Universidade Estadual do Piauí-UESPI
Pró-Reitoria de Ensino e Graduação-PREG
Núcleo de Educação a Distância-NEAD

Lições de Aritmética

Kailan Max Gomes
Bruno Pereira Carvalho

Simões-Piauí
2025

Lições de Aritmética

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à comissão acadêmica institucional da Coordenação do Curso de Matemática (CCM), como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Gildo Jesus Sousa

Coorientador:
Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha

Kailan Max Gomes
Bruno Pereira Carvalho

Lições de Aritmética

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado, atendendo parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pela comissão acadêmica institucional da Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Estadual do Piauí, tendo o parecer final de aprovação no dia 01.02.2025.

COMISSÃO INSTITUCIONAL AVALIADORA

gov.br
Documento assinado digitalmente
GILDO JESUS SOUSA
Data: 28/02/2025 20:14:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Gildo Jesus Sousa – UESPI

Presidente

gov.br
Documento assinado digitalmente
JEFFERSON DE BRITO SOUSA
Data: 28/02/2025 20:24:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jefferson de Brito Sousa – UESPI

Examinador

gov.br
Documento assinado digitalmente
JANIEL MARTINS NEVES
Data: 28/02/2025 20:36:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Janiel Martins Neves – UESPI

Examinador

Resumo

A discussão neste Trabalho de Conclusão de Curso é relativa à proposição de uma abordagem de ensino dos conceitos envolvendo os números naturais e as operações matemáticas elementares. A abordagem é iniciada pela apresentação de conceitos denominados preliminares, cujas as definições servem de base para o desenvolvimento das ideias iniciais. Posteriormente, segue-se com o desenvolvendo do conceito e a construção dos números naturais por meio de postulados, definições, recursos didáticos e exemplos que facilitem a assimilação e o entendimento. Por fim, é apresentado as relações entre números naturais e a definição das operações matemáticas elementares, juntamente com suas propriedades, implicações e aplicações. A importância da construção desse trabalho está na possibilidade de ser um material de apoio no processo de ensino e aprendizado sobre o tema, assim como pode ser uma fonte de consulta que sirva de repertório para a construção de outros trabalhos nesta área de estudo.

Palavras-chave: Aritmética; Ensino; Números; Operações.

Abstract

The discussion in this Final Course Work is related to the proposition of an approach to teaching concepts involving natural numbers and elementary mathematical operations. The approach begins with the presentation of concepts called preliminary, whose definitions serve as a basis for the development of initial ideas. Subsequently, the concept is developed and the construction of natural numbers is carried out through postulates, definitions, teaching resources and examples that facilitate assimilation and understanding. Finally, the relationships between natural numbers and the definition of elementary mathematical operations are presented, together with their properties, implications and applications. The importance of constructing this work lies in the possibility of it being a support material in the teaching and learning process on the subject, as well as being a source of reference that serves as a repertoire for the construction of other works in this area of study.

Keywords: Arithmetic; Teaching; Numbers; Operations.

Sumário

Introdução

Pode-se dizer que os primeiros anos de ensino escolar da Matemática é, predominantemente, um estudo sobre os números e seus aspectos. Basicamente, a ideia está em desenvolver uma noção quantitativa inicial, onde posteriormente novas ideias são introduzidas a medida que a capacidade cognitiva dos alunos vai sendo ampliada. Dessa maneira, é nítido que o estudo da Aritmética mereça uma atenção especial, tanto por ser a célula embrionária que dá origem à ideias matemáticas úteis, quanto pelas suas diversas aplicações em contextos extraescolares.

Posto isso, é pertinente entender que os termos Elementar ou Básico, quando são usados para descrever o estudo de um tópico na Aritmética, não fazem nenhuma referência ao seu grau de complexidade, ou seja, deixando a entender que o estudo em questão é de simples entendimento ou explicação. Sendo mais claro, as operações matemáticas básicas, por exemplo, são assim denominadas, não porque as ideias que carregam são básicas quanto à simplicidade; mas, porque são os pilares de outras construções matemáticas que delas derivam.

Por outro lado, a compreensão e o entendimento de um tema estudado pode sim está relacionado à adequação da linguagem, à adoção de recursos didáticos, à escolha dos tópicos e à definição da sequência de apresentação na abordagem de quem ensina – o educador. Por esse motivo, este trabalho tem como objetivo principal ser uma proposta de abordagem de ensino dos números naturais e das operações matemáticas elementares, destinando-se majoritariamente aos alunos do ensino básico.

Os objetivos secundários, por sua vez, estão elencados a seguir.

- Desenvolver estratégia de ensino que favoreça a criatividade do pensamento matemático dos educandos, com maior ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
- Destacar a utilidade e as implicações dos conceitos e propriedades;
- Justificar o passo a passo dos procedimentos nas técnicas de cálculo;
- Integrar diferentes áreas do conhecimento por meio de contextos e exercícios;
- Resolver situações-problema através da aplicação dos conceitos estabelecidos.

Para tais fins, a metodologia de construção do trabalho foi baseada na consulta à obras bibliográficas, por meio da seleção e análise de materiais e livros didáticos, nacionais e estrangeiros, sobre o tema Aritmética dos Números ou Elementar. Todavia, destaca-se que o enfoque do trabalho não será na exposição de uma análise descritiva das obras que compõe esse repertório, mas sim, na abordagem idealizada para o ensino dos conteúdos que serão trabalhados.

Portanto, o título do trabalho é sugestivo quando utiliza o vocábulo «Lições» para designar a noção de "aprendizados adquiridos pela experiência". No caso em questão desse trabalho, o aprendizado que se deseja transferir é resultado das ideias de ensino observadas nas abordagens dos autores da bibliografia. Assim, buscou-se selecionar e organizar as definições, os exemplos e os recursos visuais ilustrativos que melhor contribuíssem para explanação dos capítulos, seções e subseções desta monografia.

Capítulo 1
Conceitos Preliminares

A abstração é um fenômeno que está presente em diversas situações e processos da nossa vida. Na linguagem, por exemplo, utiliza-se símbolos, caracteres, notações, sons e modelos que buscam representar uma ideia, um sentimento ou um fato. Dessa forma, os seres humanos estão adaptados às representações abstratas que descrevem e tentam explicar a realidade. Pense nos modelos utilizados pelas ciências naturais, como as representações químicas, físicas ou biológicas, quando tentam explicar algum processo de sua competência.

A Matemática, considerada mãe de todas as ciências, também se utiliza desses recursos para representar situações concretas ou abstratas, estabelecendo relações de dedução, implicação, inferência e tantas outras conclusões a partir de premissas. Todavia, há situações onde o excesso de abstração, ou equivalentemente, a falta de concretude, acabam por gerar confusões e abalar a compreensão do que se pretende explicar.

Figura 1: uma e três cadeiras - Joseph Kosuth.

Fonte: https://www.hacer.com.br/kosuth.

Observe a figura 1, retirada no Museu da Arte Moderna, onde é exposta a obra do artista norte-americano Joseph Kosuth. Nela é possível perceber a presença de três objetos dispostos paralelamente: ao centro, uma cadeira de madeira; à esquerda, a fotografia dessa cadeira em escala real; por fim, à direita, um quadro que exibe o vocábulo *chair* e a definição descrita pelo dicionário.

Nesse contexto, o artista que integrou o movimento da Arte Conceitual teve o objetivo de sugerir uma abrangência nos limites da Arte. Para Kosuth, a Arte não se restringe às representações usuais de sua manifestação, como quadros, pituras, telas, dentre outras. Nesta obra, o próprio objeto realístico, a cadeira, é considerado uma obra de arte, assim como a fotografia e até o conceito do objeto. Por isso o motivo da escolha do título — uma [realidade] e três cadeiras.

Figura 2: a traição das imagens — René Magritte.

Fonte:https://www.jb.com.br/cadernobcaiobucker.

Em contrapartida, na figura 2 tem-se uma obra do artista René Magritte, que ao contrário de Kosuth, adota uma visão de que a pintura, a fotografia e outros meios de propagação da Arte, não fazem parte da realidade. Logo, Magritte enxerga a Arte da perspectiva dos artistas do Pensamento Clássico, considerando-a uma representação da realidade, mas não o real em si — daí o sentido da frase “Isto não é um cachimbo”.

Neste momento, é pertinente fazer o seguinte questionamento: “afinal, o que a Arte e a discussão sobre o que é realidade tem a ver com a Matemática?” Ou ainda “onde esse debate se encaixa no ensino da Aritmética?” Pois bem, a Aritmética e a Arte, apesar de muitas vezes ilustrarem situações concretas, os meios pelas quais o fazem são baseados em abstrações dos objetos da natureza. Sendo mais óbvio, o conceito de número, a sua representação, dentre outros, são objetos intangíveis, ou melhor, só são concebíveis quando associamos sentido e significado.

1.1. Grandeza

Definição 1.1. Grandeza é o nome genérico que se dá à conceitos específicos, definidos com a finalidade de avaliar as propriedades de objetos, corpos ou seres, através de processos de medição e contagem.

Assim, os conceitos específicos de volume, massa, área, comprimento, tempo, força, amplitude angular, dentre muitos outros, são grandezas. A Massa, por exemplo, é um conceito específico utilizado para avaliar a quantidade de matéria de um corpo. Do mesmo modo, a Capacidade é um conceito específico que serve para avaliar a quantidade de uma substância, líquida ou gasosa, que determinado recipiente ou objeto tridimensional é capaz de comportar.

Por outro lado, a expressividade dessa propriedade é chamada de quantidade. Pode-se dizer que a quantidade indica a intensidade que o atributo se manifesta no instante da medição ou contagem. Logo, uma maior quantidade traduz-se numa maior intensidade de manifestação da qualidade analisada. Além disso, essa quantidade é expressa por um valor numérico acompanhado de uma unidade de medida usada como padrão para a comparação durante a medição ou contagem.

Dessa forma, por exemplo, quando escrevemos que a distância de uma cidade à outra é 320 km, tem-se:

- Grandeza: comprimento – medida linear delimitada entre pontos;
- Quantidade: 320 km – 320 é o valor numérico e quilômetro (km) é a unidade de medida.

Considerando o processo usado para determinação da quantidade, o aspecto físico da propriedade avaliada e a forma numérica usada para expressar a quantidade, há duas classes de grandezas.

