



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CAMPUS POETA TORQUATO NETO
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE FÍSICA

Jordânia Kaline Macedo da Silva

Insights Sobre Criticalidade e Universalidade do Modelo Calazar em Redes Regulares 1D

A R T I G O

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em Física
da Universidade Estadual do Piauí Campus Po-
eta Torquato Neto como parte dos requisitos obri-
gatórios para a obtenção do título de Licenciado
em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio de Macedo Filho

Teresina(PI), junho de 2025

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela força, sabedoria e oportunidade de chegar até esta etapa da minha jornada acadêmica.

Minha eterna gratidão à minha família, que sempre foi meu alicerce, em especial à minha mãe, Mirian Silva Macedo, cujo amor incondicional e força me inspiraram todos os dias; ao meu pai, Francisco Fernandes Oliveira da Silva, que, com seu exemplo de trabalho e dedicação, me mostrou o verdadeiro significado da persistência; e às minhas irmãs, Geovanna Karine Macedo da Silva e Hayana Mila Vitória Silva Costa, por todo apoio; aos meus sobrinhos, Enzo Gabriel Macedo da Silva, Bryan Gael Macedo da Silva e Simon Noah Macedo da Silva, que trouxeram alegria nos momentos mais desafiadores.

Ao professor Antonio de Macedo Filho, meu orientador, agradeço pela paciência, orientação valiosa e por acreditar no meu potencial, mesmo quando eu mesma duvidava. Suas contribuições foram fundamentais para a realização deste trabalho

Não poderia deixar de agradecer aos professores que marcaram minha trajetória acadêmica: Janete Batista de Brito, Nadja Vieira da Costa, Edina Maria de Sousa Luz, Lenilson Brito e Gladstone de Alencar Alves. Cada um deixou lições que levarei para toda a vida, profissional e pessoal.

Por fim, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos e colegas que compartilharam comigo os momentos de dúvida, as vitórias, as risadas e as noites em claro estudando. Vocês tornaram essa jornada muito mais especial.

Este trabalho é o resultado do apoio, incentivo e amor de todas essas pessoas especiais que Deus colocou no meu caminho. A cada uma delas, direciono meu sincero e eterno agradecimento.

Insights Sobre Criticalidade e Universalidade do Modelo Calazar em Redes Regulares 1D

Insights on Criticality and Universality of the Kala-Azar Model in 1D Regular Network

Jordânia Kaline Macedo da Silva[†]

Orientador: Prof. Dr. Antonio de Macedo Filho[‡]

[†]jkmdasilva@aluno.uespi.br, [‡]amfilho@prp.uespi.br

TCC - Licenciatura em Física - CCN - UESPI | Teresina(PI), junho de 2025

Resumo

Este trabalho investigou a propagação da Leishmaniose (Calazar), usando o Modelo Epidêmico Difusivo (PED) em uma rede unidimensional. O objetivo foi analisar a dinâmica da doença, focando nas propriedades críticas do modelo obtidas nesta simulação, a saber ponto crítico de transição ($p_c \approx 2,480$) entre fases ativa e inativa e os expoentes críticos $\beta/\nu \approx 0.213$, $\gamma/\nu \approx 0.72$, $1/\nu \approx 0.40$. Para obtenção desses resultados foram consideradas taxas de difusão para Mosquitos ($DA = DB = 0,50$), Cachorros ($DA = DB = 0,25$) e Humanos ($DA = DB = 0$) para diferentes tamanhos de rede. Os resultados confirmaram que o sistema apresenta uma transição de fase contínua entre as fases inativas e ativas da infecção. A classe de universalidade do modelo necessita ser investigada, uma vez que as propriedades críticas não corroboram com a classe da Percolação Direcionada. Vale ressaltar o potencial da Física Estatística na compreensão de fora do equilíbrio, como o investigado nesta proposta. Contudo, o modelo unidimensional e as taxas de difusão fixas são limitações que simplificam a realidade. Para trabalhos futuros, sugere-se expandir o modelo para redes complexas e investigar distintas taxas de difusão, além de incluir outros fatores epidemiológicos e socioeconômicos. A aplicação a outras doenças infecciosas também é uma via promissora para consolidar a contribuição da Física Estatística na saúde pública.

Abstract

This study investigated the propagation of Leishmaniasis (Kala-azar) using the Diffusive Epidemic Model (PED) on a one-dimensional network. The objective was to analyze the disease dynamics, focusing on the critical properties of the model obtained in this simulation, namely the critical transition point ($p_c \approx 2.480$) between active and inactive phases and the critical exponents $\beta/\nu \approx 0.213$, $\gamma/\nu \approx 0.72$, $1/\nu \approx 0.40$. To obtain these results, diffusion rates were considered for Mosquitoes ($DA = DB = 0,50$), Dogs ($DA = DB = 0,25$) and Humans ($DA = DB = 0$) for different network sizes. The results confirmed that the system exhibits a continuous phase transition between the inactive and active phases of the infection. The universality class of the model needs further investigation, as the critical properties do not align with the Directed Percolation class. It is worth noting the potential of Statistical Physics in understanding out-of-equilibrium phenomena, as

explored in this study. However, the one-dimensional model and fixed diffusion rates are limitations that simplify reality. For future work, it is suggested to expand the model to complex networks and investigate different diffusion rates, as well as include other epidemiological and socioeconomic factors. The application to other infectious diseases is also a promising avenue to consolidate the contribution of Statistical Physics to public health.

Palavras-chave: Processo Epidêmico Difusivo (PED); Modelo Epidêmico Calazar; Transição de fase; Classe de Universalidade; Rede Regular 1D; Processo de Contato; Classe de Criticalidade.

Keywords: Diffusive Epidemic Process (DEP); Kala-azar Epidemic Model; Phase Transition; Universality Class; 1D Regular Network; Contact Process; Criticality Clas.

Sumário

1	Introdução	3
2	Fundamentação Teórica	4
2.1	Pesquisas Anteriores no Contexto Local	6
3	Metodologia	9
3.1	Ferramentas Utilizadas	10
3.2	Parâmetros e Taxas do Modelo	10
3.3	Funcionamento do Código	11
4	Resultados e Discussão	12
4.1	Apresentação dos Resultados Obtidos	12
4.2	Análise Crítica dos Dados com Base na Teoria	16
5	Conclusão	17
	Referências	17

1 Introdução

A *Leishmaniose*, popularmente conhecida como Calazar, representa um grave problema de saúde pública em diversas regiões do mundo, especialmente em países em desenvolvimento. Caracterizada por ser uma doença parasitária complexa, sua propagação envolve a interação de múltiplos fatores, incluindo o vetor (mosquito-palha), reservatórios (principalmente cães) e o hospedeiro humano. A dinâmica de transmissão do Calazar é intrincada e influenciada por variáveis ambientais, sociais e biológicas, o que torna seu controle e previsão um desafio significativo para as autoridades de saúde (SILVA; SILVA; CAMPOS, 2021).

