Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Estudo de Sequências Recursivas aplicadas ao Ensino Médio.

Marcio Daniel Lima de Carvalho

Teresina – PI

2019

Marcio Daniel Lima de Carvalho

Dissertação de Mestrado:

Estudo de Sequências Recursivas aplicadas ao Ensino Médio.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof°. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho

Teresina – PI

2019

C331e Carvalho, Marcio Daniel Lima de.
Estudo de sequências recursivas aplicadas ao Ensino Médio / Marcio Daniel Lima de Carvalho. - 2019.
85f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
"Orientador(a): Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho."

1. Recorrência Linear no Ensino Médio. 2. Estudo de Sequências Recursivas no Nível Médio. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

MARCIO DANIEL LIMA DE CARVALHO

ESTUDO DE SEQUÊNCIAS RECURSIVAS APLICADAS AO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Pitágoras Pinheiro de Carvalho

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho – Presidente
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Manoel Vieira de Matos Neto

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto – Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí – UFPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva – Examinador Interno
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Setembro/2019

Marcio Daniel Lima de Carvalho graduou–se em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI). Durante a graduação foi bolsista e estagiou pela Prefeitura Municipal de Teresina. Especializou-se em docência do ensino pelo Instituto Nossa Senhora de Fátima. Atualmente é professor efetivo da prefeitura municipal de Teresina, do Pré-ENEM no Colégio Tamandaré Concurso e do Instituto Dom Barreto. Durante o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI foi bolsista pela CAPES.

Dedico este trabalho a Deus, a minha família e aos amigos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela oportunidade a mim concedida, e por me guiar durante todo o curso.

A minha querida esposa Juliana de Oliveira e minha filha Maria Júlia, por me apoiarem em tudo que fiz, pelo carinho e pela compreensão, principalmente nas noites que passei ausente estudando para as provas e participando dos eventos do PROFMAT.

A minha mãe, que insistentemente me cobrava algum título além da graduação, e por conta disso eu busquei o mestrado profissional, pois havia me identificado.

Ao meu pai, que a princípio me manteve nesta cidade e que sempre me deu conselhos indispensáveis para que eu conseguisse chegar nesse meu objetivo.

Aos meus irmãos, pelo o apoio e conselhos.

A minha sogra que sempre orou e torceu por mim.

A meu professor e orientador Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho, pela dedicação, pelos conceitos que me deu, sendo sobre o conteúdo trabalhado, seja por conceitos sobre a profissão.

Aos meus professores, que me orientaram de forma impecável.

Aos meus amigos de curso, pela amizade e pelos momentos que passamos juntos.

A UESPI pela oportunidade a mim concedida.

A CAPES pelo suporte financeiro, fundamental para que eu pudesse me manter cursando com mais tranquilidade.

Resumo

Neste trabalho, fizemos o estudo de alguns problemas de recorrência aplicados a nível médio, seja em exercícios de livros do Ensino Médio, seja em provas de vestibular, seletivos ou concursos. Estudamos com um enfoque voltado para diferenciar as características dessas sequências, buscando a obtenção de equações de recorrência associadas a cada uma. Encontramos suas fórmulas matemática para o n-ésimo termo. Demonstramo-as por indução finita e por fim, aplicamos essas fórmulas matemáticas para resolver os problemas estudados. A organização do trabalho é feita em capítulos dispostos como segue: no primeiro capítulo, descrevemos um pouco sobre a importância da Matemática e das sequências recursivas para a melhora do cognitivo de professores e alunos. No segundo capítulo, citamos as principais definições e propriedades a respeito das sequências, do processo de indução finita e da análise combinatória; que são necessários para o desenvolvimento do trabalho. No terceiro capítulo, fizemos o estudo de alguns problemas de recorrência aplicados a nível médio, como a Torre de Hanoi, a Permutação Caótica, a sequência de Fibonacci, a pizza e o queijo de Steiner; entre outros. Finalmente, quarto capítulo, descrevemos a metodologia aplicada no referido trabalho e no quinto, fizemos as considerações finais.

Palavras-chave: Recorrência Linear, Ensino Médio, Sequências recursivas.