1.1.1. Grandezas Contínuas

Definição 1.2. São aquelas cujas quantidades são avaliadas por meio de processo de medição.

Na determinação da quantidade dessa grandeza é realizado um processo de segmentação artificial, onde a partir de uma unidade de medida, real ou imaginária, delimita-se sua extensão em porções menores, que serão consideradas cópias da unidade, a fim de assemelhar-se ao processo de contagem.

Nesse processo, pode ocorrer da unidade ser contabilizada parcialmente, já que esse tipo de grandeza não possui uma delimitação convencional de suas unidades, em razão do seu aspecto físico contínuo, como sugere o próprio nome. Por conseguinte, os valores numéricos que expressam as suas quantidades são números reais. Grandezas como massa, temperatura, volume, comprimento, velocidade, dentre outras, são exemplos dessa classe.

1.1.2. Grandezas Descontínuas

Definição 1.3. São aquelas cujas quantidades são obtidas por processo de contagem.

Neste caso, as unidades apresentam-se individualizadas, sendo possível reconhecê-las de maneira a isolar uma das demais. Assim, em razão da natureza e do aspecto descontínuo, não tem sentido prático expressar essas grandezas por números fracionários ou decimais. Não tem sentido algum, por exemplo, um noticiário de jornal relatar que a média de pessoas, no Brasil, que vivem abaixo da linha da pobreza é igual a 150.243,53. O numeral em questão representa um número decimal, cuja a ideia remonta à unidades não inteiras.

O ideal, entretanto, era que esse valor fosse aproximado para um número natural, já que a situação envolve uma grandeza descontínua. Ou melhor, faz sentido falar em meia pessoa? Um terço de uma pessoa? Claramente não, pois a situação envolve um conjunto de pessoas, onde cada pessoa simboliza a unidade. Logo, conjuntos de pessoas, animais, automóveis, planetas, dentre outros, são exemplos de grandezas descontínuas.

1.2. Noções sobre Conjuntos

A Matemática como a conhecemos hoje possui notáveis diferenças em relação aos seus primórdios. Toda a sua estrutura e formulação está baseada numa estrutura lógica, bem como numa linguagem e simbologia própria. Desse modo, para que possamos compreendê-la de maneira satisfatória, faz-se necessário recapitularmos algumas ideias sobre conjuntos que servirão como requisito para avançarmos no nosso estudo.

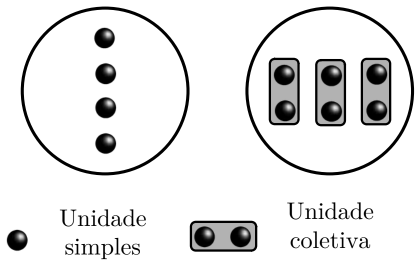
1.2.1. Conjunto e Elemento

A ideia de pluralidade evoca o conceito de conjunto. Desse modo, as pérolas de um colar, as páginas de um livro, os meses de um ano, dentre outros, são exemplos de conjuntos. Cada pérola, cada página, cada mês, está associado ao conceito de elemento do conjunto. Portanto, a noção de unidade, ou melhor, a ideia de uma única coisa, remete ao conceito de elemento. Além disso, esses elementos podem ser de mesma espécie ou de espécie distinta. Conjunto é, pois, toda coleção de elementos de espécie igual ou distinta.

1.2.2. Subconjunto

Um conjunto é uma coletividade quando comparado a cada elemento isolado. Porém, ao tomarmos dois ou mais elementos de um conjunto, podemos formar novos conjuntos, uma espécie de unidade coletiva. Assim, ao agrupar os elementos dois a dois, forma-se conjuntos chamados de pares; agrupando-se três a três, forma-se conjuntos chamados de ternos ou trios, e assim sucessivamente.

Cada um desses novos conjuntos, por sua vez, pode ser considerado um único elemento, ou melhor, uma unidade coletiva, sugerindo, assim, a ideia de subconjunto. Logo, um subconjunto, em termos simples, é um agrupamento que está contido em outro agrupamento.

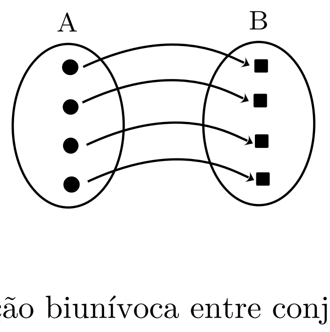


Desenho 1: unidade simples e coletiva.

1.2.3. Correspondência Biunívoca

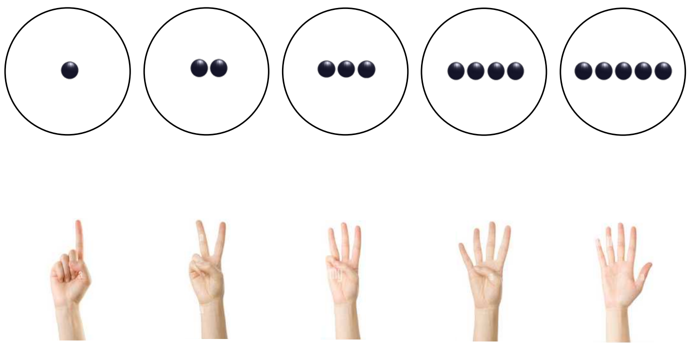
Uma correspondência entre os elementos de conjuntos é dita bem definida quando é possível estabelecer um critério que permita descreve a relação de correspondência, bem como os elementos correspondentes entre si.

Vamos considerar um conjunto de pessoas, cujo seus elementos são: Leonardo, Vicente, Danilo e Marcos. Além disso, vamos considerar que na residência que essas pessoas estão há um guarda-roupa que abriga casacos nas cores: vermelho, azul, verde e cinza. Quando cada uma dessas pessoas retira seu casaco, sem que haja alguma pessoa sem casaco, nem casaco sem dono, dizemos que existe uma correspondência perfeita ou biunívoca. Essa relação é chamada de coordenação entre os elementos dos conjuntos de pessoas e casacos.



Desenho 2: relação biunívoca entre conjuntos abstratos.

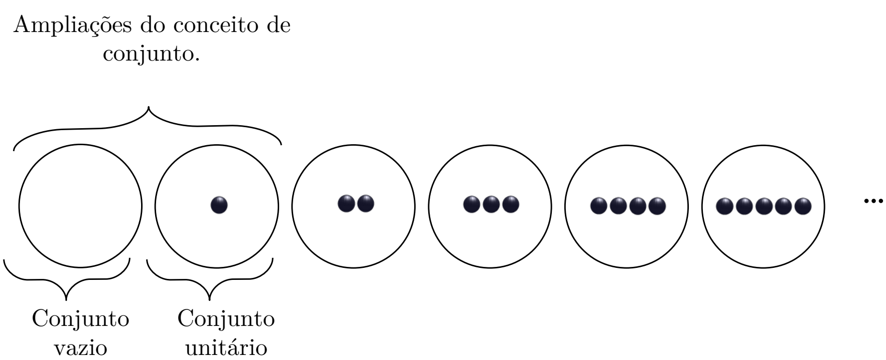
Na representação acima, cada elemento do conjunto A está associado à um elemento, e apenas um, do conjunto B. Da mesma forma, esse elemento de B só está associado ao seu recíproco em A. Trata-se, portanto, de uma relação do tipo «um a um». Esse tipo de relação entre conjuntos é muito importante na Matemática, pois é a partir dessa ideia que podemos explicar, por exemplo, o processo de contagem. Na contagem o que fazemos, de forma resumida, é associar um som, um símbolo ou um gesto, à uma quantidade de uma grandeza discreta.



Desenho 3: associação entre gestos e conjuntos abstratos

1.2.4. Sucessão Fundamental dos Conjuntos

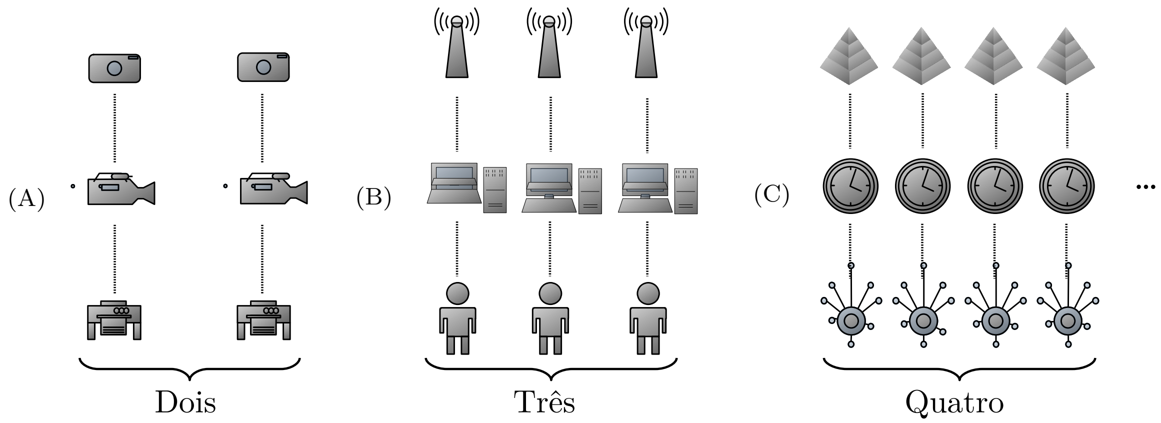
Considere a sequência finita de conjuntos abstratos representada abaixo.



Desenho 4: sucessão fundamental de conjuntos

Nesta série, a partir do segundo, cada conjunto tem um elemento a mais que o anterior. Assim, sempre é possível adicionar um elemento e obter um novo conjunto quantas vezes acharmos necessário. Outra característica é que não há dois conjuntos que sejam coordenáveis entre si. Isso implica que, qualquer conjunto finito só é coordenável à um conjunto dessa sucessão fundamental.

Desse modo, munido da ideia de correspondência biunívoca e coordenando conjuntos finitos a cada conjunto da sucessão fundamental, podemos deduzir uma propriedade geral.



Desenho 5: conjuntos coordenáveis e a noção de número natural.

