janela de álgebra e a janela de visualização. Na descrição da interface, também é apresentado o procedimento para acessar a janela de visualização 3D.

Figura 1 – Layout Geogebra.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 2 – Legenda.

- 1 **Barra de ferramentas**  
A barra de ferramentas reúne todas as principais ferramentas que serão utilizadas durante o uso do aplicativo, como ponto, reta, polígono, círculos, elipse, ângulos, controles deslizantes, dentre outros. Além desses ícones, há outros que podem ser selecionados clicando com o mouse.
- 2 **Entrada**  
O campo de entrada é o local onde serão digitados os comandos.
- 3 **Janela de álgebra**  
Lugar onde são exibidos listas, funções, equações, coordenadas e outros comandos digitados no campo de entrada para a construção dos objetos.
- 4 **Janela de visualização**  
Local de visualização gráfica dos objetos bidimensionais construídos.
- 5 **Janela de visualização 3D**  
Local de visualização gráfica dos objetos tridimensionais construídos, e integrada à janela de visualização. Ao acessar o menu Exibir e clicar em Janela de visualização 3D, esta janela será projetada ao lado das janelas já carregadas no software.

Fonte: Elaborada pelos autores.

### 3 Definições

Neste capítulo, exploraremos as definições essenciais para o cálculo de integrais duplas no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . As integrais duplas são ferramentas poderosas que permitem calcular a área de regiões planas delimitadas por curvas ou superfícies.

Para iniciar nossa discussão, é fundamental compreender o conceito de uma região  $R$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . Uma região  $R$  é uma parte limitada do plano que pode ser descrita através de uma combinação de desigualdades, como  $a \leq x \leq b$  e  $g(x) \leq y \leq h(x)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes e  $g(x)$  e  $h(x)$  são funções contínuas. Essas desigualdades definem os limites de integração para a região  $R$ .

A partir da definição da região  $R$ , podemos proceder para a definição formal da integral dupla. Seja  $f(x, y)$  uma função contínua definida em  $R$ . A integral dupla de  $f$  sobre a região  $R$ , pode ser representada por:

$$\iint_R f(x, y) \, dA,$$

onde  $dA$  denota um elemento de área infinitesimal em  $R$ . A integral dupla é calculada dividindo a região  $R$  em pequenas sub-regiões retangulares e somando as contribuições dessas sub-regiões para obter a integral completa. Matematicamente, a integral dupla pode ser escrita como:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i,$$

sendo  $n$  o número de sub-regiões retangulares utilizadas na discretização do domínio,  $(x_i, y_i)$  são pontos representativos dentro de cada sub-região e  $\Delta A_i$  é a área de cada sub-região.

Ao calcular integrais duplas, é importante observar que a ordem de integração pode ser alterada dependendo da simplicidade das funções envolvidas. Isso significa que podemos integrar em relação a  $x$  primeiro e depois em relação a  $y$ , ou vice-versa. A escolha da ordem correta pode simplificar significativamente o cálculo.

No decorrer deste trabalho, exploraremos técnicas e propriedades importantes relacionadas às integrais duplas, como a linearidade, o Teorema de Fubini e a interpretação geométrica da integral dupla como uma medida de área. Esses conceitos serão fundamentais para compreender e aplicar o cálculo de integrais duplas em diversos contextos.

Em resumo, neste capítulo, forneceremos as bases teóricas necessárias para o cálculo de integrais duplas no plano  $\mathbb{R}^2$ , abrangendo as definições, propriedades e técnicas relevantes. Compreender esses conceitos será essencial para realizar cálculos precisos e interpretar corretamente as ferramentas utilizadas.

### 3.1 Funções de duas variáveis reais

As funções de duas variáveis reais desempenham um papel fundamental na Matemática e em diversas áreas do conhecimento. Essas funções associam a cada par ordenado de números reais  $(x, y)$  um único número real  $f(x, y)$ . Formalmente, uma função de duas variáveis reais é representada por  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}^2$  denota o plano cartesiano e  $\mathbb{R}$  representa o conjunto dos números reais. Podemos pensar nessa função como uma superfície tridimensional, onde o valor de  $f(x, y)$  corresponde à altura da superfície no ponto  $(x, y)$ . Ao restringir  $f$  a um conjunto limitado  $A \subset \mathbb{R}^2$ , chamaremos o conjunto  $A$  de domínio de  $f$ , e será indicado por  $D_f$ . Em outras palavras, o domínio de uma função de duas variáveis será o conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$  para os quais a função está definida. A imagem da função é o conjunto de todos os valores reais que ela pode assumir. O conjunto dos valores reais

$$Im_f = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D_f\},$$

será usado para denotar a imagem de  $f$ . Assim como no caso das funções de uma variável, as funções de duas variáveis podem apresentar diversos comportamentos como: continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade. A análise dessas propriedades é fundamental para compreender o comportamento da função e sua relação com as variáveis de entrada e uma correta avaliação do seu gráfico permite a compreensão da forma da função possibilitando identificar pontos críticos, como máximos, mínimos e pontos de inflexão.

Em resumo, as funções de duas variáveis reais são representações matemáticas que associam pares ordenados de números reais a um único número real. A análise dessas funções envolve a investigação de diversas propriedades, além do estudo do domínio, imagem, curvas de nível e gráficos, que nos permite compreender a modelagem e resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento.

### 3.2 Integral dupla

Acima, apresentamos uma ideia genérica da estrutura e do processo de integração. Agora, iremos apresentar detalhadamente os resultados principais abordados neste trabalho. Para tal, consideremos  $f$  uma função de duas variáveis definida no retângulo  $R$  dado por:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Supondo  $f(x, y) \geq 0$ , o gráfico de  $f$  é uma superfície de equação  $z = f(x, y)$ . O sólido  $S$  contido na região acima de  $R$  e abaixo do gráfico de  $f$  é dado por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Uma boa aproximação do volume total de  $S$  é:

$$V \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A.$$

A expressão acima foi obtida dividindo o retângulo  $R$  em retângulos menores, onde:

$$\Delta A = \Delta x \Delta y, \Delta x = \frac{b-a}{m} \text{ e } \Delta y = \frac{d-c}{n}.$$

Se fizermos  $m \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  temos que

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A.$$

Mesmo quando  $f$  não é uma função positiva, podemos inserir a seguinte definição:

**Definição:** A integral dupla de  $f$  sobre o retângulo  $R$  é dada por:

$$\iint f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A,$$

se esse limite existir. Quando  $f$  é uma função contínua o limite acima sempre existe. Além disso, se  $f(x, y) \geq 0$ , então o volume do sólido que fica acima do retângulo  $R$  e abaixo da superfície  $z = f(x, y)$  é dado por:

$$V = \iint f(x, y) dA.$$

**OBSERVAÇÃO:** A soma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A,$$

é chamada soma dupla de Riemann e será usada como uma boa aproximação para o valor da integral dupla.

### 3.3 Propriedades da integral dupla

**Propriedade 1.** Se  $c$  for uma constante e a função  $f$  for integrável numa região fechada  $R$ , então  $cf$  será integrável em  $R$  e

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

**Propriedade 2.** Se as funções  $f$  e  $g$  forem integráveis numa região fechada  $R$ , então a função  $f + g$  será integrável em  $R$  e

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

**Propriedade 3.** Se as funções  $f$  e  $g$  forem integráveis na região fechada  $R$  e, além disso,  $f(x, y) \geq g(x, y)$  para todo  $(x, y)$  em  $R$ , então

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA.$$

**Propriedade 4.** Seja a função  $f$  integrável numa região fechada  $R$  e suponha que  $m$  e  $M$  sejam dois números tais que  $m \leq f(x, y) \leq M$  para todo  $(x, y)$  em  $R$ . Então, se  $A$  for a medida da área da região  $R$ ,

$$mA \leq \iint_R f(x, y) dA \leq MA.$$

**Propriedade 5.** Suponha que a função  $f$  seja contínua numa região fechada  $R$  e que  $R$  seja composta de duas sub-regiões  $R_1$  e  $R_2$  que não têm pontos em comum em seu interior ( $\text{int}(R_1) \cap \text{int}(R_2) = \emptyset$ ), com exceção de pontos em partes de suas fronteiras. Então,

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA.$$

Para obtenção da demonstração e detalhes mais aprofundados de tais propriedades, consultar as referências [6, 7].

## 4 Principais resultados utilizados

Neste capítulo serão abordados os principais resultados utilizados para resolução de exemplos e problemas apresentados nas seções posteriores, os quais discorrem sobre integrações em áreas retangulares e não retangulares que exigem resultados específicos para o seu cálculo. Daremos início ao capítulo falando sobre o Teorema de Fubini.

### 4.1 Teorema de Fubini

Formalmente, o Teorema de Fubini estabelece condições sob as quais é possível calcular a integral de uma função de várias variáveis através de uma série de integrações unidimensionais. Ele afirma que, se uma função for contínua (ou integrável) em um retângulo fechado e a integral nessa região for finita, então o intervalo de integração pode ser trocado.

**Teorema de Fubini:** Seja  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida no retângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

onde

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy < +\infty,$$

então,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Em resumo, o Teorema de Fubini é uma importante ferramenta matemática que permite trocar a ordem de integração em integrais duplas, simplificando o cálculo dessas integrais e facilitando a resolução de problemas em diversas áreas da matemática.

### 4.2 Determinação do volume entre duas superfícies

Para determinarmos o volume de uma região sólida localizada acima de uma região plana  $R$  e entre duas superfícies  $z = z_1(x, y)$  e  $z = z_2(x, y)$ , com  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$  para todo par  $(x, y)$  em  $R$ , devemos subtrair o volume abaixo de  $z = z_1(x, y)$  do volume abaixo de  $z = z_2(x, y)$ , isto é:

$$V = \iint_R [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dA.$$

Podemos também representar esse volume da seguinte forma:

$$V = \iint_R (z_{sup} - z_{inf}) dA,$$

onde  $z_{sup} = z_2(x, y)$  representa a superfície do topo e  $z_{inf} = z_1(x, y)$  representa a base do sólido.

### 4.3 Coordenadas Polares para determinação do volume

As coordenadas polares são um sistema de coordenadas bidimensional usado para descrever a posição de um ponto em um plano. Em vez de usar os eixos cartesianos tradicionais  $(x, y)$ , as coordenadas polares usam um sistema baseado em um ângulo e uma distância radial. A representação de um ponto no sistema de coordenadas polares é feita pelo par ordenado  $(r, \theta)$ , onde  $r$  é a distância radial e  $\theta$  é o ângulo. Para converter coordenadas polares em coordenadas cartesianas, podemos usar as seguintes fórmulas:

$$x = r \cos(\theta) \text{ e } y = r \sin(\theta).$$

Deste modo, o volume  $V$  do sólido delimitado pela região  $R$ , satisfazendo as desigualdades  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ,  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$  e, acima pela superfície  $z = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  é dado por:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} z r dr d\theta,$$

onde  $r_{int}$  e  $r_{ext}$  são respectivamente o raio interior e o raio exterior da região.