Abstract

In this paper, we studied some recurrence problems which are studied at high school level, whether in high school textbook exercises, college entrance exams, selective exams or competitions. We studied with a focus on differentiating the characteristics of these sequences, seeking to obtain recurrence equations associated with each one. We found their math formulas for the nth term. We demonstrated them by finite induction and finally we applied the mathematical formulas to solve the problems studied. The organization of work is done in chapters arranged as follows: in the first chapter, we described a little about the importance of mathematics and recursive sequences for the cognitive improvement of teachers and students. In the second chapter, we cited the main definitions and properties regarding sequences, the finite induction process, and combinatorial analysis; that are necessary for the development of the work. In the third chapter, we studied some recurrence problems studied at the medium level, such as the Tower of Hanoi, Chaotic Permutation, the Fibonacci Sequence, Steiner's Pizza and Cheese; among others. Finally, on chapter four, we described the methodology used in that work and in the fifth chapter, we made the final considerations.

Keywords: Linear Recurrence, High School, Recursive Sequences.

Sumário

1 Introdução

Os desafios do ensino de matemática na educação básica a cada dia se tornam mais preocupantes, principalmente das escolas públicas. Há quem goste muito de matemática, porém, há também muitos que não podem ver equações, probabilidades e outros tópicos matemáticos que já se bloqueiam, quase que totalmente, diante dessa disciplina que é considerada por tantos outros, a mais exata de todas. Uma das razões pelo "medo" da matemática seria a forma como ela é ensinada nas escolas e os conteúdos que deveriam ou não ser ensinados.

Diante dos desafios citados acima, tem-se um agravante, alunos desmotivados em sala de aula, pois aquilo que está sendo ensinado não faz nenhum sentido para eles; por mais que tentem, existe algo faltando. Nas aulas de matemática, nota–se que os alunos possuem dificuldades nos processos aritméticos: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, assim como em procedimentos algébricos, os quais necessitam dos conceitos aritméticos para sua construção e desenvolvimento.

A importância da matemática básica provém justamente em dar as noções fundamentais para que os alunos superem as dificuldades citadas anteriormente. Sendo assim, torna–se essencial o acompanhamento de perto dos alunos, trabalhando essas dificuldades e proporcionando motivá-lo para o estudo da Matemática, dando sentido àquilo que se aprende durante os anos.

Um dos instrumentos fundamentais ao estudo da Matemática, e que auxilia bastante aos estudantes no seu dia a dia, é a determinação das fórmulas matemáticas que regem uma sequência. Com base nisso, fez–se um estudo sobre as sequências recursivas que envolvem uma infinidade de padrões e aplicações, tanto em aspecto cognitivo quanto aplicada na natureza.

A recorrência linear é uma técnica matemática que permite definir sequências padronizadas, conjuntos, funções, operações ou até mesmo algoritmos matemáticos, partindo de problemas particulares, como os termos iniciais de uma sequência, para problemas generalizados. Assim, por intermédio de uma regra (fórmula matemática), determinada pelos cálculos de recorrência, pode–se calcular qualquer termo de uma função ou de uma sequência.

É importante destacar que na graduação não houve a oportunidade de se estudar o conteúdo referente a recorrências lineares, porém, houve a oportunidade de estudá-lo ao cursar a disciplina de Matemática Discreta no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Com os estudos possibilitados pela referida disciplina acerca de recorrências lineares, foi possível aprender suas principais teorias e aplicabilidade, se constituindo assim como uma ferramenta para resoluções de problemas. Tal constatação foi fato que se apresentou como tema interessante a ser pesquisado. Também, percebeu-se que a maioria dos estudantes, principalmente nas séries mais avançadas, apresentam muita dificuldade em resolver problemas sobre sequências padronizadas, o que torna o tema ainda mais interessante à pesquisa, pois, com o estudo a respeito dessa problemática, a intensão é diminuir as dificuldades apresentadas acima.

Existem diversas situações–problemas, desafios matemáticos e jogos, cuja aplicação do cálculo de recorrência possibilita, mesmo a alunos do Ensino Médio, solucioná–los. Logo, o estudo dos cálculos de recorrência linear, nesse contexto, se apresenta relevante, uma vez que os alunos estarão constantemente sendo desafiados.

Por conseguinte, a disseminação desse estudo no âmbito escolar, por parte dos professores, qualificará o trabalho pedagógico, já que muitos deles apresentam dificuldades diante dos problemas que envolvem sequências, dentre as quais destacamos as progressões e as sequências recursivas de diferentes ordens. Fato esse constatado, visto que a maioria dos professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio dominam apenas cálculos básicos de progressões aritmética e geométrica de primeira ordem. Portanto, ressalta-se a relevância desta pesquisa, pois o estudo de cálculos de recorrências possibilitará também uma mudança qualitativa na prática docente desenvolvida pelos profissionais em educação matemática.

