



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CAMPUS POETA TORQUATO NETO
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE FÍSICA

Maria Clara Ribeiro da Silva

Difusão com Agregação Espontânea de Partículas em 2D: Uma Análise Computacional dos Modelos DLA e DRA

A R T I G O

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em Física
da Universidade Estadual do Piauí Campus Po-
eta Torquato Neto como parte dos requisitos obri-
gatórios para a obtenção do título de Licenciado
em Física.

Orientadora: Prof. Dra. Edina Maria de Sousa Luz

Teresina(PI), Junho de 2025

Difusão com Agregação Espontânea de Partículas em 2D: Uma Análise Computacional dos Modelos DLA e DRA

Diffusion with Spontaneous Particle Aggregation in 2D: A Computational Analysis of the DLA and DRA Models

Maria Clara Ribeiro da Silva[†]

Orientador: Prof. Dra. Edina Maria de Sousa Luz[‡]

[†]maria_c.ribeiro_da_s@aluno.uespi.br, [‡]edina@uespi.br

TCC - Licenciatura em Física - CCN - UESPI | Teresina(PI), Junho de 2025

Resumo

Este trabalho investiga os modelos de Agregação Limitada por Difusão (DLA) e Agregação Reorganizada por Difusão (DRA), com foco na formação de estruturas fractais. Esses modelos computacionais são fundamentais para descrever a formação de estruturas complexas e auto organizadas, essas estruturas são observadas em diversas características da natureza e sistemas físicos. A partir da análise de modelos computacionais, da fundamentação teórica sobre sistemas complexos, auto-organização e geometria fractal, investigamos as características morfológicas e as propriedades dimensionais dos agregados formados nas simulações computacionais do DLA e DRA. A metodologia aplicada envolve uma implementação computacional de algoritmos na linguagem de programação Python e os resultados foram analisados levantados os resultados das configurações finais e a estimativa da dimensão fractal de ambos os modelos e o gráfico da função memória para o modelo DRA.

Abstract

This work investigates the Diffusion-Limited Aggregation (DLA) and Diffusion-Reorganized Aggregation (DRA) models, with a focus on the formation of fractal structures. These computational models are fundamental for describing the formation of complex and self-organized structures, which are observed in various natural features and physical systems. Based on the analysis of computational models and the theoretical framework on complex systems, self-organization, and fractal geometry, we explore the morphological characteristics and dimensional properties of the aggregates formed in DLA and DRA simulations. The applied methodology involves the computational implementation of algorithms using the Python programming language. The results include the final configurations, the estimation of the fractal dimension for both models, and the memory function graph for the DRA model.

Palavras-chave: Agregação Limitada por Difusão, Agregação Reorganizada por Difusão, Fractais, Sistemas Complexos, Sistemas fora do equilíbrio.

Keywords: Diffusion-Limited Aggregation, Diffusion-Reorganized Aggregation, Fractal, Complex Systems, Computational Simulation.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
2.1	O Modelo DLA (Agregação Limitada por Difusão)	3
2.2	O Modelo DRA (Difusão com Agregação e Reorganização)	4
2.3	Sistemas Complexos e Auto-Organização	5
2.4	Dimensão Fractal e Caracterização Geométrica	5
3	METODOLOGIA	6
3.1	Configuração da Rede e Parâmetros	6
3.2	Simulação do Modelo DLA	6
3.3	Simulação do Modelo DRA	6
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	7
4.1	Modelo DLA	7
4.2	Cálculo da Dimensão Fractal	7
4.3	Modelo DRA	8
4.4	Cálculo da Função Memória $C(t)$	9
5	CONCLUSÃO	10
	REFERÊNCIAS	12

1 INTRODUÇÃO

A formação de estruturas complexas a partir de regras simples é um fenômeno amplamente observado na natureza e tem despertado o interesse de diversas áreas da ciência, em especial da Física Estatística e da teoria dos sistemas complexos. Processos como o crescimento de cristais, formação de colônias bacterianas, deposição eletroquímica e padrões de drenagem em solos podem ser descritos por modelos matemáticos e computacionais baseados em interação local e auto-organização.

