



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CAMPUS POETA TORQUATO NETO
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE FÍSICA

Gabriel Viana de Sales

Propriedades Críticas e Classe de Universalidade do Modelo Calazar em uma Rede Quadrada

A R T I G O

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual do Piauí Campus Poeta Torquato Neto como parte dos requisitos obrigatórios para a obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio de Macedo Filho

Teresina(PI), junho de 2025

AGRADECIMENTOS

À Deus, fonte de toda sabedoria e força, por me sustentar em cada desafio e por ser meu guia nesta jornada.

À minha família, pelo amor incondicional e apoio inestimável, em especial minha avó Ivonildes, mulher de fé e coragem, que me criou com dedicação e me ensinou, através do seu exemplo, a importância da perseverança e da humildade.

Ao meu tio Jonas, por ter sido não apenas um apoio familiar, mas um verdadeiro mentor. Sua generosidade, conselhos sábios e incentivo foram fundamentais nos momentos mais decisivos da minha trajetória. Seja ao compartilhar suas experiências, seja ao me ajudar a enxergar possibilidades onde eu só via obstáculos, sua presença fez toda a diferença.

À minha namorada Yohana, meu porto seguro e maior incentivo. Por estar ao meu lado incondicionalmente, nos dias bons e nos difíceis, renovando minha esperança quando eu mais precisava. Sua companhia, carinho e apoio foram alicerce fundamental para que eu chegasse até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio de Macedo Filho, pela paciência, orientação cuidadosa e pelo conhecimento compartilhado, que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores que me ensinaram muito mais que teorias - mostraram-me como pensar, questionar e buscar a verdade. Pelas aulas que se transformaram em lições de vida, pelas dúvidas pacientemente esclarecidas, pelo estímulo constante ao crescimento intelectual e humano.

Aos meus amigos, pela cumplicidade, pelas risadas que aliviaram os dias mais difíceis e pelo apoio constante, que me lembraram que não estava sozinho nessa caminhada.

À CAPES e ao CNPq, pelo financiamento que tornou possível a realização desta pesquisa, contribuindo para o avanço do conhecimento nesta área.

Propriedades Críticas e Classe de Universalidade do Modelo Calazar em uma Rede Quadrada

Critical Properties and Universality Class of the Calazar Model on a Square Lattice

Gabriel Viana de Sales[†]

Orientador: Prof. Dr. Antonio de Macedo Filho[‡]

[†]gabriel.v.de.s@aluno.uespi.br, [‡]amfilho@prp.uespi.br

TCC - Licenciatura em Física - CCN - UESPI | Teresina(PI), junho de 2025

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento crítico de sistemas fora do equilíbrio, utilizando como modelo o Processo Epidêmico Difusivo (PED). Observamos o comportamento do sistema ao longo do tempo para entender em que condições ele passa de uma situação onde a infecção se encontra inativa para outra ativa em uma rede bidimensional, tomando como exemplo real a leishmaniose visceral (Calazar), uma doença que continua sendo um obstáculo para a saúde pública brasileira. Usamos uma metodologia que combina simulações computacionais, baseadas no método de Monte Carlo, em uma grade quadrada, onde cada ponto pode ser ocupado por partículas do tipo A (saudáveis) ou B (infectadas), que se espalham de forma independente pela rede com taxa de difusão ($D_A < D_B$, $D_A = D_B$, $D_A > D_B$). Essas partículas interagem segundo regras que representam os processos de contágio e recuperação. Com isso, buscamos identificar o ponto crítico (limiar da transição) e utilizamos a análise de escala de tamanho finito para calcular grandezas físicas importantes, como os expoentes críticos. Esses resultados ajudam a ter uma compreensão mais clara sobre o tipo de transição de fase que ocorre no sistema e também nos permitem levantar hipóteses sobre a classe de universalidade à qual o modelo pode pertencer. Os resultados obtidos mostram que há um ponto de transição bem definido entre uma fase inativa (sem infecção) e uma fase ativa (com infecção). Conclui-se que o PED é um modelo eficaz para representar a propagação de doenças em populações e que os conceitos da Física Estatística podem ser aplicados a problemas reais do tipo epidemiológico.

Abstract

In this work, we study the critical behavior of nonequilibrium systems using the Diffusive Epidemic Process (DEP) as a model. We analyze the system's temporal dynamics to understand the conditions under which it transitions from an inactive (disease-free) state to an active (infected) state on a two-dimensional lattice, using visceral leishmaniasis (Kala-azar)—a persistent challenge for Brazilian public health—as a real-world example. Our methodology combines computational simulations based on the Monte Carlo method on a square lattice, where each site can be occupied by particles of type A (healthy) or B (infected), which diffuse independently across the network at different rates ($D_A < D_B$, $D_A = D_B$, $D_A > D_B$). These particles interact according to rules representing contagion

and recovery processes. We aim to identify the critical point (transition threshold) and employ finite-size scaling analysis to calculate key physical quantities, such as critical exponents. These results provide a clearer understanding of the type of phase transition occurring in the system and allow us to propose hypotheses about the universality class to which the model may belong. Our findings indicate a well-defined transition point between an inactive (non-infectious) phase and an active (infectious) phase. We conclude that the DEP is an effective model for representing disease spread in populations and that concepts from Statistical Physics can be successfully applied to real-world epidemiological problems.

Palavras-chave: Processo Epidêmico Difusivo (PED); Transição de Fase; Classe de Universalidade; Leishmaniose Visceral (Calazar).

Keywords: Diffusive Epidemic Process (DEP); Phase Transition; Universality Class; Visceral Leishmaniasis (Calazar).

Sumário

1	Introdução	3
2	Fundamentação Teórica	4
2.1	Sistemas Fora do Equilíbrio e Transições para Estados Absorventes	4
2.2	Criticalidade e Universalidade	5
2.2.1	Parâmetro de Ordem	6
2.2.2	Flutuações Críticas: Parâmetro de Ordem e Suscetibilidade	6
2.2.3	Razão de Momentos e Identificação de Pontos Críticos	7
2.2.4	Escala de Tamanho Finito e Colapso de Dados	7
2.3	Modelos Epidêmicos em Redes Bidimensionais	8
2.3.1	Processo de Contato (PC)	8
2.3.2	Processo Epidêmico Difusivo (PED)	9
3	Metodologia	9
3.1	Tipo de Pesquisa	9
3.2	Métodos de Coleta de Dados	9
3.3	Variáveis Observadas	11
3.4	Técnicas de Análise dos Dados	11
3.5	Ferramentas Utilizadas	12
4	Resultados e Discussão	12
4.1	Apresentação dos Resultados Obtidos	12
5	Conclusão	16
	Referências	17