Nesse contexto, a modelagem matemática e computacional surge como uma ferramenta essencial para compreender a complexidade da propagação de doenças infecciosas. Modelos epidemiológicos permitem simular cenários, identificar padrões de transmissão e prever o comportamento de surtos, auxiliando na formulação de estratégias de intervenção mais eficazes. A Física Estatística, com suas ferramentas para análise de sistemas complexos e fenômenos críticos, tem se mostrado particularmente relevante nesse campo, oferecendo abordagens inovadoras para o estudo de transições de fase em sistemas biológicos e sociais, como a propagação de epidemias (SOUSA, ; SILVA, 2013).

O presente trabalho insere-se nesse panorama, explorando o Modelo Epidêmico Calazar por meio do Processo Epidêmico Difusivo (PED) aplicado em uma rede unidimensional. O estudo foca na análise da propagação da Leishmaniose e na identificação do ponto crítico de transição entre as fases ativa e inativa da epidemia. Essa abordagem é crucial, pois pequenas alterações em parâmetros como taxas de infecção ou deslocamento dos indivíduos podem levar a resultados drasticamente diferentes, evidenciando a sensibilidade do sistema próximo ao seu ponto crítico (CARVALHO, 2025).

Para investigar esse fenômeno, foram empregadas ferramentas da Física Estatística, como a criticalidade e a ideia de universalidade. A criticalidade permite a compreensão de como o sistema se comporta em torno de um ponto de transição, onde pequenas perturbações podem ter grandes efeitos. A universalidade, por sua vez, busca identificar padrões comuns em sistemas aparentemente distintos quando se aproximam de uma mudança crítica, sugerindo que as propriedades críticas são independentes dos detalhes microscópicos do sistema (ALENCAR, 2020).

Na simulação, foram considerados três grupos distintos: humanos, mosquitos e cachorros. A dinâmica de movimentação desses grupos foi diferenciada, com cachorros e mosquitos se deslocando pela rede com taxas de difusão específicas (D_A e D_B), enquanto os humanos permaneceram fixos. Cada grupo possui suas próprias regras de contágio, e a interação entre eles foi implementada em linguagem C, com execução em ambiente Linux. A análise dos dados foi realizada utilizando a técnica de Escala de Tamanho Finito, uma metodologia robusta que permite identificar com precisão a região onde ocorre a transição de fase (FILHO, 2011).

O objetivo geral deste trabalho é analisar a propagação da Leishmaniose (Calazar) utilizando o Processo Epidêmico Difusivo (PED) em uma rede unidimensional, com foco

na identificação e caracterização do ponto crítico de transição entre as fases ativa e inativa da epidemia. Para tanto, os objetivos específicos incluem:

- Investigar o impacto de diferentes taxas de difusão (D_A para indivíduos saudáveis e D_B para infectados), incluindo combinações como: Mosquitos ($D_A = D_B = 0,50$), Cães ($D_A = D_B = 0,25$), Humanos sem movimento ($D_A = D_B = 0$) na dinâmica de propagação da doença.
- Analisar a sensibilidade do ponto crítico de transição, juntamente com as variações nas taxas de infecção e no deslocamento dos indivíduos.
- Verificar a aplicabilidade dos conceitos de criticalidade e universalidade da Física Estatística na compreensão dos padrões de propagação da Leishmaniose.

A relevância deste estudo reside na sua capacidade de fornecer insights valiosos para a compreensão e o controle da Leishmaniose. Ao aplicar ferramentas da Física Estatística a um problema de saúde pública, o trabalho reforça a interdisciplinaridade e o potencial de modelos físicos para auxiliar na formulação de estratégias de prevenção e combate a epidemias. A identificação precisa do ponto crítico e a compreensão da universalidade do sistema podem informar políticas de saúde, permitindo uma resposta mais ágil e eficaz diante de surtos, minimizando o impacto da doença na população.

2 Fundamentação Teórica

A compreensão da dinâmica de propagação de doenças infecciosas tem sido um desafio constante para a ciência, impulsionando o desenvolvimento de abordagens quantitativas desde os primórdios da epidemiologia moderna. Os trabalhos pioneiros de William Farr no século XIX, analisando dados de mortalidade, e o subsequente desenvolvimento de modelos compartimentais, como o clássico modelo SIR (Suscetível Infectado-Recuperado) por Kermack e McKendrick em 1927, estabeleceram as bases para a modelagem matemática de epidemias. Esses modelos iniciais, embora fundamentais, frequentemente assumem uma premissa de mistura homogênea da população, onde cada indivíduo tem a mesma probabilidade de interagir com qualquer outro, uma simplificação que nem sempre reflete a realidade das interações humanas e da estrutura espacial das populações. Nas últimas décadas, a física estatística emergiu como uma ferramenta necessária para superar algumas dessas limitações, oferecendo uma estrutura conceitual e metodológico para investigar sistemas complexos com muitos componentes interagentes, operando frequentemente fora do equilíbrio termodinâmico (MARRO; DICKMAN, 2005; TOMÉ, 2001). Ao focar nas interações locais entre indivíduos, na heterogeneidade espacial, na estrutura de redes de contato (sejam elas regulares, aleatórias ou complexas) e na natureza estocástica dos processos de infecção e recuperação, a física estatística permite construir modelos mais realistas e detalhados. Essa abordagem é particularmente relevante para doenças com ciclos de transmissão intrincados, como a Leishmaniose Visceral (LV). A LV envolve múltiplos