Em síntese, as coordenadas polares oferecem uma maneira alternativa de descrever pontos em um plano utilizando um ângulo e uma distância radial em relação a uma origem de referência, permitindo uma representação conveniente em problemas onde a simetria circular é relevante.

### 4.4 Determinação do centroide de uma região plana R

O centroide é um ponto que representa o "centro de gravidade" de uma região plana. Ele é utilizado para calcular diversas propriedades físicas e padrões da região, como o momento de inércia, o centro de massa e o equilíbrio de objetos. Desta forma, define-se a massa de uma lâmina pela fórmula:

$$m = \iint \rho(x, y) dA = \iint dm,$$

onde  $\rho(x, y)$  é a densidade da lâmina (em unidades de massa por área) no ponto  $(x, y)$ . As coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , do centroide, ou centro de massa, da lâmina se definem como:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint x \rho(x, y) dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint y \rho(x, y) dA.$$

Usando o fato de que  $dm = \rho dA$ , temos:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint x dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint y dm.$$



Através do cálculo da integral dupla pode-se resolver problemas envolvendo o centro de gravidade de diversas figuras, podendo seu uso ser evidenciado em várias áreas como física, engenharia entre outras.

Para obtenção da demonstração e mais detalhes sobre os assuntos abordados, consultar as referências [8, 9].

# 5 Integrais duplas no Geogebra 3D

## 5.1 Construção de integrais duplas utilizando o GeoGebra

Visando obter uma visualização mais clara do cálculo de integrais duplas utilizando a ferramenta Geogebra, empregaremos como exemplo a função  $f(x, y) = \text{sen}(x) + 2$  definida sobre a região retangular de integração  $R = [0, 4] \times [0, 3]$ , tendo como resultado a resolução da integral abaixo:

$$\int_0^3 \int_0^4 \text{sen}(x) + 2 \, dx \, dy.$$

Para dar início à construção, seguiremos os seguintes passos:

**1º Passo:** Insira os controles deslizantes  $a, b, c$  e  $d$  com variação de 0 a 10 e incremento 1;

**2º Passo:** Fixe  $a = 0, b = 4, c = 0$  e  $d = 3$ , pois estes serão os valores que delimitarão a região retangular;

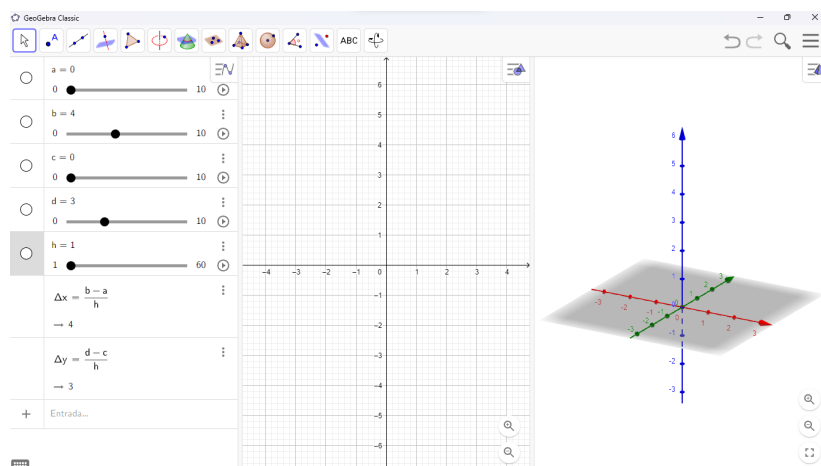
**3º Passo:** Insira um controle deslizante "h" para ajuste da discretização, onde "h" é um número com limite inferior de 1 e superior tendendo ao infinito. Para uma aproximação mais precisa, definiremos o limite superior igual a 60;

**4º Passo:** Com o intuito de saber o comprimento e a largura dos polígonos da base, insira em campos de entrada diferentes as seguintes expressões:

$$\Delta x = \frac{b-a}{h} \text{ e } \Delta y = \frac{d-c}{h}$$

Conforme apresentado na imagem abaixo.

Figura 3 –  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .



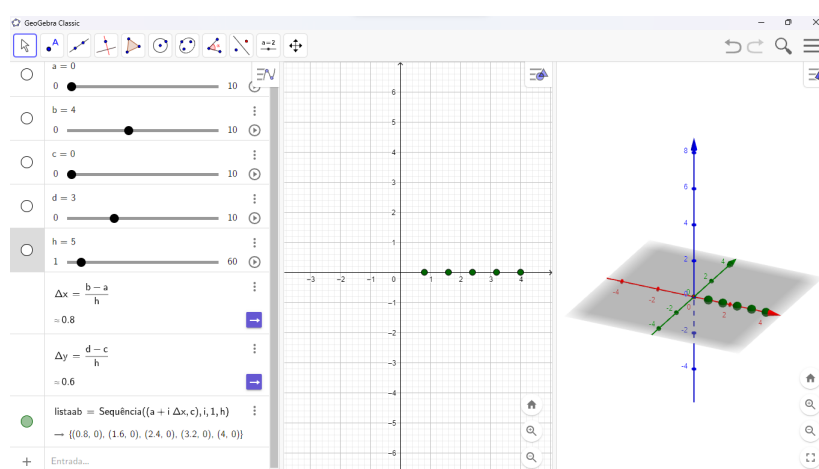
Fonte: Elaborada pelos autores.

**5º Passo:** Procederemos agora à construção da base retangular. Para tanto, atribua o nome "listaab" ao comando e insira na área de entrada a expressão a seguir:

$\text{Sequência}(\text{Expressão}, \text{Variável}, \text{Valor inicial}, \text{Valor final})$ .

No referido comando, substitua a palavra "expressão" por  $(a + i\Delta x, c)$ , enquanto a variável será representada por  $i$ , o "valor inicial" será igual a 0 e o "valor final" será definido como  $h$ . Cumpre salientar que a expressão em questão corresponde a uma coordenada que depende de uma variável, sendo esta última representada pelo vetor unitário "i", o qual se modifica conforme o valor inicial e o final, definidos na expressão. Ao final do processo, o comando deverá apresentar a seguinte forma:

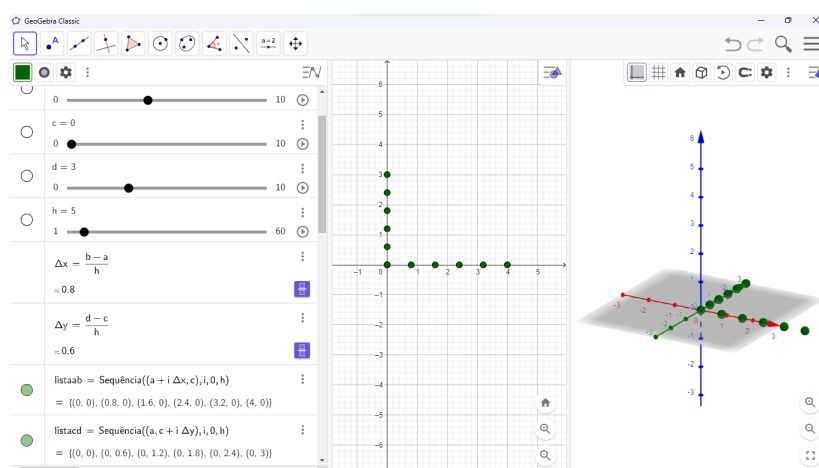
Figura 4 – Lista ab.



Fonte: Elaborada pelos autores.

**6º Passo:** Além de "listaab", faz-se necessário empregar um comando para a construção de pontos no eixo das ordenadas, o qual receberá a denominação de "listacd". Para este comando utilizar-se-á a mesma estrutura do anterior, contudo na "expressão" será usado  $(a, c + i\Delta y)$ . O comando final apresentará a seguinte forma:

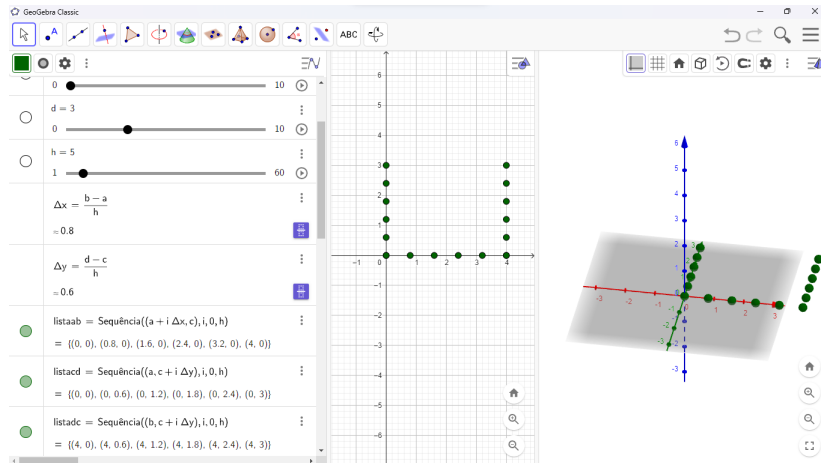
Figura 5 – Lista cd.



Fonte: Elaborada pelos autores.

**7º Passo:** Com a disposição dos pontos nos eixos  $x$  e  $y$ , serão criados pontos paralelos aos anteriormente construídos, resultando na formação de um novo lado na região em questão. Este comando será nomeado como "listadc" e seguirá a mesma estrutura dos comandos anteriores, sendo que o valor da "expressão" será alterado para  $(b, c + i\Delta y)$ , conforme apresentado a seguir:

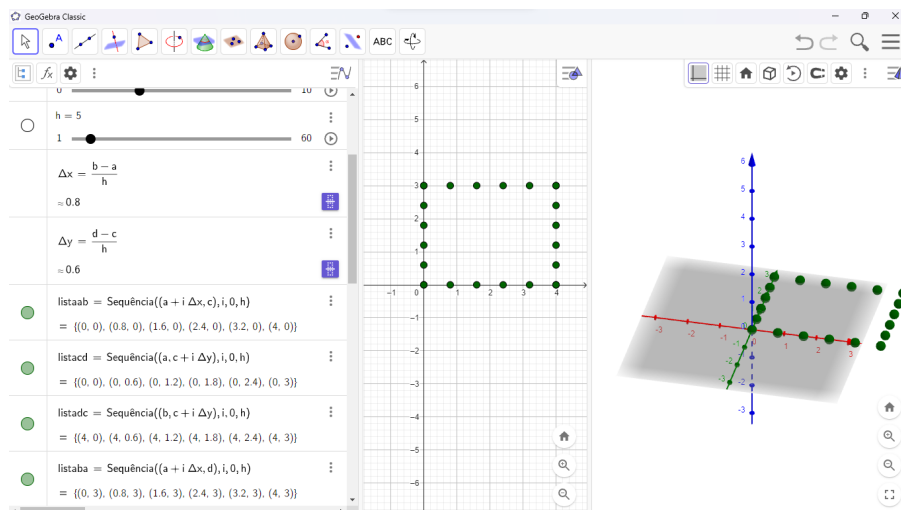
Figura 6 – Lista dc.



Fonte: Elaborada pelos autores.