1 Introdução

Leishmaniose Visceral (LV), conhecida popularmente como Calazar, representa um sério problema de saúde pública global, classificada pela Organização Mundial da Saúde (OMS) como uma doença tropical negligenciada (WORLD HEALTH ORGANIZATION, 2023). Estima-se que ocorram entre 50.000 e 90.000 novos casos anualmente em todo o mundo (BRASIL. Ministério da Saúde, 2025). Caracterizada por sua evolução crônica e acometimento sistêmico, a LV pode apresentar alta letalidade, chegando a 90% nos casos não tratados (ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE, 2024), embora a letalidade média nas Américas se situe em torno de 8,5% (BRASIL. Ministério da Saúde, 2025). O Brasil se destaca nesse cenário, concentrando a grande maioria dos casos notificados no continente americano (ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE, 2024). A complexidade da transmissão, que envolve o parasita **Leishmania infantum**, o mosquito flebotomíneo como vetor e, principalmente, cães como reservatórios em áreas urbanas, impõe desafios significativos para as estratégias de controle (ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE, 2024).

Nesse contexto de fenômenos biológicos e epidemiológicos complexos, que operam intrinsecamente fora do equilíbrio termodinâmico, a física estatística oferece uma estrutura importante para a compreensão de suas dinâmicas. A compreensão de sistemas distantes do equilíbrio térmico representa um dos maiores desafios da física contemporânea. Diferente de seus análogos em equilíbrio, esses sistemas exibem comportamentos intrincados e imprevisíveis, influenciados por condições iniciais e interações internas. Nesse cenário, as transições de fase emergem como um ponto de particular interesse, marcando momentos em que um sistema altera abruptamente seu estado (HENKEL, 2008). O estudo da criticalidade e do comportamento singular manifestado nas proximidades de um ponto crítico tem se provado uma abordagem poderosa para discernir a relevância de propriedades universais a partir de regras de interação microscópicas, sustentando o conceito de classes de universalidade (ÓDOR, 2004).

Historicamente, a investigação desses fenômenos críticos fincou suas raízes no estudo de transições de fase em sistemas físicos canônicos, como o modelo de Ising, que foi um pilar na construção da teoria da criticalidade. Um marco decisivo ocorreu a partir da década de 1970, com as contribuições seminais de Wilson e Kadanoff (WILSON, 1971), que consolidaram o grupo de renormalização e a análise de escala como ferramentas robustas. O advento de recursos computacionais mais potentes possibilitou a exploração de modelos mais complexos e representativos da realidade, especialmente aqueles intrinsecamente fora do equilíbrio, como o Processo de Contato (PC) (HARRIS, 1974) e o Processo Epidêmico Difusivo (PED) (SILVA, 2012). Diante desse panorama, intensificou-se o interesse em empregar as ferramentas da física estatística para modelar a disseminação de doenças infecciosas. A epidemiologia matemática tradicional, cujas bases foram lançadas por Kermack e McKendrick (KERMACK; MCKENDRICK, 1927), oferece uma perspectiva determinística; contudo, muitas epidemias são de natureza estocástica e dependem da espacialidade, impulsionando o desenvolvimento de modelos estocásticos que consideram

agentes individuais.

Este estudo se situa precisamente na confluência entre a física estatística de não-equilíbrio e a modelagem de epidemias. Nossa proposta é empregar uma versão adaptada do PED para investigar de forma mais aprofundada a propagação da Leishmaniose Visceral (LV), também conhecida como Calazar. Essa enfermidade, causada pelo parasita Leishmania e transmitida pelo mosquito-palha, persiste como um grave problema de saúde pública em diversas regiões do Brasil e do mundo (ALVAR et al., 2012). A compreensão da dinâmica de transmissão do Calazar é complexa, pois envolve seres humanos, animais (como cães) e o vetor, sendo ainda influenciada por fatores ambientais, sociais e climáticos. Diferentemente de outras investigações que utilizaram redes complexas, neste trabalho, nosso modelo Calazar-PED será executado em uma grade quadrada bidimensional simples, um cenário clássico para o estudo de fenômenos críticos no espaço.

Este trabalho busca caracterizar a transição de fase e estimar a classe de universalidade do modelo Calazar, baseado no Processo Epidêmico Difusivo, para a propagação da leishmaniose visceral em uma rede bidimensional, utilizando simulações computacionais. O objetivo geral é investigar o comportamento crítico do modelo, identificando o ponto de transição entre estados ativo e absorvente, e estimar sua classe de universalidade. Os objetivos específicos incluem simular o processo epidêmico, estimar o limiar de transição, obter expoentes críticos por mecânica estatística e análise de escala de tamanho finito, e conjecturar a classe de universalidade. A escolha da leishmaniose visceral é estratégica devido à sua persistência em áreas vulneráveis, permitindo explorar cenários e compreender mecanismos de propagação. Academicamente, o estudo avança a física estatística fora do equilíbrio, classificando modelos em classes de universalidade e validando empiricamente transições de fase. Os resultados podem subsidiar políticas públicas de controle de doenças.

2 Fundamentação Teórica

Este capítulo estabelece a base conceitual necessária para a compreensão do estudo das propriedades críticas e da classe de universalidade do modelo Calazar em uma rede quadrada bidimensional. Abordaremos os fundamentos da física estatística fora do equilíbrio, com ênfase nas transições de fase para estados absorventes. Discutiremos os conceitos de criticalidade e universalidade. Por fim, apresentaremos os modelos epidêmicos paradigmáticos, como o Processo de Contato (PC) e o Processo Epidêmico Difusivo (PED), contextualizando sua dinâmica em redes regulares bidimensionais.

2.1 Sistemas Fora do Equilíbrio e Transições para Estados Absorventes

A física estatística clássica dedica-se primordialmente ao estudo de sistemas em equilíbrio termodinâmico, onde as propriedades macroscópicas permanecem constantes no tempo e podem ser descritas por meio de potenciais termodinâmicos e ensembles estatísticos bem definidos (LANDAU; LIFSHITZ, 2013). Contudo, uma vasta gama de fenômenos na-

turais e artificiais, desde reações químicas catalíticas e crescimento de interfaces até a dinâmica de populações, ecossistemas e a propagação de epidemias, ocorrem em condições intrinsecamente fora do equilíbrio (TOMÉ, 2001; MARRO; DICKMAN, 1999; HINRICHSEN, 2000). Estes sistemas são frequentemente caracterizados pela presença de fluxos de matéria, energia ou informação, pela quebra da reversibilidade temporal e pela ausência de um formalismo unificado análogo ao do equilíbrio (TOMÉ, 2001).

