

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CAMPUS POETA TORQUATO NETO
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE FÍSICA



Ytalo Cainã Duarte Brito

Processo de Contato em Duas Redes Quadradas

ARTIGO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em
Física da Universidade Estadual do Piauí Campus
Poeta Torquato Neto como parte dos requisitos
obrigatórios para a obtenção do título de
Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gladstone de Alencar Alves

Teresina(PI), Junho de 2025

Processo de Contato em Duas Redes Quadradas

Contact Process in Two Square Lattices

Ytalo Cainã Duarte Brito[†]

Orientador: Prof. Gladstone de Alencar Alves[‡]

[†]ytalocdb@aluno.uespi.br, [‡]gladstone@ccn.uespi.br

TCC - Licenciatura em Física - CCN - UESPI | Teresina(PI), Junho de 2025

Resumo

Este estudo investiga transições de fase e fenômenos críticos no modelo de processo de contato em redes quadradas para modelagem epidemiológica. Para abordar isso, implementamos simulações de Monte Carlo para os tamanhos ($L = 110$ a $L = 150$; com o número de sítios: 12.100-22.500) e utilizamos o método de escala de tamanho finito. Por meio das simulações obtemos o **Parâmetro de Ordem, Flutuações do Parâmetro de Ordem e o Cumulante de Binder** para identificar o limiar epidêmico crítico (λ_c) e verificar a consistência do comportamento universal. Nossos resultados sugerem que o modelo acrescenta uma transição de fase contínua e as razões críticas determinadas indicam que este modelo pertence a classe de universalidade de campo médio para percolação.

Abstract

This study investigates phase transitions and critical phenomena in the square lattice contact process model for epidemiological modeling. To address this, we implemented Monte Carlo simulations for the sizes ($L = 110$ to $L = 150$; with the number of sites: 12,100-22,500) and used the finite-size scaling method. Through the simulations, we obtain the **Order Parameter, Order Parameter Fluctuations and Binder Cumulant** to identify the critical epidemic threshold (λ_c) and verify the consistency of the universal behavior. Our results suggest that the model adds a continuous phase transition and the determined critical ratios indicate that this model belongs to the mean-field universality class for percolation.

Palavras-chave: Modelos epidemiológicos; Processo de Contato; Redes quadradas.

Keywords: Epidemiological models; Contact process; Square networks.

Sumário

Ytalo Cainã Duarte Brito.....	0
A R T I G O.....	0
Resumo.....	1
Abstract.....	1
1 INTRODUÇÃO.....	3
2 REVISÃO DA LITERATURA.....	5
3 DESENVOLVIMENTO.....	9
4 METODOLOGIA.....	10
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	15
6 CONCLUSÃO.....	20
AGRADECIMENTOS.....	21
Referências.....	22

1 INTRODUÇÃO

O estudo de modelos epidemiológicos têm chamado a atenção da comunidade científica já a algum tempo por fornecer percepções valiosas acerca da disseminação de doenças. Tais modelos permitem ter desde uma compreensão simples até resultados estatisticamente rigorosos[1]. Além da capacidade de modelar surtos epidemiológicos, esses modelos quando re-caracterizados podem ajudar a entender fenômenos sociais, como a formação de bolhas de opinião e a disseminação de informações[2]. As aplicações desses modelos podem ser ampliadas até mesmo para doenças fictícias como num apocalipse zumbi servindo para ilustrar e investigar técnicas de modelagem epidemiológica moderna e de análise numérica de fenômenos críticos[3]. De acordo com a literatura científica, Daniel Bernoulli foi o pioneiro na aplicação de modelos matemáticos para o estudo da propagação de doenças. Ele buscou quantificar a vantagem da prática de inoculação intencional de material infeccioso para avaliar seu efeito na expectativa de vida esperada da população[4]. A fusão de dados empíricos e modelagem epidemiológica permite aos modelos produzir análises críticas, impulsionando um aprendizado mais rico e potente em saúde pública. Desse modo, pode-se criar táticas de vacinação, prevenção e distanciamento social, cruciais para conter doenças infecciosas, como coronavírus, zika e entre outras.

Um exemplo recente foi o caso do COVID-19, um vírus que se espalhou inicialmente na China e logo se alastrou para diversos países, o que levou a Organização Mundial da Saúde (OMS) a classificar o surto da doença como uma pandemia em 2020 . Devido ao alastramento repentino da doença houve uma demanda por parte da comunidade científica em criar novos modelos matemáticos e aprimorar os já existentes a fim de obter-se dados precisos do comportamento da doença. Com estes dados permitiu-se uma formação de prognósticos sobre a propagação do vírus, a carga demandada em hospitais, políticas públicas a serem implementadas e intervenções. Um estudo recente conseguiu modelar de forma precisa mudanças de comportamento da população e políticas públicas , ou seja, conseguiu prever o comportamento da pandemia ao inserirem dinâmicas como o distanciamento social e o uso de máscaras[19]. O que mostra que a comunidade científica tem contribuído com propostas teóricas para o combate e compreensão de doenças como a COVID-19[11,12,13,14,15]. A crescente relevância desse tema no contexto científico contemporâneo motivou nosso grupo de pesquisa a aprofundar sua pesquisa. Conforme a identificação de lacunas na literatura e a necessidade de modelos mais consolidados teoricamente, temos realizado uma série de pesquisas que não apenas procuram elaborar um entendimento sustentável

desses fenômenos, mas também propor esquemas teóricos que possam servir como critérios de investigação mais profundos. Tais pesquisas levaram à publicação de vários artigos em periódicos internacionais, onde foram apresentados modelos teóricos atuais, que se fundamentam em estudos minuciosos e métodos atuais. Assim, busca-se aprimorar o debate acadêmico e proporcionar novas bases para pesquisas voltadas à sociedade[5,6,7,8,9,10].

Diante do contexto apresentado e das pesquisas já publicadas, temos por objetivo aprimorar mais o trabalho que já vem sendo feito, desta forma, pretendemos dar continuidade nas pesquisas sobre modelos epidemiológicos[5,6,16,17,18], a fim de compreender as dinâmicas que envolvem a propagação de doenças entre populações, sejam elas de tamanhos variados, desde círculos de convivência (amigos, família, etc) até densidades populacionais do tamanho de países. A maioria dos modelos existentes são descritos por equações diferenciais que tratam a população como uma rede homogênea sem levar em consideração as relações humanas e como isso afeta a dinâmica de propagação das doenças. Relações humanas verdadeiras contribuem para a formação de redes mais complexas. Uma rede quadrada é uma forma de representar as relações humanas, ela é uma grade bidimensional onde cada nó representa um indivíduo e o mesmo está conectado a outros indivíduos (vizinhos) ligados a ele normalmente quatro (norte, sul, leste e oeste). Neste modelo as conexões entre os vértices irão representar as diversas relações do indivíduo, tais como trabalho, familiares, etc. Desta forma, integrando modelos epidemiológicos à rede quadrada podemos simular como ocorre a propagação de contágios de doenças entre os nós (pessoas) conectados. Cada nó da malha representa uma pessoa cuja população é classificada em distintos estados epidemiológicos. Na dinâmica que envolve a maioria dos modelos os indivíduos da rede podem estar em três estados principais:

- **Suscetíveis:** vértices não imunizados e não infectados;
- **Infectados:** vértices infectados que podem infectar outros vértices;
- **Removidos:** vértices que contraíram a doença, se curaram e foram imunizados, ou que morreram em decorrência da doença.