2 Referencial Teórico

2.1 Princípio de Indução Finita

De acordo com MORGADO, CARVALHO (2015), o matemático Giussepe Peano (1858 - 1932), em sua linguagem direta e objetiva, diria que o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, é caracterizado pelos seguintes axiomas:

- Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural;
- Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;
- Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de número um;
- Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contem todos os números naturais.

Isto é, o último axioma de Peano diz que: seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$. Se $1 \in A$ e se, além disso, A contém todos os sucessores dos seus elementos, então $A = \mathbb{N}$.

Este axioma é conhecido como axioma da indução e serve como base do método de demonstração por indução, o qual é de grande utilidade para estabelecer provas rigorosas em Matemática. Tal método é citado a seguir:

Proposição: O Princípio da Indução Finita é um recurso matemático que verifica a validade de um resultado cuja equação está em função de n, $n \in \mathbb{N}$. O Princípio da Indução Finita está associado à ideia de recorrência.

Seja $P(n)$ uma função proposicional relativa ao número natural n. Suponhamos que:

(i) "$P(1)$ é válida;

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$. Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$."(Lima, 2013, p.25)

Demonstração. De fato, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que:

(i) $1 \in \mathbb{X}$, em virtude do primeiro item da hipótese;

(ii) se $n \in \mathbb{X}$ então $(n+1) \in \mathbb{X}$, em virtude do segundo item da hipótese. Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

$\square$

Exemplo 1. *"Prove por indução que* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*". (Lima, 2013, p.33).*

Solução: Seja $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, então:

(i) $P(1)$ é verdadeiro pois $\dfrac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1 = 1^2$.

(ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que para este valor de n, temos

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Somando $(n+1)^2$ a ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{\Big(n+1\Big)\Big((n+1)+1\Big)\Big(2(n+1)+1\Big)}{6}, \end{aligned}$$

que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira.
Portanto, pelo princípio da Indução Finita, concluímos que $P(n)$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Sequências

Segundo Lima (2013), uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais, ou seja, dado $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e dado $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, então $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função onde para cada $n \in \mathbb{N}$ associa-se a um número real x_n. Além disso, $X_n = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ é chamada sequência de números pertencentes ao conjunto dos reais.

Uma sequência X_n de números reais é dita monótona quando $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ ou então quando $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$

No primeiro caso, chama-se monótona não-decrescente e, no segundo caso, monótona não–crescente.

Se existe um número real c tal que $x_n \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência monótona X_n dir–se–á limitada.

Exemplo 2. *"Os números $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$, formam uma sequência crescente e limitada, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant 1$."(Lima, 2013, p.66).*

Solução: De fato, notemos que,

$$x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

"Por outro lado, os números $x_n = n$ define uma sequência ilimitada". (Lima, 2013, p,66)

2.3 Análise Combinatória

A Combinatória é um ramo da matemática que analisa estruturas de relações discretas. Através da Análise Combinatória pode–se demonstrar a existência de subconjuntos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições, contá–los ou classificar esses subconjuntos. Neste tópico, será falado um pouco sobre o princípio fundamental da contagem, sobre a permutação simples e sobre a combinação simples, suas principais definições e teoremas, além de exemplificar algumas aplicações e teve como principais referências (MORGADO, CARVALHO; 2015) e (LIMA, WAGNER, MORGADO, CARVALHO; 2016).

2.3.1 Princípio Multiplicativo

Se uma decisão D_1 puder ser tomada de x modos, e uma vez tomada a decisão D_1, a decisão D_2 puder ser tomada de y modos, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Exemplo 3. *Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?*

Solução: A primeira listra pode ser colorida de 3 modos, a segunda de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na primeira listra), a terceira de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na segunda listra), e a quarta de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na terceira listra). A resposta é $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

2.3.2 Permutação Simples

Para ordenar em fila n objetos distintos, a quantidade de modos que se pode ordena-los chama-se permutação simples, que pode ser calculado pela expressão

$$n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Ou seja,

$$P_n = n!.$$

Exemplo 4. *Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?*

Solução: Cada anagrama de PRÁTICO nada mais é que uma ordenação das letras P, R, A, T, I, C e O. Assim, o número de anagramas da palavra PRÁTICO é $P_7 = 7! = 5040$.