Um subconjunto particularmente importante e bem estudado de sistemas fora do equilíbrio são aqueles que apresentam estados absorventes. Um estado absorvente é uma configuração (ou um conjunto de configurações) do sistema da qual ele não pode escapar uma vez que a tenha atingido através de sua própria dinâmica estocástica (TOMÉ, 2001; HINRICHSEN, 2000). Em modelos epidemiológicos, o estado onde não há nenhum indivíduo infectado é tipicamente um estado absorvente: sem infectados, não pode haver novas infecções (na ausência de fontes externas). Muitos desses sistemas exibem uma transição de fase entre um estado ativo, onde a dinâmica (a "atividade", como a infecção) persiste no sistema por longos períodos (idealmente, indefinidamente no limite de sistema infinito), e um estado inativo ou absorvente, onde a atividade cessa após um tempo finito (TOMÉ, 2001; HINRICHSEN, 2000; ÓDOR, 2004). Esta transição é controlada por um parâmetro externo, como a taxa de infecção (λ) em modelos epidêmicos. Abaixo de um valor crítico (λ_c), o sistema inevitavelmente evolui para o estado absorvente; acima de λ_c , há uma probabilidade não nula de o sistema permanecer na fase ativa, caracterizada por uma densidade de atividade estacionária diferente de zero.

Para ilustrar, podemos considerar a dinâmica de um incêndio florestal. Uma floresta em chamas representa um estado ativo, onde a 'atividade' (o fogo) se propaga. Contudo, se as condições ambientais, como a umidade da vegetação, atingirem um valor crítico, o fogo pode se extinguir completamente, levando o sistema a um estado absorvente – a floresta sem chamas, da qual o incêndio não pode ressurgir espontaneamente. Essa transição, de um estado de propagação contínua para um de inatividade permanente, é análoga às transições de fase para estados absorventes observadas em diversos sistemas complexos (HINRICHSEN, 2000).

2.2 Criticalidade e Universalidade

Nas proximidades do ponto crítico λ_c , muitos sistemas que sofrem transições de fase contínuas (ou de segunda ordem) exibem um comportamento notável conhecido como criticalidade. Este comportamento é marcado pelo surgimento de correlações de longo alcance tanto no espaço quanto no tempo. Grandezas macroscópicas divergem ou vão a zero seguindo leis de potência universais à medida que o sistema se aproxima do ponto crítico (LANDAU; LIFSHITZ, 2013; TOMÉ, 2001; HINRICHSEN, 2000). Por exemplo, o parâmetro de ordem (ρ , a densidade de atividade) se anula como $\rho \sim (\lambda - \lambda_c)^\beta$ para $\lambda \sim \lambda_c +$, a suscetibilidade (resposta a um campo externo) diverge como $\chi \sim |\lambda - \lambda_c|^{-\gamma}$, e o comprimento de correlação espacial (ξ_\perp) e temporal (ξ_\parallel) divergem como $\xi_\parallel \sim |\lambda - \lambda_c|^{(-\nu_\parallel)}$ e $\xi_\perp \sim |\lambda - \lambda_c|^{(-\nu_\perp)}$, respectivamente. Os expoentes β , γ , ν_\perp , ν_\parallel , entre outros, são chamados

de expoentes críticos.

Um dos conceitos mais poderosos e profundos da física estatística é a hipótese de universalidade (ÓDOR, 2004; LANDAU; LIFSHITZ, 2013; TOMÉ, 2001; HINRICHSEN, 2000). Ela postula que o comportamento crítico de um sistema, incluindo os valores dos expoentes críticos e as formas das funções de escala que descrevem o sistema perto de λ_c , não depende dos detalhes microscópicos do modelo, mas sim de características gerais e robustas. Essas características incluem a dimensionalidade espacial do sistema (d), as simetrias do parâmetro de ordem e a presença ou ausência de interações de longo alcance ou leis de conservação. Sistemas que compartilham essas características gerais pertencem à mesma classe de universalidade e exibem o mesmo comportamento crítico. Este princípio permite classificar uma vasta gama de fenômenos aparentemente distintos sob um mesmo teto teórico, revelando conexões profundas entre eles.

2.2.1 Parâmetro de Ordem

O parâmetro de ordem (ϕ) é uma grandeza macroscópica que quantifica o grau de ordenamento de um sistema durante uma transição de fase. Ele é nulo na fase desordenada e assume um valor não nulo na fase ordenada (LANDAU; LIFSHITZ, 2013).

Próximo ao ponto crítico (T_c , temperatura crítica, ou p_c , pressão crítica), o parâmetro de ordem geralmente segue uma lei de potência da forma: $\phi \propto |T - T_c|^\beta$ onde T é a temperatura do sistema ou $\phi \propto |\rho - \rho_c|^\beta$ com ρ representando a pressão do sistema, onde β é o expoente crítico associado ao comportamento do parâmetro de ordem. Por exemplo, em uma transição ferromagnética, a magnetização espontânea é o parâmetro de ordem; em uma transição líquido-gás, a diferença de densidade entre as fases líquida e gasosa pode servir como parâmetro de ordem.

A escolha adequada do parâmetro de ordem é crucial para caracterizar a transição de fase e entender a natureza do ordenamento que emerge no sistema.

2.2.2 Flutuações Críticas: Parâmetro de Ordem e Suscetibilidade

Próximo ao ponto crítico, o sistema exibe flutuações de grande escala — conhecidas como flutuações críticas — que se manifestam tanto no parâmetro de ordem quanto em outras grandezas termodinâmicas, como a suscetibilidade. Essas flutuações ocorrem em todas as escalas de comprimento e tempo, refletindo a ausência de uma escala característica no sistema (HENKEL, 2008; TOMÉ, 2001; HINRICHSEN, 2000).

A flutuação (χ), que mede a resposta do sistema a uma perturbação externa (como um aumento na taxa de infecção), é uma grandeza fundamental para caracterizar a transição de fase. No modelo Calazar-PED, ela é calculada a partir das flutuações na densidade de infectados (p_I) como:

$$\chi = L^2 (\langle p_I^2 \rangle - \langle p_I \rangle^2), \quad (1)$$

onde L é o tamanho do sistema. Próximo ao ponto crítico (p_c), a suscetibilidade diverge seguindo uma lei de potência:

$$\chi \propto |\rho - \rho_c|^{-\gamma}, \quad (2)$$

sendo γ o expoente crítico associado. Essa divergência indica que o sistema se torna extremamente sensível a pequenas variações no parâmetro de controle (ρ), um comportamento típico de transições de fase contínuas (ÓDOR, 2004; HINRICHSEN, 2000).