atores – humanos, reservatórios (principalmente cães domésticos no contexto brasileiro) e vetores (flebotomíneos) – com diferentes padrões de mobilidade e interação espacial, tornando a dinâmica de sua propagação um problema complexo e espacialmente dependente, ideal para ser investigado sob a ótica dos sistemas dinâmicos e fenômenos críticos estudados pela física estatística de não-equilíbrio (HINRICHSSEN, 2006). A aplicação da física estatística ao estudo de epidemias se beneficia de um vasto conhecimento acumulado sobre modelos de processos estocásticos em redes e, em particular, sobre transições de fase para estados absorventes dos quais o sistema não pode escapar espontaneamente, como a extinção total de uma infecção. Um dos modelos mais simples e influentes nesse contexto é o Processo de Contato (PC), introduzido por Ted Harris em 1974 precisamente para modelar a disseminação de uma infecção simples em uma rede (HARRIS, 1974). Um sítio saudável torna-se infectado a uma taxa proporcional ao número de vizinhos infectados, enquanto um sítio infectado recupera-se (ou é removido) espontaneamente a uma taxa constante (geralmente normalizada para 1). Apesar de sua simplicidade, o PC exhibe uma transição de fase contínua entre um estado ativo (onde a infecção persiste) e um estado absorvente (onde a infecção se extingue) em função da taxa de infecção. Notavelmente, em uma dimensão, o PC pertence à classe de universalidade da Percolação Direcionada (DP) (GRASSBERGER, 1983; HARRIS, 1974). O conceito de universalidade postula que sistemas microscopicamente distintos podem exibir o mesmo comportamento crítico (descrito pelos mesmos expoentes críticos) nas proximidades de uma transição de fase contínua, sugerindo que apenas características gerais, como a dimensionalidade do sistema, as simetrias e a natureza da transição (existência de um estado absorvente único, por exemplo), determinam o comportamento em larga escala. A classe DP é considerada a classe de universalidade genérica para transições de fase para um único estado absorvente em sistemas sem simetrias adicionais ou leis de conservação (BINDER, 1981; GRASSBERGER, 1983). Uma generalização natural do PC, que incorpora um ingrediente essencial para a modelagem epidêmica a mobilidade dos indivíduos é o Processo Epidêmico Difusivo (PED) (KREE; SCHAUB; SCHMITTMANN, 1989; WIJLAND; OERDING; HILHORST, 1998). No PED, os indivíduos (ou partículas) podem não apenas mudar de estado (ex: saudável para infectado), mas também mover-se pela rede com certas taxas de difusão. Tipicamente, considera-se que indivíduos em diferentes estados podem ter taxas de difusão distintas (D_A e D_B). Isso permite investigar como a mobilidade e a diferença de mobilidade entre os estados afetam a dinâmica da epidemia e, crucialmente, o limiar crítico para sua persistência. Estudos anteriores sobre o PED em uma dimensão, utilizando simulações de Monte Carlo, investigaram seu comportamento crítico, confirmando em muitos casos a pertinência da classe de universalidade DP, embora a dinâmica exata e os valores dos expoentes possam depender das taxas de difusão e das regras específicas de interação (FULCO; MESSIAS; LYRA, 2001). Variações do PED, incorporando, por exemplo, difusão anômala como voos de Lévy, também têm sido exploradas para modelar cenários de dispersão mais complexos (SILVA, 2010).

2.1 Pesquisas Anteriores no Contexto Local

O estudo de modelos epidêmicos da física estatística tem sido uma linha de pesquisa ativa no grupo associado a este trabalho, sediado na Universidade Federal e Estadual do Piauí. Diversos trabalhos exploraram modelos como SIR, SIS e o próprio PED em diferentes substratos, incluindo redes regulares bidimensionais, redes quasiperiódicas (Penrose, Ammann-Beenker), triangulações de Voronoi-Delaunay e redes complexas como as redes de Apollonian (MOTA et al., 2018; ALENCAR, 2020; CARVALHO, 2025; ALENCAR et al., 2020). Um foco recorrente tem sido a determinação das propriedades críticas e das classes de universalidade desses modelos, frequentemente encontrando resultados consistentes com a DP ou a Percolação Dinâmica, dependendo das especificidades do modelo e da rede. O uso de simulações de Monte Carlo e da Análise por Escala de Tamanho Finito (FSS) tem sido a abordagem metodológica predominante (FILHO, 2011). O presente estudo, ao investigar um modelo específico para o Calazar (baseado no PED) em uma rede unidimensional, com três tipos de agentes (humanos, cães, mosquitos) e mobilidade diferenciada (humanos fixos, cães e mosquitos móveis), insere-se diretamente nessa tradição, buscando aplicar essas ferramentas a um problema biologicamente motivado e relevante para o contexto regional, explorando um cenário dimensional e de mobilidade ainda não totalmente caracterizado dentro dessa linha de pesquisa. Conforme mencionado, muitos modelos epidêmicos exibem uma transição de fase entre um estado ativo, onde a doença persiste na população (correspondendo a um estado onde a densidade de infectados é diferente de zero no limite termodinâmico), e um estado inativo ou absorvente, onde a doença é completamente erradicada (densidade de infectados nula). A transição ocorre em um valor crítico de um parâmetro de controle, que no contexto epidêmico é tipicamente relacionado à taxa de infecção (λ) ou a um número reprodutivo básico. O parâmetro de ordem usual para caracterizar essa transição é a densidade média de indivíduos infectados (ρ) no estado estacionário. Abaixo do limiar crítico ($\lambda < \lambda_c$), $\rho = 0$ (fase inativa/absorvente); acima do limiar ($\lambda > \lambda_c$), $\rho > 0$ (fase ativa/endêmica). A transição é dita contínua se o parâmetro de ordem cresce continuamente a partir de zero quando λ ultrapassa λ_c . Nas proximidades do ponto crítico ($\lambda \approx \lambda_c$), sistemas que exibem transições de fase contínuas desenvolvem correlações de longo alcance tanto no espaço quanto no tempo. O comportamento do sistema nessa região crítica é frequentemente descrito por leis de potência, caracterizadas por um conjunto de expoentes críticos universais. Para transições para estados absorventes, os expoentes mais relevantes incluem:

- β : descreve como o parâmetro de ordem (densidade ρ) escala com a distância ao ponto crítico na fase ativa: $\rho \sim (\lambda - \lambda_c)^\beta$.
- ν_\perp : caracteriza a divergência do comprimento de correlação espacial $\xi_\perp \sim |\lambda - \lambda_c|^{-\nu_\perp}$.
- ν_\parallel : caracteriza a divergência do tempo de correlação $\tau \sim |\lambda - \lambda_c|^{-\nu_\parallel}$.

A hipótese de universalidade afirma que esses expoentes (e outras relações de escala) dependem apenas de características gerais do sistema, como dimensionalidade e simetrias,

e não dos detalhes microscópicos das interações. Sistemas pertencentes à mesma classe de universalidade compartilham o mesmo conjunto de expoentes críticos. Como já destacado, a classe da Percolação Direcionada (DP) é a candidata principal para a universalidade de transições para um único estado absorvente em muitos sistemas, incluindo o PC e, potencialmente, o PED em 1D. O modelo específico investigado neste trabalho adapta o **Processo Epidêmico Difusivo (PED)** para o ciclo da Leishmaniose em uma rede unidimensional (cadeia linear de sítios). Os agentes são:

- **Humanos (H)**: Considerados fixos em seus sítios.
- **Cães (C)**: Reservatórios, considerados móveis.
- **Mosquitos Vetores (M)**: Considerados móveis.