A coordenação entre os elementos dos diferentes conjuntos nas figuras (A), (B) e (C), faz surgir na nossa mente a ideia geral das quantidades «dois», «três», «quatro» etc. Como para chegarmos a ideia nos abstemos de quaisquer qualidades dos elementos dos conjuntos envolvidos, focando exclusivamente na noção de quantidade, dizemos que esses conceitos são abstratos. Essa propriedade, que é comum a todos os conjuntos coordenáveis entre si, é chamada de número natural.

Assim "numero natural é tudo que for definido por um conjunto, e por todos os conjuntos que lhe seja equivalente." (Bertrand Russel)[1].

1. Praticando a Aritmética, p. 3, 7ª ed; 2014.

Capítulo 2

Números Naturais

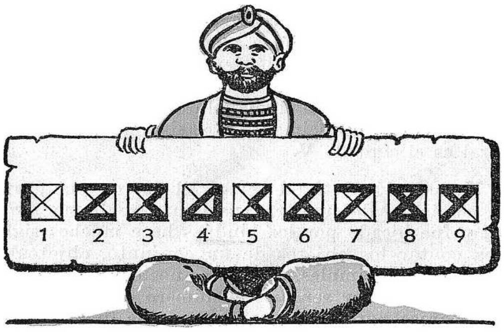
Talvez o que tenha impedido os gregos e romanos de terem um maior desenvolvimento matemático, foi a utilização de uma forma inapropriada para representar os números. Os índios, por sua vez, desenvolveram um prático sistema de notação numeral, ao perceber a importância do zero e ao adotar o critério posicional dos símbolos. Os árabes, finalmente, propagaram e difundiram esse sistema na Europa a partir do século VIII d.C. Em razão disso, os símbolos representativos de um numeral são ditos algarismos indo-arábico.

Como visto nas noções preliminares, cada conjunto da sucessão fundamental representa, pois, um número natural. Cada número recebe um nome, um símbolo e um som representativo. Assim, utiliza-se as palavras zero, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove, para representar os números naturais equivalentes, respectivamente, aos primeiros conjuntos dessa sucessão. Para operar com essas quantidades, porém, foi necessário a criação dos algarismos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove

Para números naturais maiores que nove, utilizamos a ideia de unidades coletivas e regras que permitem a representação de qualquer número, de modo que não seja necessário algarismos além dos dez acima. É incerto a origem desses algarismos indo-arábico, que segundo alguns autores, sua forma deriva da relação de um quadrado e suas diagonais. Como o passar do tempo esses símbolos foram sofrendo modificações até atingirem a padronização que conhecemos hoje.

Figura 3: possível versão primitiva dos algarismos indo-arábico.



Fonte: Aritmética: Primer Año de Matematicas, p.1, 3ª ed. 1967.

Conforme a demanda e a experiência humana em trabalhar com números foi aumentando, surgiu a necessidade de empregar outros sentidos e ideias aos números naturais que fosse além de sua utilização nos processos de contagem de coisas.

Hoje em dia podemos aplicar os números naturais para as seguintes situações:

- Contagem e registro de quantidades de grandezas discretas;
- Identificação de objetos, bens, processos etc — ideia de código;
- Ordenamento de etapas, procedimentos, objetos dentre outros — ideia de posição.

2.1 Numerais

Definição 2.1. São palavras, sons ou símbolos usados na representação de números.

Podem ser utilizados para indicar quantidade, ordem dentre outras ideias. Exemplo: dez, 10, X, 10º etc.

2.1.1 Numeral Cardinal

Na contagem dos elementos de um conjunto é empregado um número natural, denominação que se justifica por ser o número que naturalmente se encontra ao fim da contagem.

O número que, na sequência de contagem dos elementos de um conjunto, é o último a ser proferido, chama-se de número cardinal do conjunto. Assim, o cardinal do conjunto das vogais é 5, que representa a quantidade de elementos do conjunto das letras vogais. Veja:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & - & E & - & I & - & O & - & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} A & - & E & - & I & - & O & - & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & - & 4 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} A & - & E & - & I & - & O & - & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & - & 4 & - & 1 & - & 3 & - & 5 \end{array}$$

Percebe-se que o cardinal de um conjunto é o mesmo qualquer que seja a ordem que se conta os elementos. Assim, uma consequência da correspondência biunívoca é que os conjuntos coordenáveis apresentam o mesmo número cardinal.

2.1.2 Numeral Ordinal

No processo de ordenação dos elementos de um conjunto ou na divisão de um processo em etapas, atribui-se um critério de prioridade ou posicionamento, uma referência à ideia de sequenciamento. Nestas ocasiões, emprega-se os chamados números ordinais. Cada elemento é, pois, associado à um número que não designa uma quantidade, mas sim sua posição, ordem ou prioridade.

Na tabela abaixo está expresso a correspondência entre alguns números cardinais e ordinais.

Cardinal		**Ordinal**	
um	1	primeiro	1º
dois	2	segundo	2º
três	3	terceiro	3º
quatro	4	quarto	4º
cinco	5	quinto	5º
seis	6	sexto	6º
sete	7	sétimo	7º
oito	8	oitavo	8º
nove	9	nono	9º
dez	10	décimo	10º
vinte	20	vigésimo	20º

trinta	30	trigésimo	30º
quarenta	40	quadragésimo	40º
cinquenta	50	quinquagésimo	50º
sessenta	60	sexagésimo	60º
setenta	70	septuagésimo	70º
oitenta	80	octogésimo	80º
noventa	90	nonagésimo	90º
cem	100	centésimo	100º
duzentos	200	ducentésimo	200º
trezentos	300	trecentésimo	300º
quatrocentos	400	quadringentésimo	400º
quinhentos	500	quingentésimo	500º
seiscentos	600	sexcentésimo	600º
setecentos	700	setingentésimo	700º
oitocentos	800	octingentésimo	800º
novecentos	900	nongentésimo	900º
mil	1000	milésimo	1.000º
dez mil	10000	décimo milésimo	10.000º
cem mil	100000	centésimo milésimo	100.000º
um milhão	1000000	milionésimo	1.000.000º
um bilhão	1000000000	bilionésimo	1.000.000.000º
êne	n	enésimo	nº

2.1.3 Numeral Multiplicativo

Definição 2.2. São palavras ou termos que indicam uma quantidade resultante da repetição de outra.

Assim, essas palavras indicam um conjunto cujo o cardinal é resultado da repetição da unidade simples ou coletiva. Por exemplo, a palavra dobro indica uma quantidade que remete a repetição de duas vezes o valor de outra quantidade. Do mesmo modo, a palavra triplo indica uma quantidade que remete a três vezes o valor de outra.

A seguir tem-se alguns numerais multiplicativos e a indicação da repetição que designa.

Numeral Multiplicativo	**Repetição**
simples	uma vez
dobro ou duplicado	duas vezes
triplo ou triplicado	três vezes
quadruplo ou quadruplicado	quatro vezes
quíntuplo ou quintuplicado	cinco vezes
sêxtuplo ou sextuplicado	seis vezes
séptuplo ou septuplicado	sete vezes
óctuplo ou octuplicado	oito vezes
nônuplo ou nonuplicado	nove vezes
décuplo ou decuplicado	dez vezes
centuplo ou centuplicado	cem vezes
ênuplo ou enuplicado	n vezes

2.2 Relações e Estrutura de Ordem

Os problemas envolvendo a relação de igualdade não foram conhecidos pelos povos da antiguidade em sua forma aritmética. O primeiro a empregar o símbolo «igual a» $(=)$ e descrever algumas questões teóricas foi Robert Record, em sua obra The Ground of Arts, publicada em Londres no ano de 1542. Posteriormente, já no século XVII, o inglês Harriot e o francês Bouguer estabeleceram o uso dos símbolos nas relações «maior que» $(>)$ e «menor que» $(<)$.

2.2.1 Relação de Igualdade

Vamos imaginar uma situação onde há dois conjuntos coordenáveis entre si. Num contexto de um cinema, todos as cadeiras foram ocupadas de modo a não sobrar alguma vazia e cada uma comportou uma única pessoa. Nesta situação, é possível observar que nenhuma pessoa que comprou o bilhete de entrada ficou de pé, sem acento. Assim, diz-se que cada elemento de ambos os conjuntos participa de uma relação do tipo um a um. Dessa forma, os números cardinais desses conjuntos são iguais.

Definição 2.4. Números iguais são aqueles que representam conjuntos coordenáveis entre si.

Sendo a o cardinal do conjunto das cadeiras do cinema e b o cardinal do conjunto das pessoas que compraram bilhete, escrevemos: $a = b$ (a é igual a b).

Por outro lado, se um número a não for igual a b, dizemos que a e b são desiguais. Esse fato é expresso pela notação: $a \neq b$ («a não é igual a b» ou «a é diferente de b»).[1]

É interessante observar que a relação de igualdade é somente a respeito do cardinal dos conjuntos, de modo que cada conjunto tem suas qualidades particulares.[2] Por isso, outras formas para denotar a relação de igualdade, mas pensado neste detalhe, é empregar as expressões «equivalente a» ou «numericamente igual a».

A relação de igualdade é dotada das propriedades a seguir.

- **Caráter idêntico**

$$\boxed{\text{Todo número é igual a si mesmo.}}$$

ou

$$\boxed{a = a}$$

Essa propriedade apesar de parecer intuitiva, ela significa que todo conjunto é coordenável a si mesmo.

---

1. Cada lado da igualdade recebe uma denominação, sendo o esquerdo chamado de primeiro membro e o direito de segundo membro;
2. A rigor, a igualdade só indicará uma identidade entre conjuntos, se estiver referindo-se ao mesmo conjunto, algo do tipo: a = a.

- **Caráter recíproco**

> Se um número é igual a outro, reciprocamente, o segundo também é igual ao primeiro.

ou

$$\boxed{a = b \Longrightarrow b = a}$$

Desse modo, se um conjunto é coordenável a outro, a coordenação também ocorre do segundo para o primeiro; afinal, a ordem de coordenação não descaracteriza a relação um a um existente. Em termos práticos, se dizemos que a idade de Maxwell é igual a de Oliver, reciprocamente, podemos dizer que a idade de Oliver é igual a de Maxwell.

- **Caráter Transitivo (ou indutivo)**

> Se um número é igual a outro, e este por sua vez, é igual a um terceiro, então, o primeiro é igual ao terceiro.