2.2.3 Razão de Momentos e Identificação de Pontos Críticos

A razão de momentos:

$$m_{21} = \frac{\langle \rho^2 \rangle}{\langle \rho \rangle^2} \quad (3)$$

constitui uma ferramenta valiosa na identificação precisa do ponto crítico em simulações de sistemas estocásticos. Por ser uma quantidade adimensional, suas curvas para diferentes tamanhos de sistema tendem a se cruzar no valor crítico da densidade (ρ_c), sinalizando o limiar da transição de fase. Esse método, amplamente utilizado na literatura de sistemas fora do equilíbrio (MARRO; DICKMAN, 1999; SILVA, 2013), é particularmente útil quando flutuações ou ruído dificultam a localização do ponto crítico por outros métodos.

2.2.4 Escala de Tamanho Finito e Colapso de Dados

A determinação dos expoentes críticos é fundamental para classificar a transição de fase de um sistema em uma classe de universalidade específica (GOLDENFELD, 2018). Embora possam ser obtidos experimentalmente através de medições precisas de grandezas físicas (como magnetização, calor específico, etc.) em sistemas reais próximos ao ponto crítico, a abordagem computacional, especialmente via simulações de Monte Carlo, oferece um controle sem precedentes sobre os parâmetros do sistema e a capacidade de explorar o comportamento assintótico.

Em simulações, os expoentes críticos são tipicamente extraídos através da análise de escala de tamanho finito (*Finite-Size Scaling - FSS*) (BINDER, 1997). Esta técnica reconhece que, em um sistema de tamanho finito (como uma rede $L \times L$ em simulações), as divergências das grandezas críticas no ponto crítico são suavizadas. No entanto, o comportamento dessas grandezas com o tamanho do sistema (L) e a proximidade do ponto crítico ($\lambda - \lambda_c$) segue leis de escala bem definidas.

Por exemplo, o parâmetro de ordem (ρ) em um sistema de tamanho L , próximo ao ponto crítico, pode ser descrito por uma função de escala do tipo:

$$\rho(L, \lambda) \sim L^{-\beta/\nu} f \left((\lambda - \lambda_c) L^{1/\nu} \right) \quad (4)$$

onde β e ν são expoentes críticos, e f é uma função de escala universal. Similarmente, a suscetibilidade (χ) pode ser expressa como:

$$\chi(L, \lambda) \sim L^{\gamma/\nu} g \left((\lambda - \lambda_c) L^{1/\nu} \right) \quad (5)$$

onde γ é outro expoente crítico e g é outra função de escala universal. A obtenção desses expoentes envolve (BINDER, 1997; GOLDENFELD, 2018):

1. Simulação para Diferentes Tamanhos de Sistema (L): Realizar simulações para várias

dimensões de rede (L_1, L_2, L_3, \dots) e para uma faixa de valores do parâmetro de controle (λ) ao redor do ponto crítico estimado.

2. Identificação do Ponto Crítico (λ_c): O ponto crítico pode ser estimado pela intersecção de curvas de grandezas como a suscetibilidade para diferentes tamanhos de L , ou pela análise de razões de cumulantes.
3. Ajuste de Leis de Potência: Uma vez que λ_c é determinado, os expoentes podem ser extraídos ajustando os dados simulados a leis de potência. Por exemplo, o expoente β pode ser obtido a partir do comportamento do parâmetro de ordem no ponto crítico para diferentes L :

$$\rho(L, \lambda_c) \sim L^{-\beta/\nu} \quad (6)$$

Similarmente, γ pode ser obtido de:

$$\chi(L, \lambda_c) \sim L^{\gamma/\nu} \quad (7)$$

4. Colapso de Dados (*Data Collapse*): Uma poderosa validação e método para extrair os expoentes é o colapso de dados. Ao plotar as grandezas escaladas $(\rho(L, \lambda) \cdot L^{\beta/\nu}$ versus $(\lambda - \lambda_c) \cdot L^{1/\nu}$), os dados de diferentes tamanhos de sistema devem colapsar em uma única curva universal, a função de escala f (ou g). A escolha correta dos expoentes β , γ e ν é aquela que resulta no melhor colapso dos dados.

Essas técnicas permitem a determinação precisa dos expoentes críticos, fornecendo evidências robustas para a classe de universalidade à qual o modelo pertence, mesmo que o sistema simulado seja finito.

2.3 Modelos Epidêmicos em Redes Bidimensionais

2.3.1 Processo de Contato (PC)

O Processo de Contato (PC), introduzido por Harris em 1974 (HARRIS, 1974), é talvez o modelo mais fundamental que exibe uma transição de fase para um estado absorvente. Em sua versão em rede (lattice-based), cada sítio i pode estar em um de dois estados: infectado/ativo ($\sigma_i=1$) ou saudável/inativo ($\sigma_i=0$). A dinâmica é definida por dois processos estocásticos que ocorrem com certas taxas:

1. Infecção/Criação: Um sítio saudável torna-se infectado se tiver pelo menos um vizinho infectado. A taxa total de infecção para um sítio saudável i é λk_i , onde k_i é o número de vizinhos infectados de i e λ é a taxa de infecção por vizinho infectado.
2. Recuperação/Aniquilação: Um sítio infectado torna-se saudável espontaneamente com uma taxa constante, geralmente normalizada para $\mu=1$.

O estado onde todos os sítios são saudáveis ($\sigma_i=0$ para todo i) é o estado absorvente. O parâmetro de controle é λ . A transição em λ_c é contínua (HINRICHSEN, 2000).

2.3.2 Processo Epidêmico Difusivo (PED)

O Processo Epidêmico Difusivo (PED) (SILVA, 2013) generaliza o PC ao introduzir a mobilidade (difusão) das partículas (indivíduos) na rede. Os sítios podem estar em três estados: vazio (\emptyset), ocupado por um indivíduo saudável (A) ou ocupado por um indivíduo infectado (B). Os processos dinâmicos incluem:

1. Contágio: $A + B \rightarrow 2B$ (ocorre quando A e B são vizinhos, com taxa λ);
2. Recuperação: $B \rightarrow A$ (ocorre espontaneamente em um sítio B, com taxa μ);
3. Difusão: $A + \emptyset \leftrightarrow \emptyset + A$ (troca de A com sítio vazio vizinho, com taxa DA);
4. Difusão: $B + \emptyset \leftrightarrow \emptyset + B$ (troca de B com sítio vazio vizinho, com taxa DB);

O estado sem partículas B é absorvente. O PED permite investigar o efeito da mobilidade e da densidade de partículas na dinâmica epidêmica. A introdução da difusão, embora possa alterar o valor do ponto crítico λ_c , geralmente não modifica a classe de universalidade, pois não introduz novas simetrias ou leis de conservação relevantes (HINRICHSEN, 2000).