Dentre esses modelos, destaca-se o da Agregação Limitada por Difusão (DLA), proposto por Witten e Sander em 1981 (JR; SANDER, 1981). O DLA descreve o crescimento de um agregado por meio da adesão irreversível de partículas que se movem aleatoriamente até encontrarem a estrutura principal. Esse processo gera padrões ramificados com morfologia fractal, evidenciando propriedades de auto-similaridade em múltiplas escalas. Contudo, o modelo DLA é limitado à formação estática e não permite reorganização das partículas após a adesão.

Para superar essa limitação, foi proposto o modelo da Agregação Reorganizada por Difusão (DRA), introduzido por Filoche e Sapoval. No DRA, as partículas agregadas podem se deslocar ao longo da superfície do conjunto e realocar-se em novas posições, permitindo que o sistema evolua dinamicamente em direção a estados mais estáveis ou eficientes. Essa abordagem é mais realista para representar sistemas naturais nos quais há mobilidade superficial, como processos biológicos, reorganização celular ou sinterização de materiais. A dimensão fractal dessas estruturas geradas nos modelos DLA e DRA, é estimada como tipicamente em torno de 1,71 em 2D, essa medida quantifica a complexidade e a auto-similaridade da morfologia resultante.

O presente trabalho tem como objetivo principal comparar os modelos DLA e DRA por meio de simulações computacionais em duas dimensões, analisando a morfologia resultante, a dimensão fractal dos agregados e a função memória temporal no caso do DRA. Para isso, utilizamos implementações em Python e ferramentas matemáticas de análise estatística e geométrica, buscando compreender os mecanismos que orientam a emergência de padrões complexos e como pequenas variações nas regras de interação podem impactar a estrutura global do sistema.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A descrição de padrões complexos emergentes a partir de interações locais simples é um dos pilares da física de sistemas fora do equilíbrio. Dentre os modelos mais notáveis que ilustram esse comportamento está a Agregação Limitada por Difusão (DLA), amplamente utilizado para simular processos de crescimento e formação de estruturas ramificadas. Posteriormente, modelos mais realistas como a Agregação Reorganizada por Difusão (DRA) foram introduzidos, permitindo maior flexibilidade na dinâmica de reorganização estrutural.

2.1 O Modelo DLA (Agregação Limitada por Difusão)

Proposto por Thomas Witten e Leonard Sander em 1981, o modelo DLA tornou-se uma referência no estudo de crescimento de padrões fora do equilíbrio (JR; SANDER, 1981). Esse modelo descreve um processo iterativo onde partículas individuais, chamadas "walkers", são lançadas de uma região distante de um "agregado" inicial, geralmente uma única partícula ou uma linha "semente". Essas partículas executam um passeio aleatório, simulando a difusão Browniana, no espaço circundante. Se uma partícula errante colide

com o agregado existente, ela adere irreversivelmente a ele no ponto de contato, tornando-se parte da estrutura crescente. Uma nova partícula é então lançada, e o processo se repete. A simplicidade das regras locais, difusão aleatória e aderência irreversível leva à emergência de uma estrutura global altamente ramificada e porosa, com características fractais (FIOLHAIS, 1988).

A implementação computacional do DLA geralmente ocorre em uma rede (lattice), bidimensional ou tridimensional. As partículas são introduzidas em um círculo (ou esfera) de raio grande, distante do agregado, e movem-se aleatoriamente pelos sítios vizinhos da rede até encontrarem um sítio ocupado pelo agregado ou um sítio adjacente a ele. Ao encontrar o agregado, a partícula para e se fixa permanentemente (FILHO, 2008). Uma característica notável do DLA é o efeito de "screening" ou rastreamento, onde as pontas externas do agregado têm maior probabilidade de capturar novas partículas, enquanto as regiões internas e vales são protegidos, levando ao crescimento preferencial nas extremidades e à formação de "fjords" profundos. As estruturas geradas pelo DLA são exemplos clássicos de fractais.