Dessa forma, considerando um processo de reação–difusão, é possível descrever o modelo epidemiológico em que um nó de uma das três populações pode modificar seu estado ao interagir com outro nó de uma população distinta[11]. Seguindo essa estrutura, as mudanças nos estados dos nós seguem as regras de reação e difusão definidas, o que

possibilita representar o comportamento epidemiológico como um processo de Markov, ou seja, permitindo um estudo mais objetivo das mudanças de estado ao longo do tempo[12].

Diante do exposto, este trabalho tem por objetivo fortalecer a fundamentação teórica, ampliando o alcance e a aplicabilidade das ferramentas epidemiológicas em diferentes campos de estudo, não só oferecer benefícios reais para o desenvolvimento na área da saúde através do desenvolvimento e aprimoramento de modelos epidemiológicos, mas também na análise de fenômenos sociais, comportamentais e até mesmo em contextos culturais e fictícios.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O Processo de Contato é um modelo estocástico comumente usado, com a finalidade de avaliar como doenças são disseminadas em uma população. Ele foi usado com sucesso em mais de uma rede estruturada[10], incluindo redes quadradas[20], porque permite estudar a transmissão de epidemias e o que a interação direta entre os indivíduos em nível local representa no grafo geral. A seguir, apresentamos os principais livros, artigos e publicações que embasam teoricamente a pesquisa realizada.

Referências Clássicas e Fundamentais

- **Keeling e Rohani (2007):** Em "Modelagem de Doenças Infecciosas em Humanos e Animais", Keeling e Rohani oferecem uma embasamento conceitual sólido para modelar doenças infecciosas. Eles abordam uma variedade de modelos teóricos incluindo o de processo de contato e suas aplicações na compreensão do processo de propagação de infecções. Portanto mostra-se ser essencial para compreender a base teórica dos modelos e técnicas de modelagem de epidemias[1].
- **Bernoulli (1760):** Bernoulli ao aplicar modelos matemáticos para estudar a viabilidade de inocular indivíduos com o vírus inativo da varíola e avaliando seu impacto na expectativa de vida na população tornou-se pioneiro, por ser o primeiro modelar matematicamente a propagação de doenças. Embora seu trabalho não trate diretamente do processo de contato, estabeleceu a importância da modelagem matemática no estudo da difusão das doenças[4].

Aplicações em Redes Complexas e Suas Dinâmicas

- **Araujo et al. (2015):** Neste estudo, os autores investigaram a aproximação do campo médio para o modelo de Sznajd em redes complexas. Técnicas e resultados

desta pesquisa podem ser aplicados a processos de contato em redes de diferentes topologias, incluindo redes quadradas, contribuindo para o entendimento dos fenômenos envolvidos na dinâmica[2].

- **Alemi et al. (2015):** Os autores estudaram diversas dinâmicas de propagação em redes complexas e fornecendo assim contribuições sobre a robustez e fragilidade de redes para epidemias. Importante para descrever de uma forma melhor como as redes com diferentes topologias, incluindo quadradas, influenciam a disseminação de doenças[3].

Estudos Recentes e Focados em Redes Quadradas

- **Macedo-Filho et al. (2018):** Os autores propõe uma solução para o problema de transição de fase de modelos epidemiológicos como o modelo SIS onde o mesmo vai para um estado absorvente (todos os indivíduos saudáveis) a fim de resolver isso eles implementam uma dinâmica de reativação a dinâmica primária do modelo assim permitindo analisar de forma correta as propriedades em regime estacionário. Tal técnica implementada pode ser aplicada a modelos que possuem estados absorventes como o modelo de Processo de Contato permitindo estudar o comportamento estacionário e crítico do mesmo[6].
- **Alencar et al. (2020):** O artigo estuda como desordens topológicas emergentes da triangulação Voronoi–Delaunay aleatória podem afetar a dinâmica de propagação de doenças implementada no modelo SIS. Os resultados obtidos mostram que apesar da desordem, a classe de universalidade foi preservada. Tais resultados fornecem um sólido arcabouço teórico para que pesquisas no âmbito do estudo de propagação de epidemias ou modelos como o Processo de Contato, utilizem redes modeladas por triangulações Voronoi–Delaunay, o que permite universalidade nas conclusões sobre transição de fases e análises simplificadas [7].
- **Alves et al. (2021):** Os autores da pesquisa exploram um modelo onde os indivíduos transmitem a infecção para os vértices adjacentes (vizinhos) e os mesmos transmitiam para toda a rede. Buscou-se estudar essa dinâmica implementando-a em redes complexas como as redes de Barabási-Albert, e determinar a fração de indivíduos infectados quando o sistema atinge um estado inerte. Mesmo tendo seu foco nas redes de Barabási-Albert, as técnicas usadas podem ser empregadas em redes quadradas para compreender a dinâmica de propagação[8].

- **Alencar et al. (2023):** O artigo estuda o modelo por nome “*diffusive epidemic process*” (DEP), neste modelo os indivíduos se espalham em uma rede e reagem anexados a três tipos de substratos bidimensionais. O artigo buscou verificar em que fase a desordem espacial modificaria o comportamento crítico do modelo. As conclusões feitas pelo autor sugerem que para modelos como PC que apresentam processos de transição de fase sem disseminação de partículas a inclusão de heterogeneidades espaciais podem gerar resultados similares[9].
- **Alencar et al. (2023):** O artigo busca uma nova forma de elaborar o escala de tamanho-finito (FSS) para o Processo de Contato em redes de escala livre que seja coerente com os mesmos resultados para campo médio. Os resultados obtidos oferecem uma forma de determinar o valor crítico de propagação em redes heterogêneas de tamanho finito de maneira mais precisa. A pesquisa auxilia na criação de modelos mais condizentes com a realidade, pois o formalismo do modelo pode ser adaptado para prever como infecções se propagam em redes de tamanho variável com topologias heterogêneas[10].