**8º Passo:** A fim de completar o último lado da área em questão, será atribuído à expressão o valor  $(a + i\Delta x, d)$  e este comando receberá a denominação "listaba". Como resultado, teremos o seguinte:

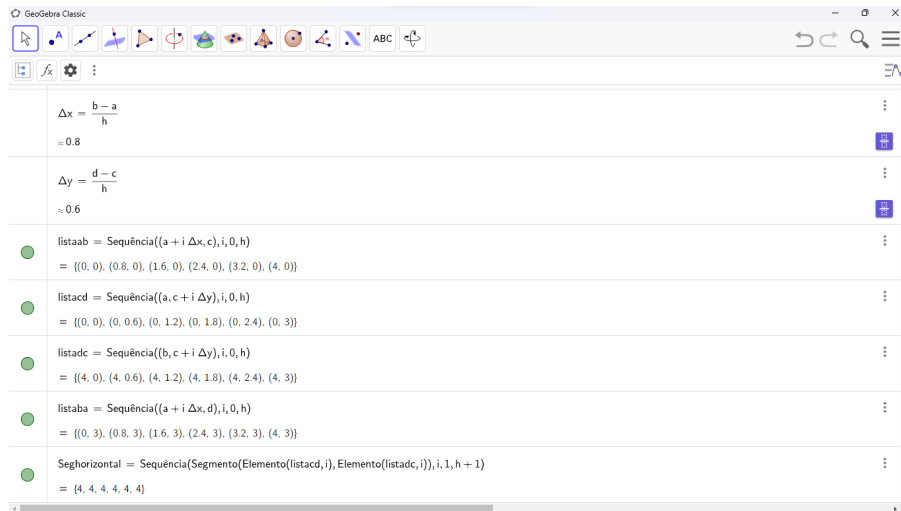
Figura 7 – Lista ba.



Fonte: Elaborada pelos autores.

**9º Passo:** Após a geração de todos os pontos necessários, estes serão conectados por meio de segmentos. Os primeiros segmentos a serem construídos serão os horizontais, cujo comando será identificado pelo nome "seghorizontal". Para tal tarefa, empregaremos comandos integrados, conforme ilustrado a seguir:

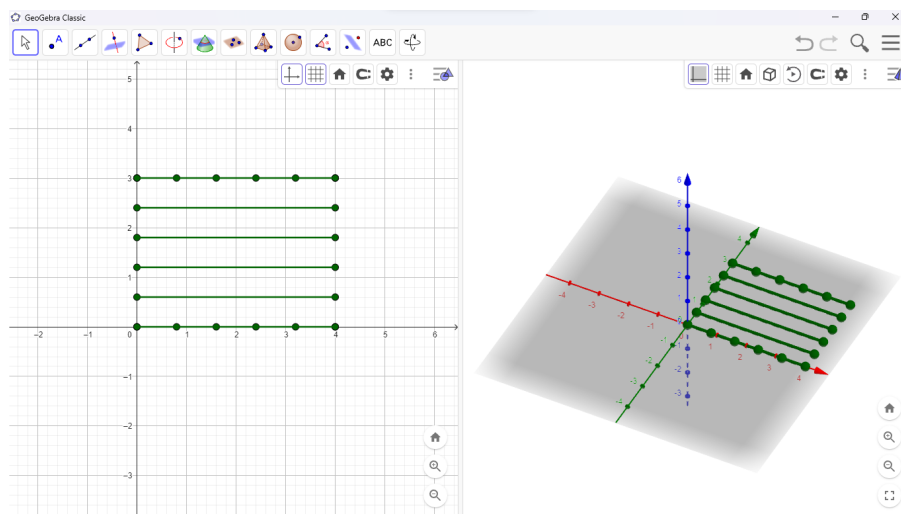
Figura 8 – Seghorizontal.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Esta será a visualização obtida nas janelas:

Figura 9 – Seghorizontal 3D.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Neste passo, utilizamos o comando:

`Sequência(Expression, Variável, Valor inicial, Valor final)`,

onde a "expressão" será uma integração dos comandos "Segmento" e "Elemento". O comando "Segmento" é definido por

`Segmento(Ponto, Ponto)`,

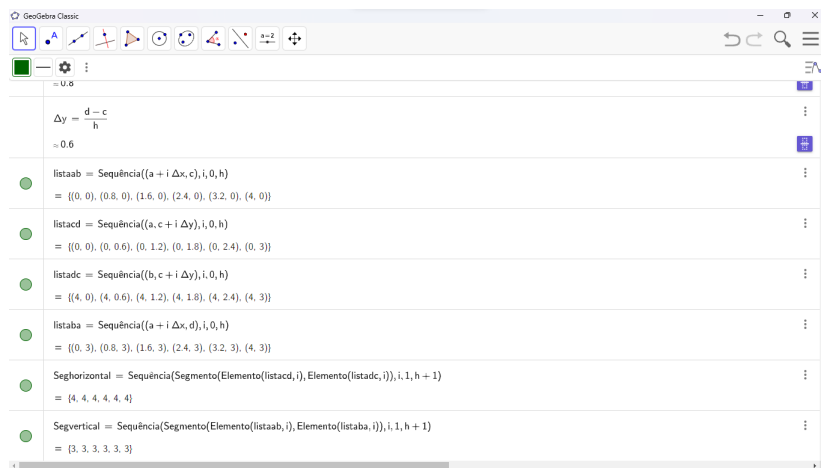
em que cada ponto é um "elemento". O comando "Elemento", por sua vez, é dado por:

`Elemento(Lista, Posição do Elemento)`.

Este último comando irá utilizar a lista de pontos "listadc" para gerar segmentos que serão conectados à lista de pontos "listadc".

**10º Passo:** O comando subsequente receberá a denominação de "segvertical" e utilizará os mesmos comandos empregados anteriormente. Entretanto, em vez de utilizar "listadc" e "listadc", serão utilizadas as listas "listaab" e "listaba", respectivamente. O comando resultante será o seguinte:

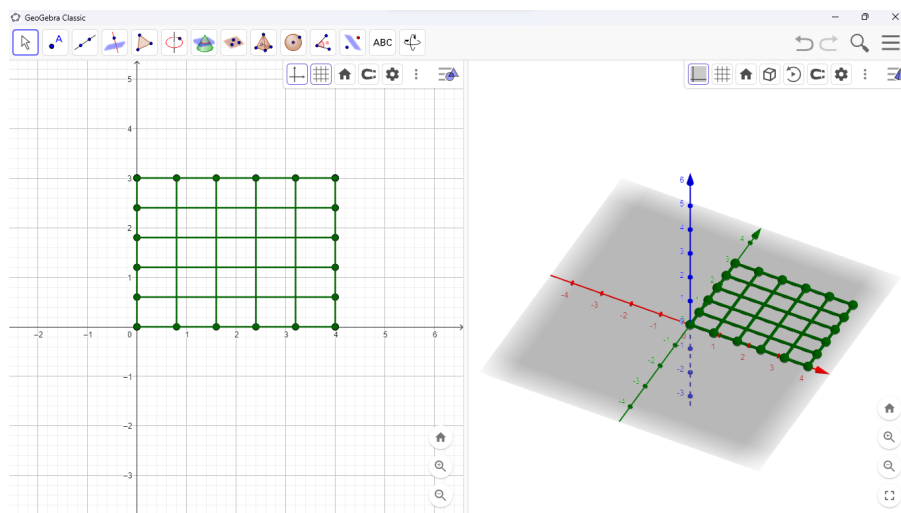
Figura 10 – Segvertical.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Esta será a visualização obtida nas janelas:

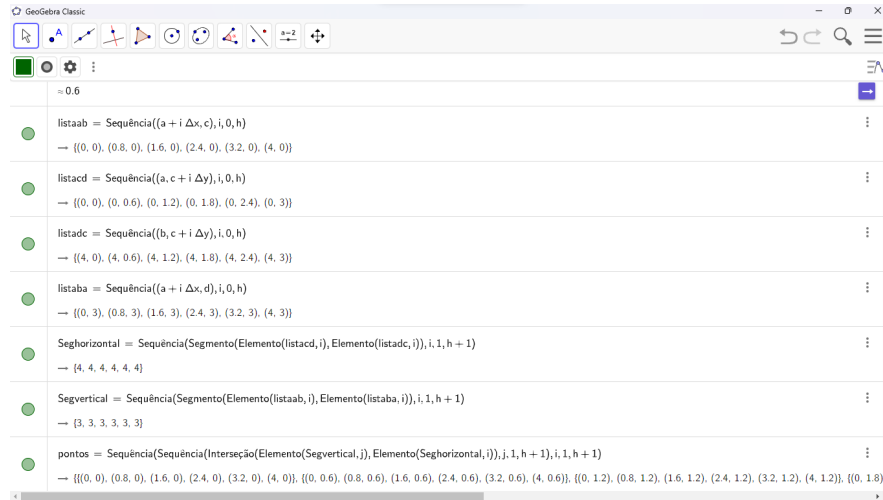
Figura 11 – Segvertical 3D.



Fonte: Elaborada pelos autores.

**11º Passo:** Após a construção da área retangular, é necessário determinar as interseções entre os segmentos verticais e horizontais para o controle da mesma. Este comando será designado como "pontos" e assumirá a seguinte forma na janela de álgebra:

Figura 12 – Pontos.



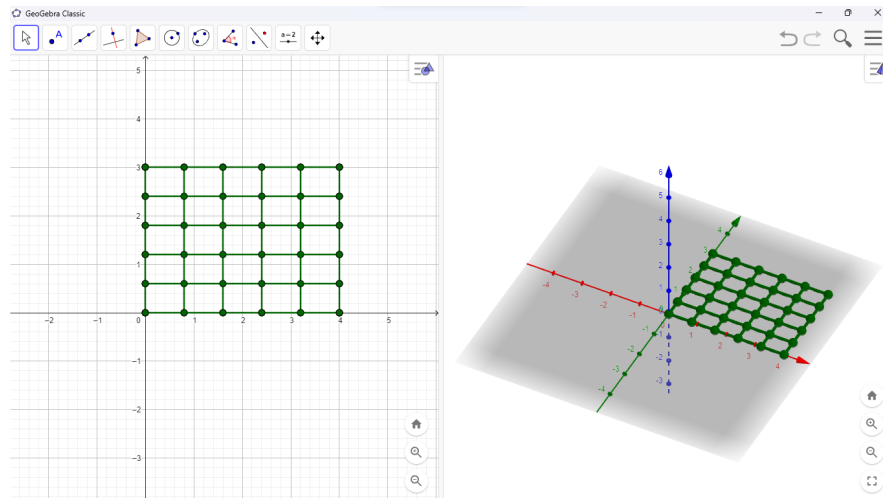
Fonte: Elaborada pelos autores.