Sua complexidade geométrica é quantificada pela dimensão fractal (D_f), que para o DLA em duas dimensões (2D) é consistentemente medida em torno de $D_f \approx 1,71 \pm 0,02$ (WITTEN; SANDER, 1983), (BALL; NAUENBERG; JR, 1984). Este valor, significativamente menor que a dimensão do espaço euclidiano ($D=2$), indica que o agregado DLA não preenche o espaço de forma densa, mas possui uma estrutura esparsa e intrincada em múltiplas escalas. O modelo DLA encontrou aplicações na descrição de diversos fenômenos físicos, incluindo eletrodeposição de metais, crescimento de cristais e dendritos (CHISHTY et al., 2013), fratura dielétrica, fluxo viscoso em meios porosos (escoamento Hele-Shaw) e até mesmo em modelos simplificados de crescimento de colônias bacterianas e outras estruturas biológicas.

2.2 O Modelo DRA (Difusão com Agregação e Reorganização)

Apesar de sua relevância, o modelo DLA possui limitações, principalmente a regra de aderência irreversível, que não se aplica a muitos sistemas reais onde as partículas podem se desprender ou rearranjar após a agregação inicial. Embora o DLA capture bem o aspecto da formação inicial de agregados, ele não contempla a possibilidade de reorganização ou mobilidade posterior das partículas. Para incorporar essa dinâmica, Marcel Filoche e Bernard Sapoval (FILOCHE; SAPOVAL, 2000) propuseram o modelo de Difusão com Agregação e Reorganização chamado DRA. O DRA modifica o DLA ao permitir que as partículas, após se agregarem, continuem a se mover sobre a superfície do agregado ou até mesmo se desprendam e retornem ao meio difusivo para, eventualmente, se reagregarem em outro local. Este processo de reorganização introduz um mecanismo de "recristalização" ou "envelhecimento" da estrutura, tendendo a preencher concavidades e a formar estruturas ligeiramente mais compactas que as do DLA puro. Uma característica fundamental do DRA é a conservação da massa total do sistema, as partículas não são perdidas, apenas redistribuídas.

As simulações deste modelo demonstram que, partindo de diferentes condições iniciais (estruturas compactas, lineares ou fractais como as do DLA), o sistema evolui para uma morfologia estatisticamente estável. Essa estrutura de equilíbrio dinâmico também é fractal, mas com uma dimensão ligeiramente superior à do DLA, em torno de $D_f \approx 1,75$ em 2D (FILOCHE; SAPOVAL, 2000). A capacidade do DRA de modelar a evolução morfológica e a reorganização sob a influência de fatores locais (energia de ligação, mobilidade superficial) e globais (concentração de partículas) torna-o um modelo promissor para sistemas mais complexos, como o crescimento de interfaces rugosas, a dinâmica de materiais granulares e, notavelmente, a modelagem do crescimento e evolução da morfologia de

tumores, onde a plasticidade e a reorganização celular são fatores importantes.

2.3 Sistemas Complexos e Auto-Organização

Os modelos DLA e DRA são exemplos emblemáticos de como comportamentos complexos e estruturas intrincadas podem emergir de regras simples em sistemas com muitos componentes interagentes. sistemas complexo são geralmente entendido como um sistema composto por um grande número de elementos (partículas, agentes, células, etc.) cujas interações locais e não lineares dão origem a propriedades e comportamentos coletivos que não são facilmente previsíveis a partir das propriedades dos componentes individuais. Exemplos incluem o clima, ecossistemas, o cérebro humano, mercados financeiros e, no contexto deste trabalho, os agregados DLA/DRA.