Modelagem de Epidemias e COVID-19

- **Arenas et al. (2020):** Ainda que os autores concentram-se na COVID-19, os mecanismos estocásticos e os resultados sobre limiar epidêmico e papel da topologia de rede aperfeiçoam a compreensão teórica do processo de contato em redes quadradas, demonstrando que até mesmo discretas alterações na ligação ou na frequência de interação podem provocar mudanças de fase entre uma situação sem doença e um surto epidêmico[11].
- **Chinazzi et al. (2020):** As descobertas do autor de que suspender conexões por um período retarda a disseminação corroboram a teoria de que, em uma malha quadriculada, interromper as ligações entre áreas também posterga as mudanças epidêmicas. Tais descobertas auxiliam a relacionar o conceito do processo de contato em estruturas padronizadas com o comportamento dinâmico notado em redes reais de mobilidade [12].
- **Hellewell et al. (2020):** “*Feasibility of controlling COVID-19 outbreaks by isolation of cases and contacts*” o artigo assim intitulado, buscou investigar através de simulações estocásticas em rede como surtos de covid-19 poderiam ser controlado empregando estratégias de isolamento apenas de casos confirmado e rastreamento de seus contato sem haver a necessidade de um lockdown completo

da população. Tal artigo fornece parâmetros de avaliação para a conexão entre a taxa de isolamento, probabilidade de monitoramento e R_0 , que podem vir a ser implementados de forma direta aos parâmetros do processo de contato em redes quadradas, auxiliando a ajustar com precisão as simulações e prever os limiares do processo de transição de fase[13].

- **Remuzzi e Remuzzi (2020):** Os autores compararam como a epidemia da COVID-19 se desenvolveu na Itália e em Hubei(China), onde foram adotadas medidas como distanciamento social e ampliação imediata de leitos, o que levou a resultados bastante significativos, que puderam ser observados no desaceleramento rápido da propagação do vírus. Contudo ressaltam que variações na adoção e na velocidade da construção de infraestrutura dificultam prever exatamente quando a curva na Itália deixaria de ser exponencial. Estes dados oferecem estimativas práticas essenciais para ajustar parâmetros, justificar a introdução de dados adicionais e modelar medidas de intervenção dinâmica no Processo de Contato (PC) em redes quadradas[14].
- **Bai et al. (2020):** Os autores descrevem um caso onde um indivíduo infectado pelo SARS-CoV-2, que não apresentou sintomas de COVID-19, mas mesmo assim conseguiu infectar cinco membros de sua família. Os autores argumentam que casos realmente assintomáticos, e não apenas pré-sintomáticos, são capazes de contribuir para a disseminação comunitária de forma significativa e tornarem-se “vetores ocultos” difíceis de rastrear. Para o modelo PC compreender esse mecanismo é fundamental, pois tem um impacto direto nos parâmetros de infecção e na dinâmica de transição entre estados (suscetível, infectado, recuperado)[15].

Estudos Adicionais

- **Mota et al. (2018):** Com o objetivo de encontrar os limiares críticos e os expoentes que caracterizam a classe de universalidade da percolação direcionada em duas dimensões, os pesquisadores se dedicaram a analisar a dinâmica do modelo SIS em redes quasiperiódicas bidimensionais. Ao comprovar que a universalidade do modelo SIS se mantém mesmo em topologias não periódicas, o que fornece uma base fundamental para compreender e validar resultados obtidos no caso mais simples de redes quadradas[5].
- **Santos et al. (2019):** Os autores elaboraram uma técnica de Monte Carlo para simular o modelo SIR(*susceptible-infected-removed*) em duas redes quasicristalinas

bidimensionais. Os resultados afirmaram que, ainda que a ordem quasicristalina desloque o ponto crítico em relação às redes periódicas, isso não afetará a classe de universalidade do processo, conservando os mesmos expoentes críticos da percolação dinâmica em duas dimensões. Assim como no modelo SIR, espera-se que, no processo de contato em redes quasicristalinas bidimensionais, os expoentes críticos não sejam alterados pela ordenação quasiperiódica[16].

- **Alencar et al. (2020):** Investigam a propagação de epidemias utilizando o modelo SIR acoplado a redes bidimensionais criadas por triangulações de Voronoi–Delaunay randomizadas. O artigo reforça que ambos os modelos SIR e SIS em redes bidimensionais randomizadas mantêm o comportamento crucial similar aos seus correspondentes em redes regulares, comprovando a utilidade dos resultados de percolação clássica a sistemas com desordem espacial. Para o Processo de Contato em redes quadradas, variações aleatórias na organização ou de desordem no espaço tem o potencial de tornar o modelo mais próximo de situações reais, permitindo calcular λ_c de forma mais precisa em populações humanas ou de animais[17].
- **Sousa (2012):** O autor estuda detalhadamente como ocorre o processo de transição de fase em modelos estocásticos sobre modelos epidêmicos. O autor aborda os modelos SIRS e seu caso limitado SIR, utilizando simulações através de Monte Carlo em redes regulares e através de aproximações de campo meio ativo. Este artigo reforça que o Processo de Contato e seus efeitos subsequentes podem ser avaliados e assimilados de forma correta por meio do modelo da percolação e dos artifícios da mecânica estatística empregados em sistemas irreversíveis[18].
- **Harris (1974):** Introduziu formalmente o processo de contato e demonstrou existência de transição de fase em redes regulares de dimensão finita e infinita[20].
- **Durrett & Griffeath (1983):** Estimaram valores críticos para o processo de contato em reticulados bidimensionais e estudaram propriedades de clusters críticos[21].

3 DESENVOLVIMENTO

O Processo de Contato é um sistema probabilístico de influência em rede, concebido inicialmente no âmbito da física estatística básica. Modelo este proposto em 1974 por T. E. Harris em seu artigo “*Contact Interactions on a Lattice*”[20]. Sua finalidade é compreender como as doenças se espalham entre pontos próximos.

O modelo se desenvolve em um grafo, onde os nós simbolizam os indivíduos e as conexões representam suas relações. Cada pessoa assume um de dois estados: Suscetível (S) ou Infectado (I). A cada instante, um indivíduo vulnerável próximo a um portador pode ser contaminado, com uma taxa de infecção λ . Caso um indivíduo portador esteja perto de um vulnerável (um de seus quatro vizinhos dentro da rede), ele tem a possibilidade de se recuperar, com probabilidade μ .

O processo de contato apresenta uma transição de fase absorvente para fase ativa. O parâmetro de controle é λ . Para $\lambda < \lambda_c$, a atividade cessa (absorvente); para $\lambda > \lambda_c$, existe um estado estável com uma parte ativa diferente de zero, apresentando uma mudança de fase abrupta em sistemas limitados, mas suave no limite termodinâmico.