Em símbolos

$$\boxed{a = b \text{ e } \quad b = c \Longrightarrow a = c}$$

É interessante observar que por meio de duas relações de igualdades diretas e conhecidas, determinamos uma terceira relação de igualdade de forma indireta e antes desconhecida. Por isso fala-se em indução, pois as duas relações diretas induzem uma terceira de maneira indireta.

Numa situação prática, se a altura de Bianca é igual a de Luíza, e por sua vez, a idade de Luíza é igual a de Alice, podemos concluir que a altura de Bianca é igual a de Alice.

2.2.2 Relação de Desigualdade

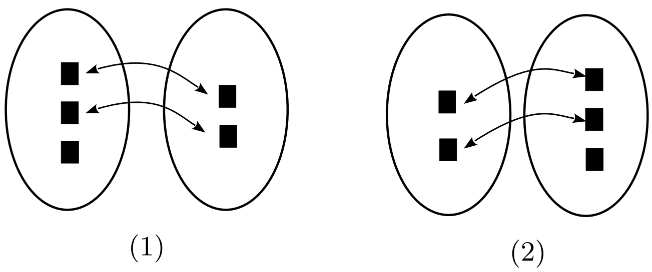
Definição 2.5. Números desiguais representam conjunto que não são coordenáveis entre si.

Utilizando o exemplo do cinema descrito anteriormente, poderíamos imaginar que se os conjuntos não fosse coordenáveis, sobrariam cadeiras em relação a quantidades de pessoas ou contrário, ou seja, sobrariam pessoas que ficariam de pé, pois a quantidade de cadeiras seria inferior.

Ocorre que quando dois conjuntos não são coordenáveis, de duas possibilidades, uma delas se verifica:

(1) O primeiro conjunto tem mais elementos que o segundo;

(2) O segundo conjunto tem mais elementos que o primeiro.



Desenho 6: conjuntos parcialmente coordenáveis.

Se (1) se verifica, então o primeiro conjunto é parcialmente coordenável ao segundo. Por outro lado, se (2) se verifica, então o segundo conjunto é parcialmente coordenável ao primeiro. No exemplo acima, em (1) poderíamos escrever que $3 > 2$ (três é maior que dois). Por outro lado, em (2), escrevemos $2 < 3$ (dois é menor que três).

Para as relações de desigualdades é válido somente a propriedade transitiva. Assim, se um número a é maior ou menor ($\gtrless$) que outro b, e por sua vez este for maior ou menor que c, então a é maior ou menor que c. Em símbolos:

$$\boxed{a \gtrless b \;\text{ e }\; b \gtrless c \Longrightarrow a \gtrless c}$$

Exemplo: se $8 > 6$ e $6 > 4$, então $8 > 4$.

Exemplo: se $2 < 5$ e $5 < 7$, então $2 < 7$.

2.2.3 Aplicações das Relações Numéricas

As relações numéricas pode ser utilizadas a fim de estabelecer o ornamento de uma sequência de números, assim como a comparação.

I. Ordenação

Através da propriedade transitiva aplicada à relação de desigualdade podemos estabelecer o ordenamento crescente ou decrescente de números. Veja:

$$\left.\begin{array}{l} 8 > \boxed{4} \\ \boxed{4} > 2 \end{array}\right\} 8 > 4 > 2$$

Assim, se oito é maior que quatro, e quatro é maior que dois, então temos a sequência decrescente «oito, quatro, dois».

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2 < \boxed{4} \\ \boxed{4} < 8 \end{array}\right\} 2 < 4 < 8$$

De modo similar, se dois é menor que quatro, e quatro é menor que oito, então temos a sequência crescente «dois, quatro, oito».[1]

1. Na Matemática, esse artifício de unificação de sentenças de desigualdades é útil não só para comparar números entre si, mas também na representação de subconjuntos numéricos chamados de intervalos numéricos.

II. Comparação

Como visto, na coordenação entres conjuntos, só possível duas situações. A primeira é que os conjuntos são coordenáveis entre si e associamos isso à ideia de dois números naturais iguais. Por outro lado, a segunda situação, por sua vez, onde os conjuntos não são coordenáveis entre si. Neste último caso, o primeiro é parcialmente coordenável ao segundo ou caso contrário. Dessas observações, decorre uma propriedade importante do conjunto dos números naturais denominada tricotomia. Podemos enunciá-la como a seguir.

Na comparação de dois números naturais a e b, apenas uma das hipóteses é verdadeira: ambos são iguais; a é maior que b; a é menor que b.

Em símbolos

$$\boxed{a,\, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a = b,\;\; a > b \;\text{ ou }\; a < b.}$$

Essa propriedade garante que não há uma quarta possibilidade e apenas uma é verdadeira. Assim, na comparação da idade de duas pessoas, por exemplo, podemos garantir pela propriedade da tricotomia que apenas uma das seguintes hipóteses é verdade: as duas pessoas têm a mesma idade; uma delas é mais velha ou mais nova que a outra.[1]

2.2.4 Combinação de Igualdades e Desigualdades

A partir da junção de duas sentenças simples que expressam relações de igualdade e desigualdade entre números, pode-se formar sentenças compostas que abrange uma maior número de possibilidades quanto à comparação e o ordenamento entre números.

1. Observa-se que, nesta situação, a conjunção «ou» tem um sentido de exclusividade, mas não de opcionalidade ou alternativa como de costume. Algo similar ao Princípio do Terceiro Excluído, presente no estudo da Lógica Proposicional;

A chamada Relação Geral de Ordem, associada à expressão verbal «menor ou igual» ($\leq$), ou equivalentemente, à expressão verbal «maior ou igual» ($\geq$), é um exemplo de sentença composta formada a partir da junção de uma relação de igualdade e desigualdade, por meio da utilização de um conectivo.[1]

Exemplo:

$3 \leq 3$ é verdadeira, pois a sentença componente $3 = 3$ é verdade $-$ não importa se $3 < 3$ seja falsa;

$3 \leq 9$ é verdadeira, pois a sentença componente $3 < 9$ é verdade $-$ não importa se $3 = 9$ é falsa.

Contraexemplo:

$8 \leq 5$ é falsa, pois as $8 < 5$ e $8 = 5$ são falsas.

Na linguagem verbal, se dizemos que uma grandeza pode assumir determinado valor máximo, significa dizer que os valores possíveis podem ser menores ou igual aquele, mas não maior que esse limite. De forma equivalente, se uma grandeza pode assumir até determinado valor mínimo, significa que os valores podem ser igual ou maior, mas não menor.

2.2.5 Estrutura de Ordem nos Números Naturais

No conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) um critério que pode ser aplicado para o estabelecimento de uma estrutura de ordem é a Relação Geral de Ordem ($\leq$). Nesta situação os números naturais ordenados passam a formar a Sucessão dos Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$. Como visto no capítulo precedente, cada número natural representa um conjunto abstrato da Sequência Fundamental dos Conjuntos.

1. A sentença composta formada pelo conectivo disjuntivo «ou» será verdadeira se uma das sentenças simples que a compõe for verdadeira. Por sua vez, se ambas forem falsa, então a sentença composta também será falsa.

Assim sendo, cada número natural representa um conjunto que apresenta um elemento a menos que o seguinte. Portanto, a seguintes relações são estabelecidas: $0 < 1$; $1 < 2$; $2 < 3$; $3 < 4$; $4 < 5$ e assim continuamente. Combinando essas sentenças de desigualdade, resulta-se na primeira relação de ordem (crescente) que conhecemos desde aprendemos a contar na pré-escola:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 \ldots$$

Outra forma alternativa de representação é:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow \cdots$$

Nesta sequência ou série cabe destacar algumas características:

- Qualquer número natural tem um, e apenas um, sucessivo;
- Zero não é sucessivo de nenhum número natural, por isso é o menor e primeiro número da sequência;
- Não existe um limite superior nesta sequência, ou melhor, não há maior número natural, por isso diz-se que o conjunto dos naturais é infinito.

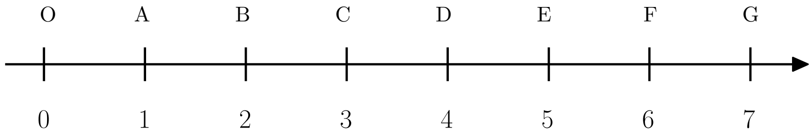
Do exposto, decorre que se a é um número natural, sempre é possível obter o seu sucessor, indicado por a^+, cujo seu valor é $a + 1$. Assim sendo, diz-se que 5 é sucessor de 4, o que é indicado por $4^+ = 5$. De fato, $4 + 1 = 5$. De modo análogo, por meio da remoção de uma unidade de um número natural obtemos o seu antecessor, cuja indicação é dada por a^- e o valor por $a - 1$.[1]

2.2.6 Reta Numérica

Uma maneira intuitiva de representar os números naturais é geometricamente, por meio da chamada reta numerada. Esse artifício nos permite visualizar, de maneira

1. Cabe a ressalva que o zero é o primeiro elemento da sucessão, então a expressão $a - 1$ não se aplica ao zero, ou seja $a \neq 0$.

gráfica, os números naturais e a sua estrutura de ordem por meio da posição de cada número, facilitando a identificação e comparação. Veja:



Desenho 7: reta numérica e estrutura de ordem dos números naturais.

Associa-se o ponto O à origem da semirreta, que corresponderá ao primeiro elemento do conjunto, o zero. A partir disso, adota-se uma unidade de comprimento qualquer e define-se segmentos à direita desse ponto, cujos comprimentos medem quantidades inteiras dessa unidade. Além disso, a medida desses comprimentos são equivalentes às unidades dos números que lhes são associados.

Assim, o segmento OB, cujo comprimento mede duas vezes a unidade, estará associado ao número natural 2. Do mesmo modo, o segmento OF que é composto de seis vezes a medida do segmento unitário, estará associado ao número 6; e assim por diante. Portanto, um número é maior que outro quando estiver posicionado à sua direita ou se o comprimento associado a si for maior em comparação ao outro número.