2.3.3 Combinação Simples

Para resolver problemas de combinações simples, no qual deve-se tomar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são selecionados, e um grupo de $n-p$ objetos, que são os não-selecionados. Em outras palavras,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

modos.

Exemplo 5. *Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas com exatamente 3 homens podemm ser formadas?*

Solução: Deve-se escolher 3 dos 5 homens e 2 das 3 mulheres, e isso pode ser calculado fazendo

$$C_{5,3} \cdot C_{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 10 \cdot 6 = 60$$

comissões.

2.4 Progressão

Progressões são sequências numéricas que são determinadas por um termo inicial e um valor que se deve atribuir, somando ou multiplicando ao termo inicial, chamada razão. Neste tópico, será falado um pouco sobre as progressões aritmética e geométrica, suas principais definições e teoremas, além de exemplificar algumas aplicações e teve como principais referências (MORGADO, CARVALHO; 2015) e (LIMA, WAGNER, MORGADO, CARVALHO; 2016).

2.4.1 Progressão Aritmética

Segundo LIMA, WAGNER, MORGADO, CARVALHO (2016), uma Progressão Aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do anterior com uma constante r. Esta constante r, tal que $r \in \mathbb{R}$, é chamada de razão da progressão aritmética.

Usaremos a abreviação P.A. para simplificar a expressão progressão aritmética.

Exemplo 6. *"As sequências* $(5,\ 8,\ 11,\ 14, \ldots)$ *e* $(7,\ 5,\ 3,\ 1, \ldots)$ *são progressões aritméticas de razões* 3 *e* -2 *respectivamente."(LIMA, WAGNER, MORGADO, CARVALHO; 2016, p.1).*

Proposição 2.2: Note que a equação que determina os termos dessas sequências é dada por

$$a_n = a_1 + (n-1)r. \tag{1}$$

Demonstração. Como $a_{n+1} = a_n + r$, $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r, \\ a_3 &= a_2 + r, \\ a_4 &= a_3 + r, \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades e fazendo as simplificações adequadas provamos (2.2).

□

Proposição 2.3: A equação que determina a soma dos n-termos é dada por:

$$S_n = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2}.$$

Demonstração. Temos $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás pra frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$. Daí, adicionando membro a membro as duas igualdades acima, temos:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que, em cada parênteses a partir do segundo, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r em relação às parcelas de parêntese anterior, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n)n \Longrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

$\square$

Observe que, se $r \neq 0$, S_n é um polinômio do 2º grau em n desprovido do termo independente. Se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2 sem termo independente.

Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n, desprovido do termo desconhecido, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética.

Com efeito, tem–se:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \\
&= \frac{\Big(a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r\Big) \cdot n}{2} \\
&= \frac{\Big(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r\Big) \cdot n}{2} \\
&= \frac{2 \cdot a_1 \cdot n + rn^2 - rn}{2} \\
&= \frac{rn^2}{2} + \frac{(2 \cdot a_1 - r)n}{2}.
\end{aligned}$$

Fazendo $a = \dfrac{r}{2}$ e $b = a_1 - \dfrac{r}{2}$, tem-se.

$$S_n = an^2 + bn.$$

Define–se o operador Δ como o operador diferença tal que

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Logo, uma sequência A_n é uma progressão aritmética se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, o valor de

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

é uma constante.

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência A_n, $n \in \mathbb{N}$, na qual os operadores diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ entre cada termo e o termo anterior forma uma progressão não–estacionária.

Exemplo 7. *A sequência* $A_n = (1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21, \ldots)$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem pois a sequência* $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = (2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots)$ *é uma P.A. não–estacionária de razão* $r = 1$.

De modo geral, uma progressão aritmética de ordem k, $(k \geqslant 2)$ é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior forma uma progressão aritmética de ordem $k - 1$.

Observação 1. *Todo polinômio do segundo grau em* n *representa o valor de um termo de uma progressão aritmética de ordem 2.*

Com efeito, temos que em um polinômio do segundo grau $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &= a_{n+1} - a_n \\
&= a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) \\
&= an^2 + 2an + a + bn + b - an^2 - bn \\
&= 2an + a + b.
\end{aligned}$$

Fazendo $b = -2a$ e a razão $r = 2a$, temos

$$\begin{aligned} \triangle a_n &= 2an + a + (-2a) \\ &= a + (n-1)2a \\ &= a + (n-1)r. \end{aligned}$$

Logo, o operador diferença é um termo de uma P.A. Portanto, todo polinômio do segundo grau em n representa os termos de uma progressão aritmética de segunda ordem.