Uma propriedade chave frequentemente associada a sistemas complexos é a Auto Organização. Este termo descreve a capacidade de um sistema de formar espontaneamente padrões e estruturas ordenadas sem controle externo ou um plano predefinido. No DLA e DRA, a estrutura fractal final não está codificada nas regras individuais de movimento e agregação das partículas ela emerge espontaneamente da dinâmica coletiva do processo de crescimento. A interação local (colisão e aderência/ reorganização) e o processo de difusão (que conecta diferentes partes do sistema) são suficientes para gerar a ordem global observada na forma do agregado fractal. A auto-organização é um conceito fundamental em física estatística, biologia, química e ciências sociais, explicando a formação de padrões em sistemas tão diversos quanto dunas de areia, colônias de insetos e redes neurais.

2.4 Dimensão Fractal e Caracterização Geométrica

A geometria fractal, introduzida e popularizada por Benoît Mandelbrot ([MANDELBROT, 1982](#)), fornece a linguagem matemática adequada para descrever a morfologia irregular e complexa de objetos como os agregados DLA e DRA. Fractais são conjuntos geométricos que exibem auto-similaridade (ou auto-afinidade) em diferentes escalas de observação, ou seja, partes do objeto se assemelham ao todo. Além disso, fractais frequentemente possuem uma dimensão que não é um número inteiro. A Dimensão Fractal (D_f) é uma medida quantitativa da complexidade de um fractal e de como ele preenche o espaço em que está inserido. Diferentemente da dimensão topológica (0 para um ponto, 1 para uma linha, 2 para uma superfície), a dimensão fractal pode ser fracionária.

Existem várias definições e métodos para calcular a dimensão fractal, sendo um dos mais comuns o método de contagem de caixas (box-counting). Neste método, o objeto fractal é coberto por uma grade de caixas de tamanho ϵ , e conta-se o número de caixas $N(\epsilon)$ que contém alguma parte do objeto. A dimensão fractal é então obtida pela relação

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D_f}, \quad (1)$$

no limite em que ϵ tende a zero, ou seja,

$$D_f = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon} \right]. \quad (2)$$

Para os agregados formados pelo processo de DLA, a dimensão fractal $D_f \approx 1,71$ (em 2D) indica que a estrutura é mais complexa que uma linha $D = 1$, mas menos densa que uma superfície $D = 2$. A estrutura formada ocupa o espaço de forma esparsa, com "buracos" em todas as escalas. A dimensão fractal ligeiramente maior do DRA ($D_f \approx 1,75$ em 2D) reflete sua tendência a formar estruturas um pouco mais compactas devido aos processos de reorganização, embora ainda mantenha uma natureza fundamentalmente fractal e ramificada ([FILOCHE; SAPOVAL, 2000](#)). A dimensão fractal é, portanto, um

parâmetro crucial para caracterizar e comparar quantitativamente as morfologias geradas por diferentes modelos de crescimento e observadas em sistemas reais.

3 METODOLOGIA

Neste trabalho, realizamos simulações computacionais dos modelos DLA e DRA em duas dimensões com o objetivo de analisar comparativamente a formação de estruturas, a dinâmica de reorganização e a caracterização geométrica via dimensão fractal. As simulações foram desenvolvidas em linguagem Python, utilizando as bibliotecas científicas NumPy, Matplotlib e SciPy para manipulação de dados, visualização e ajuste de curvas.

3.1 Configuração da Rede e Parâmetros

Todas as simulações foram realizadas em uma rede quadrada bidimensional de tamanho fixo $L \times L$, com condições de contorno abertas para o DLA e com contornos periódicos para o DRA. O centro da rede foi definido como o ponto inicial de agregação para o DLA e como o centro da estrutura compacta inicial no caso do DRA.

3.2 Simulação do Modelo DLA

O modelo DLA foi implementado da seguinte forma:

- Uma partícula semente é fixada no centro da rede;
- A cada iteração, uma nova partícula é lançada em um dos lados da rede, em uma posição aleatória;
- A partícula realiza uma caminhada aleatória até atingir uma célula vizinha ocupada, momento em que se agrega irreversivelmente;
- O processo se repete até que o número total de partículas seja atingido.

Durante a simulação, o agregado cresce de forma progressiva e ramificada, sendo registrado em etapas para posterior análise da geometria resultante.