2.2.7 Intervalo Numérico

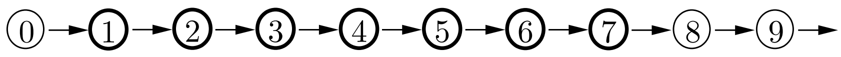
Considerando a estrutura de ordem dos números naturais e as relações de igualdade e desigualdade, sejam a e b números naturais, com $a < b$, define-se os seguintes conjuntos, chamados de intervalos numéricos:

- $[a, b]$ o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x \leq b$;
- (a, b) o conjunto dos números naturais x tais que $a < x < b$;
- $[a, b)$ o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x < b$;
- $(a, b]$ o conjunto dos números naturais x tais que $a < x \leq b$.

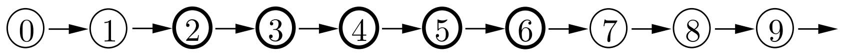
O conjunto [a, b] é chamado de intervalo fechado, enquanto o conjunto (a, b) é chamado de intervalo aberto. Por sua vez, os conjunto [a, b) e (a, b] são chamados de intervalos semiabertos ou semifechados.

Exemplos:

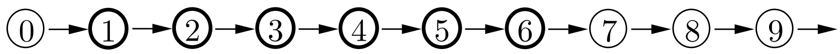
O intervalo $[1, 7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:



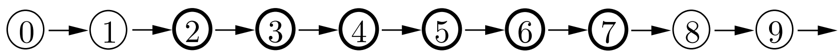
O intervalo $(1, 7) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$:



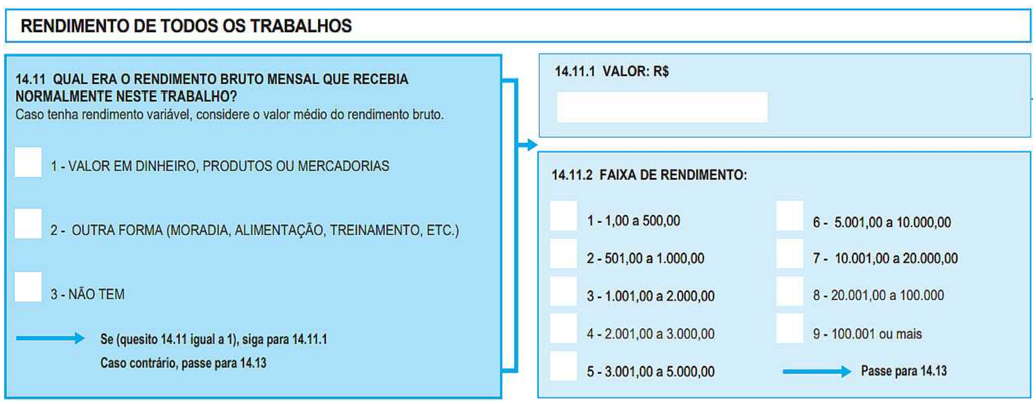
O intervalo $[1, 7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:



O intervalo $(1, 7] = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:



Problema 1.1. O questionário estatístico de amostragem do Censo Demográfico 2022, aplicado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), continha no registro das respostas as chamadas faixas ou classes numéricas. Veja a seguir.



RENDIMENTO DE TODOS OS TRABALHOS

14.11 QUAL ERA O RENDIMENTO BRUTO MENSAL QUE RECEBIA NORMALMENTE NESTE TRABALHO?
Caso tenha rendimento variável, considere o valor médio do rendimento bruto.

1 - VALOR EM DINHEIRO, PRODUTOS OU MERCADORIAS

2 - OUTRA FORMA (MORADIA, ALIMENTAÇÃO, TREINAMENTO, ETC.)

3 - NÃO TEM

Se (quesito 14.11 igual a 1), siga para 14.11.1
Caso contrário, passe para 14.13

14.11.1 VALOR: R$

14.11.2 FAIXA DE RENDIMENTO:

1 - 1,00 a 500,00
2 - 501,00 a 1.000,00
3 - 1.001,00 a 2.000,00
4 - 2.001,00 a 3.000,00
5 - 3.001,00 a 5.000,00
6 - 5.001,00 a 10.000,00
7 - 10.001,00 a 20.000,00
8 - 20.001,00 a 100.000
9 - 100.001 ou mais

Passe para 14.13

Fonte: https://censo2022.ibge.gov.br/sobre/questionarios.html

Represente na forma de intervalo numérico, até a terceira faixa de rendimento, destacando os limites inferior e superior de cada classe.

Solução:

1ª) [1, 500]; 2ª) [501, 1.000] e 3ª) [1001, 2.000].

Capítulo 3
Operações Aritméticas Fundamentais

As operações fundamentais da aritmética são a base ou fundamento para as demais que delas derivam. Em termos simples, são um conjunto de procedimentos e regras que permitem associar um par de números à um único número. Assim, para que uma operação aritmética esteja completamente definida num conjunto considerado, é necessário que, para todo par de números, haja um único número correspondente no conjunto em questão.

3.1 Disposições Gerais

São quatro as operações aritméticas fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão.

3.1.1 Classificação

De acordo com a forma que os números são relacionados e com processo de obtenção do resultado, as operações podem ser agrupadas em:

I . Direta (ou Composição) – a ideia é relacionar dois ou mais número de forma a compor um terceiro que os resume, ou melhor, associar as partes para compor um todo. As operações desse tipo são a adição, multiplicação e potenciação;

II . Inversa (ou Decomposição) – a ideia é relacionar dois números de modo a desassociar um deles do outro, afim de obter um terceiro, ou seja, decompor um a partir de outro. As operações desse tipo são a subtração, divisão, radiciação e logaritmação.

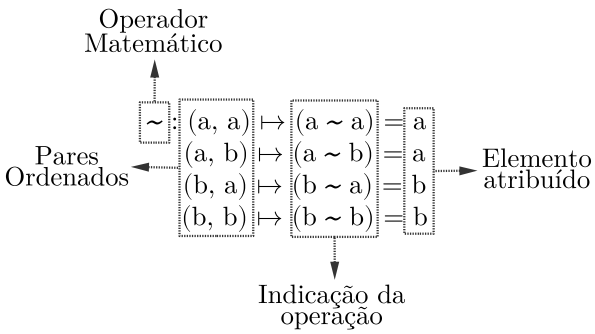
De forma geral, cada operação direta possui sua correspondente inversa. Diante disso, o que uma operação direta "faz", em termos de composição ou formação de um número, a correspondente inversa necessariamente "desfaz", em outras palavras, reverte a operação retornando ao número inicial.

A tabela a seguir apresenta as operações diretas e suas correspondentes inversas.

Operações Aritméticas				
Diretas	Adição	Multiplicação	Potenciação	
Inversas	Subtração	Divisão	Radiciação	Logaritmação

3.1.2 Noção Geral de Operação Matemática

Considere o conjunto genérico A = {a, b} e o seu produto cartesiano A×A = {(a, a);(a, b);(b, a);(b, b)} que, por sua vez, apresenta pares ordenados como elemento. Agora, mediante certa regra ou critério fixado, estabelece a operação *til*, que será indicada pelo símbolo (∼). Essa operação atribuirá a cada par de A×A um único elemento, como representado no esquema a seguir.



No exemplo acima, temos a operação *til* (∼) que associa dois números à um terceiro, que no critério que foi fixado fixado deve igual ao primeiro elemento do par ordenado.[1]

Diante desses pressupostos, percebe-se que uma operação matemática define a lei que estabelecerá a formação de um número. Na definição desta lei considera-se critérios

1. O par de números são chamados, em conjunto, de termos, e o elemento associado chama-se de resultado.

lógico-matemático ou arbitrários. Adicionalmente, é possível elaborar uma tabela de dupla entrada que destaque os termos e o resultado da operação.

$$\begin{array}{r|cc} & \overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{\text{Linha de entrada}} & \\ \text{Operação Matemática} \longleftarrow \sim & a & b \\ \hline \text{Coluna de entrada} \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right. & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \end{array}$$

Outro detalhe é o emprego de uma notação para indicar a operação til, como:

$$a \sim b = a.$$

3.2 Adição

Definição 3.1. É um operação matemática de composição, cujo critério que a define consiste na obtenção de um número que seja equivalente a junção de outros dois ou mais números.

Em termos simples, a adição é aplicada quando se deseja reunir quantidades a fim de que seu resultado seja uma espécie de resumo. Desse modo, os verbos somar, adicionar, unir, juntar, agregar, dentre outros, fazem referência à operação de adição. O operador matemático utilizado na adição é chamado de sinal de adição (+), que na linguagem verbal da língua equivale à «mais» ou «adicionado de». Veja a notação da adição a diante.

$$+:(a, b) \longrightarrow \underbrace{\boxed{a + b}}_{\text{Parcelas}} = \boxed{s} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{Soma} \\ \text{ou} \\ \text{Total}\end{array}$$

A sentença pode ser lida como: «a mais b é igual a s» ou «a adicionado de b, é igual a s».

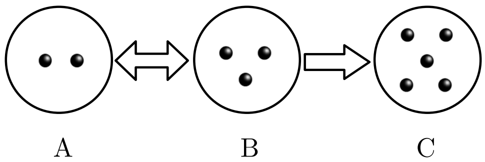
Exemplo: $(2, 3) \longrightarrow 2 + 3 = 5$. (dois mais três é igual a cinco/dois adicionado de três é igual a cinco).

Alguns princípios da adição são:

I . As parcelas de uma adição devem ser quantidades de mesma espécie;

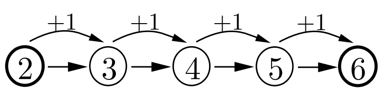
II . A soma é da mesma espécie das parcelas.

Para entender a adição de forma intuitiva, considere o conjunto A, cujo o cardinal é igual a 2, e o conjunto B, cujo o cardinal é 3. Se desejamos obter um conjunto a qual o seu cardinal resuma os cardinais dos conjuntos supracitados, então utilizamos a operação de reunião entre conjuntos. Graficamente pode-se representar essa situação como a seguir.



Outra ideia intuitiva que é possível associar a operação de adição é a contagem sucessiva. Como visto na Sucessão dos Números Naturais, adicionando uma unidade à um número natural qualquer, obtém-se o sucessivo na sequência. Podemos usar essa propriedade e associá-la à adição. De modo que, partindo de um número qualquer da sequência, realizamos adições unitária até chegarmos num número que represente à soma do número inicial com aquele que representa a união das unidades adicionadas.