Reciprocamente, se a_n é uma P.A de segunda ordem, cada termo será um polinômio de segundo grau em n.

De fato, temos que se $b_n = \triangle a_n = a_{n+1} - a_n$ é um termo de uma progressão aritmética, logo $b_1 + b_2 + ... + b_n = S_n$ como já foi demonstrado, é um polinômio do segundo grau em n. Por outro lado, temos que

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

ou seja, $a_{n+1} - a_1 = S_n$, logo $a_{n+1} - a_1$ é um polinômio de grau 2 em n.

Sendo assim, a_{n+1} é um polinômio de grau 2 em n, o que implica que a_n também o é.

Teorema 1. *Sejam* $p \in \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então* $1^p + 2^p + 3^p + \ldots n^p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ *é um polinômio de grau* $p+1$ *em* n.

Demonstração. Provaremos por indução sobre p:

i) Para $p = 1$, temos que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2},$$

que é um polinômio do segundo grau, o que prova para $p = 1$.

ii) Tomemos válido para $p = s$ qualquer, ou seja,

$$1^s + 2^s + 3^s + \ldots n^s = \sum_{k=1}^{n} k^s,$$

é um polinômio de grau $s + 1$.

Provaremos para $p = s+1$, ou seja,

$$1^{s+1} + 2^{s+1} + 3^{s+1} + \ldots n^{s+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$$

é um polinômio de grau $s+2$.

De fato, usando a desenvolvimento binomial da expressão

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k,$$

onde $C_{n,k}$ é a combinação de n elementos em k posições.

Daí, temos que,

$$\begin{aligned}
(k+1)^{s+2} &= C_{(s+2),0} \cdot k^{s+2} + C_{(s+2),1} \cdot k^{s+1} + \ldots + C_{(s+2),n} \cdot k^{s+2-n} \\
&= \frac{(s+2)!}{0!((s+2)-0)!} \cdot k^{s+2} + \frac{(s+2)!}{1!((s+2)-1)!} \cdot k^{s+1} + \ldots + 1 \\
&= \frac{(s+2)!}{(s+2)!} \cdot k^{s+2} + \frac{(s+2)!}{(s+1)!} \cdot k^{s+1} + \ldots + 1 \\
&= \frac{(s+2)!}{(s+2)!} \cdot k^{s+2} + \frac{(s+2)(s+1)!}{(s+1)!} \cdot k^{s+1} + \ldots + 1 \\
&= k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + \ldots + 1,
\end{aligned}$$

onde os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de grau s em k.

Temos ainda que

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2) \sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n)$$

onde $F(n)$ é um polinômio de grau $s+1$ em n pela hipótese de indução.

Simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios, obtemos

$$(n+1)^{s+2} = 1 + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n).$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - F(n)}{s+2}$$

é um polinômio de grau $s+2$ em n, como queríamos provar. □

Corolário 1. *Se* F_n *é um polinômio de grau* p*, então* $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ *é um polinômio de grau* $p+1$ *em* n*.*

Exemplo 8. *Determine* $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)$*, onde* $n \in \mathbb{N}$*.*

Solução: Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k+2) \\ &= 1\cdot(1+2) + 2\cdot(2+2) + \ldots + n\cdot(n+2) \\ &= 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+2) \\ &= 3 + 8 + \ldots + n\cdot(n+2). \end{aligned}$$

Note também que $a_n = (3,\ 8,\ 15,\ 24, \ldots)$ é uma P.A de 2ª ordem, já que

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= 8 - 3 = 5 \\ \Delta a_2 &= 15 - 8 = 7 \\ \Delta a_3 &= 24 - 15 = 9 \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde $b_n = 5, 7, 9, ...$ é uma P.A.