3.3 Simulação do Modelo DRA

A implementação do modelo DRA seguiu uma abordagem distinta, com foco na redistribuição de partículas em uma estrutura inicial compacta:

- Inicia-se com uma configuração circular preenchida com partículas (agregado compacto);
- A cada iteração, uma partícula situada na borda do agregado (célula vizinha ao vazio) é escolhida aleatoriamente;
- Essa partícula é removida e submetida a uma caminhada aleatória com número limitado de passos até encontrar uma nova posição disponível na superfície onde possa se reagregar;
- O processo é repetido continuamente, mantendo constante o número total de partículas na rede.

Esse procedimento permite observar a reorganização estrutural sem adição de nova partícula ao sistema.

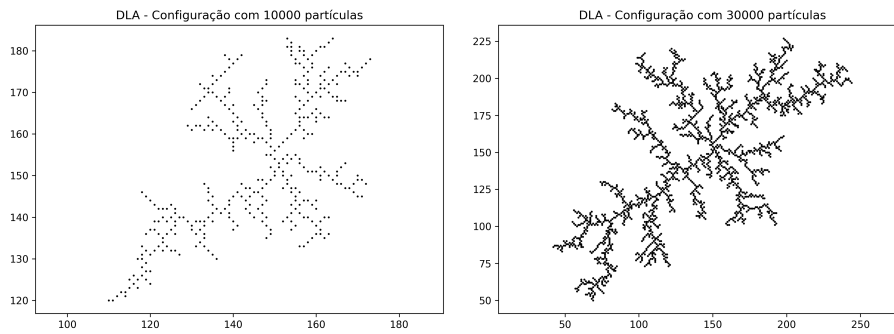
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Modelo DLA

As simulações do modelo DLA foram realizadas em uma rede quadrada de lado $L = 301$. O ponto inicial para agregação foi localizado no meio da rede na posição $(L/2, L/2)$. Os passos seguintes foram implementados de acordo com o descrito na metodologia para o modelo DLA.

A figura 1 mostra o processo de crescimento do DLA em dois tempos $t = 10000$ e $t = 30000$. Em cada tempo t uma partícula é lançada e inicia uma caminhada aleatória que termina quando essa partícula encontra o agregado.

Figura 1: Resultado das simulações do DLA.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A estrutura gerada pelo modelo apresenta uma morfologia típica de agregados formados por difusão com adesão irreversível, são altamente ramificada, com “braços” longos e regiões internas protegidas por efeito de sombreamento. A simulação com 30.000 partículas revela um padrão esparsa, não denso, e com simetria radial aparente. Essa geometria é consistente com os modelos teóricos da literatura e com experimentos de eletrodeposição crescimento de colônias bacterianas.

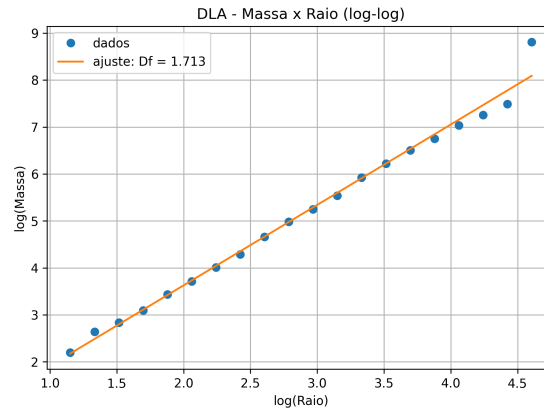
4.2 Cálculo da Dimensão Fractal

A dimensão fractal dos agregados foi determinada por meio do método massa-raio, que consistiu em:

- Calcular o número total de partículas $M(R)$ dentro de círculos concêntricos de raio R centrados no núcleo da estrutura;
- Ajustar uma reta à curva log-log entre $M(R)$ e R ;
- Estimar a dimensão fractal D_f pela inclinação da reta:

$$\log M(R) = D_f \log R + \text{constante.} \quad (3)$$

A dimensão fractal quantifica o quanto a massa do agregado cresce em função do seu tamanho espacial. Para as estruturas ramificadas como mostradas na Figura 1, a distribuição de massa não é compacta. A Figura 2 mostra o gráfico $M(R) \times (R)$, em escala (log-log) para o modelo DLA em $2D$.