Tal modelo pode ser complementado através da integração com malhas geométricas como redes quadradas pois o mesmo nos permite ter uma visão mais heterogênea do sistema já que ao usar uma rede quadrada bidimensional, cada indivíduo (vértice) só irá interagir com os quatro vértices ao qual o mesmo está interligado diretamente (norte, sul, leste e oeste). Modelos clássicos pressupõem que o espaço é uniforme, o que muitas das vezes não reflete a realidade das doenças que se disseminam por contato com outros indivíduos. Diante disso, a utilização de malhas planas no modelo de processo de contato nos permite ter um realismo espacial simulando agrupamentos naturais de indivíduos. Em redes quadradas, o processo de contato se enquadra à classe de universalidade de Percolação Dirigida (DP), essa classe é fundamental para compreender como as transições de estado ocorrem de forma universal em sistemas fora de equilíbrio, que evoluem em direção a uma condição de absorção, no caso de disseminação de doenças essa transição para um estado absorvente significa que a doença irá se espalhar por todo o sistema até que todos os indivíduos da rede estejam mortos ou imunizados, o que torna a integração do modelo a redes quadradas relevante para modelar e compreender a dinâmica das epidemias.

4 METODOLOGIA

O projeto de pesquisa em questão foi desenvolvido por meio do Programa de Bolsas de Iniciação Científica-PIBIC, que foi realizado via simulações computacionais utilizando a linguagem de programação FORTRAN.

Primeiramente, o professor orientador apresentou artigos científicos. A partir da leitura desses artigos na área temática, propôs-se o projeto de Iniciação Científica[5,6,7,8,9,10]. A fim de ambientar o aluno ao assunto foi proposto pelo professor

orientador que fosse feita uma apresentação baseada no artigo ``*Droplet finite-size scaling of the contact process on scale-free networks revisited*``[10].

Em seguida, deu-se início aos estudos sobre a linguagem de programação FORTRAN, a qual foi utilizada na pesquisa e execução no computador. Isso se deu com o objetivo de fornecer as ferramentas necessárias para que o aluno pudesse realizar as modificações no programa. Após esta etapa foi disponibilizado por meio do professor orientador os arquivos com os programas a serem executados pelo aluno.

A seguir foi executado o programa com a orientação do professor, o aluno faria a leitura do código e modificaria o tamanho da rede(L) e o número de vértices (N). Primeiramente com uma rede de tamanho $L=110$ e $N=12.100$ até um tamanho de rede $L=150$ e $n=22.500$, observou-se que com o aumento do tamanho L e do número de vértices N o tempo das simulações aumentaram, assim para que todo o programa fosse finalizado levou cerca de alguns meses. Após a execução de cada simulação, foram obtidos um conjunto de dados dos quais três foram analisados para compreender o comportamento da simulação e obter os resultados desejados para a pesquisa.

Posteriormente, com todos os dados obtidos utilizou-se o analisador gráfico conhecido como XMGRACE a fim de importar os dados obtidos e gerar o comportamento dos principais observáveis de análise da pesquisa: Parâmetro de Ordem, Flutuação do Parâmetro de Ordem e Cumulante de Binder.

Modelo e Implementação

O Modelo que estudamos é constituído pela dinâmica conhecida como Processo de Contato acoplado a duas redes quadradas. As duas redes quadradas foram construídas com o objetivo de obtermos a rede Solomon. As conexões entre os indivíduos são representadas por ligações de vizinhança. A propagação epidêmica ocorre quando um indivíduo suscetível interage com um infectado através de uma conexão direta.

Topologia da Rede

1. Construção das redes quadradas:

- Base: Adotou-se duas redes quadradas independentes, Rede A e Rede B. Cada rede é uma grade 2D regular com $L \times L$ nós, onde $N=L^2$ onde cada vértice possui conectividade $z=4$ (vizinhos ortogonais, com condições de contorno periódicas para evitar efeitos de borda).
- Conexões de longo alcance:
 - Probabilidade de conexão $\propto r^{-\alpha}$, onde $r=|x_i-x_j|+|y_i-y_j|$ (distância

de Manhattan).

- $\alpha=0$: Todas conexões possíveis (rede aleatória).

- Grafo estático: Topologia fixa durante a simulação (*quenched disorder*).

Dinâmica Estocástica

Regras de Atualização (Passo de Monte Carlo):

1. Seleção aleatória: Um vértice i é escolhido uniformemente.
2. Estado atual $\sigma_i=0$ (Suscetível):
 - Seleciona um vizinho j aleatório.
 - Se $\sigma_j=1$, então $\sigma_i \rightarrow 1$ com probabilidade λ .
3. Estado atual $\sigma_i=1$ (Infectado):
 - Cura imediata: $\sigma_i \rightarrow 0$ com probabilidade $\mu=1$.
4. Tempo: Avança $\Delta t=1/N$ após cada atualização.

Mecanismo de Sustentação (Estado Absorvente):

- Problema: $\sigma_i=0 \forall i$ é estado absorvente (epidemia extinta).
- Solução: Reativação estocástica:
 - Se $\sum_i \sigma_i=0$ (zero infectados):
 1. Infecta aleatoriamente um nó k .
 2. Incrementa contador N_r (visitas ao absorvente).
 - Campo efetivo: $h_r=N_r/N \cdot t$ mede estabilidade da fase endêmica.
 - (Reflete a frequência de reativações e escala como $\sim 1/N$ na fase absorvente).

Regras de Difusão

- Infecção dependente da topologia:
 - Probabilidade de infecção \propto fração de vizinhos infectados.
 - Conexões de longo alcance (α) aceleram a difusão.
- Sem imunidade: Vértices curados retornam à suscetíveis.

Implementação

Fluxo da Simulação:

1. Inicialização:
 - Rede: Constroi grade 2D + conexões.
 - Estados: 50% nós infectados aleatoriamente.
2. Termalização:
 - 10^5 passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário.
3. Amostragem:

- 10^5 amostras do parâmetro de ordem $\rho = \sum \sigma_i / N$
- Intervalos de 10 passos para reduzir correlações.