Cada sítio i pode conter múltiplos mosquitos e cães (natureza bosônica). Os estados relevantes são:

- Humano Suscetível (**HS**), Humano Infectado (**HI**);
- Cão Suscetível (**CS**), Cão Infectado (**CI**);
- Mosquito Suscetível (**MS**), Mosquito Infectado (**MI**).

As regras de interação (ocorrendo dentro de um sítio ou entre vizinhos, dependendo da implementação exata) envolvem:

- **Infecção:**
 - **CI** \rightarrow **MS** (cão infecta mosquito), taxa A_{CM} ;
 - **MI** \rightarrow **HS** (mosquito infecta humano), taxa A_{MH} ;
 - **MI** \rightarrow **CS** (mosquito infecta cão), taxa A_{MC} .
- **Recuperação/Remoção:**
 - **HI** \rightarrow **HS** (cura humana, taxa μ_H);
 - **CI** \rightarrow **CS** (cura canina, taxa μ_C);
 - **MI** \rightarrow **MS** (morte/remoção do mosquito infectado, taxa μ_M).

As regras de difusão governam o movimento de cães e mosquitos entre sítios vizinhos na rede 1D. Sejam D_C e D_M as taxas de difusão (probabilidade de pular para um sítio vizinho por unidade de tempo) para cães e mosquitos, respectivamente. O estado (suscetível ou infectado) do animal/vetor pode ou não influenciar sua taxa de difusão (no caso referi-se ao DA e DB, onde precisa ser clarificado qual agente é A e qual é B no contexto do Calazar). A dinâmica temporal do sistema é tipicamente simulada usando algoritmos de Monte Carlo cinético, que atualizam o estado do sistema em passos discretos de tempo, escolhendo eventos (infecção, cura, difusão) com probabilidades proporcionais às suas taxas. Simulações computacionais são necessariamente realizadas em sistemas de tamanho finito (L sítios). Perto do ponto crítico, o comprimento de correlação ξ_\perp diverge, e quando ξ_\perp se torna comparável a L , o comportamento do sistema é afetado por efeitos de tamanho finito. A teoria de **FSS** (Finite-Size Scaling) explora essa dependência para extrair informações sobre o comportamento no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$).

Hipótese central da FSS postula que, perto de λ_c , uma quantidade termodinâmica $P(\lambda, L)$ obedece a uma lei de escala da forma:

$$P(\lambda, L) \approx L^{-\omega/\nu_\perp} \cdot F\left((\lambda - \lambda_c)L^{1/\nu_\perp}\right),$$

onde ω é o expoente de escala de P e F é uma função de escala universal. Aplicando isso a observáveis específicos:

- **Densidade de infectados no ponto crítico:**

$$\rho(\lambda_c, L) \sim L^{-\beta/\nu_\perp}.$$

- **Susceptibilidade** (flutuação do parâmetro de ordem) no ponto crítico:

$$\chi(\lambda_c, L) \sim L^{\gamma/\nu_\perp}.$$

- **Tempo médio de sobrevivência** (até atingir o estado absorvente) a partir de uma configuração inicial específica, no ponto crítico:

$$\tau(\lambda_c, L) \sim L^z = L^{\nu_\parallel/\nu_\perp}.$$

- **Cumulante de Binder:**

$$U(L) = 1 - \frac{\langle \rho^4 \rangle}{3\langle \rho^2 \rangle^2}.$$

No ponto crítico, $U(L)$ converge para um valor universal (independente de L para L grande), permitindo uma estimativa precisa de λ_c ao encontrar o ponto de cruzamento das curvas $U(L)$ vs λ para diferentes L .

Ao ajustar os dados da simulação para diferentes tamanhos L a essas leis de escala, é possível estimar tanto o limiar crítico λ_c quanto os expoentes críticos β/ν_\perp , γ/ν_\perp , z (e, consequentemente, β , γ , ν_\perp , ν_\parallel), permitindo a caracterização da classe de universalidade do modelo. Este referencial teórico buscou estabelecer as bases conceituais e metodológicas para a investigação proposta no trabalho "Insights sobre Criticalidade e Universalidade do Modelo Calazar em Redes Regulares 1D". Partindo da interface entre modelagem epidêmica e física estatística, revisamos modelos fundamentais como o Processo de Contato e sua generalização, o Processo Epidêmico Difusivo, destacando a importância dos conceitos de transições de fase para estados absorventes e universalidade, com foco na classe da Percolação Direcionada. Contextualizamos o estudo dentro das pesquisas anteriores do grupo e detalhamos os fundamentos teóricos do modelo PED adaptado ao Calazar em 1D, bem como a técnica de Análise por Escala de Tamanho Finito, essencial para a análise dos dados de simulação. A compreensão desses elementos é crucial para abordar o problema central: determinar como a dinâmica de interação e a mobilidade diferenciada dos três agentes (humanos, cães, mosquitos) em uma rede unidimensional afetam o

comportamento crítico e a classe de universalidade da propagação da Leishmaniose, fornecendo subsídios teóricos para a interpretação dos resultados que serão apresentados na seção de Metodologia e Resultados.

3 Metodologia

Adota-se uma abordagem de pesquisa quantitativa, com foco em modelagem computacional e simulação numérica. o estudo investiga o Modelo Epidêmico Calazar através de algoritmos computacionais e técnicas da Mecânica Estatística. A natureza da pesquisa é evidenciada pela coleta e análise de dados numéricos gerados por simulações, visando quantificar propriedades físicas do modelo e entender a dinâmica da propagação da leishmaniose (calazar) em redes regulares. Os dados para esta pesquisa são gerados exclusivamente por meio de simulações computacionais do Modelo Epidêmico Calazar.