O comando "sequência" será empregado duas vezes, visto que será gerada uma sequência de pontos em toda a área, de forma que, se utilizássemos apenas uma vez, obteríamos uma sequência de pontos na diagonal. O comando "interseção" será expresso por:

$$\text{Interseção}(\text{Objeto}, \text{Objeto}),$$

no qual os objetos serão elementos e, no comando "elemento", serão utilizadas as listas "Segvertical" e "Seghorizontal". As posições dos elementos serão os vetores unitários "i" e "j". Os demais comandos seguirão os passos anteriores. A representação gráfica resultante será a seguinte:

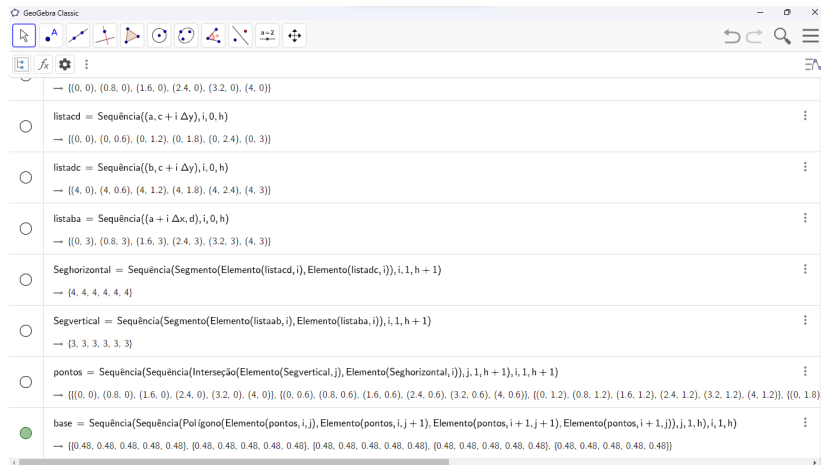
Figura 13 – Pontos 3D.



Fonte: Elaborada pelos autores.

**12º Passo:** Nesta etapa, será construída a base que representa a região retangular em questão. Esse comando será denominado "base" e será composto por:

Figura 14 – Base.



Fonte: Elaborada pelos autores.

O comando "polígono" é definido por meio de:

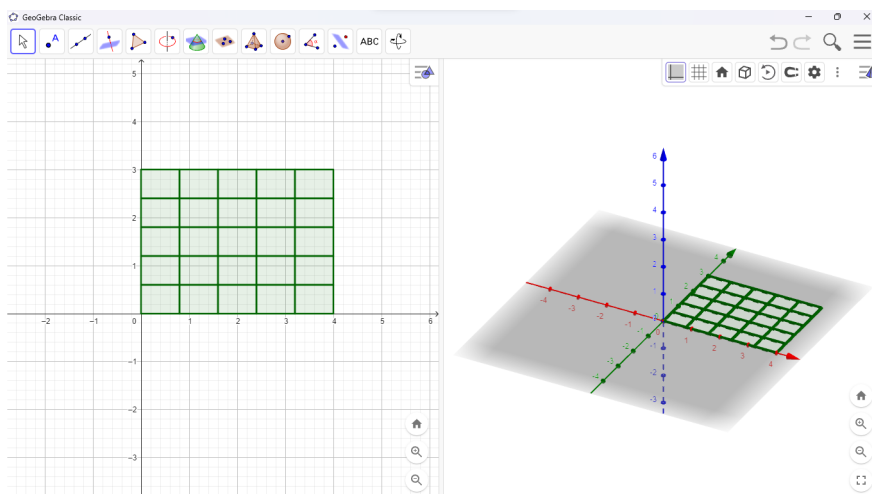
$$\boxed{\text{Polígono}(\text{Ponto}, \text{Ponto}, \text{Ponto}, \dots)},$$

em que o número de pontos necessários para formar o polígono pode variar. No presente caso, utilizamos quatro pontos, cada um deles definido por meio de um elemento composto pelo comando:

$$\boxed{\text{Elemento}(\text{Lista}, \text{Índice 1}, \text{Índice 2}, \dots)},$$

onde a lista utilizada "pontos", foi criada anteriormente. A representação na janela, será da seguinte forma:

Figura 15 – Base 3D.

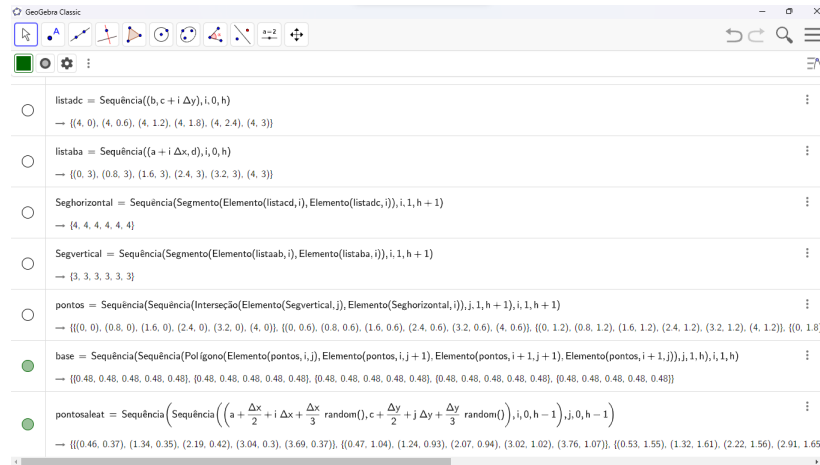


Fonte: Elaborada pelos autores.



**13º Passo:** Após a conclusão da construção da base, procederemos com a criação de pontos aleatórios na região retangular. Esta instrução será designada como "pontosalet" e consistirá em:

Figura 16 – Pontosalet.



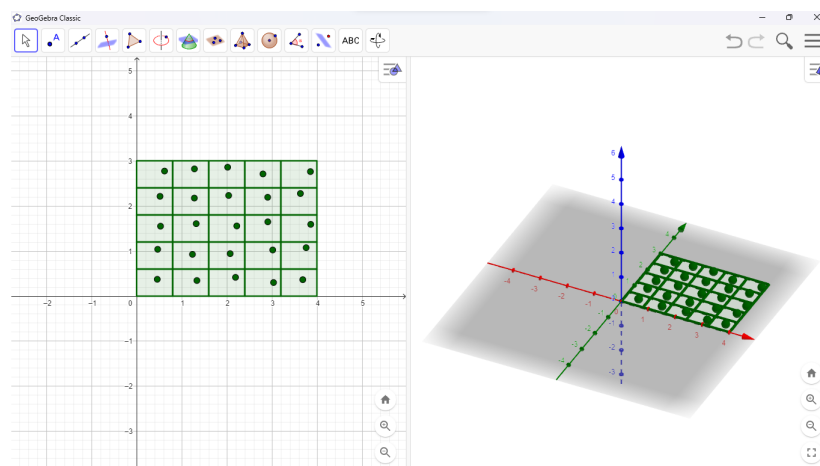
Fonte: Elaborada pelos autores.

Integrado ao comando sequência utilizaremos comandos referentes aos eixos  $x$  e  $y$ . O que concede a aleatoriedade do ponto é o comando "random" definido por

$$\text{Random}(),$$

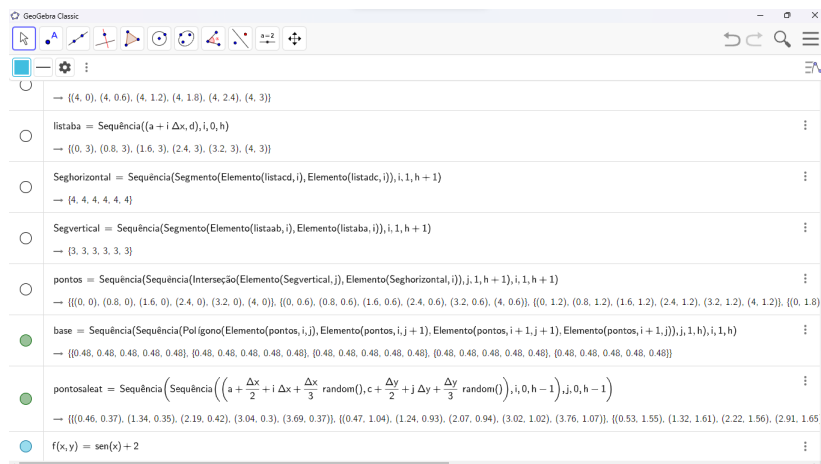
que gera um número aleatório entre 0 e 1. A expressão empregada tem como propósito delimitar a área onde o ponto aleatório será alocado. A ilustração gráfica correspondente será apresentada na imagem subsequente:

Figura 17 – Pontosalet 3D.



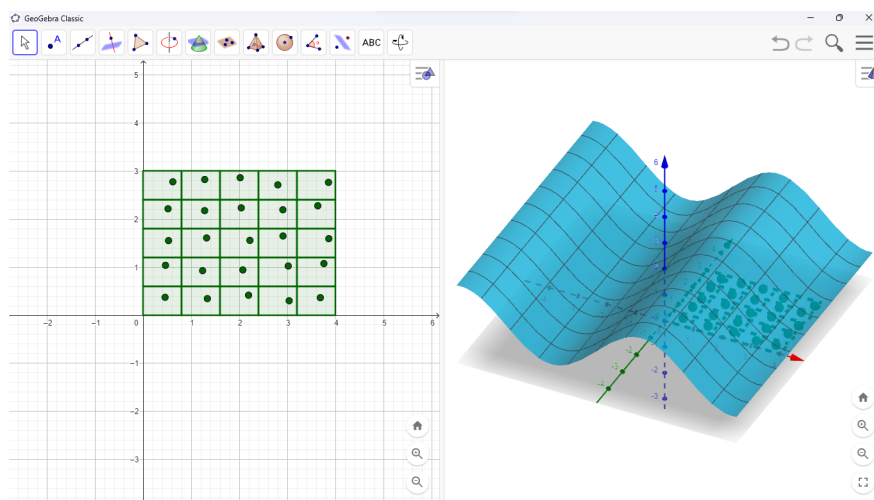
Fonte: Elaborada pelos autores.

**14º Passo:** Introduza no campo de entrada a função na qual calcularemos a integral dupla. Da seguinte forma:

Figura 18 – Função  $f$ .

Fonte: Elaborada pelos autores.

Isso resultará o gráfico da função de duas variáveis na janela de visualização 3D, conforme exemplificado na imagem subsequente:

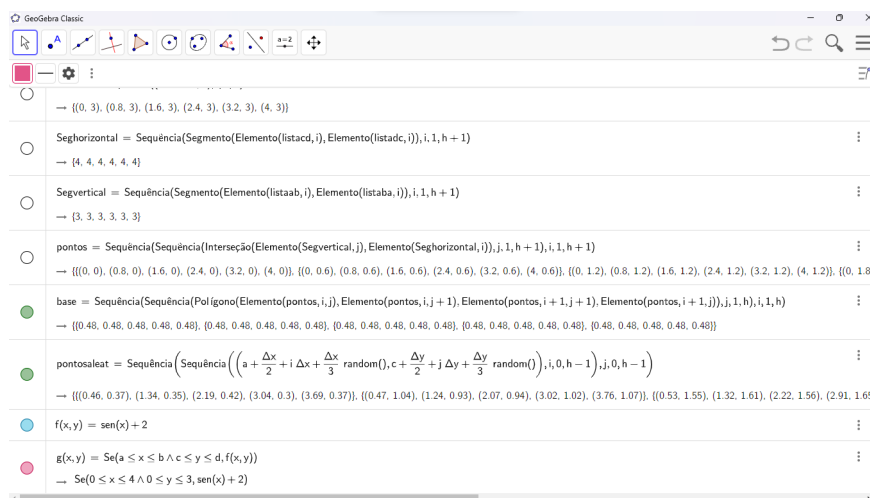
Figura 19 – Função  $f$  3D.