4. Médias:

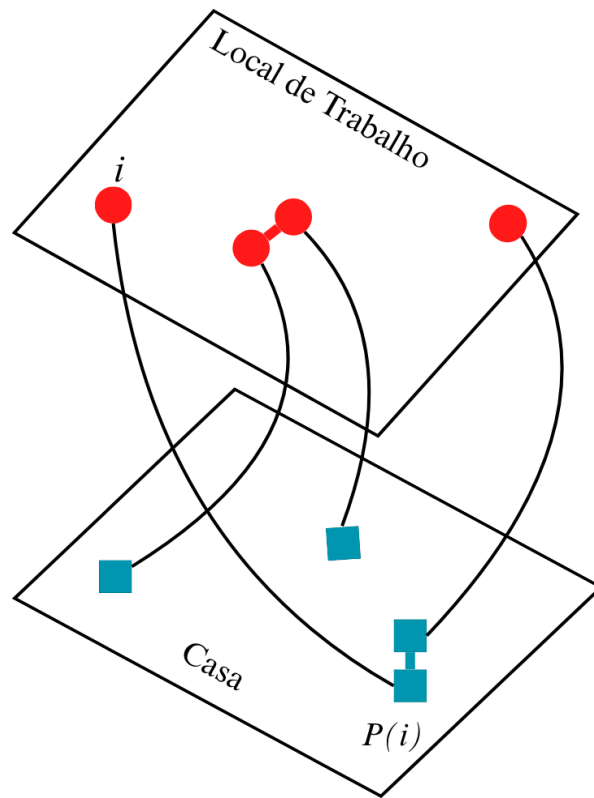
- $\langle \rho \rangle$, flutuações χ , cumulante de Binder U calculados sobre 10 realizações da rede.

Redes de Solomon

Uma rede de Solomon é formada a partir de duas réplicas de uma mesma rede, representando dois “contextos” distintos, como o ambiente doméstico e o ambiente de trabalho. Nessa configuração, os dois grupos são visualizados como redes sobrepostas, onde cada pessoa está presente em ambas, mas ocupando posições diferentes. Cada indivíduo possui duas localizações: i na rede “A” (trabalho) e $P(i)$ na rede “B” (casa) como ilustra a Figura 1, sendo P uma permutação aleatória dos N vértices.

Essa topologia foi idealizada por Sorin Solomon para tornar os modelos de interação social mais realistas, pois reflete o fato de que as pessoas mantêm padrões distintos de conexão em diferentes contextos, sem depender exclusivamente de redes completamente aleatórias ou rigorosamente regulares[23].

Acoplar o modelo de Processo de Contato às Redes de Solomon nos permite expandir o contexto social ao incorporar duas "esferas" de interação, resultando em uma conectividade ampliada para cada agente. Obtemos uma dinâmica mais rica e podemos simular como diferentes padrões de convivência influenciam a propagação de uma epidemia. Dessa forma, representamos subgrupos e indivíduos de modo não homogêneo, oferecendo uma visão mais realista da disseminação da doença. A partir disso podemos analisar como mudanças nas variações na frequência e no padrão de interações entre indivíduos podem auxiliar no aumento ou diminuição da taxa de propagação de epidemias (Ex: trabalhos essenciais e trabalhos em home office).



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 1: A dinâmica do modelo de Processo de Contato (PC) em Redes de Solomon é ilustrada por duas camadas sobrepostas: a camada superior, em que cada posição i do local de trabalho é marcada por um círculo vermelho, e a camada inferior, em que a posição correspondente na rede doméstica é dada pela permutação aleatória $P(i)$ e indicada por um quadrado azul. Enquanto a rede corporativa mantém uma organização fixa, a rede doméstica sofre permutações aleatórias de índices, simbolizando a variabilidade dos contatos fora do ambiente de trabalho. As interações entre indivíduos são então calculadas somando-se a vizinhança de primeiro nível do vértice i na rede do trabalho e a vizinhança do vértice $P(i)$ na rede casa. Para cada passo da simulação, escolhe-se aleatoriamente um indivíduo na camada do trabalho e avalia-se suas interações com os vizinhos definidos tanto em i quanto em $P(i)$, capturando assim a influência combinada dos contatos da rede doméstica e do ambiente profissional.

A fim de calcular os observáveis principais e de caracterizar a classe de universalidade do sistema é necessário que implementemos algumas grandezas principais[10]. Uma das principais a destacar é a densidade de infecção, dada por

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_i^N \psi_i. \quad (1)$$

Utilizando a série temporal da densidade de infecção gerada pela cadeia de Markov, é possível determinar o parâmetro de ordem, que representa a média dessa densidade ao longo do tempo

$$P = \langle \rho \rangle. \quad (2)$$

Outros dois parâmetros importantes incluem a variação do parâmetro de ordem, que é expressa pela média da densidade de infecção com a fórmula

$$\Delta = N (\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2), \quad (3)$$

(De acordo com a relação de flutuação-dissipação, essa variação do parâmetro de ordem (Δ) indica como a densidade média reagiria a um pequeno "campo" conjugado, sendo assim, denominamos esse Δ de **Flutuações do Parâmetro de Ordem**) e a razão dos cumulantes de Binder da 5ª ordem aplicados à percolação direcionada

$$U = \frac{\langle \rho^2 \rangle \langle \rho^3 \rangle - \langle \rho \rangle \langle \rho^2 \rangle^2}{\langle \rho \rangle \langle \rho^4 \rangle - \langle \rho \rangle \langle \rho^2 \rangle^2}. \quad (4)$$

Analizamos essa razão uma vez que ela se mantém finita durante a fase absorvente da dinâmica.

As relações de Finite-Size Scaling (FSS) para o parâmetro de ordem[10], susceptibilidade e a razão dos cumulantes de Binder de 5ª ordem são expressos pelas seguintes fórmulas

$$P = N^{-\beta/2\nu_\perp} f_P(N^{1/2\nu_\perp} |\lambda - \lambda_c|), \quad (5)$$

$$\Delta = N^{\gamma'/2\nu_\perp} f_\Delta(N^{1/2\nu_\perp} |\lambda - \lambda_c|), \quad (6)$$

$$U = f_U(N^{1/2\nu_\perp} |\lambda - \lambda_c|). \quad (7)$$

Na próxima seção apresentamos os resultados obtidos das simulações da dinâmica implementada para redes de diferentes tamanhos expondo nossos resultados numéricos para o Processo de Contato acoplado a redes de Solomon.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