O modelo é implementado em uma rede unidimensional, onde os seres (humanos, mosquitos e cachorros) interagem. A rede é inicializada com indivíduos saudáveis e doentes, e vetores (mosquitos) e cães. A dinâmica proposta é simulada ao longo do tempo, com atualizações aleatórias dos estados dos indivíduos, mosquitos e cães. Isso inclui movimentação (difusão), contaminação e cura, conforme as regras definidas no algoritmo. Durante as simulações, variáveis de interesse, como o número de indivíduos doentes, vetores doentes e cães doentes, são registradas em cada iteração. Essas contagens são normalizadas pelo tamanho da rede para obter densidades. Para garantir a potência estatística dos resultados, as simulações são repetidas um grande número de vezes ($\text{repe} = 100000$), e os dados são coletados e promediados ao longo dessas repetições. Isso permite a obtenção de médias e momentos estatísticos das variáveis observadas. As principais variáveis observadas e medidas durante as simulações computacionais são:

- Densidade de Indivíduos Doentes (cntdoente): Representa a proporção de humanos infectados na rede. É calculada como $(1.0 \times \text{ndoente}) / (1.0 \times 1)$, onde ndoente é o número de indivíduos doentes e l é o tamanho da rede.
- Densidade de Vetores Doentes (cntv1doente): Representa a proporção de mosquitos infectados na rede. Cujas linguagens executadas foram C e C++.
- Densidade de Cães Doentes (nd1doente): Representa a proporção de cães infectados na rede.
- Segundo Momento (m_2) e Quarto Momento (m_4): Calculados a partir das densidades observadas, são utilizados para determinar a função de Binder e a susceptibilidade.
- Função de Binder (U): Uma grandeza estatística utilizada para identificar o ponto crítico de transição de fase. Sua principal característica é que, no ponto crítico, o valor da Função de Binder se torna independente do tamanho do sistema. Isso significa que, ao plotar a Função de Binder para diferentes tamanhos de rede, todas

as curvas se cruzarão em um único ponto, que corresponde ao ponto crítico da transição.

- Susceptibilidade (x): Outra grandeza estatística que diverge no ponto crítico, calculada como $l \cdot (m_2 - \text{sumentdoente}^2)$
- Parâmetros Críticos: Embora não sejam variáveis observadas diretamente nas simulações, os expoentes críticos $\left(\frac{1}{v}, \frac{\beta}{v}, \frac{\gamma}{v}\right)$ e o ponto crítico (p_c) são determinados a partir da análise dos dados simulados, especialmente através do colapso de curvas.

3.1 Ferramentas Utilizadas

As ferramentas empregadas para o desenvolvimento e análise deste trabalho incluem:

Linguagem de Programação C: Utilizada para escrever os algoritmos computacionais que simulam o Modelo Epidêmico Calazar. Cujo Sistema Operacional é o Linux, onde a plataforma gera os algoritmos que são compilados e executados. As simulações foram realizadas no Laboratório de Física Teórica e Modelagem Computacional (UESPI), um ambiente com máquinas (físicas e virtuais) atualizadas e recursos de bancada. Ferramentas como (Gnuplot/Matplotlib) foram utilizadas para visualização e análise dos dados simulados.

3.2 Parâmetros e Taxas do Modelo

Os parâmetros e taxas que governam a dinâmica do Modelo Epidêmico Calazar, são apresentados a seguir. É importante notar que as taxas de difusão e cura são probabilidades e, portanto, podem ser expressas em porcentagem. Foram utilizadas as seguintes técnicas:

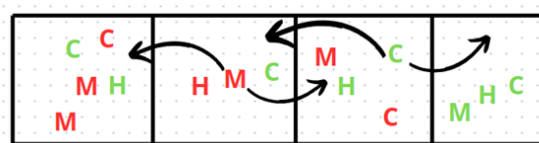
- Taxas de Difusão (probabilidade de movimentação):
 - Mosquito Saudável (d_{am}): 0.50 (50%); Mosquito Infectado (d_{bm}): 0.50 (50%);
 - Cão Saudável (d_{ad}): 0.25 (25%); Cão Infectado (d_{bd}): 0.25 (25%)
- Taxas de Contaminação (probabilidade de infecção)
 - Taxa de Contaminação Geral (p_{conta}): 0.50 (50%): Esta é a probabilidade de um indivíduo (humano, cão ou vetor) ser infectado se exposto a um agente infeccioso (vetor infectado ou cão infectado).
 - Taxa de Contaminação do Mosquito: No modelo, a contaminação do mosquito ocorre quando um mosquito saudável (vet_0) interage com um cão infectado (dog_1) ou um humano infectado ($state = 1$), com probabilidade p_{conta} (50%).
 - Taxa de Contaminação do Cão: A contaminação do cão ocorre quando um cão saudável (dog_0) interage com um mosquito infectado (vet_1), com probabilidade p_{conta} (50%).

3.3 Funcionamento do Código

O código implementa um modelo de simulação estocástica para a leishmaniose visceral (calazar) em uma rede regular 1D. O programa simula a interação entre humanos (indivíduos), mosquitos (vetores) e cães, considerando processos de difusão, contaminação e cura. Abaixo, uma descrição detalhada de suas principais seções:

- **Inicialização:** O programa começa lendo os parâmetros de entrada da linha de comando, como o tamanho da rede (l), a densidade inicial (ρ_{initial}) e final (ρ_{final}). Ele aloca memória para os arrays que representam o estado dos indivíduos (**state**), mosquitos (**vet0**, **vet1**) e cães (**dog0**, **dog1**), além de arrays para armazenar os resultados das medições.
- **Parâmetros do Modelo:** Define as taxas de difusão para mosquitos (d_{am} , d_{bm}) e cães (d_{ad} , d_{bd}), a probabilidade de contaminação (p_{conta}), e as probabilidades de cura para cães (p_{cd}), mosquitos (p_{cw}) e indivíduos (λ). Também define o número de repetições (**repe**) e o tempo máximo de relaxação ($t_{r_{\text{max}}}$).
- **Loop de Densidade (ρ):** O programa itera sobre diferentes valores de densidade (ρ), que representa a densidade total de seres na rede. Para cada ρ , um novo conjunto de simulações é executado.
- **Loop de Amostras (repe):** Dentro do loop de densidade, o programa executa **repe** (100000) simulações independentes. Cada simulação começa com uma nova configuração aleatória da rede.
- **Condições Iniciais:** Para cada amostra, a rede é inicializada com uma proporção de indivíduos doentes e saudáveis. Mosquitos e cães (saudáveis e doentes) são distribuídos aleatoriamente na rede.
- **Loop de Tempo de Relaxação ($t_{r_{\text{max}}}$):** Antes de iniciar as medições, o sistema evolui por $t_{r_{\text{max}}}$ (10000) passos de tempo. Isso permite que o sistema atinja um estado de equilíbrio ou estacionário, minimizando os efeitos das condições iniciais.
- **Dinâmica do Modelo (Dentro do Loop de Tempo):**
 - **Movimentação (Difusão):** Mosquitos e cães (saudáveis e doentes) se movem aleatoriamente na rede com probabilidades definidas por suas taxas de difusão (d_{am} , d_{bm} , d_{ad} , d_{bd}). A movimentação ocorre para sítios vizinhos (direita ou esquerda em 1D).