Exemplo: partindo do 2 e adicionando-se 4 unidades, obtém-se o número 6. Veja a representação gráfica a seguir.



3.2.2 Algoritmo de Cálculo

O método utilizado como técnica para obtenção do resultado da adição é chamado de algoritmo da adição. A sua forma de execução está descrita a seguir.

1º) Empilha-se cada número, de modo que todos os algarismos de uma ordem estejam alinhados verticalmente, formando uma espécie de coluna de algarismos;

2º) Iniciando da coluna das unidades (estrema direita), adiciona-se todas unidades simples que a compõe;

3º) Caso a soma anterior seja superior à nove, mantém-se o algarismo de primeira ordem dessa soma e, em seguida, transfere-se o algarismo de segunda ordem para coluna imediatamente superior;

4º) Por outro lado, se a soma for igual ou menor à nove, mantém-se esse valor como soma da coluna;

5º) Repete-se o processo até a última coluna, ou melhor, até à maior ordem (extrema esquerda), até que não haja mais unidades de uma ordem a serem adicionadas.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} & \\
 & 11 & 11 & & \\
 & & & 11 & \\
1 & 1 & 1 & & + \\
3 & 6 & 2 & 8 & \\
1 & 4 & 8 & 3 & \\
\hline
5 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Exemplo: qual é a soma de 3628 e 1483? Utilizando a notação matemática da adição indica-se: $3628 + 1483 = 5111$.

Uma outra forma de realizar esta adição é através da decomposição de cada parcela. Veja.

$$
\left.\begin{array}{l}
3628 = 3000 + 600 + 20 + 8 \\[1em]
1483 = 1000 + 400 + 80 + 3
\end{array}\right\} (3000 + 1000) + (600 + 400) + (20 + 80) + (8 + 3) = 5111
$$

Problema 3.1. Numa biblioteca pública, a pessoa responsável pelo controle dos livros, costuma registrar a quantidade de livros emprestados aos usuários do serviço. Ao fim do primeiro mês, foi anotado uma quantidade de 2534 livros. No segundo mês, por sua vez, o registro foi de 3421 livros. Por último, ao fim do terceiro mês, registrou-se 4867 livros que foram cedidos temporariamente. Durante esse trimestre, e considerando que cada usuário pegou somente um livro para ler, qual foi o total de pessoas beneficiadas pelo serviço bibliotecário?

Solução:

A ideia central do problema é resumir, numa só quantidade, o total de unidades de livros que foram emprestadas durante o trimestre. Dessa maneira, empregaremos a operação de adição para obtenção desta soma.

$$\underbrace{2534}_{1^{\text{o}}\text{ mês}} + \underbrace{3421}_{2^{\text{o}}\text{ mês}} + \underbrace{4867}_{3^{\text{o}}\text{ mês}} = ?$$

$$\begin{array}{rl} 2534 & \\ 3421 & + \\ 4867 & \\ \hline 10822 & \end{array}$$

Portanto, ao fim do trimestre, o total de usuários beneficiados pelo serviço bibliotecário foi 10.822.[1]

1. Pode-se pensar que esta soma equivale à uma situação onde os livros fossem emprestados num único mês. Ou melhor, emprestar 2.534 livros no primeiro mês, depois 3.421 livros no segundo mês e, por fim, 4.867 livros no terceiro mês; é mesmo, quantitativamente, que emprestar 10.822 num único mês.

3.2.3 Propriedades da Adição

Quando se está operando com números numa adição, há regularidades chamadas de propriedades que sempre ocorrem. Estas ocorrências podem ser úteis na obtenção do resultado, na sua validação ou na demonstração de um raciocínio desenvolvido. Veja as propriedade da adição a seguir.

- **Propriedade Comutativa**

É possível perceber na tabela de dupla entrada da adição, que se considerarmos um valor para o primeiro elemento do par e outro para o segundo elemento, e depois invertermos as posições dessa escolha, a soma obtida é exatamente a mesma. Assim, por exemplo, $(2, 4) \longrightarrow 2 + 4 = 6$ e $(4, 2) \longrightarrow 4 + 2 = 6$.

Generalizando essa regularidade, tem-se:

A alteração da posição das parcelas adicionadas não altera a soma obtida.

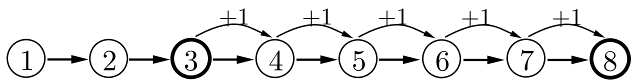
Em símbolos

$$\boxed{a + b = b + a}$$

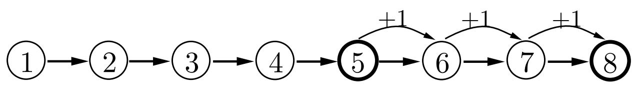
Isso ocorre, pois, mesmo alterando a posição inicial das parcelas, o número de unidades de cada termo não sofre modificação, por conseguinte, a reunião dessas unidades (soma) permanecerá também inalterada.

Exemplo: partindo do 3 e adicionando-se 5 unidades, qual número obtemos? E caso partíssemos do 5 e adicionássemos 3 unidades, que número obteríamos?

Veja na ilustração as duas situações.



Desenho 8: partindo do 3 e adicionando-se 5 unidades.



Desenho 9: partindo do 5 e adicionando-se 3 unidades.

Como se pode perceber, em ambos casos o número obtido é 8, demonstrando a validade da propriedade comutativa da adição.

- **Propriedade Associativa**

Como vimos a operação de adição envolve pares, ou melhor, a cada dois termos associa-se um terceiro. Dessa maneira, sempre que é necessário adicionar mais de duas parcelas, o processo de cálculo deverá ser feito através de adições parciais, até que ao final se tenha a soma.

Exemplo. Qual a soma associada aos termos 125, 320 e 96?

$$(125,\ 320) \longrightarrow 125 + 320 = 445.$$

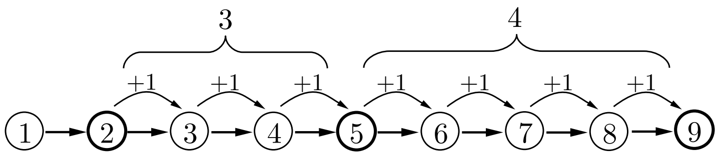
A soma obtida na adição parcial acima agora comporá uma nova adição, de modo que será considera uma parcelas. $(445,\ 96) \longrightarrow 445 + 96 = 541$.

Portanto, $125 + 320 + 96 = 541$.

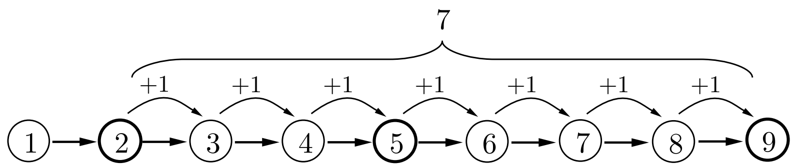
Algumas observações importantes são:

1) A escolha das parcelas que serão associadas, duas a duas, é livre e não altera o resultado final;
2) A ordem de realização das adições entre os resultados parciais, também não modifica o resultado final;
3) O número de adições realizadas é uma unidade menor que o números de parcelas.

Exemplos:



Desenho 10: Partindo de 2, adicionando-se 3 e, em seguida, adiciona-se 4.



Desenho 11: Adiciona-se 3 e 4, obtendo-se 7, por fim, adiciona-se 7 unidades à 2.

Como se pode notar, adicionar 3 unidades a 2 e, posteriormente, adicionar mais 4 unidades, é mesmo que adicionar 7 unidades de uma só vez.

Assim, enuncia-se:

Quando o número de parcelas excede dois, associa-se dois a dois termos, de modo a obter somas parciais de cada associação, estas somas, por sua vez, formarão novas adições, até que se obtenha um só termo.

Em símbolos

$$\underbrace{(a + b)+...+(w+z)}_{\text{parcelas}} = \underbrace{s_1+...+s_n}_{\text{somas parciais}} = s$$

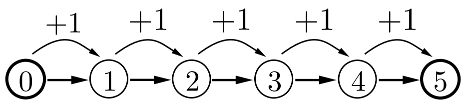
- **Propriedade do Elemento Neutro**

O número zero tem uma característica especial na adição. Um número quando adicionado de zero ou, equivalentemente, zero adicionado de um número qualquer, a soma é igual ao outro termo. Em termos simples, quando uma ou mais parcelas for igual a zero, podemos desprezá-la(s) sem prejuízo ao cálculo da soma.

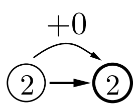
Isso decorre porque o zero nos remete a ideia de vazio, ou melhor, um conjunto que não possui elemento alguma. Em símbolos:

$$\boxed{0 + a = a + 0 = a}$$

Exemplos:



Desenho 12: partindo do 0 e adicionando 5 unidades, obtém-se a soma igual a 5.



Desenho 13: partindo do 2 e adicionando 0 unidades, obtém-se a soma igual a 2.

3.3 Multiplicação

Há situações onde as parcelas que se deseja adicionar possuem todas a mesma quantidade de unidades, ou melhor, os termos são todos iguais. Exemplo: qual a soma do número de dias correspondente à quatro semanas?

Sabe-se das situações diárias que uma semana corresponde a sete dias. De posse dessa recordação, é possível obter a soma requisitada.

$$\underbrace{7 \text{ dias}}_{\text{Semana 1}} + \underbrace{7 \text{ dias}}_{\text{Semana 2}} + \underbrace{7 \text{ dias}}_{\text{Semana 3}} + \underbrace{7 \text{ dias}}_{\text{Semana 4}} = 28 \text{ dias.}$$

Uma forma equivalente, mas simplificada, de indicar a adição acima, é indicar a quantidade de termos e uma única vez o seu valor numérico — já que todos os termos são iguais, dispensa-se as demais indicações.

Assim, em detrimento de escrever uma adição de termos repetidos, escreve-se uma indicação do número de termos e a quantidade de unidades de um só termo. No exemplo acima, a quantidade de termos é equivalente ao número de semanas, enquanto o valor numérico de cada termo é equivalente ao número de dias de uma semana. Assim, indicaremos:

$$7 + 7 + 7 + 7 = \underbrace{\boxed{7}}_{\substack{\text{Quantidade de dias}\\ \text{de uma semana}}} \times \overbrace{\boxed{4}}^{\substack{\text{Número total}\\ \text{de semanas}}} = \boxed{28} \longrightarrow \text{Total de dias}$$

De modo geral, quando numa adição há n parcelas iguais, com $n \geq 2$, cujo valor de cada uma é m unidades, indicaremos por: $m \times n = p$. Onde os termos m e n são chamados de fatores e p, o resultado, de produto. A expressão pode ser lida como «m vezes n é igual a p» ou «m multiplicado por n é igual a p».