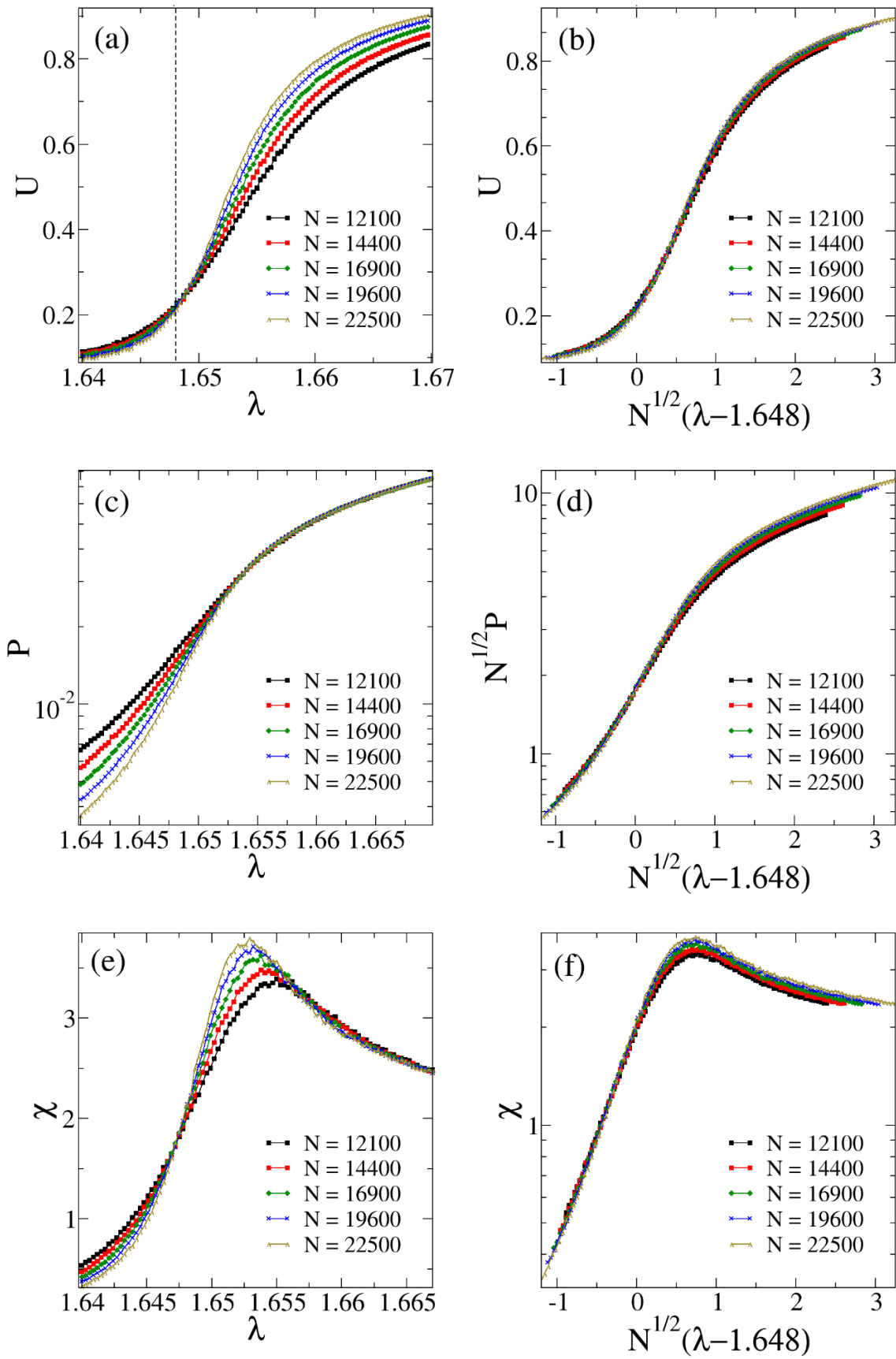
Nesta seção apresentamos os resultados numéricos para o Processo de Contato acoplado a redes de Solomon. Os dados foram analisados para os números de vértices, entre $N = 12100$ e $N = 22500$, com o objetivo de estudar a transição de fase e avaliar o comportamento crítico do sistema. Analisaremos os três parâmetros fundamentais para a análise das transições de fase.

Primeiro apresentamos os resultados para o Cumulante de Binder nas Figuras 2a e 2b. Tal resultado nos permite estimar o ponto crítico. A estimativa do limiar crítico é obtida pelo ponto de interseção das curvas (linha pontilhada) para diferentes tamanhos do número de vértices, o que mostra que ele independe do tamanho da rede, dependendo apenas da dimensionalidade e das condições de contorno. Analisando o gráfico da figura

2a estimamos o ponto crítico de valor $\lambda_c \approx 1.648$ que é identificado na região de cruzamento das curvas.

Posteriormente, trazemos os resultados para o Parâmetro de Ordem nas Figuras 2c e 2d. Tal resultado nos permite identificar as fases do sistema e seu comportamento, além de analisar como o seu comportamento se altera ao passar por uma região crítica, ou seja, nos permite analisar a probabilidade de sobrevivência da epidemia, se ela se estenderá por longo prazo ou não. Observamos que os resultados para o Parâmetro de Ordem apresenta o comportamento de função sigmoidal. Na Figura 2d vemos o colapso de curvas do Parâmetro de Ordem P , que revelam que apesar de partirmos de redes bidimensionais, a sobreposição de duas grades (rede de Solomon) resulta em uma conectividade efetiva suficientemente alta, capaz de "suprimir" as flutuações locais, e que o limiar crítico λ_c é robusto contra variações no tamanho da rede.

Em seguida, incluímos os resultados para a Flutuação do Parâmetro de Ordem como mostram as Figuras 2e e 2f. Este resultado nos ajuda a medir a magnitude das flutuações em torno do ponto crítico. Além disso, o resultado 2e sugere que o nosso modelo apresenta uma transição de fase contínua. Observamos que a Flutuação do Parâmetro de Ordem exibe um pico acentuado próximo do ponto crítico. A magnitude desse pico aumenta com o tamanho N , sugerindo uma divergência da Flutuação do Parâmetro de Ordem quando se considera o limite termodinâmico. A Figura 2f mostra como a Flutuação do Parâmetro de Ordem é colapsada por meio da função de escala dada pela equação (6). A partir desta função de escala podemos obter a razão crítica $1/\nu$. Suspeitamos por meio do colapso da região crítica que a razão crítica γ/ν seja zero para este modelo. Além disso, também suspeitamos que este modelo deve apresentar correções logarítmicas no eixo vertical. É necessário investigarmos para que possamos fazer qualquer tipo de afirmação sobre a estimativa para o valor da razão crítica γ/ν .



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 2: Dados obtidos das simulações feitas em diferentes tamanhos de rede, onde cada linha de cor

diferente representa um tamanho de rede diferente. Nos painéis (a) e (b) nós temos os resultados para o Cumulante de Binder U , nos painéis (c) e (d) os resultados para o Parâmetro de Ordem P e nos painéis (e) e (f) os resultados para a Susceptibilidade χ . Onde os painéis (b), (d) e (f) são os dados colapsados respectivamente do Cumulante de Binder U , Parâmetro de Ordem P e Susceptibilidade χ , gerados ao utilizarmos as equações (3) para o eixo X e (4) para o eixo Y e configurando o eixo Y mudando sua forma de linear para logarítmica.