Pelo corolário acima, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)$ é um polinômio do 3º grau, ou seja,

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Atribuindo a n, os valores 1, 2, 3 e 4, temos que $S_1 = 3$, $S_2 = 3 + 8 = 11$, $S_3 =$

$3 + 8 + 15 = 26$ e $S_4 = 3 + 8 + 15 + 24 = 50$. Assim,

$$\begin{cases} a + b + c + d &= 3 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 11 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 26 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 50 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7a + 3b + c &= 8 \\ 19a + 5b + c &= 15 \\ 37a + 7b + c &= 24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 12a + 2b &= 7 \\ 18a + 2b &= 9 \end{cases}$$

Logo, tem-se

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{7}{6} \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Consequentemente,

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n.$$

Teorema 2. *A sequência A_n é uma progressão aritmética de ordem p, $(p \geqslant 2)$ se, e somente se, cada termo a_n é dado por um polinômio de grau p em n.*

Demonstração. Vamos proceder por indução em p.

(i) Para $p = 2$, o teorema já foi provado anteriormente na "Obs 1".

(ii) Tomando válida para $p = k$, como hipótese de indução, isto é, se A_n é uma P.A. de ordem k, então a_n é um polinômio de grau k em n; provaremos então a validez para $p = k{+}1$. Se A_n é uma progressão aritmética de ordem $k{+}1$, $b_n = \triangle a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem k e, pela hipótese de indução, b_n é um polinômio de grau k em n.

Então,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

é, pelo corolário anterior, um polinômio de grau $k + 1$.

Logo, $a_{n+1} - a_1$ é um polinômio de grau $k + 1$, o que implica dizer que a_{n+1} é um polinômio de grau $k + 1$.

Portanto, a_n é um polinômio de grau $k + 1$.

Reciprocamente, se a_n é um polinômio de grau $s + 1$, em n, Δa_n é um polinômio de grau s em n. De fato, pela hipótese de indução, Δa_n é um progressão aritmética de ordem s, ou seja, A_n é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$.

□

2.4.2 Progressão Geométrica

Uma progressão geométrica é uma sequência numérica recursiva na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. Esta constante q, tal que $q \in \mathbb{R}$, e $q \neq 0$, é chamada de razão da progressão geométrica. Usaremos a abreviação P.G. para simplificar a expressão Progressão Geométrica. A equação que determina os termos dessa sequência é dada por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Demonstração. Como $a_n = a_{n-1} \cdot q$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q, \\ a_3 &= a_2 \cdot q, \\ a_4 &= a_3 \cdot q, \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q. \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades e fazendo as simplificações adequadas temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

□

A soma dos n termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}, \quad \text{com} \quad q \neq 1.$$

De fato, tomemos $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$. Multiplicando por q, obtemos

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + \ldots + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n \\ &= a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Subtraindo essas equações, temos

$$\begin{aligned}
S_n - q \cdot S_n &= a_1 - a_{n+1} \Rightarrow \\
S_n \cdot (1-q) &= a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow \\
S_n &= \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{(1-q)} \\
&= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q-1)}
\end{aligned}$$

Se a razão da P.G. é $q \in \mathbb{R}$ tal que $|q| < 1$, então a soma dos infinitos termos dessa P.G. converge para

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

De fato, como $|q| < 1$, tem–se que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q-1)} \\
&= \frac{a_1 \cdot q^n}{(q-1)} - \frac{a_1}{(q-1)}.
\end{aligned}$$

Aplicando o limite, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{(q-1)} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{(q-1)},$$

logo

$$S = -\frac{a_1}{(q-1)} = \frac{a_1}{(1-q)}.$$

2.5 Sequências Recursivas

Uma sequência é uma recorrência quando a partir de um certo termo todos os termos são dados em função do(s) termo(s) anterior(es). Neste tópico, será falado um pouco sobre as recorrências de primeira e segunda ordem, suas principais definições e teoremas, além de exemplificar algumas aplicações e teve como principais referências (MORGADO, CARVALHO; 2015) e (LIMA, WAGNER, MORGADO, CARVALHO; 2016).

2.5.1 Recorrências

As recorrências podem ser apresentadas através de uma equação onde, a partir de um certo termo, determina cada termo posterior em função dos anteriores, ou por uma expressão ou "fórmula fechada" que associa o termo x_n a cada número natural n.

Exemplo 9. *Uma sequência cujo primeiro termo é* $x_1 = 1$ *e cada termo a partir do segundo é dado por* $x_n = n \cdot x_{n-1}$.

Dessa forma a sequência fica $X_n = (1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720, \ldots)$. Por outro lado, sua expressão matemática é

$$x_n = n!$$

para todo natural n.

As equações de recorrências podem ser classificadas de acordo com a sua ordem, com a homogeneidade e linearidade.