O modelo Calazar estudado neste trabalho é uma adaptação do PED implementado na rede quadrada bidimensional.

As redes bidimensionais regulares adotadas neste estudo são compostas por sítios com conectividade local fixa, em que cada ponto interage apenas com seus vizinhos mais próximos, geralmente 4 (vizinhança de von Neumann) ou 8 (vizinhança de Moore). Esse tipo de topologia é amplamente utilizado em modelos críticos por oferecer estrutura homogênea e dimensionalidade bem definida ($d = 2$), o que permite análises controladas via técnicas de escala de tamanho finito. A dimensionalidade influencia diretamente os expoentes críticos e, portanto, a classe de universalidade do sistema. Diferentemente de redes complexas (como redes de pequeno mundo), as redes regulares favorecem a identificação de comportamentos universais (MARRO; DICKMAN, 1999; ALVARENGA, 2008).

3 Metodologia

3.1 Tipo de Pesquisa

O presente estudo caracteriza-se como uma pesquisa de natureza experimental e computacional, com abordagem quantitativa. Adicionalmente, apresenta caráter exploratório e descritivo, tendo em vista que busca compreender e caracterizar as propriedades críticas e a classe de universalidade do modelo Calazar em redes bidimensionais, a partir de simulações numéricas. Tal abordagem permite identificar padrões de comportamento coletivo associados à transição de fase em sistemas complexos.

3.2 Métodos de Coleta de Dados

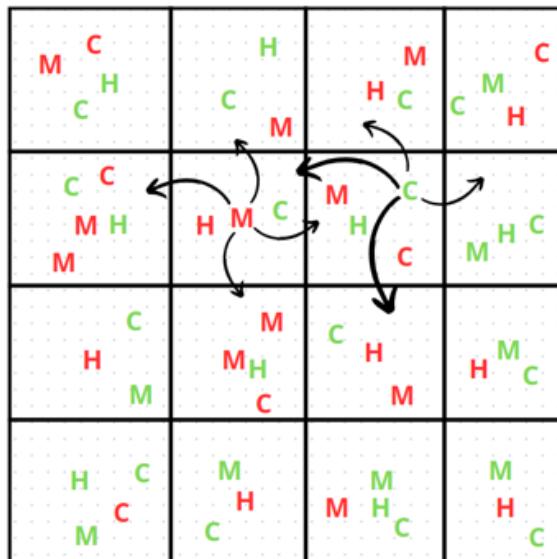
Os dados foram obtidos por meio de simulações computacionais baseadas no método de Monte Carlo com atualização sequencial aleatória apropriado para sistemas estocásticos

fora do equilíbrio (MARRO; DICKMAN, 1999; HINRICHSEN, 2000). Para cada configuração de difusão ($D_A < D_B$; $D_A = 0.25$ e $D_B = 0.75$)($D_A = D_B$; $D_A = 0.50$ e $D_B = 0.50$)($D_A > D_B$; $D_A = 0.75$ e $D_B = 0.25$), foi simulada em redes bidimensionais de contorno periódico com tamanhos lineares, escolhidos por serem múltiplos práticos para colapso de dados (HINRICHSEN, 2000). As simulações seguiram uma dinâmica estocástica em tempo discreto. Cada simulação foi realizada com tempo de relaxamento $T_{\text{relax}} = 10000$ e média sobre 10000 amostras independentes, garantindo a robustez estatística dos resultados. A rede foi inicializada com humanos, mosquitos e cães, podendo estar em estado saudável ou infectado. Os seguintes processos ocorrem a cada passo de tempo:

1. Movimentação aleatória:

Todos os agentes móveis (mosquitos e cães) se deslocam aleatoriamente para vizinhos próximos com uma probabilidade proporcional às taxas de difusão (D_A ou D_B). Os indivíduos humanos permanecem estacionários, ou seja, não se movem ao longo da rede durante as simulações e cada sítio pode conter no máximo um único indivíduo humano.

Figura 1: Movimentação de Mosquitos e Cachorros na Rede Quadrada.



Fonte: Autoral.

2. Contaminação:

- Mosquitos saudáveis tornam-se infectados ao entrar em contato com cães ou humanos infectados.
- Humanos saudáveis podem se infectar ao serem picados por mosquitos infectados.
- Cães saudáveis também são infectados por mosquitos infectados.

- Esse processo ocorre com taxa de contaminação = 0.5 (um número aleatório é sorteado, se for maior que 0.5, acontece a contaminação, se for menor, o processo não acontece) e a contaminação acontece dentro dos próprios sítios.

3. Cura:

Todos os agentes infectados têm uma taxa de cura = 0.5 de retornar ao estado saudável (um número aleatório é sorteado, se for maior que 0.5, acontece a cura, se for menor, o processo não acontece), refletindo um processo de recuperação espontânea.

4. Ressuscitamento (reinfecção artificial):

Para evitar a extinção prematura da epidemia por flutuações estatísticas, reintroduz-se um indivíduo infectado aleatoriamente caso toda a população infectada desapareça.

5. Registro dos dados:

Ao final de cada tempo t , a fração de humanos infectados na rede é calculada e armazenada em um vetor que representa a densidade da infecção (ρ_I), o qual será posteriormente utilizado para a análise do comportamento crítico.

Para cada configuração, as simulações foram executadas em redes quadradas bidimensionais de diferentes tamanhos $L \times L$, onde L variou de 16 à 96 ($L = 16, 24, 32, 48, 64, 96$), a fim de permitir a análise por escalonamento finito. Os dados coletados incluem a densidade de infectados, parâmetro de ordem, variância (para cálculo da susceptibilidade) e razão de momentos.

3.3 Variáveis Observadas

Para a caracterização da transição de fase, foram medidas as seguintes grandezas:

- parâmetro de ordem (p_I): densidade de humanos infectados;
- Flutuações (χ): definida pela Eq.1.
- Razão de momentos (m_{21}): definida pela Eq. 3.

3.4 Técnicas de Análise dos Dados

A análise foi conduzida com foco na caracterização da transição de fase de ordem-desordem e identificação da classe de universalidade do modelo. Foram utilizadas as seguintes técnicas:

- **Estimativa do ponto crítico** (ρ_c) via cruzamento das curvas de m_{21} para diferentes tamanhos L .
- **Colapso do Parâmetro de Ordem:** Utilizando a Eq.4. Essa técnica permite determinar com precisão os expoentes críticos β e ν , como previsto na teoria de escala de tamanho finito.