Fonte: Elaborada pelos autores.

**15º Passo:** A partir do passo anterior, procederemos à delimitação da função  $f(x, y)$  na região demarcada. Para isso, insira no campo de entrada a expressão " $g(x, y) =$ " e utilize o comando:

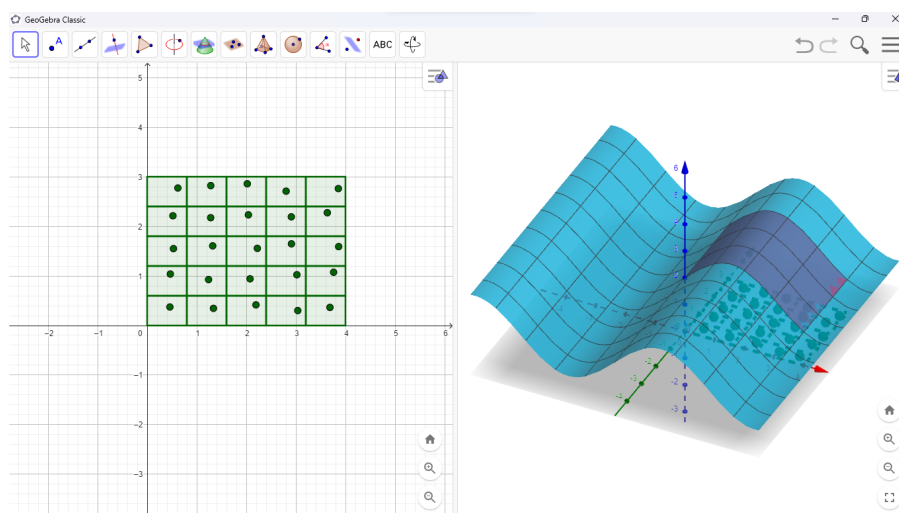
$\text{Se}(\text{Condição}, \text{Então})$ .

Na expressão "Condição", digite " $a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d$ ". Já na expressão "Então", coloque " $f(x, y)$ ". O comando completo terá a seguinte forma:

Figura 20 – Função  $g$ .

Fonte: Elaborada pelos autores.

Isso resultará na delimitação de uma sub-região da função na área de interesse, conforme ilustrado na imagem que segue:

Figura 21 – Função  $g$  3D.

Fonte: Elaborada pelos autores.

**16º Passo:** Nesta etapa, será realizada a construção de uma matriz mediante a utilização dos pontos aleatórios gerados previamente. A inclusão dessa instrução não produzirá alterações nas janelas de visualização, conforme demonstrado na imagem abaixo:





Figura 26 – Integral.

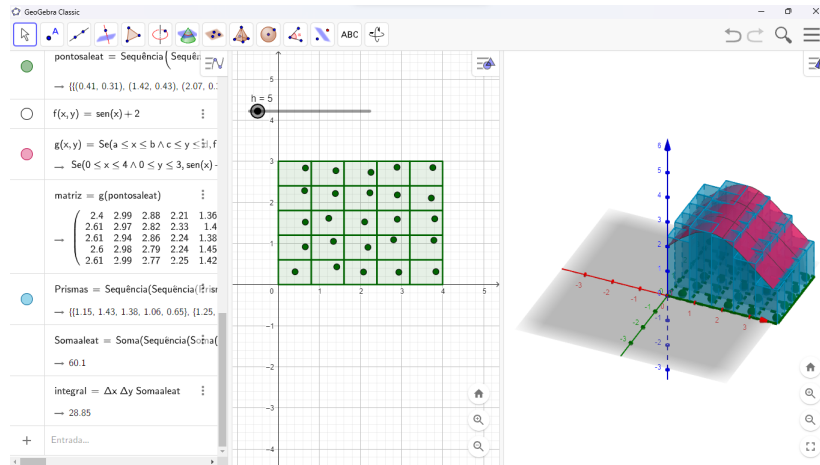
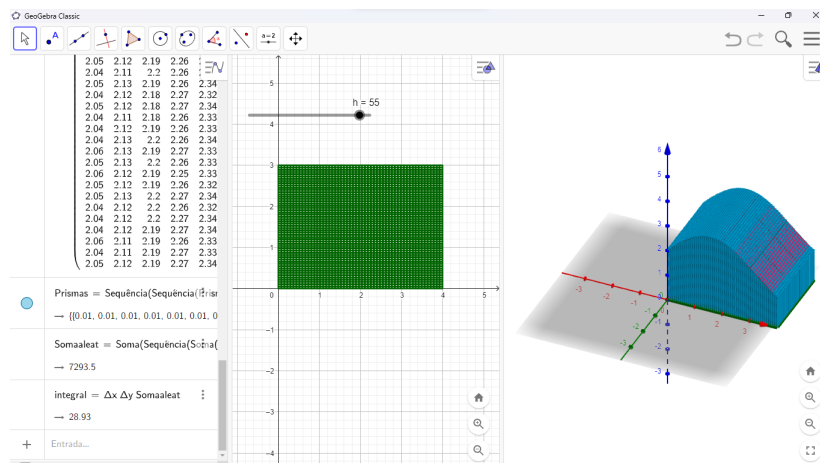

$$\int_0^3 \int_0^4 \text{sen}(x) + 2 \, dx dy = 28,85.$$
$$\int_0^3 \int_0^4 sen(x) + 2 \, dx dy = 28,93,$$

Figura 27 – Integral aproximada.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Ao efetuarmos o cálculo da integral obteremos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \int_0^4 \operatorname{sen}(x) + 2 \, dx dy &= \int_0^3 \left[ \int_0^4 \operatorname{sen}(x) + 2 \, dx \right] dy \\
 &= \int_0^3 [-\cos(x) + 2x]_0^4 dy \\
 &= \int_0^3 [(-\cos(4) + 2 \cdot 4) - (-\cos(0) + 2 \cdot 0)] dy \\
 &= \int_0^3 [0,653 + 8 + 1] dy \\
 &= \int_0^3 9,653 \, dy \\
 &= 9,653 \cdot y \Big|_0^3 \\
 &= (9,653 \cdot 3) - (9,653 \cdot 0) \\
 &\cong 28,96.
 \end{aligned}$$

Desse modo, por meio da utilização do software Geogebra, é possível obter uma estimativa precisa para o valor da integral abaixo da função, além de possibilitar a visualização do gráfico e da área integrada.

## 5.2 Mais exemplos de integrais duplas no Geogebra

### 5.2.1 Exemplo 1

Calcule a integral dupla

$$\iint_R (3y - 2x^2) dA,$$

se  $R$  for a região que consiste em todos os pontos  $(x, y)$  para os quais  $-1 \leq x \leq 2$  e  $1 \leq y \leq 3$ .

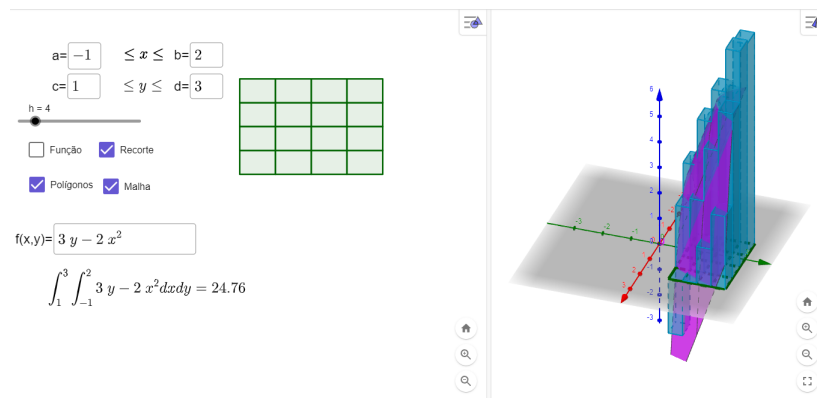
**Solução algébrica:** Com  $a = -1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$  e  $d = 3$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 \iint_R (3y - 2x^2) dA &= \int_1^3 \int_{-1}^2 (3y - 2x^2) dx dy \\
 &= \int_1^3 \left[ \int_{-1}^2 (3y - 2x^2) dx \right] dy \\
 &= \int_1^3 \left[ 3yx - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^2 dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 \left[ \left( 3y \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2^3}{3} \right) - \left( 3y \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{(-1)^3}{3} \right) \right] dy \\
&= \int_1^3 (9y - 6) dy \\
&= 9 \frac{y^2}{2} - 6y \Big|_1^3 \\
&= \left( 9 \cdot \frac{3^2}{2} - 6 \cdot 3 \right) - \left( 9 \cdot \frac{1^2}{2} - 6 \cdot 1 \right) \\
&= 24.
\end{aligned}$$

### Solução computacional

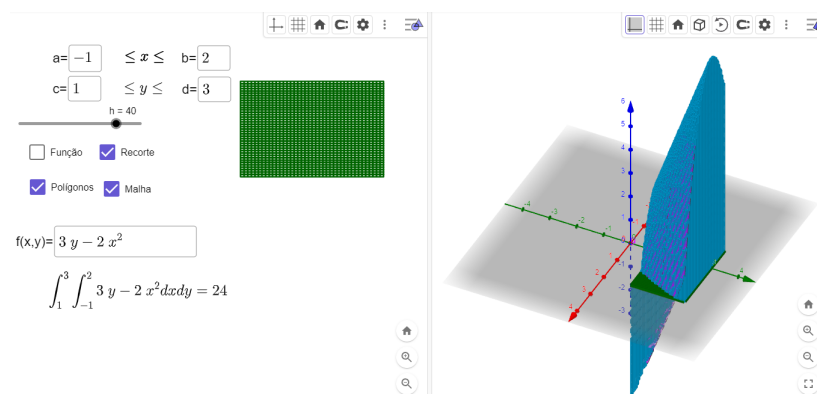
Figura 28 – Exemplo 1.1.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Note que, com  $h=4$  o valor da integral é de 24,76. Aumentando a discretização, para  $h = 40$  temos:

Figura 29 – Exemplo 1.2.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Portanto, quanto maior a discretização mais próximo será o valor da integral.