A ordem de uma recorrência é a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua equação.

A equação $x_n = x_{n-2} - x_{n-4}$, com $n < 5$ representa uma recorrência de 4° ordem.

Uma recorrência é dita "homogênea" quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Por exemplo, a equação

$$x_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + x_n.$$

Em contrapartida, uma recorrência é dita "não–homogênea" quando além de depender dos termos anteriores, cada elemento da sequência também está em função de um termo independente. Por exemplo, a equação

$$x_{n+2} = 5 \cdot x_{n+1} + 6 \cdot x_n + 2^n.$$

2.5.2 Recorrência linear de 1ª ordem

Uma recorrência linear de 1ª ordem expressa x_{n+1} em função de x_n, ela será linear se, e somente se, sua equação for da forma:

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n),$$

com $g(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $h(n) = 0$, temos uma recorrência linear homogênea de 1ª ordem e, caso contrário, temos uma recorrência linear não–homogênea de 1ª ordem.

As equações $x_{n+1} = 3 \cdot x_n + n^2$ e $x_{n+1} = n \cdot x_n$ representam recorrências lineares de 1ª ordem. A equação $x_{n+1} = (x_n)^3$ representa uma recorrência de 1ª ordem, porém não–linear.

Exemplo 10. *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = n.x_n$*, para* $x_1 = 1$.

Variando os valores de n, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \cdot x_1, \\ x_3 &= 2 \cdot x_2, \\ x_4 &= 3 \cdot x_3, \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1) \cdot x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando os termos dos 1º e 2º membros das equações, e efetuando as devidas simplificações, temos:

$$x_n = x_1 \cdot (n-1)!$$

Como $x_1 = 1$, temos que $x_n = (n-1)!$.

O texto a seguir define melhor as Recorrências Lineares de 1ª ordem, exemplifica e cita seus principais teoremas.

Uma Recorrência linear não-homogênea de 1ª ordem é a recorrência do tipo

$$x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n),$$

onde $g(n) \neq 0$ e $h(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Os casos de mais simples resolução são aqueles onde $g(n) = 1$.

Exemplo 11. *Resolva a recorrência não homogênea* $x_{n+1} = x_n + 2^n$*, para* $x_1 = 1$.

Variando os valores de n, temos:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + 2, \\
x_3 &= x_2 + 2^2, \\
x_4 &= x_3 + 2^3, \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Adicionando os termos dos 1ºe 2º membros das equações e efetuando as devidas simplificações, temos:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} \\
&= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} \\
&= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} \\
&= \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}$$

Transformação da recorrência $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$ **em** $y_{n+1} = y_n + f(n)$

Podemos transformar qualquer recorrência linear de 1ª ordem em uma outra da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 3. *Se* a_n *é uma solução não-nula de* $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$*, com* $g(n) \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então a substituição* $x_n = a_n \cdot y_n$ *transforma a recorrência linear de 1ª ordem* $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$ *em* $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h_n}{g_n \cdot a_n}$.

Demonstração. A substituição $x_n = a_n \cdot y_n$ transforma $x_{n+1} = g(n)\dot{x}_n + h(n)$ em

$$a_{n+1} \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n).$$

Mas $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$, pois por hipótese a_n é uma solução não–nula de

$x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$. Daí a equação se transforma em:

$$\begin{aligned} a_{n+1} \cdot y_{n+1} &= g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n) \Rightarrow \\ g(n) \cdot a_n \cdot y_{n+1} &= g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n) \Rightarrow \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h(n)}{g_n \cdot a_n}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 12. *Resolva a recorrência* $x_{n+1} = 2x_n + 1$, *com* $x_1 = 2$.

Solução: Tomando a equação homogênea $x_{n+1} = 2x_n$ referente a equação de recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1, \\ x_3 &= 2x_2, \\ x_4 &= 2x_3, \\ &\vdots \\ x_n &= 2x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando os termos dos 1º e 2º membros das equações, e efetuando as devidas simplificações, temos:

$$x_n = 2^{n-1} \cdot x_1.$$

Tomando $a_1 = 1$, temos $a_n = 2^{n-1}$ uma solução particular não–nula de $x_{n+1} = 2x_n$. Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1} y_n$ em $x_{n+1} = 2x_n + 1$, obtemos

$$2^n \cdot y_{n+1} = 2^n \cdot y_n + 1,$$

ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$.