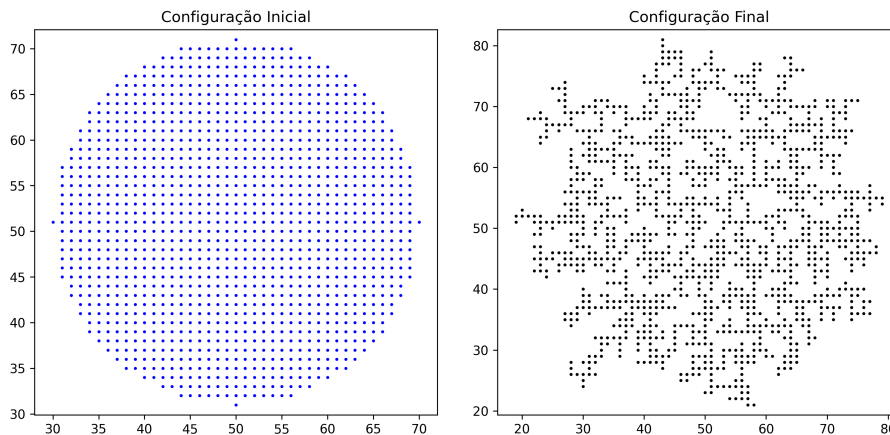
Figura 2: Gráfico do DLA-Massa x Raio.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A linearidade observada no gráfico acima confirma a natureza fractal da estrutura, e a inclinação da reta de ajuste fornece o valor de D_f . No caso apresentado, o ajuste linear resultou em $D_f = 1.713$. Este valor está em boa concordância com os valores esperados para agregados DLA em 2D, indicando que o modelo simulado gera estruturas com características fractais bem definidas, conforme discutido na fundamentação teórica.

4.3 Modelo DRA

Iniciamos o modelo DRA em uma rede quadrada de lado $L = 101$ com uma estrutura circular de raio $r = 20$ localizada no centro da rede, a cada etapa de tempo, uma partícula da superfície é removida e realocada após uma caminhada aleatória, esse processo é chamado de difusão e reorganização aleatória. Nesse processo o número total de partículas é mantido constante, diferente do modelo DLA onde em cada intervalo de tempo, uma partícula é inserida no sistema. Esse processo é repetido diversas vezes até gerar uma estrutura totalmente reorganizada, como mostrado na Figura 3.

Figura 3: Configurações inicial e final de uma simulação DRA.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Embora a reorganização seja um processo lento, observa-se uma transição gradual para uma morfologia mais regular e compacta. Isso evidencia o efeito da mobilidade superficial e da conservação de massa na dinâmica do sistema.

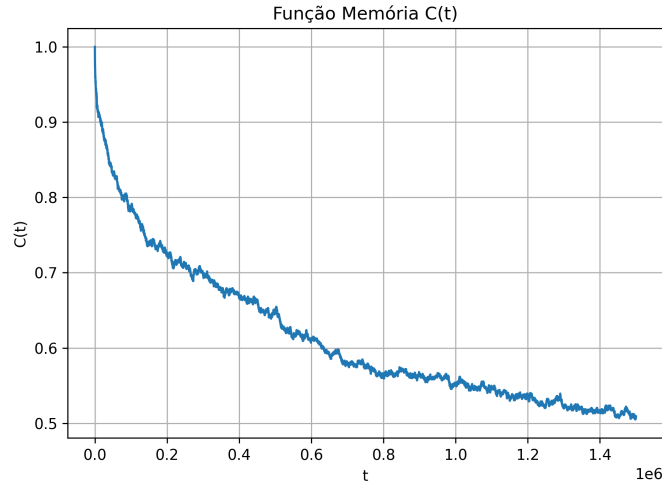
4.4 Cálculo da Função Memória $C(t)$

O processo de reagregação é acompanhado pela função memória $C(t)$, essa função descreve a correlação temporal do sistema. A função memória é definida como:

$$C(t) = \frac{1}{M} \sum_i s_i(0)s_i(t). \quad (4)$$

O comportamento da função memória para o modelo DRA é mostrado na Figura 4. As simulações mostram um decaimento contínuo de $C(t)$, o que indica que parte significativa das partículas mudou de posição em relação à configuração inicial. O comportamento da curva sugere uma dinâmica fora do equilíbrio onde o sistema “esquece” progressivamente sua configuração original, caminhando para uma nova distribuição mais estável. O valor de $C(t)$ tende a se estabilizar em um platô após longos tempos, o que caracteriza uma espécie de equilíbrio dinâmico. A função $C(t)$ é crucial para entender a dinâmica de reorganização e a persistência de configurações no agregado. A análise detalhada desta função pode fornecer insights sobre a taxa de reorganização das partículas e a estabilidade das estruturas formadas, sendo um indicador importante da plasticidade do agregado no modelo DRA.

Figura 4: Função Memória $C(t)$ em função do tempo.

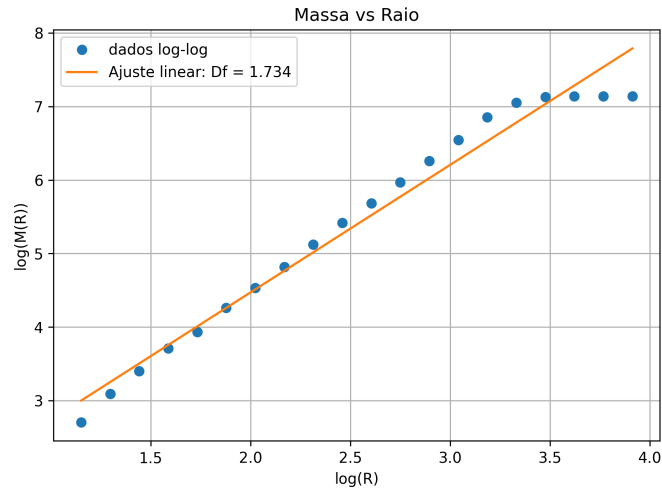


Fonte: Elaborado pelo autor.

A dimensão fractal da configuração final do DRA, gerado na simulação, foi determinado conforme a medida feita para o DLA. O valor foi estimado por meio de um ajuste linear em escala logarítmica:

$$\log M(R) = D_f \log(R) + b. \quad (5)$$

Onde $M(R)$ representa o número de partículas dentro de um raio R em torno do centro da estrutura. Essa medida permite quantificar o grau de ramificação da estrutura. A medida da dimensão fractal da configuração final da estrutura gerada é mostrado na Figura 5, onde $D_f = 1.734$ esse valor refere-se apenas a uma mostragem porém já é um valor compatível com a dimensão fractal das estruturas ramificadas que resulta de processos fora do equilíbrio (FILOCHE; SAPOVAL, 2000).

Figura 5: Dimensão Fractal.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma análise computacional dos modelos de Agregação Limitada por Difusão (DLA) e Agregação Reorganizada por Difusão (DRA), explorando suas características morfológicas e propriedades estatísticas por meio de simulações em duas dimensões. Os resultados obtidos confirmam que ambos os modelos geram estruturas com morfologia fractal, mas com diferenças significativas em termos de compactação e dinâmica.

O modelo DLA, baseado em difusão e agregação irreversível, resultou em agregados com formação dendrítica e dimensão fractal próxima a 1,71, consistente com a literatura clássica. Em contraste, o modelo DRA demonstrou uma maior flexibilidade estrutural ao permitir a redistribuição de partículas, levando a uma morfologia mais compacta e a um valor de dimensão fractal ligeiramente superior, em torno de 1,73.