Agora apresentamos os valores dos expoentes críticos $1/\nu$ e β/ν analisando seus valores estabelecidos com base na avaliação dos gráficos colapsados e regressões lineares dos gráficos de $\ln[d(\ln P)/d\lambda]$ vs. $\ln N$ e $\ln P$ vs. $\ln N$, processo este feito conforme descrito em [10]. Primeiramente traça-se $\ln P$ versus $\ln N$ em $\lambda=\lambda_c$ estimado: o declive dá $-\beta/\nu$, em seguida traça-se $\ln |\partial \ln P / \partial \lambda|$ versus $\ln N$: o declive dá $1/\nu$, onde pode se obter os valores a seguir:

$$1/\nu \approx 0,5659 \pm 0,0899,$$

$$\beta/\nu \approx 0,4627 \pm 0,0034.$$

Para a classe de universalidade percolação em Campo Médio com escala em N diretamente, os expoentes críticos esperados são:

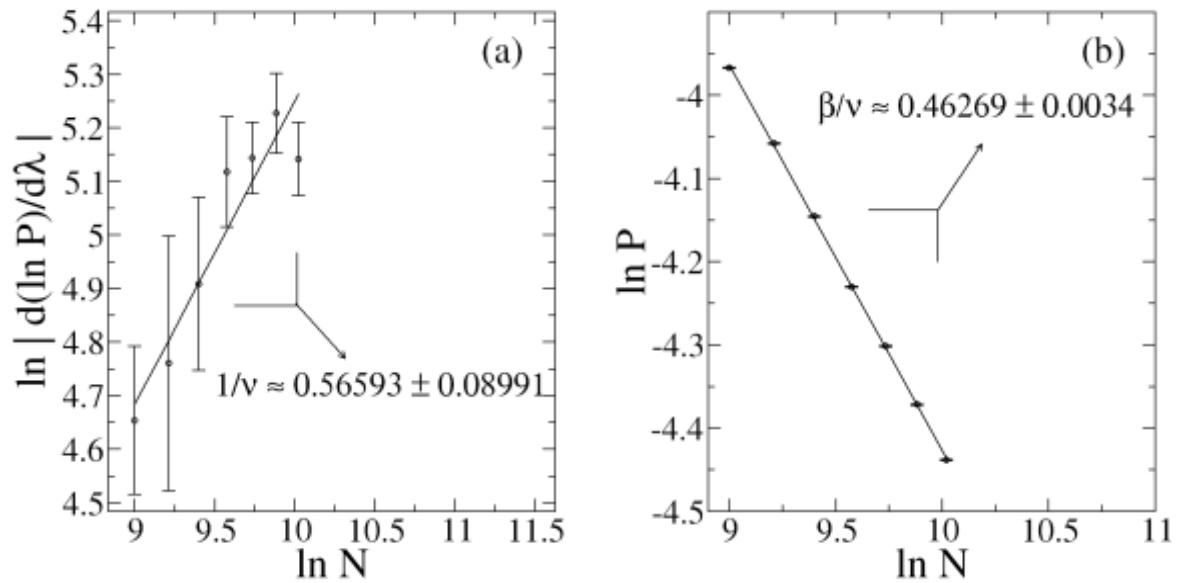
$$1/\nu=0.5 \text{ e } \beta/\nu=0.5,$$

(Stauffer & Aharony, 1994) estabelece que em campo médio $\beta=1$ e $\nu=1/2$, de onde $\beta/\nu=1/(1/2)=2$ quando escalamos pelo comprimento linear L . Em termos de escala em N diretamente (com $L \sim N^{1/d}$), isso corresponde a $\beta/\nu=1/2$ e $1/\nu=1/2$ [22].

Os valores obtidos estão dentro da margem de erro, compatíveis com a classe de universalidade para percolação em campo médio. Isso implica que as correlações críticas têm um impacto que se estende muito além da vizinhança imediata: o "tamanho" usual dos clusters críticos cresce de forma tão acelerada que a descrição local passa a ter menor relevância, tornando o modelo universal e insensível a detalhes microscópicos.

Tabela 1: A tabela faz uma comparação entre os valores Teóricos das razões dos expoentes críticos para Mean-field(Campo Médio) e os valores obtidos pelas regressões em FSS.

Razões dos expoentes	MF(Teórico)	Valores Obtidos
$1/\nu$	0.50	$0,5659 \pm 0,0899$
β/ν	0.50	$0,4627 \pm 0,0034$



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 3: Gráficos da Estimativa dos expoentes críticos por meio de regressão de escala finita no Processo de Contato em duas redes quadradas. (a) Gráfico de $\ln |d \ln P / d \lambda|$ versus $\ln N$. O ajuste linear (linha tracejada) resulta em $1/v \approx 0,5659 \pm 0,0899$, o que acarreta no valor $v \approx 1,77$ para o expoente v . (b) Gráfico de $\ln P$ em $\lambda = \lambda_c$ versus $\ln N$. O coeficiente angular da linha de ajuste determina $\beta/v \approx 0,4627 \pm 0,0034$. Esses valores são consistentes com a classe de universalidade da percolação dirigida.

Pela regressão só conseguimos obter os valores para os expoentes para $1/v$ e β/v , infelizmente ela não foi suficiente para determinarmos o valor do expoente crítico para γ/v , portanto sugerimos que o valor de γ/v para este modelo seja zero, pois foi o valor que melhor se ajustou para colapsar a região crítica.

6 CONCLUSÃO

Simulamos o modelo de Processo de Contato acoplado a redes solomon visando compreender a existência ou não de transição de fase e o comportamento da região crítica.

Os resultados sugerem uma transição contínua da fase absorvente para a fase ativa. Através dos resultados do parâmetro Cumulante de Binder estimamos o valor do ponto crítico em $\lambda_c \approx 1.648$. Nossas estimativas para as razões críticas $1/\nu \approx 0,5659 \pm 0,0899$ e $\beta/\nu \approx 0,4627 \pm 0,0034$ sugerem que esse modelo deve pertencer a classe de universalidade de Campo Médio (MF) para Percolação. O acoplamento do modelo PC a duas redes quadradas mostrou-se ser um método eficiente para incluir heterogeneidade espacial ao modelo (representando redes de convivência como trabalho, família, amigos e etc.).