### 5.2.2 Exemplo 2

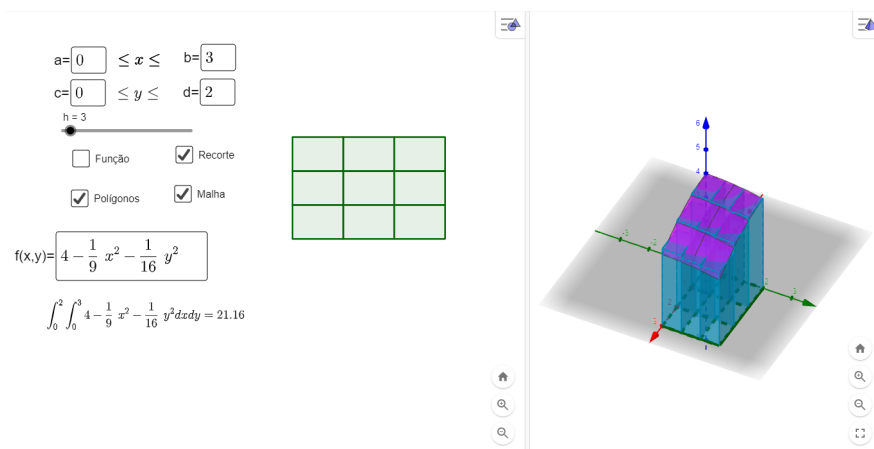
Obtenha o volume do sólido limitado pela superfície  $f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$  e pelos planos  $x = 3$  e  $y = 2$ .

**Solução algébrica:** Como o sólido é limitado pela superfície  $f(x, y)$  e pelos planos  $x = 3$  e  $y = 2$  temos então,  $a = 0, b = 3, c = 0$  e  $d = 2$ . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \iint_R \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dA &= \int_0^2 \int_0^3 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dx dy \\
 &= \int_0^2 \left[ \int_0^3 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dx \right] dy \\
 &= \int_0^2 \left[ 4x - \frac{x^3}{27} - \frac{1}{16}y^2 x \right]_0^3 dy \\
 &= \int_0^2 \left[ \left(4 \cdot 3 - \frac{3^3}{27} - \frac{1}{16}y^2 \cdot 3\right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{0^3}{27} - \frac{1}{16}y^2 \cdot 0\right) \right] dy \\
 &= \int_0^2 \left(12 - 1 - \frac{3}{16}y^2\right) dy \\
 &= 12y - y - \frac{3}{48}y^3 \Big|_0^2 \\
 &= \left(12 \cdot 2 - 2 - \frac{3}{48}2^3\right) - \left(12 \cdot 0 - 0 - \frac{3}{48}0^3\right) \\
 &= 24 - 2 - \frac{24}{48} \\
 &= 21,5.
 \end{aligned}$$

**Solução computacional:**

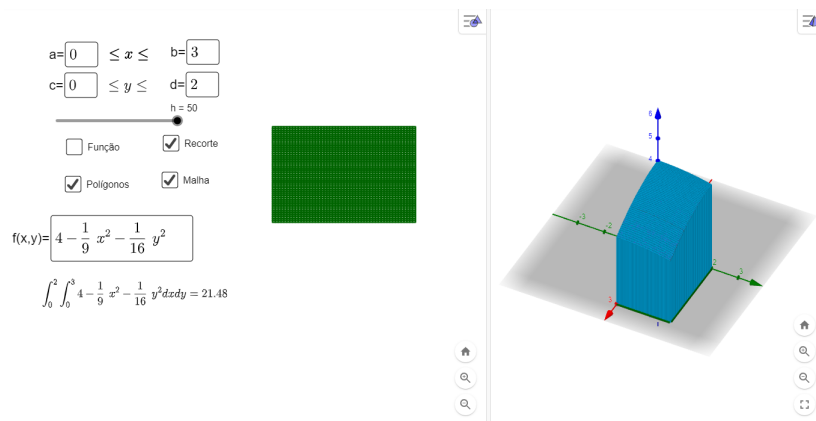
Figura 30 – Exemplo 2.1.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Aumentando a discretização para  $h = 50$ , temos:

Figura 31 – Exemplo 2.2.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Com isso, observamos que refinando a discretização, aumentamos a precisão da aproximação ao valor real da integral.

### 5.2.3 Exemplo 3

Obtenha o valor da integral dupla  $\iint_R 2x^2 + 4y^3 dA$  em que  $R$  é a região quadrada de vértices  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .

**Solução algébrica:** A partir das propriedades enunciadas anteriormente, sabe-se que:

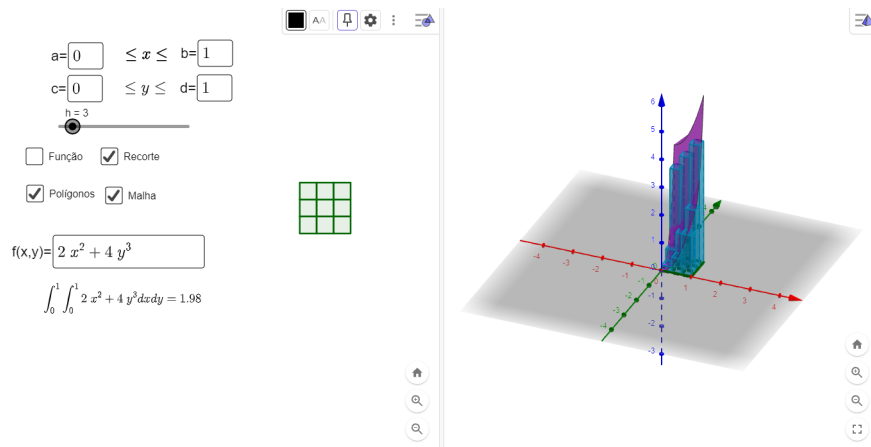
$$\iint_R (2x^2 + 4y^3) dA = 2 \iint_R (x^2 + 2y^3) dA.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 2 \iint_R (x^2 + 2y^3) dA &= 2 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + 2y^3) dx dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left[ \int_0^1 (x^2 + 2y^3) dx \right] dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} + 2y^3 x \right]_0^1 dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left[ \left( \frac{1^3}{3} + 2y^3 \cdot 1 \right) - \left( \frac{0^3}{3} + 2y^3 \cdot 0 \right) \right] dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + 2y^3 \right) dy \\
 &= 2 \left( \frac{1}{3} y + \frac{1}{2} y^4 \right) \Big|_0^1 \\
 &= 2 \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^4 \right) - \left( \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^4 \right) \\
 &= 2 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
 &\cong 1,66.
 \end{aligned}$$

## Solução computacional

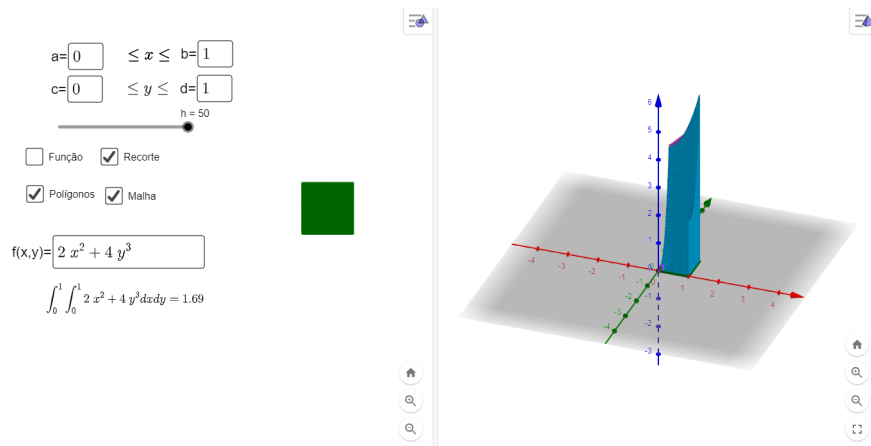
Figura 32 – Exemplo 3.1.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Quando aumentamos a discretização para  $h = 50$ , obtemos:

Figura 33 – Exemplo 3.2.



Fonte: Elaborada pelos autores.

### 5.2.4 Exemplo 4

Calcular a integral  $\iint_D x^3 + 3y \, dA$  onde  $D$  é a região delimitada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = 2x$ .

**Solução algébrica:** Para encontrar os pontos de interseção das curvas  $y = x^2$  e  $y = 2x$ , resolvemos a equação  $x^2 = 2x$  e obtemos  $x = 0$  e  $x = 2$ . A região  $D$  é a região vertical simples

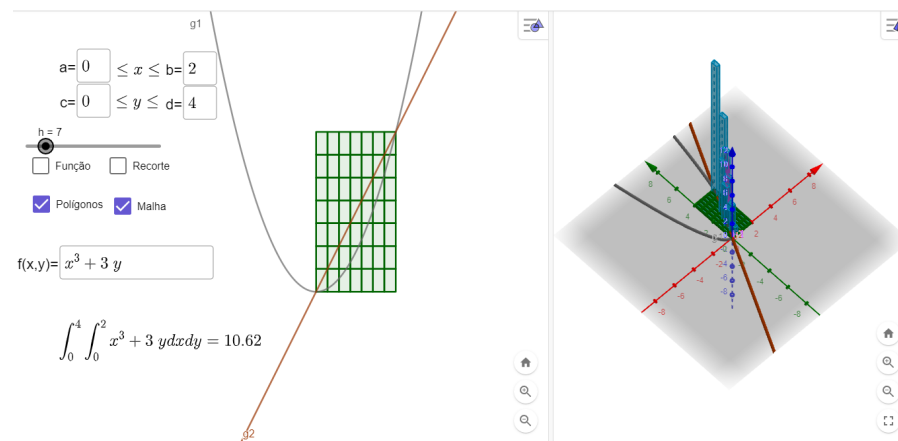
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Do teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^3 + 3y) \, dx dy &= \int_0^2 \left[ \int_{x^3}^{2x} (x^3 + 3y) \, dy \right] dx \\
 &= \int_0^2 \left[ x^3 y + \frac{3}{2} y^2 \right]_{y=x^3}^{y=2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (-2x^5 + x^4 + 12x^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{6} x^6 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{12}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 \\
 &\cong 8,53.
 \end{aligned}$$

### Solução computacional

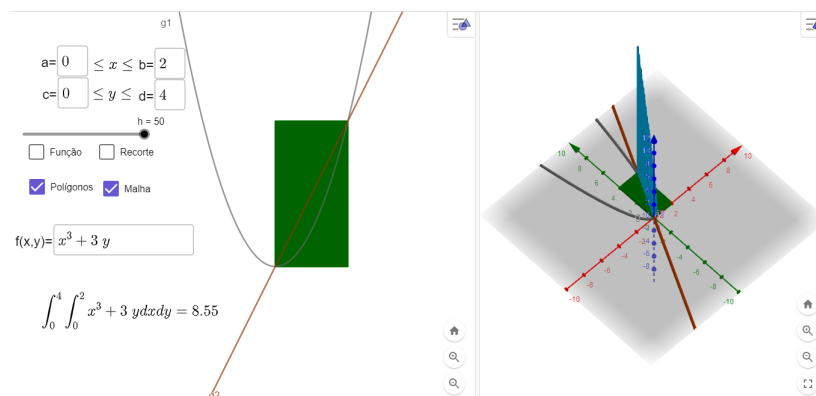
Figura 34 – Exemplo 4.1.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Quando a discretização é aumentada para 50, obteremos:

Figura 35 – Exemplo 4.2.



Fonte: Elaborada pelos autores.