- **Colapso das Flutuações do Parâmetro de Ordem:** Essa abordagem visa verificar a consistência dos expoentes críticos γ e ν , por meio da sobreposição das curvas de flutuações χ escaladas para diferentes tamanhos de rede L . Um bom colapso dos dados indica que o sistema segue as leis de escala esperadas para a classe de universalidade considerada.

3.5 Ferramentas Utilizadas

As simulações foram implementadas em linguagem C para maior desempenho computacional, para análise e visualização dos dados. As principais ferramentas utilizadas foram:

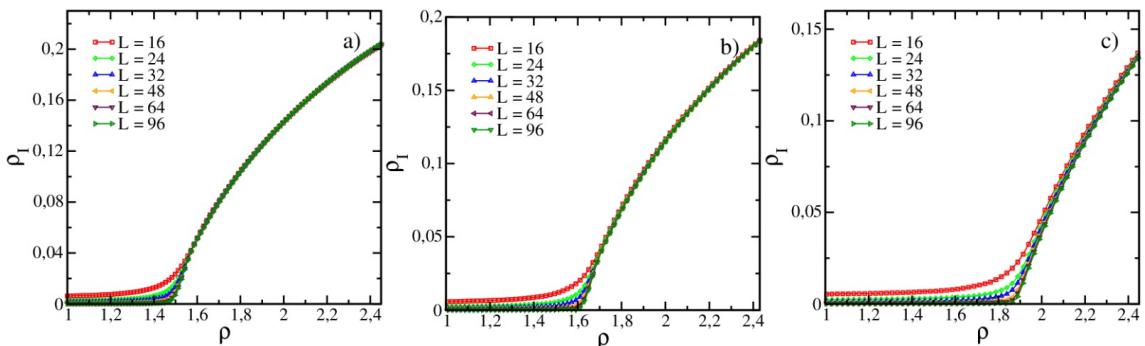
- Simulação do código em C++;
- Planilhas e editores gráficos: verificação e organização complementar dos resultados;
- Sistema operacional: Linux Ubuntu, com execução em processadores multicore para simulações paralelas.

4 Resultados e Discussão

4.1 Apresentação dos Resultados Obtidos

Os resultados apresentados neste trabalho são fruto de simulações computacionais do Processo Epidêmico Difusivo (PED) em redes bidimensionais, com foco na caracterização das propriedades críticas e da classe de universalidade do modelo Calazar. As análises foram realizadas para diferentes tamanhos de sistema (L), permitindo a aplicação da análise de escala de tamanho finito para a determinação de expoentes críticos e do ponto crítico da transição de fase.

Figura 2: Parâmetro de Ordem

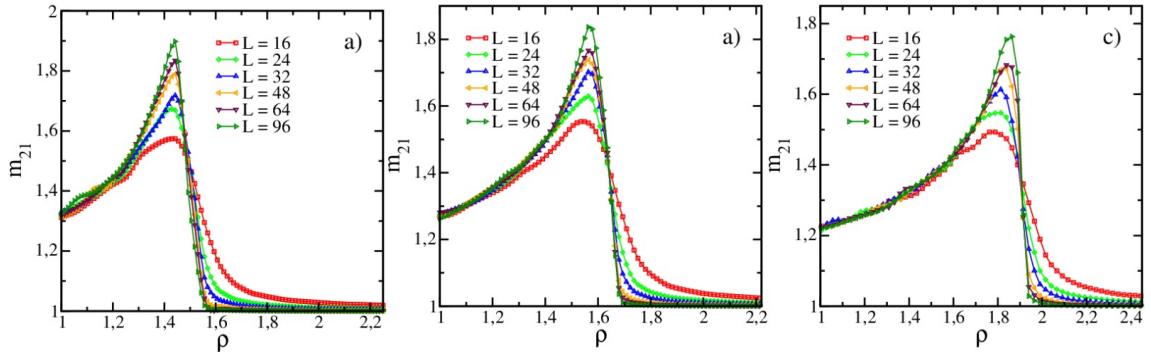


Fonte: Autoral.

A figura 2, apresenta a densidade de humanos infectados (ρ_I) em função da densidade total de mosquitos (ρ) para diferentes tamanhos de rede L , considerando três cenários distintos de difusão: (a) $D_A < D_B$, (b) $D_A = D_B$ e (c) $D_A > D_B$. Observa-se que,

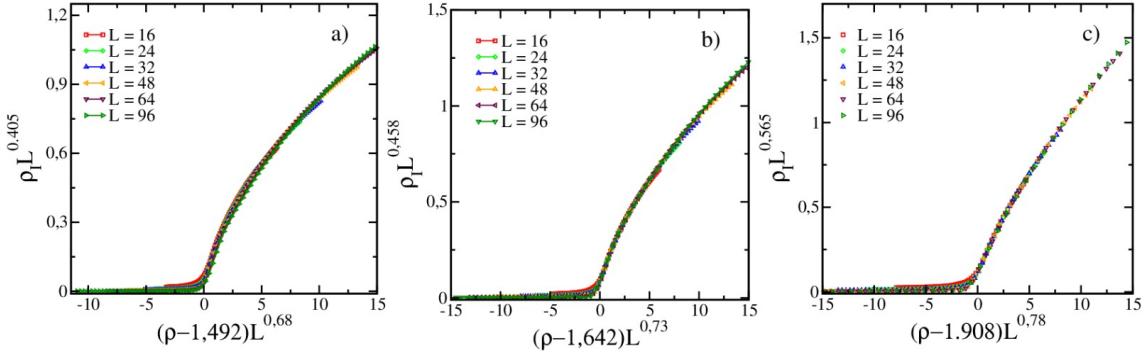
para baixas densidades de vetores, a densidade de infectados tende a zero, caracterizando um estado inativo onde a infecção não se sustenta no tempo. A partir de um certo valor limiar de ρ , ocorre um crescimento contínuo de ρ_I , indicando uma transição para uma fase ativa, na qual a epidemia persiste indefinidamente. Tal comportamento é característico de transições de fase contínuas. A inclinação crescente das curvas com o aumento de L reforça essa interpretação, uma vez que, no limite termodinâmico, a transição tende a se tornar mais abrupta. Comparando os três cenários, verifica-se que, na configuração $D_A < D_B$, a transição ocorre com menor densidade de vetores, sugerindo maior facilidade de propagação da doença. Em contraste, quando $D_A > D_B$, a epidemia só se mantém ativa com densidades significativamente maiores, refletindo o efeito positivo de uma quarentena eficaz, onde a mobilidade dos infectados é reduzida.