Exemplos:

- $5 \times 4 = 20$ (cinco vezes quatro é igual a vinte);

- $8 \times 3 = 24$ (oito multiplicado por três é igual a vinte e quatro);
- $1 \times 5 = 5$ (um vezes cinco é igual a cinco);

Definição 3.2. A multiplicação é uma operação que relaciona dois termos, buscando determinar um terceiro, que contenha um daqueles, quantas vezes às unidades do outro indicar.

Dessa maneira, a multiplicação é uma operação de composição que busca resumir, num só número, a adição de parcelas repetidas tantas vezes quanto indicar às unidades de outro número. O termo que se repete é chamando de multiplicando, enquanto o termo que indica a repetição é denominado de multiplicador.

Assim, na sua forma expandida, o primeiro termo (multiplicando) é repetido quantas vezes indicar as unidades do segundo (multiplicador). Exemplo: $5 \times 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35$

De forma equivalente, diz-se que 35 está para 5 assim como 7 está para 1:

$$\frac{35}{5} = \frac{7}{1} \iff \frac{5+5+5+5+5+5+5}{5} = \frac{1+1+1+1+1+1+1}{1}$$

Dizemos, pois, que o produto está para o multiplicando assim como o multiplicador está para a unidade.

$$\frac{produto}{multiplicando} = \frac{multiplicador}{unidade} \iff \frac{p}{m} = \frac{n}{1} \iff p = m \times n$$

3.3.2 Consequências da definição

Em razão da definição, se m for o multiplicando, n o multiplicador e p o produto, tem-se:

- Se n = 1, tem-se: p = m;

Quando o multiplicador for igual a unidade, o produto será igual ao multiplicando.

Exemplos:

$$5 \times 1 = 5;$$

$$8 \times 1 = 8;$$
$$2 \times 1 = 2$$

Aqui pode-se pensar na ideia de adição de parcelas iguais sucessivamente. Assim, partindo do zero, adicionando o cinco uma única vez, temos: $0 + 5 = 5$.

De modo geral: $m \times 1 = 0 + m = m$. Portanto, $p = m$.

• Se $n > 1$, então $p > m$;

Como o produto contém o multiplicando quantas unidades indicar o multiplicador, então se o multiplicador for maior que a unidade, implica que o produto será maior que o multiplicando, pois o conterá mais de uma vez.

Exemplo:

$$8 \times 2 = 16, \text{ como } 2 > 1, \text{ então } 16 > 8;$$
$$3 \times 4 = 12, \text{ como } 4 > 1, \text{ então } 12 > 3;$$

De modo geral: se $m \times n = p$, $n > 1$, então $p > m$.

• Se $n = 0$ e $m \neq 0$, então $p = 0$.

Quando o multiplicando for um número diferente de zero, e o multiplicador for igual a zero, então o produto será igual a zero.

Exemplos:

$$5 \times 0 = 0;$$
$$3 \times 0 = 0;$$
$$100 \times 0 = 0.$$

De forma geral: $m \times 0 = 0$.

Podemos pensar que, partindo do zero, adicionamos o multiplicando zero vezes. Assim, permaneceremos no zero. Veja: $m \times 0 = 0 + 0 = 0$.

Como se pode imaginar, caso $n < 1$ então $p < m$, mas em razão desse caso fugir do universo dos números naturais, cujo foco da nossa abordagem é tal, não nos aprofundaremos nesta discussão.

3.3.3 Ideias Associadas à Multiplicação

A ideia da multiplicação como uma adição repetida, remete ao processo de contagem agrupada, isto é, quando se realiza a contagem de dois em dois, três e três etc. Assim, uma forma rápida de contar um conjunto de objetos é, em detrimento de utilizar a unidade simples, usa-se um agrupamento de unidades.

Para contar um conjunto de dez elementos, por exemplo, agrupa-se de dois em dois e enuncia-se: dois, quatro, oito, dez. Assim, partindo do zero e adicionando sucessivamente duas unidades até obter o total. Veja:

$$\begin{aligned} 0 + 2 &= 2; \\ 2 + 2 &= 4; \\ 4 + 2 &= 6; \\ 6 + 2 &= 8; \\ 8 + 2 &= 10. \end{aligned}$$

3.3.4 Forma Expandida da Multiplicação

Como já dito, a operação de multiplicação deriva da ideia de uma adição de parcelas iguais. Assim, sempre que houver a indicação de uma multiplicação é possível expandi-la à uma adição de termos repetidos e vice-versa.

Exemplo: escreva de forma simplifica a expressão $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$.

Todas as parcelas ou termos são iguais, representam o mesmo número de unidades, assim, basta determinar, por contagem, a quantidade de termos para aplicar a definição da multiplicação.[1] Dessa maneira, como há dez termos, indica-se esta adição por: 5×10.

Exemplo: numa sala de aula a disposição das cadeira é do tipo retangular, ou melhor, a quantidade de cadeira por fila é a mesma. Sabe-se que a quantidade de cadeira

1. A ideia de multiplicação como uma adição sucessiva de parcelas iguais, partindo-se do zero, remete à um dos conceitos centrais da Aritmética: a ideia de múltiplo de um número.

por fila é igual a 8, bem como o número de filas é igual a 5. Determine quantas cadeiras há nesta sala.

Total de fila

Cadeiras em cada fila

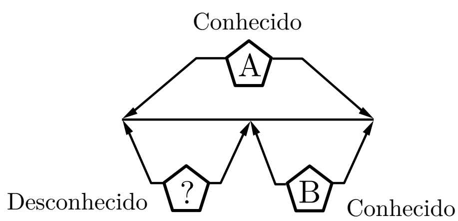
$$8\times 5 = \underbrace{8 + 8 + 8 + 8 + 8}_{\text{Expansão}} = 40$$

Total de cadeiras

Portanto, a quantidade de cadeiras na situação descrita é igual a 40 unidades.

3.4 Subtração

Definição 3.4. A subtração é uma operação inversa à adição, cujo o objetivo de sua aplicação é, partindo de uma soma de termos, e tendo-se o valor de um desses termos, determinar o outro termo complementar.



Desenho 14: noção geral da subtração

Dessa maneira, o termo complementar, chamado de diferença, excesso ou resto, é o resultado da operação; enquanto a soma é chamada de minuendo, e a outra parte conhecida é chamada de subtraendo.

O operador matemático da subtração é o signo $(-)$, que na linguagem comum tem equivalência à palavra «menos», ou às expressões «subtraído de», «reduzido de» etc. Assim, seja m o minuendo, s o subtraendo e d a diferença, tem-se:

$$\boxed{\text{minuendo } (m) - \text{subtraendo } (s) = \text{diferença } (d)}$$

Mas o que exatamente significa o resultado dessa operação? A diferença representa: as unidades que faltam ao subtraendo para que seja igual ao minuendo (ideia de complementar); o excesso do minuendo em relação ao subtraendo, ou melhor, quantas unidades o minuendo supera o subtraendo (ideia de comparação); as unidades que sobram, quando retiramos o subtraendo do minuendo (ideia de resto).

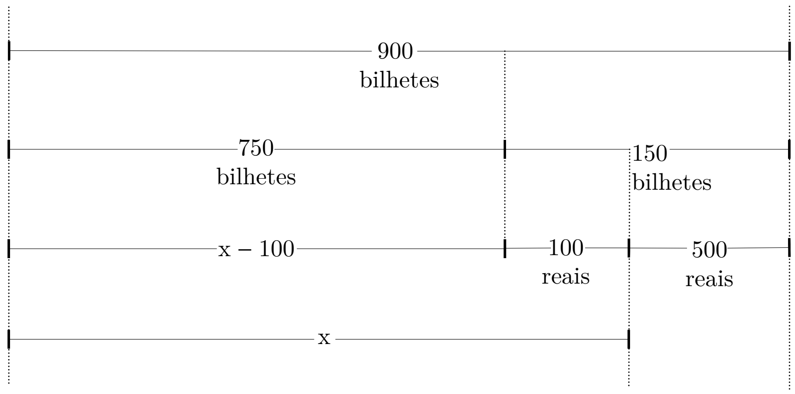
A subtração só está completamente definida no conjunto dos números naturais caso se aplique à Regra Geral de Ordem ($\leq$), de modo que o minuendo seja maior ou igual ao subtraendo. Do contrário, a soma do subtraendo e a diferença não seria igual ao minuendo e a relação fundamental da subtração não se aplicaria, pois a soma de dois números, no conjunto dos números naturais, é sempre igual ou maior que cada parcela envolvida.

Expressões como $2 - 4$, portanto, não apresentam nenhum significado, já que não há um número natural que possa ser associado à esse par de números nessa operação. Tal impasse, inclusive, é o que motiva a ampliação da subtração ao conjunto dos números inteiros.

Problema 3.3. Para ganhar 500 reais no sorteio de uma moto, foram produzidos 900 bilhetes. Porém, não se venderam mais que 750 bilhetes e se originou uma perda de 100 reais. Qual é o valor da moto?

Solução

Podemos inferir que o objetivo do proprietário da motocicleta era obter o valor da motocicleta mais R$ 500,00 de lucro. Dessa maneira, o valor total arrecadado com a venda dos bilhetes deve exceder o valor avaliado da motocicleta.



Desenho 15: esquematização da situação-problema

Com auxílio do diagrama acima, podemos deduzir que com a redução no número de bilhetes em 150 unidades ($900 - 750$), houve uma queda no valor arrecadado de R$ 600,00, sendo este valor a soma dos R$ 500,00 esperado como lucro e com os R$ 100,00 de prejuízo abatido no valor da motocicleta.

Além disso, o valor da motocicleta, denotado por x, como se observa, é dado pela soma da arrecadação correspondente à venda de 750 bilhetes mais R$ 100,00 da situação do prejuízo. Dessa maneira, vamos determinar a arrecadação da venda dos 750 bilhetes, sabendo que a cada 150 bilhetes vendidos corresponde uma arrecadação de R$ 600,00.