Figura 1: Movimentação de Cães e Mosquitos em Uma Rede Unidimensional.



Fonte: Autoria Própria

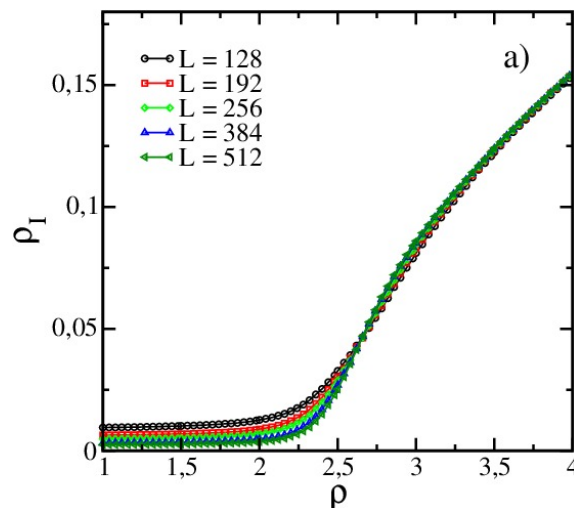
- Cura: Indivíduos, cães e mosquitos doentes podem se curar com probabilidades definidas por λ , p_{cd} e p_{cv} , respectivamente.
- Ressuscitação: Se o número de indivíduos, mosquitos ou cães doentes chega a zero, o código garante que pelo menos um indivíduo, mosquito ou cão doente seja "ressuscitado" para evitar que o sistema caia em um estado absorvente trivial (onde não há mais doença).
- Medições: Após o tempo de relaxação, as densidades de indivíduos doentes são calculadas e armazenadas para cada amostra. Os segundos e quartos momentos também são calculados.
- Cálculo de Médias e Análise: Após todas as repetições amostras, as médias das densidades e dos momentos são calculadas. A função de Binder (u) e a susceptibilidade (x) são então determinadas a partir desses valores. Esses resultados são gravados em um arquivo de saída (.dat) para posterior análise.

4 Resultados e Discussão

4.1 Apresentação dos Resultados Obtidos

Esta seção apresenta uma análise detalhada das figuras fornecidas, relacionando-as com os conceitos de criticalidade, universalidade, parâmetros de ordem, quantidades flutuantes e o cumulante de Binder no contexto do Modelo Epidêmico Calazar em redes 1D.

Figura 2: Parâmetro de Ordem.

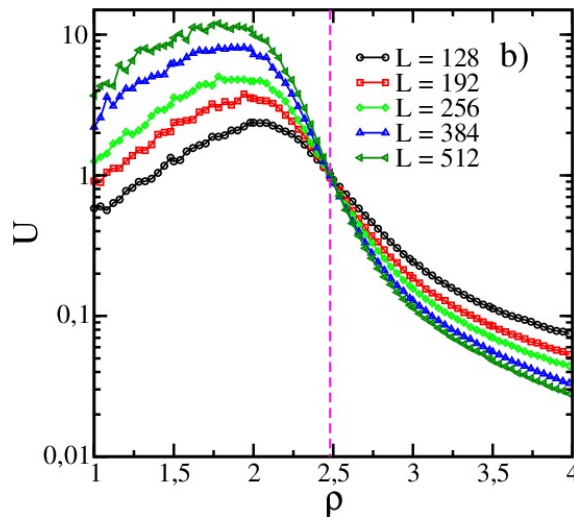


Fonte: Autoria Própria

A figura 2 - Parâmetro de Ordem (a) apresenta a densidade de infectados (ρ_I) em função do parâmetro de controle ρ para diferentes tamanhos de sistema L ($L = 128, 192, 256, 384, 512$). Esta figura ilustra o comportamento do parâmetro de ordem do sistema. Observa-se que para valores baixos de ρ , a densidade de infectados é próxima de zero, indicando a fase inativa ou absorvente da epidemia. À medida que ρ aumenta, (ρ_I) permanece

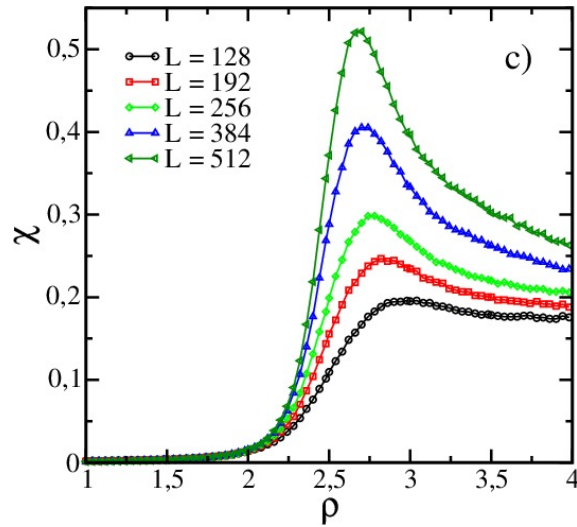
baixa até um certo ponto, a partir do qual começa a crescer rapidamente, caracterizando a transição para a fase ativa. Ponto Crítico: A transição de fase ocorre em torno de ρ . Embora as curvas para diferentes L se sobreponham bem na fase inativa e na fase ativa longe do ponto crítico, há uma pequena dispersão na região de transição. Para um sistema infinito, a transição seria abrupta no ponto crítico. A sobreposição das curvas para diferentes L na região de transição é um indicativo da universalidade do comportamento crítico e da aplicabilidade da análise de escala de tamanho finito. Comportamento para diferentes L : Para L maiores, as curvas tendem a se tornar mais íngremes na região da transição, aproximando-se do comportamento de um sistema infinito. A sobreposição das curvas sugere que o sistema exibe universalidade, ou seja, o comportamento crítico é independente dos detalhes microscópicos do sistema e depende apenas de sua dimensionalidade e simetrias. Esta figura é fundamental para identificar visualmente a transição de fase e o comportamento do parâmetro de ordem. A forma das curvas é típica de transições de fase contínuas para estados absorventes, onde o parâmetro de ordem cresce continuamente a partir de zero no ponto crítico.