A análise da função memória $C(t)$ no DRA evidenciou a perda gradual de correlação com o estado inicial, indicando um processo de relaxação estrutural característico de sistemas fora do equilíbrio. Tal comportamento reforça a relevância do DRA para a modelagem de sistemas com dinamismo interno, como processos biológicos, sinterização de materiais e organização celular.

Em suma, este estudo ilustra como pequenas variações nas regras locais de agregação podem resultar em diferenças qualitativas e quantitativas significativas nas estruturas formadas. Como perspectivas futuras, sugere-se a extensão das simulações para três dimensões, a introdução de campos externos e a comparação com dados experimentais de sistemas reais, a fim de validar e ampliar a aplicabilidade dos modelos analisados.

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão acima de tudo é a Deus por ter me permitir chegar até aqui com saúde, pois sem ele e a intercessão de Nossa senhora Aparecida nada seria possível.

À minha família, que sempre serão minha base, meus exemplos de vida, grandes guerreiros, meus pais Paulo Cesar e Mirian Ribeiro. Vocês, que trabalham muito para conseguir me proporcionar algo melhor do que tiveram, que me ensinaram o valor do trabalho de conquistar tudo de forma honesta, tenho orgulho de ser a filha de vocês.

Aos meus queridos irmãos, Ana Karla que é minha irmã e melhor amiga, minha confidente, pela companhia em muitas aventuras. E João Paulo meu irmãozinho, agradeço por cada um dos beijinhos e abraço que me deu, alguns deles já salvaram meus dias. Amo vocês dois e sempre os guardarei em meu coração.

As minhas avós Maria Luiza e Maria da Conceição, agradeço por todos os ensinamentos que me dão. vocês são a minha vida, minhas raízes. E as minhas tias em especial tia Ana Célia, que sempre tive uma enorme feição, que sempre me ajuda de muitas formas, não sei o que faria sem você. vocês sempre cuidam muito bem de mim, agradeço imensamente o amor que recebo de todas.

Aos meus amigos de turma, pelo apoio e companheirismo, por tornarem essa caminhada mais leve, agradeço a Deus por ter colocado vocês em minha vida, sem a ajuda de vocês não chegaria até o final desse curso.

A meus professores, mestres que fizeram parte da minha jornada acadêmica, sou grata pelos ensinamentos. Em especial à minha orientadora, Dra. Edina Maria de Souza Luz, obrigado pela sua paciência em me guiar durante a construção desse trabalho.

Agradeço também ao Programa de Educação Tutorial (PET) pelo apoio e pelas muitas experiências que pude vivenciar através do mesmo. A CAPES pelo apoio financeiro que foi extremamente necessário durante o curso.

Referências

- BALL, Robin; NAUENBERG, M; JR, TA Witten. Diffusion-controlled aggregation in the continuum approximation. **Physical Review A**, APS, v. 29, n. 4, p. 2017, 1984.
- CHISHTY, SO et al. Fractal aggregation of copper particles using electroless cell. **Oriental Journal of Chemistry**, Oriental Scientific Publishing Company, v. 29, n. 3, p. 1183, 2013.
- FILHO, Antonio de Macedo. Processo de difusão com agregação e reorganização espontânea em uma rede 2d. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.
- FILOCHE, M; SAPOVAL, B. Transfer across random versus deterministic fractal interfaces. **Physical review letters**, APS, v. 84, n. 25, p. 5776, 2000.
- FIOLHAIS, Carlos. Dla: um exemplo simples de simulação computacional em física. **Gazeta de Física**, Sociedade Portuguesa de Física, v. 11, n. fasc. 4, p. 150–155, 1988.
- JR, Thomas A Witten; SANDER, Leonard M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. **Physical review letters**, APS, v. 47, n. 19, p. 1400, 1981.
- MANDELBROT, Benoit B. The fractal geometry of nature wh freeman and co. **New York**, 1982.
- WITTEN, Thomas A; SANDER, Leonard M. Diffusion-limited aggregation. **Physical review B**, APS, v. 27, n. 9, p. 5686, 1983.