- $750 - 150 = 600$;
- $600 - 150 = 450$
- $450 - 150 = 300$;
- $300 - 150 = 150$;
- $150 - 150 = 0$.

Do exposto acima, entende-se que $750 = 5 \times 150$. Adicionalmente, como 150 bilhetes vendidos equivale à uma arrecadação de R$ 600,00, então: $5 \times 150 \iff 5 \times 600{,}00 = 3.000{,}00$. Logo, o valor da moto é dado pela soma $3.000{,}000 + 100{,}00 = 3.100{,}000$. Portanto, a moto é avaliada em R$ 3.1000,00 (três mil e cem reais).

Observações:

Como se pode perceber, a subtração e divisão guardam uma relação de compatibilidade, pois ao invés de termos subtraído o mesmo valor várias vezes, poderíamos ter aplicado à divisão uma única vez. Dessa forma, dizemos que a divisão equivale à uma sequência de subtrações sucessiva, sendo o subtraendo é constante.

3.4.2 Adição e Subtração: Operações Inversas

Como visto, na operação de adição, a partir de dois números, obtemos uma soma que os resume num só número. Por outro lado, na subtração, dado uma soma e um dos valores que a compõe, obtemos o outro. Assim, enquanto a adição compõe uma soma, a subtração a decompõe. Este fato nos permite obter a verificação da validade do resultado, o que se chama de prova.

Exemplo:

Prova da Subtração

$$\begin{array}{r} 9\,7\,5\,2 \\ -\ 1\,3\,5\,0 \\ \hline 8\,4\,0\,2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 8\,4\,0\,2 \\ +\ 1\,3\,5\,0 \\ \hline 9\,7\,5\,2 \end{array}$$

Prova da Adição

Do exposto, destaca-se a seguinte relação:

$$\boxed{\text{minuendo} = \text{diferença} + \text{subtraendo}}$$

Assim, esta tem por objetivo encontra o número, a diferença, que somado ao subtraendo, resulte no minuendo. Logo, calcular a diferença $10 - 4$, significa encontra o valor que somado à 4, resulte em 10, ou seja, o número 6: $10 = 6 + 4$.

3.4.3 Algoritmo da Subtração

Para obter a diferença entre números que possuem mais de um algarismo, números polidígitos, é necessário recorrer à um procedimento chamado de algoritmo da subtração, que é dotado de um número finitos de etapas, uma espécie de método passo a passo. Veja:

1º) Empilha-se cada número, de modo que todos os algarismos de uma ordem estejam alinhados verticalmente, formando uma espécie de coluna de algarismos;

2º) Iniciando da coluna das unidades (estrema direita), subtrai-se as unidades do algarismo inferior do que está sobre este, obtendo a diferença das unidades simples;

3º) Na etapa anterior, caso o algarismo superior seja menor que aquele que está sob ele, decompõe-se uma unidade da ordem superior, de modo que possamos ter dez unidades adicionadas ao valor do algarismo em questão, tornando-o igual ou maior ao outro;

4º) Repete-se o processo até a última coluna, ou melhor, até à maior ordem (extrema esquerda), até que não haja mais diferenças a serem obtidas.

Exemplo: qual a diferença entre 9.345 e 4.456 ? A seguir tem-se a utilização desse algoritmo de cálculo.

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 12 & 13 & \\ - & \cancel{9} & \cancel{3} & \cancel{4} & 15 \\ & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 6 & 8 & 8 & 9 \end{array}$$

3.5 Divisão

Definição 3.5. É uma operação matemática inversa à multiplicação, cujo o objetivo é dado o produto de dois fatores (dividendo) e um dos fatores (divisor), determinar o outro fator (quociente).

A notação matemática utilizada para indicar essa operação pode ser uma das seguintes.

$$\mathrm{D} \div \mathrm{d} = \mathrm{q}; \qquad \mathrm{D}/\mathrm{d} = \mathrm{q}; \qquad \mathrm{D} : \mathrm{d} = \mathrm{q}; \qquad \frac{D}{q} = q.$$

Assim sendo, dividir é achar quantas vezes um número contém outro. O número que se divide chama-se dividendo (D); o número pela qual se divide chama-se divisor (d); o resultado da operação chama-se quociente; e a quantidade de unidades que em algumas operações fica por dividir, chama-se resto. Adicionalmente, os verbos dividir, repartir, fracionar, distribuir, segmentar, particionar, parcelar, dentre outros, fazem referência à operação de divisão.

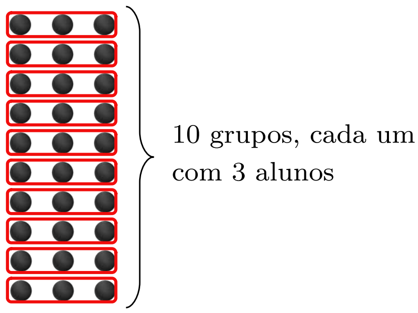
Emprega-se a divisão quando se deseja:

- determinar quantas vezes um número contém outro — ideia de comparação;
- determinar quantas unidades cada parte de uma divisão apresenta — ideia de repartição;
- formar grupos ou conjuntos, com mesmo número de elementos, a partir de uma quantidade inicial — ideia de agrupamento;
- designar quantas unidades de um número, corresponde uma unidade de outro — ideia de proporção;

Exemplo: numa turma há 30 alunos e deseja-se formar trios para composição de equipes de trabalho. Quantos trios é possível formar?

A ideia envolvida nesse problema é a formação de agrupamento com mesma quantidade de elementos a partir da quantidade dada. Assim, determinar quantos grupos de três alunos (trio) é possível formar de um total de 30 alunos. Neste caso, a operação será denotada por $30 \div 3$.

Pode-se obter esse resultado por meio da ideia ligada à multiplicação, pensando que cada grupo corresponde três alunos, então 30 alunos corresponderá quantos grupos? Como 3 equivale o triplo da unidade (cada grupo), então 30 corresponderá ao triplo do número de trios que será formado. Pela tabuada da multiplicação, sabe-se que 30 é o triplo de 10. Assim, numa turma de 30 alunos é possível formar 10 trios. Em símbolos: $30 \div 3 = 10$.



Desenho 16: situação ilustrativa da ideia de agrupamento no problema

3.5.2 Relação Fundamental da Divisão

A relação entre os termos de uma divisão, a qual é possível verificar o resultado obtido, é dado por:

$$\boxed{\text{Dividendo (D)} = \text{quociente (q)} \times \text{divisor (d)} + \text{resto (r)}}$$

Assim, no exemplo anterior podemos verificar a veracidade do resultado: $30 = 10 \times 3 + 0$. De fato, observa-se que a sentença de igualdade é verdadeira, logo o resultado obtido é válido. É através dessa relação fundamental estabelece-se também a divisão como sendo uma operação inversa à multiplicação.[1]

A divisão só está completamente definida no conjunto dos naturais, assim como a subtração, caso obedeça à Relação Geral de Ordem ($\leq$), de modo que o dividendo deve ser igual ou maior que o divisor. Do contrário, a Relação Fundamental da Divisão não seria aplicável, pois não haveria um número natural que multiplicado pelo divisor e somado ao resto resultasse no dividendo. Isso é, a propósito, o que motivou a ampliação da divisão aos números racionais.

Outro detalhe é que o divisor deve ser diferente de zero, pois qualquer par de números onde o divisor fosse zero e o minuendo fosse não nulo, não haveria um, e apenas um, quociente associado ao resultado. E como se sabe, uma operação matemática deve ser definida de modo que qualquer par de números que se aplique essa operação resulte num único número. Por outro lado, quando tanto o minuendo quanto o divisor é zero, então a operação também não é definida, mas neste caso por indeterminação, isto é, por não haver apenas um valor que satisfaça seu resultado, mas sim diversos.

1. A divisão só pode ser dita inversa à multiplicação nas situações onde a divisão for exata, ou melhor, o resto for zero. Caso contrário, para que igualdade se verifique é necessário realizar à adição do resto e o produto do quociente pelo divisor, o que descaracteriza a inversibilidade.

Considerações Finais

Ao longo do processo de idealização e construção desta monografia, realizou-se uma análise abrangente sobre o tema Aritmética Elementar, com base em um extensa literatura disponível, a fim de desenvolver uma proposta de ensino sobre os números naturais e as operações matemáticas fundamentais.

Nessa proposta, foram considerados fatores que contribuíssem didaticamente com a ressignificação do ato de ensinar, como a adequação da linguagem e o nível de formalidade; a adoção de recursos didáticos visuais ilustrativos; a escolha dos tópicos do tema e a definição da sequência de apresentação e abordagem' dos conteúdos; com vista a cumprir a premissa de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos.

Todavia, é importante reconhecer as limitações dessa proposta, ao passo que opta por apresentar os conceitos por meio de postulados, pela descrição verbal e exemplo pontuais; deixando de lado as demonstrações de teoremas e propriedades através de um tratamento com maior rigo lógico e matemático na construção da teoria.

Apesar disto, espera-se que esse trabalho sirva de repertório para outros que venham a continuar explorando o estudo do tema, de modo a aprofundar o conhecimento e a promover avanços na área; para que assim novas lições de aritmética sejam desenvolvidas e repassadas à diante.

Referências Bibliográficas

[1] TRAJANO, Antônio; Aritmética Progressiva, 78ª ed., Rio de Janeiro, 1948.

[2] HEFEZ, Abramo; Iniciação à Aritmética, Rio de Janeiro, editora IMPA, 2015.

[3] SANGIORGI, Osvaldo; Matemática Curso Moderno, Volume 1, 13ª ed., Rio de Janeiro, 1969.

[4] COPPETTI, Mario; Aritmética, Primer Año de Matematicas, Montevidéu, 3ª ed., editora Mercur S.A., 1967.

[5] BALDOR, Aurélio; Aritmética de Baldor, 2ª ed., México, editora Pátria, 2007.

[6] MORALES, Héctor Gammarra; Aritmética: teoría y práctica, 3ª ed., Lima, editora San Marcos, 2016.

[7] Aritmética: Manual de Preparação Universitária, 1ª ed., Lima, Peru, editora Lexus, 2008.