Figura 3: Cumulante de Binder



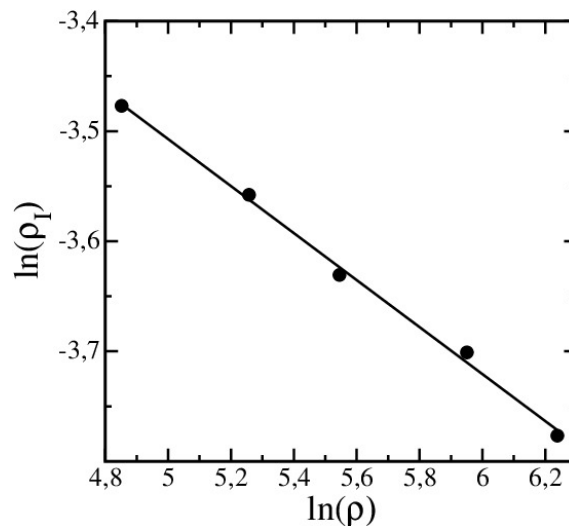
Fonte: Autoria Própria

A Figura 3 (b) apresenta o cumulante de Binder (U) em função da densidade (ρ) para os mesmos tamanhos de sistema (L). O cumulante de Binder é uma grandeza frequentemente utilizada para localizar o ponto crítico de transições de fase. A característica principal desta figura é o cruzamento das curvas para diferentes tamanhos de sistema em um ponto comum. Este ponto de cruzamento indica o ponto crítico (ρ_c), que nesse caso é $\approx 2,480(9)$. Para sistemas maiores, as curvas do cumulante de binder se tornam mais íngremes próximo ao ponto crítico, o que também é consistente com o comportamento esperado em transições de fase de segunda ordem. A análise do ponto de cruzamento permite uma estimativa precisa da densidade crítica.

Figura 4: Susceptibilidade

Fonte: Autoria Própria

A Figura 4 (c) ilustra a flutuação do parâmetro de ordem (X) em função da densidade (ρ) para diferentes tamanhos de sistema (L). Esta grandeza, também conhecida como susceptibilidade, exibe picos acentuados próximos ao ponto crítico, indicando um aumento significativo nas flutuações do sistema. A altura e a largura desses picos dependem do tamanho do sistema, com picos mais altos e estreitos para sistemas maiores. A posição do pico da flutuação do parâmetro de ordem também pode ser usada para estimar a densidade crítica. O comportamento divergente da susceptibilidade no limite termodinâmico é uma assinatura de uma transição de fase de segunda ordem.

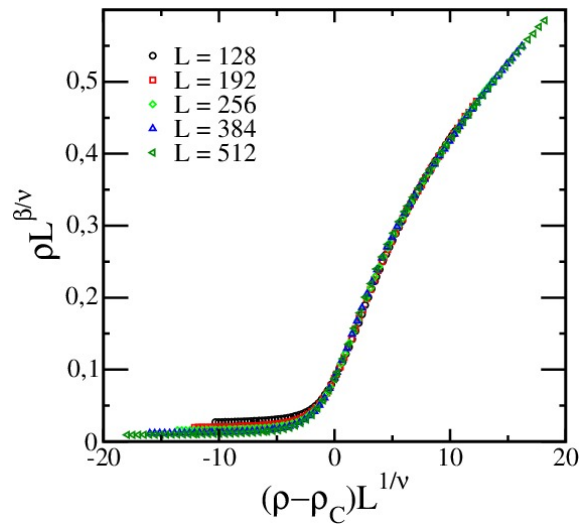
Figura 5: $\ln(\rho_I)$ versus $\ln(\rho)$ 

Fonte: Autoria Própria

Figura 5 apresenta um gráfico de $\ln(\rho_I)$ versus $\ln(\rho)$, que é utilizado para determinar a inclinação do expoente crítico. Os pontos representados correspondem aos pontos de máxima flutuação do parâmetro de ordem, conforme observado na Figura 4. A relação

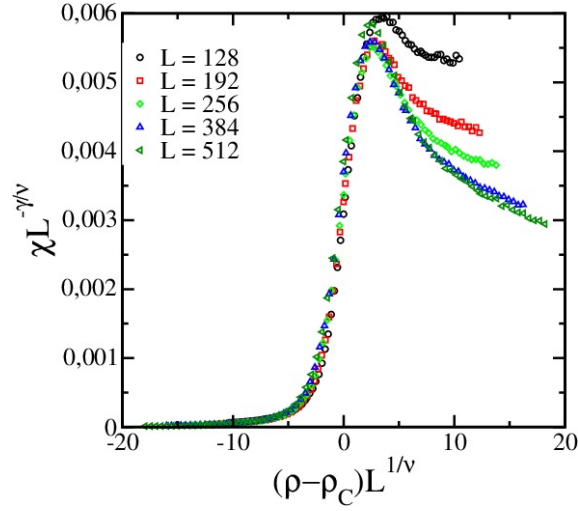
linear observada neste gráfico, em escala logarítmica, indica um comportamento de lei de potência para a flutuação do parâmetro de ordem. A inclinação da reta ajustada a esses pontos fornece o valor do expoente crítico γ/ν , que é fundamental para caracterizar a universalidade da transição de fase. A precisão na determinação dessa inclinação é crucial para a validação teórica e comparação com outros modelos.

Figura 6: Suscetibilidade.



Fonte: Autoria Própria

A Figura 6 mostra o colapso dos dados do parâmetro de ordem (ρ_I) escalonado por $\rho_L^{\beta/\nu}$ em função da variável de escala $(\rho - \rho_c)L^{1/\nu}$. O colapso de dados é uma técnica poderosa na física estatística que permite verificar se os dados obtidos para diferentes tamanhos de sistema obedecem a uma lei de escala universal próximo ao ponto crítico. A sobreposição dos pontos de dados de diferentes L em uma única curva mestra, como observado nesta figura, confirma que os dados do parâmetro de ordem escalam de acordo com a teoria de escala finito-tamanho. Este colapso é uma forte evidência da existência de uma transição de fase de segunda ordem e da correção dos expoentes críticos β/ν .

Figura 7: Flutuação do parâmetro de ordem.

Fonte: Autoria Própria

A Figura 6 apresenta o colapso dos dados da flutuação do parâmetro de ordem (χ) escalonado por $L^{-\gamma/\nu}$ em função da mesma variável de escala $(\rho - \rho_c)L^{1/\nu}$. Assim como na Figura 5, a sobreposição dos dados de diferentes tamanhos de sistema em uma única curva mestra nesta figura demonstra que a flutuação do parâmetro de ordem também obedece a uma lei de escala universal próximo ao ponto crítico. Este colapso valida a análise de escala e a determinação dos expoentes críticos γ/ν . A qualidade do colapso observado nas Figuras 5 e 6 reforça a robustez dos resultados e a aplicabilidade da teoria.