## 6 Aplicações

Neste capítulo, exploraremos as aplicações mais avançadas das integrais duplas e como podemos estendê-las para calcular áreas em domínios mais complexos. Veremos como essas integrais podem ser usadas para encontrar o volume de regiões entre curvas, como curvas paramétricas e formas não convencionais.

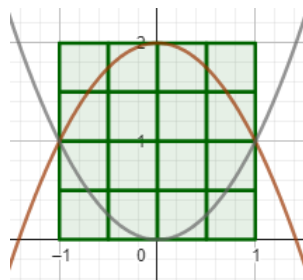
Ao longo deste capítulo, apresentaremos exemplos concretos e práticos para desenvolver uma compreensão dessas aplicações sólidas mais avançadas das integrais duplas. Essas técnicas são fundamentais para diversos campos científicos e tecnológicos, como Física, Engenharia, Ciências da computação e Economia. Portanto, dominar esses conceitos é essencial para aqueles que desejam explorar e aplicar a Matemática em áreas mais complexas e não retangulares.

### PROBLEMA 1

Determine o volume de um sólido delimitado pelos planos  $z = 6$  e  $z = 2y$  e pelos cilindros parabólicos  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$ .

**Solução algébrica:** Vamos inicialmente determinar a região  $R$  do plano  $xy$  delimitada pelas parábolas  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$ . Fazendo  $x^2 = 2 - x^2$ , temos  $x = \pm 1$ . Logo, as parábolas se intersectam nos pontos  $(-1,1)$  e  $(1,1)$ , como na imagem abaixo:

Figura 36 – Região R.



Fonte: Elaborada pelos autores.

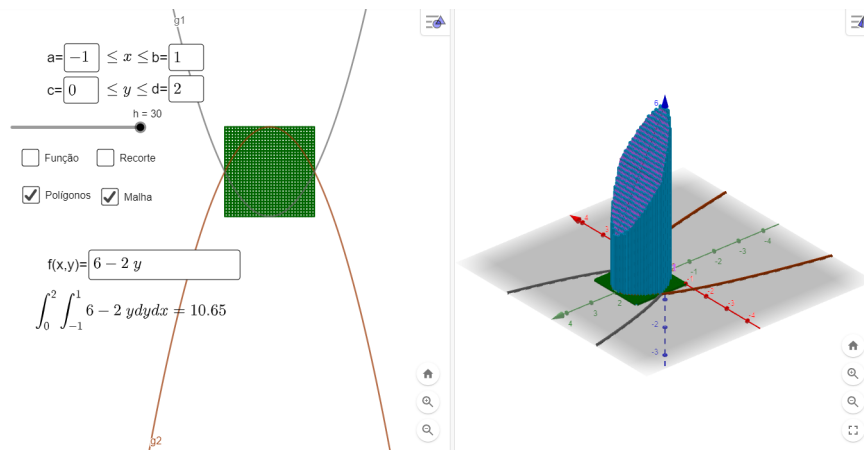
O volume  $V$  do sólido é dado por:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint (z_{sup} - z_{inf}) dA \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} (6 - 2y) dy dx \\
 &= 2 \int_0^1 \left[ 6y - y^2 \right]_{x^2}^{2-x^2} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \left\{ \left[ 6(2 - x^2) - (2 - x^2)^2 \right] - (6x^2 - x^4) \right\} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 (8 - 8x^2) dx \\
&= 16 \int_0^1 (1 - x^2) dx \\
&= 16 \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&\cong 10,7.
\end{aligned}$$

### Solução computacional

Figura 37 – Solução problema 1.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Neste problema foi definida a área de integração com base nas interseções das funções e no valor máximo e mínimo das mesmas. Após definida esta área, utiliza-se o comando:

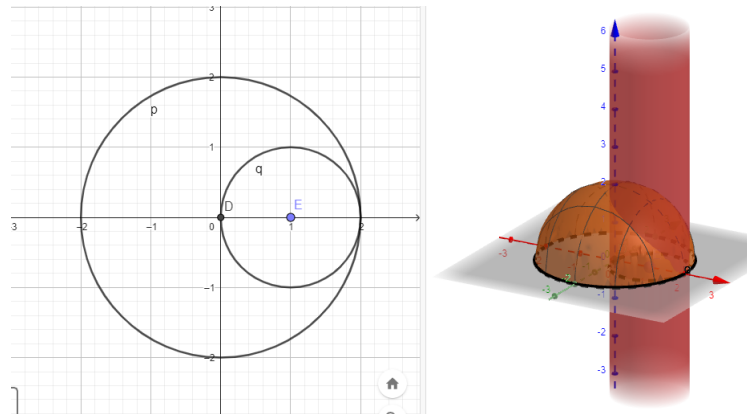
`Se(Condição, Então, Senão)`.

No presente caso, na expressão "Condição" os limites de integração  $c$  e  $d$  foram substituídos pelas funções quadráticas criadas. A partir disso, foram construídos polígonos na região delimitada. Para este problema foi encontrado o valor aproximado de 10,65 unidades de volume, utilizando uma discretização de  $h = 30$ .

**PROBLEMA 2:** Em uma esfera com centro na origem e raio 2 faz-se um orifício cilíndrico de raio 1 tangente a um diâmetro da esfera. Encontre o volume do material removido, isto é, o volume da região sólida interior à esfera e ao cilindro.

**Solução algébrica:** A equação da esfera é dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e a do cilindro por  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , conforme a figura abaixo:

Figura 38 – Representação problema 2.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para determinar o volume devemos integrar a função  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  sobre a região  $R$  delimitada pelo círculo de centro  $(1,0)$  e raio 1. O volume procurado é o dobro do volume acima do plano  $xy$ , ou seja:

$$V = 2 \iint \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA.$$

O resultado dessa integral dupla será obtido com uso de coordenadas polares. A equação polar do círculo descrito acima é dada por  $r = 2\cos\theta$  e a região  $R$  é determinada pelas desigualdades:

$$0 \leq r \leq 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Devido à simetria do sólido, integraremos apenas sobre a metade superior de  $R$ . Assim,

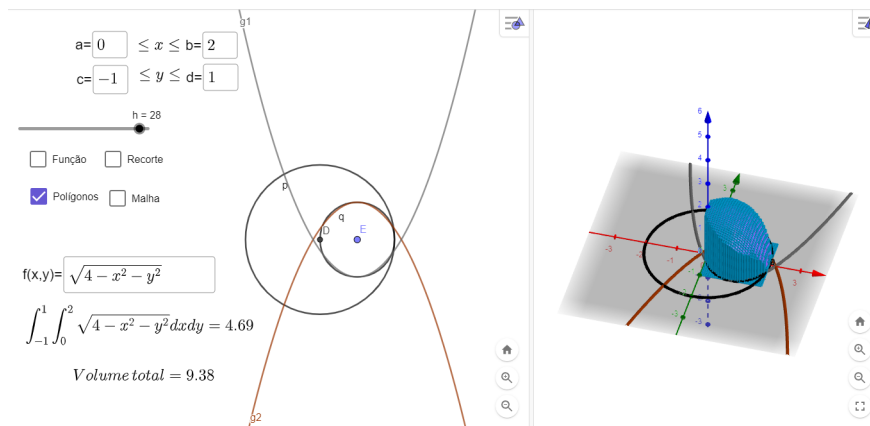
$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4 - r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[ -\frac{1}{3} (4 - r^2)^{3/2} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Como  $\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3\theta) d\theta = \frac{2}{3}$ , segue que:

$$V = \frac{16}{3}\pi - \frac{64}{9} \cong 9,64.$$

### Solução computacional

Figura 39 – Solução problema 2.



Fonte: Elaborada pelos autores.

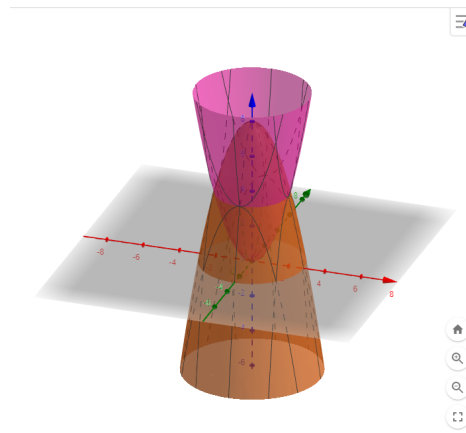
Neste problema, consideramos duas parábolas definidas pela equação do cilindro, de tal forma que a intersecção das duas compreendesse toda a região delimitada pelo círculo de raio 1. Após a definição das parábolas, o processo de resolução seguiu os mesmos passos adotados no problema anterior, resultando em um valor aproximado de 4,69 unidades de volume para a parte superior da esfera. Para obter o valor total, multiplicou-se o valor encontrado por 2, chegando-se a 9,38 unidades de volume, utilizando uma discretização de  $h = 28$ .

**PROBLEMA 3:** Determine o volume do sólido delimitado, acima, pelo parabolóide  $z = 8 - r^2$  e, abaixo, pelo parabolóide  $z = r^2$ .

**Solução algébrica:** Vamos inicialmente obter a intersecção dos dois parabolóides, fazendo a igualdade das equações das duas superfícies. Temos, então:

$$r^2 = 8 - r^2 \iff r^2 = 4$$

Figura 40 – Representação problema 3.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Dessa forma, o sólido está acima do disco circular plano, dado em coordenadas

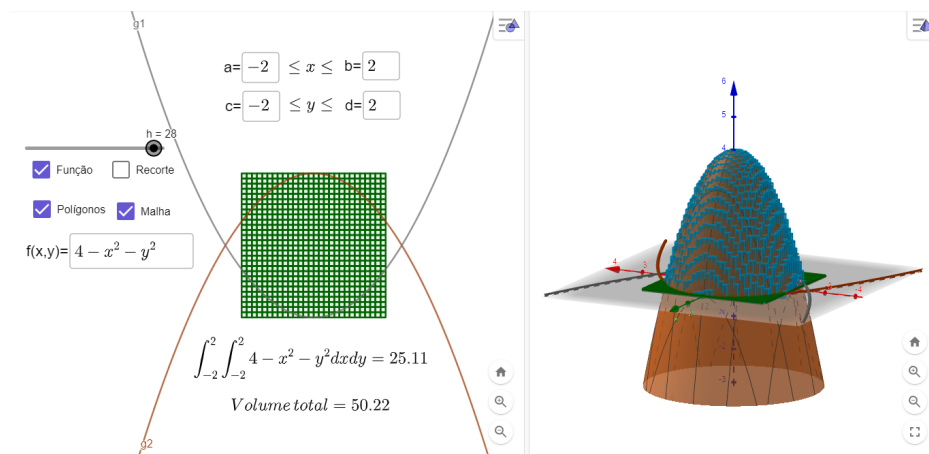


polares, por  $r \leq 2$ , e seu volume é:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint (z_{sup} - z_{inf}) dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [(8 - r^2) - r^2] r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8r - 2r^3) dr d\theta \\
 &= 2\pi \left[ 4r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^2 \\
 &= 16\pi \\
 &\cong 50,26.
 \end{aligned}$$

### Solução computacional

Figura 41 – Solução problema 3.