Os resultados apresentados evidenciam a capacidade da física estatística em modelar as dinâmicas de propagação de doenças em redes com heterogeneidade espacial, mobilidade e desvendar padrões complexos que envolvem estes sistemas, não só aplicados ao estudo de epidemias mas também na dinâmica de propagação de informações, fenômenos sociais e etc. Temos como perspectivas futuras, trabalhar com espalhamento de indivíduos a fim de aprimorar o modelo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, "Eu sou a videira, vós as varas [...] sem mim nada podeis fazer" (JOÃO, 15:5), agradeço a meus familiares, amigos e colegas que sempre me apoiaram durante a jornada da graduação em especial minha mãe Yara . Agradeço aos meus professores pois além de lecionarem de forma perfeita aconselharam a mim e meus colegas em todas as nossas dificuldades, em especial aos professores: Prof. Dr. Gladstone de Alencar Alves, a Prof.Dra. Janete Batista de Brito, Prof. Lenilson Torres Brito e Prof.Dra. Nadja Vieira da Costa que marcaram minha trajetória durante a graduação em Física na UESPI. Agradeço a Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PROP) responsável administrativa pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) pela oportunidade de ter participado do mesmo, o que não apenas me possibilitou realizar essa pesquisa mas também forneceu um bolsa de iniciação científica que me possibilitou custear boa parte dos gastos feitos durante parte de minha graduação.

Referências

1. KEELING, M.; ROHANI, P. *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton: Princeton University Press, 2007.
2. ARAUJO, M. S. et al. *Mean-field approximation for the sznajd model in complex networks*. *Phys. Rev. E*, v. 91, p. 022813, 2015.
3. ALEMI, A. A. et al. *Phys. Rev. E*, v. 92, p. 052801, 2015.
4. BERNOULLI, D. *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole, et des avantages de Inoculacion pour la prevenir*. In: *Mem. Des Math. Et Phys., Mem. Paris: Histoire de l'Acad. Roy. Sci.*, 1760. p. 1.
5. MOTA, M. P. S.; ALVES, G. A.; MACEDO-FILHO, A.; ALVES, T. F. A. *Critical behavior of SIS model on two-dimensional quasiperiodic tilings*. *PHYSICA A-STATISTICAL MECHANICS AND ITS APPLICATIONS*, v. 510, p. 577-586, 2018.
6. MACEDO-FILHO, A.; ALVES, G. A.; COSTA FILHO, R. N.; ALVES, T. F. A. *Reactivating dynamics for the susceptible-infected-susceptible model: a simple method to simulate the absorbing phase*. *JOURNAL OF STATISTICAL MECHANICS-THEORY AND EXPERIMENT*, v. 2018, p. 043208, 2018.
7. ALENCAR, D. S. M.; ALVES, T. F. A.; ALVES, G. A.; MACEDO-FILHO, A.; FERREIRA, R. S. *Epidemic outbreaks on random Voronoi-Delaunay triangulations*. *PHYSICA A-STATISTICAL MECHANICS AND ITS APPLICATIONS*, v. 541, p. 122800, 2020.
8. ALVES, T. F. A.; ALVES, G. A.; MACEDO-FILHO, A.; FERREIRA, R. S.; LIMA, F. W. S. *The diffusive epidemic process on Barabasi-Albert networks*. *JOURNAL OF STATISTICAL MECHANICS-THEORY AND EXPERIMENT*, v. 2021, p. 043203, 2021.
9. ALENCAR, D. S. M.; ALVES, T. F. A.; ALVES, G. A.; LIMA, F. W. S.; MACEDO-FILHO, A.; FERREIRA, R. S. *Two-dimensional diffusive epidemic process in the presence of quasiperiodic and quenched disorder*. *JOURNAL OF STATISTICAL MECHANICS-THEORY AND EXPERIMENT*, v. 2023, 043205, 2023.
10. ALENCAR, D. S. M.; ALVES, T. F. A.; FERREIRA, R. S.; ALVES, G. A.; MACEDO-FILHO, A.; LIMA, F. W. S. *Droplet finite-size scaling of the contact process on scale-free networks revisited*. *INTERNATIONAL JOURNAL OF MODERN PHYSICS C*, v. 2023, p. 2350105, 2023.

11. ARENAS, Alex et al. *A mathematical model for the spatiotemporal epidemic spreading of COVID-19*. medRxiv, 2020.
12. CHINAZZI, Matteo et al. *The effect of travel restrictions on the spread of the 2019 novel coronavirus (COVID-19) outbreak*. Science, v. 368, p. 395-400, 2020.
13. HELLEWELL, Joel et al. *Feasibility of controlling COVID-19 outbreaks by isolation of cases and contacts*. The Lancet Global Health, v. 8, p. e488 - e496, 2020.
14. REMZZI, Andrea; REMUZZI, Giuseppe. *COVID-19 and Italy: what next?*. The Lancet, v. 395, p. 1225 - 1228, 2020.
15. BAI, Yan et al. *Presumed Asymptomatic Carrier Transmission of COVID-19*. JAMA, v. 323, p. 1406-1407, 2020.
16. SANTOS, G. B. M.; ALVES, T. F. A.; ALVES, G. A.; MACEDO-FILHO, A.; FERREIRA, R. S. *Epidemic outbreaks on two-dimensional quasiperiodic lattices*. PHYSICS LETTERS A, v. 384, p. 126063, 2019.
17. ALENCAR, D. S. M.; ALVES, T. F. A.; ALVES, G. A.; MACEDO-FILHO, A.; FERREIRA, R. S. *Epidemic outbreaks on random Voronoi-Delaunay triangulations*. PHYSICA A-STATISTICAL MECHANICS AND ITS APPLICATIONS, v. 541, p. 122800, 2020.
18. SOUSA, David Rodrigues de. *Transições de fase em modelos estocásticos para descrever epidemias*. 2012. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-26032013-131452/pt-br.php.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2019.
19. ALMEIDA, L. A. F. de; SILVEIRA, G. P. *Análise do comportamento da Covid-19 no Brasil via modelo SIR*. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 21, 2021.
20. HARRIS, T. E. *Contact Interactions on a Lattice*. The Annals of Probability, v. 2, n. 6, p. 969-988, 1974.
21. DURRETT, R.; GRIFFEATH, D. *Supercritical contact processes on Z*. Annals of Probability, Providence, v. 11, n. 1, p. 1-15, fev. 1983.
22. STAUFFER, Dietrich; AHARONY, Ammon. *Introduction to Percolation Theory*. 2. ed. London: Taylor & Francis, 1994.
23. LIMA, F. W. S. *Equilibrium and nonequilibrium models on Solomon networks with two square lattices*. International Journal of Modern Physics C, v. 28, n. 08, art. 1750099, 2017. DOI: 10.1142/S0129183117500991