4.2 Análise Crítica dos Dados com Base na Teoria

Os resultados apresentados no estudo do Modelo Calazar em Rede Regular 1D mostram um ponto crítico de transição $\approx 2,480(9)$ entre as fases ativa e inativa da infecção, exibindo transições de fase cotínua para um estado absorvente. A teoria prevê que, abaixo de um limiar crítico, a doença se extingue (estado absorvente), enquanto acima dele, ela persiste (estado ativo). A sensibilidade do ponto crítico a pequenas variações nos parâmetros do modelo, como taxas de infecção ou deslocamento, é uma característica intrínseca de sistemas próximos a um ponto crítico, onde pequenas perturbações podem levar a grandes mudanças globais no comportamento do sistema. Isso está em total acordo com o conceito de criticalidade, onde as flutuações se tornam de longo alcance e o sistema se torna altamente suscetível a pequenas flutuações.

Um resultado significativo para estudo dessa natureza é a observação de que o sistema exiba universalidade, com expoentes críticos podendo ser compatíveis com outras classes, como o do Processo de Contato (PC), por exemplo. A universalidade implica que os detalhes microscópicos do modelo não alteram o comportamento crítico em larga escala, que é governado apenas por características gerais como a dimensionalidade e a natureza da transição (para um único estado absorvente sem simetrias adicionais). Para este trabalho expoentes críticos $\beta/\nu \approx 0.213(7)$, $\gamma/\nu \approx 0.72(4)$, $1/\nu \approx 0.40(5)$ obtidos não corroboram com a classe da percolação direcionada. Estes resultados necessitam ser comparados com

outras classes existentes na literatura. Caso os resultados desta propostas não sejam compatíveis com as classes a serem comparadas, é possível que haja um quebra de classe de universalidade, podendo o modelo em estudo definir uma nova classe.

5 Conclusão

Este trabalho investigou a propagação da Leishmaniose (Calazar), usando o Modelo Epidêmico Difusivo (PED) em uma rede unidimensional. O objetivo foi analisar a dinâmica da doença, focando nas propriedades críticas do modelo obtidas nesta simulação, a saber ponto crítico de transição ($p_c \approx 2,480(9)$) entre fases ativa e inativa e os expoentes críticos $\beta/\nu \approx 0.213(7)$, $\gamma/\nu \approx 0.72(4)$, $1/\nu \approx 0.40(5)$. Para obtenção desses resultados foram consideradas taxas de difusão para Mosquitos ($DA = DB = 0,50$), Cachorros ($DA = DB = 0,25$) e Humanos ($DA = DB = 0$) para diferentes tamanhos de rede.

Os resultados confirmaram que o sistema possui uma transição de fase contínua entre as fases inativas e ativas da infecção. A classe de universalidade do modelo necessita ser investigada, uma vez que as propriedades críticas não corroboram com a classe da Percolação Direcionada. Vale ressaltar o potencial da Física Estatística na compreensão de sistemas fora de equilíbrio, como investigado nesta proposta. Contudo, o modelo unidimensional e as taxas de difusão fixas são limitações que simplificam a realidade.

Para trabalhos futuros, sugere-se expandir o modelo para redes complexas e investigar distintas taxas de difusão, além de incluir outros fatores epidemiológicos e socioeconômicos. A aplicação a outras doenças infecciosas também é uma via promissora para consolidar a contribuição da Física Estatística na saúde pública.

Referências

ALENCAR, DSM et al. Epidemic outbreaks on random voronoi–delaunay triangulations. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 541, p. 122800, 2020.

ALENCAR, D. S. M. **Modelo Suscetível-Infectado-Removido Em Triangulação de Voronoi-Delaunay Bidimensional**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2020. Dissertação de Mestrado. Disponível em: https://sigaa.ufpi.br/sigaa/public/programa/noticias_desc.jsf?lc=pt_BR&id=307¬icia=367034011.

BINDER, Kurt. Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions. **Zeitschrift für Physik B Condensed Matter**, Springer, v. 43, p. 119–140, 1981.

CARVALHO, V. R. **Processo Epidêmico Difusivo Generalizado com Imunidade Permanente em Duas Dimensões**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2025. Dissertação de Mestrado. Disponível em: https://sigaa.ufpi.br/sigaa/public/programa/noticias_desc.jsf?lc=pt_BR&id=307¬icia=562719193.

FILHO, Antonio de Macedo. Conexão entre as redes complexas e estatística de kaniadakis e busca eficiente das propriedades críticas do processo epidêmico difusivo 1d. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

FULCO, UL; MESSIAS, DN; LYRA, ML. Critical behavior of a one-dimensional diffusive epidemic process. **Physical Review E**, APS, v. 63, n. 6, p. 066118, 2001.

GRASSBERGER, Peter. On the critical behavior of the general epidemic process and dynamical percolation. **Mathematical Biosciences**, Elsevier, v. 63, n. 2, p. 157–172, 1983.

HARRIS, Theodore E. Contact interactions on a lattice. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 2, n. 6, p. 969–988, 1974.

HINRICHSSEN, Haye. Non-equilibrium phase transitions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 369, n. 1, p. 1–28, 2006.

KREE, R.; SCHAUB, B.; SCHMITTMANN, B. Critical behavior of a diffusive epidemic process. **Physical Review A**, v. 39, n. 4, p. 2214–2219, 1989.

MARRO, Joaquin; DICKMAN, Ronald. Nonequilibrium phase transitions in lattice models. **Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models**, 2005.

MOTA, MPS et al. Critical behavior of sis model on two-dimensional quasiperiodic tilings. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 510, p. 577–586, 2018.

SILVA, Marcelo Brito da. **Propriedades críticas do processo epidêmico difusivo com interação de Lévy**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.

SILVA, Marcelo Brito da. Propriedades críticas de sistemas fora do equilíbrio via simulação monte carlo. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013.

SILVA, Renata Rocha da; SILVA, Anita de Souza; CAMPOS, Roseane Nunes de Santana. Leishmaniose visceral em cães no brasil: revisão de literatura. **Science and Animal Health**, v. 9, n. 1, p. 54–75, 2021.

SOUSA, Mario Victor de Jesus Santana. Modelagem e simulação de epidemias utilizando autômatos celulares.

TOMÉ, Tânia. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35**. [S.l.]: Edusp, 2001.

WIJLAND, F Van; OERDING, K; HILHORST, HJ. Wilson renormalization of a reaction–diffusion process. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 251, n. 1-2, p. 179–201, 1998.