Fonte: Elaborada pelos autores.

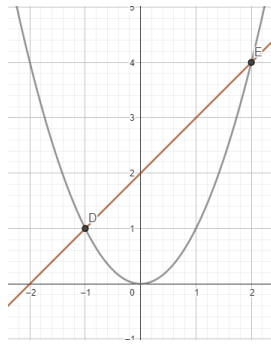
Para a resolução deste problema, foi necessário modificar as funções que definiam os paraboloides, a fim de que a intersecção entre eles estivesse no plano  $z = 0$  e, assim, calcular o volume na região. Essa alteração foi realizada porque é necessário conhecer a área na qual a região será integrada. Foram utilizadas as funções análogas  $f_1(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  e  $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ , de modo a definir parábolas cuja intersecção compreendesse a intersecção dos paraboloides. Em seguida, o volume foi calculado seguindo o mesmo procedimento utilizado no problema anterior. Com base nisso, foi obtido um valor aproximado de 25,11 unidades de volume para a parte superior do parabolóide. Ao multiplicar esse valor por 2, obtemos o valor total aproximado de 50,22 unidades de volume. Vale ressaltar, que neste problema o volume superior foi multiplicado por dois, pois se trata de um sólido simétrico, caso não fosse teríamos que calcular o volume superior e inferior do sólido e somar os dois resultados para obter o volume total.

**PROBLEMA 4:** Uma lâmina ocupa a região delimitada pela reta  $y = x + 2$  e pela parábola  $y = x^2$ . A densidade da lâmina no ponto  $P(x, y)$  é proporcional ao quadrado da

distância de  $P$  ao eixo  $y$ . Determine a massa e o centroide da lâmina.

**Solução algébrica:** Pelos dados do problema a densidade  $\rho(x, y)$  é dada por  $\rho(x, y) = kx^2$ , onde  $k$  é uma constante positiva. Observe também que a reta e a parábola se intersectam nos pontos  $(-1, 1)$  e  $(2, 4)$ .

Figura 42 – Representação problema 4.

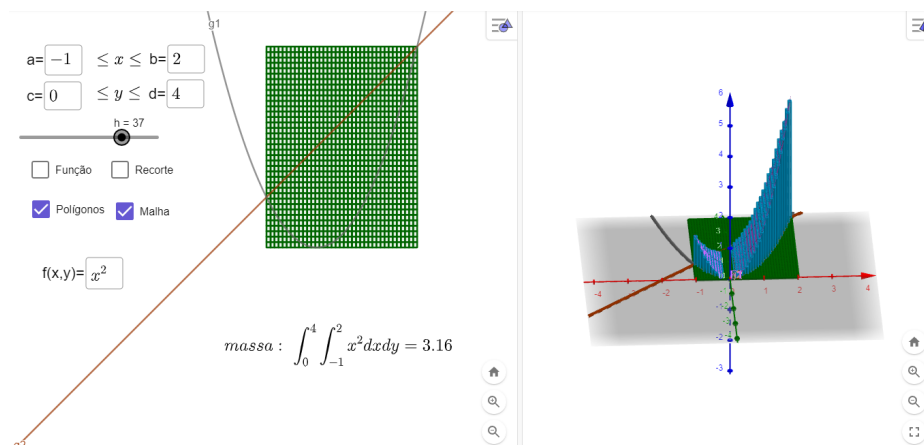


Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, a massa  $m$  é igual a :

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} kx^2 dy dx \\
 &= k \int_{-1}^2 [x^2 y]_{x^2}^{x+2} dx \\
 &= k \int_{-1}^2 (x^3 + 2x^2 - x^4) dx \\
 &= \frac{63k}{20} \\
 &\cong 3,15k.
 \end{aligned}$$

Figura 43 – Massa problema 4.

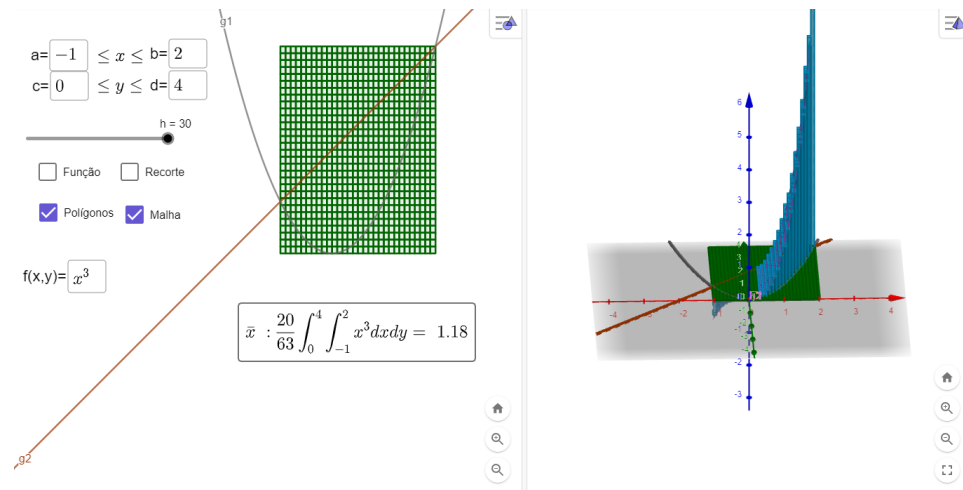


Fonte: Elaborada pelos autores.

E, as coordenadas do centroide, são:

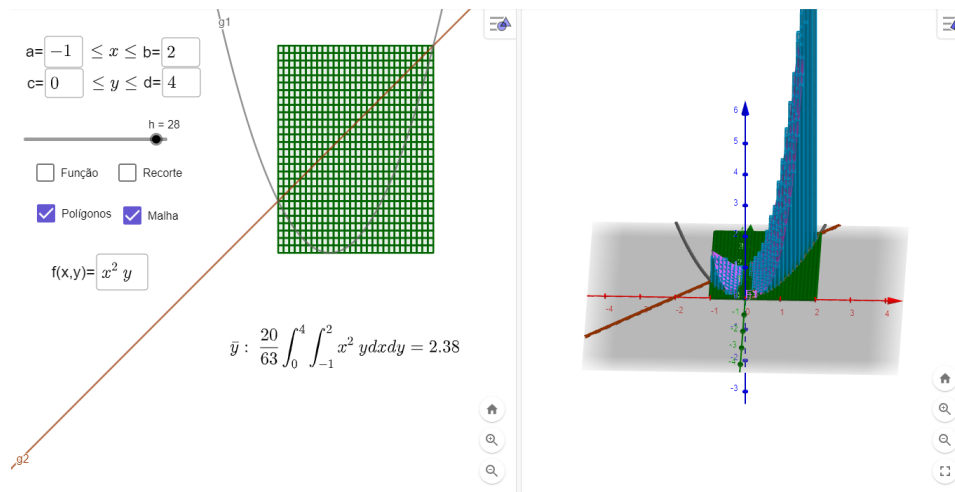
$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{20}{63k} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} kx^3 dy dx \\
 &= \frac{20}{63} \int_{-1}^2 [x^3 y]_{x^2}^{x+2} dx \\
 &= \frac{20}{63} \int_{-1}^2 (x^4 + 2x^3 - x^5) dx \\
 &= \frac{20}{63} \cdot \frac{18}{5} \\
 &= \frac{8}{7} \\
 &\cong 1,14.
 \end{aligned}$$

Figura 44 – Coordenada  $x$  problema 4.



Fonte: Elaborada pelos autores.

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{20}{63k} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} kx^2 y dy dx \\
 &= \frac{20}{63} \int_{-1}^2 \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x^2}^{x+2} dx \\
 &= \frac{10}{63} \int_{-1}^2 (x^4 + 2x^3 + 4x^2 - x^6) dx \\
 &= \frac{10}{63} \cdot \frac{531}{35} \\
 &= \frac{118}{49} \\
 &\cong 2,40.
 \end{aligned}$$

Figura 45 – Coordenada  $y$  problema 4.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Portanto, a lâmina tem massa  $\frac{20}{63k}$  e seu centroide está localizado em  $\left(\frac{8}{7}, \frac{118}{49}\right)$ . Com base nesse resultado, além de ser capaz calcular a massa da lâmina, torna-se possível observar, por meio da janela 3D, a localização do centroide.

## 7 Conclusão

O presente trabalho direciona a utilização das ferramentas do GeoGebra como um apoio a visualização gráfica a ser adicionada para ensino de cálculo em várias variáveis, com potencial de simplificar o processo de aprendizado intuitivo. O GeoGebra disponibiliza recursos embutidos que permitem trabalhar com funções de várias variáveis, traçar gráficos em três dimensões, calcular derivadas parciais, encontrar pontos críticos, traçar superfícies de nível, criar aproximações e discretizações apropriadas, dentre outras. Apresentamos o processo construtivo dos gráficos e detalhamos os passos necessários para criar uma interface interativa, específicas para problemas de superfícies.

Posteriormente, utilizamos as ferramentas de visualização do GeoGebra para explorar o gráfico, seguido do cálculo de regiões e volumes, via integração com a discretização do domínio. Apresentamos comparações qualitativas do Cálculo Integral, condicionada ao refinamento das partições da região a ser integrada. Por fim, inserimos exemplos não triviais que indicam a potencialidade da ferramenta de visualização do Geogebra. Algumas limitações foram encontradas, principalmente relacionadas aos processadores disponíveis para execução e compilação dos resultados, porém, ótimas aproximações foram obtidas.



# Referências

- 1 EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 1995. Citado na página 13.
- 2 BIANCHINI, W. *Integral Dupla sobre uma região qualquer*. 2019. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/z77bnxrb>>. Acesso em: 18 de junho de 2023. Citado na página 13.
- 3 INSTITUTO GEOGEBRA - UESB. *Sobre o Geogebra*. 2014. Disponível em: <[http://www2.uesb.br/institutogeogebra/?page\\_id=7](http://www2.uesb.br/institutogeogebra/?page_id=7)>. Acesso em: 13 de junho de 2023. Citado na página 15.
- 4 HENRIQUE M. *Conheça e entenda os conceitos da GeoGebra*. 2014. Disponível em: <<https://canaldoensino.com.br/blog/conheca-e-entenda-os-conceitos-da-geogebra>>. Acesso em: 16 de junho de 2023. Citado na página 15.
- 5 COMETTI, M. A. Discutindo o ensino de integrais múltiplas no cálculo de várias variáveis: contribuições do geogebra 3d para a aprendizagem. 2018. Citado na página 15.
- 6 LEITHOLD, L. *EL CALCULO 2*. [S.l.: s.n.], 1987. Citado na página 20.
- 7 GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo vol. 2 e 3. LTC, 2001. Citado na página 20.
- 8 JR, C. E.; PENNEY, D. E. Cálculo com geometria analítica. LTC, v. 3, 1999. Citado na página 23.
- 9 CALCULUS, Early Transcendentals: Pearson New International Edition. [S.l.]: Pearson Higher Ed, 2013. Citado na página 23.