Figura 3: Razão de Momentos

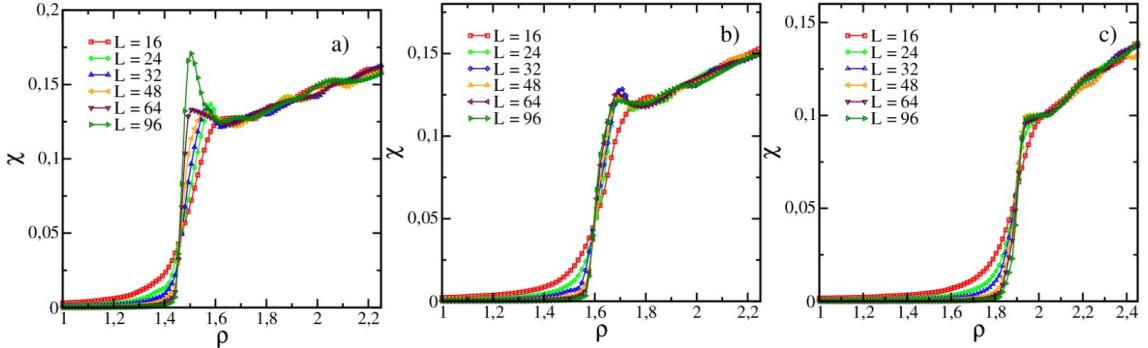


Fonte: Autoral.

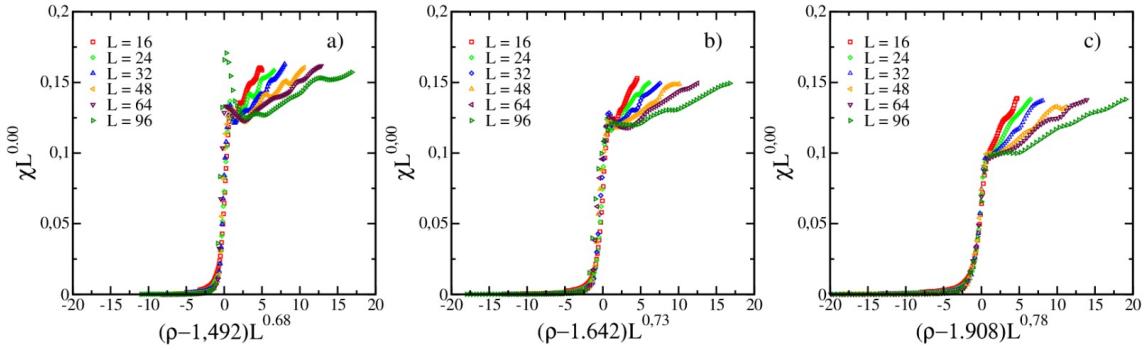
A figura 3, mostra a razão de momentos $m_{21} = \langle \rho_I^2 \rangle / \langle \rho_I \rangle^2$ em função da densidade de mosquitos ρ . Essa métrica, por ser adimensional, permite identificar com precisão o ponto crítico da transição de fase. As curvas de m_{21} para diferentes tamanhos L se cruzam em um ponto comum, o qual define ρ_c com elevada robustez estatística. Tal cruzamento é particularmente evidente no painel (c), e confirma a presença de uma transição bem definida entre as fases inativa e ativa. O uso da razão de momentos é vantajoso em sistemas estocásticos como o presente, pois evita flutuações artificiais que poderiam dificultar a localização do limiar de transição.

Figura 4: Colapso do Parâmetro de Ordem**Fonte:** Autoral.

A figura 4, apresenta a técnica de colapso de dados aplicada ao parâmetro de ordem ρ_I . Os dados de diferentes tamanhos de rede foram reescalados segundo as leis de escala de tamanho finito, utilizando os expoentes críticos β e ν , com os eixos definidos como $(\rho - \rho_c)L^{1/\nu}$ (eixo x) e $\rho_I L^{\beta/\nu}$ (eixo y). A boa sobreposição das curvas obtidas em cada uma das três configurações de difusão indica que o sistema obedece às leis de escala típicas de transições de fase contínuas. A qualidade dos colapsos também valida os valores dos expoentes obtidos numericamente.

Figura 5: Flutuação do Parâmetro de Ordem**Fonte:** Autoral.

A figura 5, exibe o comportamento das flutuações $\chi = L^2(\langle \rho_I^2 \rangle - \langle \rho_I \rangle^2)$, próximas ao ponto de transição. Esperava-se que χ apresentasse um pico crescente com o tamanho da rede L , refletindo a divergência de flutuações característica de sistemas críticos. Tal comportamento é observado de forma mais clara na subfigura (a), associada ao caso $D_A < D_B$. No entanto, nas configurações (b) e (c), os picos permanecem aproximadamente constantes, o que pode indicar que o sistema esteja sujeito a efeitos de tamanho finito que suavizam as flutuações, ou de acordo com observações no projeto de colegas em rede unidimensional, esse comportamento pode estar ligado à dimensionalidade. A interpretação física desses picos está associada à sensibilidade do sistema: perto do ponto crítico, pequenas variações na densidade de vetores provocam grandes mudanças na quantidade de infectados, o que é indicativo de instabilidade crítica.

Figura 6: Colapso da Flutuação do Parâmetro de Ordem

Fonte: Autoral.

Complemento da análise anterior, à figura 6 apresenta o colapso das flutuações χ utilizando novamente a técnica de escala de tamanho finito. O colapso é satisfatório até certo ponto onde as curvas se sobrepõem, reescaladas para diferentes tamanhos L , o que sugere a consistência dos expoentes γ e ν utilizados. Mas, chegando no final das curvas, o colapso não ocorre de forma eficiente, o que pode indicar a necessidade de correções de escala adicionais. Contudo, a tentativa de colapso fornece indícios sobre a natureza da transição e sua universalidade, sendo uma ferramenta essencial para a classificação do modelo dentro de uma classe crítica, pois a sobreposição é eficiente perto do ponto crítico.

Tabela 1: Expoentes críticos e ponto crítico estimados para cada configuração de difusão. Os números entre parênteses indicam a incerteza (erro padrão) na última casa decimal.

Configuração de Difusão	ρ_c	β/ν	$1/\nu$	γ/ν
$D_A < D_B$	1,492(8)	0,405(5)	0,68(2)	0,00
$D_A = D_B$	1,642(2)	0,458(8)	0,73(3)	0,00
$D_A > D_B$	1,908(9)	0,565(6)	0,78(5)	0,00

A Tabela 1 apresenta os valores estimados do ponto crítico (ρ_c) e dos expoentes críticos (β/ν , $1/\nu$ e γ/ν) para três diferentes configurações de difusão entre indivíduos saudáveis (D_A) e infectados (D_B) no modelo Calazar-PED. Esses parâmetros são fundamentais para descrever a transição de fase entre um estado livre de infecção e um estado onde a epidemia se mantém ativa.

Ao interpretar esses dados por meio da analogia com medidas de quarentena, podemos entender como o controle da mobilidade dos indivíduos impacta a propagação da doença:

- **Configuração** $D_A < D_B$ (saudáveis menos móveis que os infectados) simula um cenário de quarentena onde os infectados circulam mais livremente do que os saudáveis. Nesse caso, o ponto crítico é mais baixo ($\rho_c = 1,492$), o que indica que a infecção se estabelece mesmo com uma menor densidade de vetores. Ou seja, a contenção é ineficaz e a epidemia se propaga facilmente.
- **Configuração** $D_A = D_B$ representa uma situação sem restrições de mobilidade, onde não há diferenciação entre infectados e saudáveis em termos de movimento. O

ponto crítico intermediário ($\rho_c = 1,642$) sugere que a doença requer uma densidade maior para se manter ativa, mas ainda assim não há barreiras efetivas para seu avanço.

- **Configuração** $D_A > D_B$ (saudáveis mais móveis que os infectados) é análoga a uma quarentena eficiente, onde os infectados têm a mobilidade reduzida, limitando sua capacidade de contagiar outros. Nesse cenário, o ponto crítico é o mais alto ($\rho_c = 1,908$), o que significa que a doença precisa de uma densidade significativamente maior para se manter, demonstrando que a contenção da mobilidade dos infectados é eficaz para barrar a epidemia.

Assim, a Tabela 1 não apenas quantifica os parâmetros críticos do modelo, mas também ilustra, de forma clara, o impacto das estratégias de quarentena sobre a dinâmica de propagação da doença, reforçando a importância da limitação da mobilidade dos infectados, neste caso, humanos, mosquitos vetores e cães infectados, como ferramenta de controle epidemiológico.

5 Conclusão

Neste trabalho, foi realizada uma análise do modelo Calazar-PED em redes bidimensionais, com o objetivo de investigar suas propriedades críticas e identificar sua possível classe de universalidade. Através de simulações computacionais e da técnica de escala de tamanho finito, foi possível caracterizar uma transição de fase contínua entre estados ativos e absorventes, bem como estimar os expoentes críticos β/ν , $1/\nu$ e γ/ν para diferentes cenários de mobilidade dos agentes.

Os resultados obtidos confirmam a existência de um ponto crítico bem definido para cada configuração de difusão, com colapsos de dados satisfatórios para o parâmetro de ordem. No entanto, os colapsos das flutuações mostraram-se limitados em alguns casos, sugerindo a presença de efeitos de tamanho finito ou a necessidade de correções de escala mais refinadas. Além disso, a variação dos expoentes com a configuração de difusão indica uma possível quebra da universalidade tradicional, levantando a hipótese de que o modelo pode pertencer a uma nova classe de universalidade.

A comparação entre diferentes configurações de mobilidade no modelo Calazar-PED mostrou que limitar o deslocamento dos infectados, análogo a uma quarentena, eleva o ponto crítico da transição, dificultando a propagação da doença. Esse resultado reforça o valor estratégico do controle de mobilidade como medida eficaz de contenção epidemiológica.

Com base nos resultados obtidos, propõem-se direções para trabalhos futuros como realização de simulações com tamanhos de rede maiores, a fim de minimizar os efeitos de tamanho finito e obter estimativas mais precisas dos expoentes críticos, implementação do modelo em diferentes topologias de rede (como redes complexas ou geometrias irregulares), permitindo investigar a robustez da classe de universalidade em outras estruturas,

introdução de heterogeneidade espacial e ruído externo no modelo, buscando uma representação mais realista da dinâmica epidemiológica em ambientes urbanos e rurais.

Este estudo reforça a relevância da Física Estatística como ferramenta para a modelagem e compreensão de epidemias reais, especialmente ao lidar com doenças negligenciadas como a leishmaniose visceral. A abordagem apresentada oferece subsídios teóricos e metodológicos valiosos para o avanço de modelos epidemiológicos realistas e para o desenvolvimento de estratégias de controle baseadas em evidências críticas.

Referências

- ALVAR, Jorge et al. Leishmaniasis worldwide and global estimates of its incidence. **PLoS one**, Public Library of Science San Francisco, USA, v. 7, n. 5, p. e35671, 2012.
- ALVARENGA, Lucymara de Resende. Modelagem de epidemias através de modelos baseados em indivíduos. Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- BINDER, Kurt. Applications of monte carlo methods to statistical physics. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 60, n. 5, p. 487, 1997.
- BRASIL. Ministério da Saúde. **Leishmaniose Visceral**. 2025. Disponível em: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/l/leishmaniose-visceral>>. Acesso em: 8 jun. 2025.
- GOLDENFELD, Nigel. **Lectures on phase transitions and the renormalization group**. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- HARRIS, Theodore E. Contact interactions on a lattice. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 2, n. 6, p. 969–988, 1974.
- HENKEL, Malte. **Non-equilibrium phase transitions**. Berlim: Springer, 2008. (Springer series in synergetics). 1. ed. ISBN 978-3-540-89762-3.
- HINRICHSEN, Haye. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. **Advances in physics**, Taylor & Francis, v. 49, n. 7, p. 815–958, 2000.
- KERMACK, William Ogilvy; MCKENDRICK, Anderson G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. **Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character**, The Royal Society London, v. 115, n. 772, p. 700–721, 1927.
- LANDAU, Lev Davidovich; LIFSHITZ, Evgenii Mikhailovich. **Statistical Physics: Volume 5**. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 5.
- MARRO, J; DICKMAN, R. Non-equilibrium phase transitions in lattice models cambridge univ. **Press, Cambridge**, 1999.
- ORGANIZAÇÃO PAN-AMERICANA DA SAÚDE. **Leishmaniose**. 2024. Disponível em: <<https://www.paho.org/pt/topicos/leishmaniose>>. Acesso em: 8 jun. 2025.
- SILVA, Lurdiana Fernandes da. Sistemas fora do equilíbrio: estudo de propriedades críticas de modelos epidêmicos. 2012.
- SILVA, Marcelo Brito da. Propriedades críticas de sistemas fora do equilíbrio via simulação monte carlo. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013.

TOMÉ, Tânia. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35.** [S.l.]: Edusp, 2001.

WILSON, Kenneth G. Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 4, n. 9, p. 3174–3183, 1971.

WORLD HEALTH ORGANIZATION. **Leishmaniasis.** 2023. Disponível em: [⟨https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/leishmaniasis⟩](https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/leishmaniasis). Acesso em: 8 jun. 2025.

ÓDOR, Géza. Universality classes in nonequilibrium lattice systems. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 76, n. 3, p. 663–724, 2004.