Daí segue:

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + 2^{-1}, \\
y_3 &= y_2 + 2^{-2}, \\
y_4 &= y_3 + 2^{-3}, \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}.
\end{aligned}$$

Adicionando os termos do 1º e 2º membros das equações, e efetuando as devidas simplificações, temos:

$$\begin{aligned}
y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-(n-1)} \\
&= y_1 + \frac{2^{-1} \cdot [(2^{-1})^{n-1} - 1]}{2^{-1} - 1} \\
&= y_1 - 2^{1-n} + 1.
\end{aligned}$$

Como $x_n = 2^{n-1} y_n$ e $x_1 = 2$, temos que $y_1 = 2$. Por tanto, $y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1$ implica em $y_n = 2 - 2^{1-n} + 1$, logo $y_n = 3 - 2^{1-n}$. Daí temos que $x_n = 2^{n-1} y_n$ implica em $x_n = 2^{n-1} \cdot (3 - 2^{1-n})$, logo $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

2.5.3 Recorrência linear de 2ª ordem

Uma recorrência linear é dita de 2ª ordem quando cada termo definido pela equação de recorrência depende dos dois termos imediatamente anteriores a ele. Assim, uma recorrência linear de 2ª ordem é a equação do tipo

$$x_{n+2} = f(n) \cdot x_{n+1} + g(n) \cdot x_n + h(n),$$

onde $g(n)$ é uma função não–nula.

Se $h(n) = 0$ então a recorrência é homogênea, e se $h(n) \neq 0$ então ela será não–homogênea.

Consideremos a equação de recorrência $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$, onde a e b são constantes reais, com $b \neq 0$. Para cada equação dessa forma vamos associar uma equação do 2ª grau, $x^2 = a \cdot x + b$, que chamaremos equação característica da recorrência.

Denotaremos por α e β as raízes da equação característica. Como $b \neq 0$ temos que zero não é raiz da equação característica. Ou seja, se $b \neq 0$ então $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Dada a equação $x^2 = a \cdot x + b$, temos que se α e β são suas raízes, então $a = \alpha + \beta$ e $b = -\alpha \cdot \beta$.

Veremos a seguir, como encontrar a solução de uma recorrência cujos valores iniciais são x_0 e x_1 e cuja equação seja da forma:

$$x_{n+2} = (\alpha + \beta) \cdot x_{n+1} - \alpha \cdot \beta \cdot x_n.$$

Teorema 4. *Se as raízes da equação característica* $x^2 + p \cdot x + q = 0$ *são* α *e* β*, com* $\alpha \neq \beta$*, então* $x_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$*, quaisquer que sejam as constantes* A *e* B*.*

Demonstração. Substituindo $x_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ na recorrência $x_{n+2} + p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} A \cdot \alpha^{n+2} + B \cdot \beta^{n+2} + p \cdot A \cdot \alpha^{n+1} + p \cdot B \cdot \beta^{n+1} + q \cdot A \cdot \alpha^n + q \cdot B \cdot \beta^n &= \\ A \cdot \alpha^n \cdot (\alpha^2 + p \cdot \alpha + q) + B \cdot \beta^n \cdot (\beta^2 + p.\beta + q) &= \\ A \cdot \alpha^n \cdot 0 + B \cdot \beta^n \cdot 0 &= 0, \end{aligned}$$

para todo A e B. Isso é verdade pois por hipótese α e β são raízes de $x^2 + p \cdot x + q = 0$, logo $\alpha^2 + p \cdot \alpha + q = 0$ e $\beta^2 + p.\beta + q = 0$.

□

Teorema 5. *Se as raízes de* $x^2 + px + q = 0$ *são,* $\alpha \neq \beta$*, então todas as soluções da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ *são da forma* $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$*, com* A *e* B *constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinemos constantes A e B que sejam soluções do sistema:

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta &= y_1 \\ A\alpha^2 + B\beta^2 &= y_2 \end{cases}$$

isto é,

$$A = \frac{\beta^2 y_1 - \beta y_2}{\alpha\beta(\beta - \alpha)} \quad \text{e} \quad B = \frac{\alpha y_2 - \alpha^2 y_1}{\alpha\beta(\beta - \alpha)}.$$

Isso é possível pois $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = A\alpha^n + B\beta^n$ para todo n natural, o que provará o Teorema.

Com efeito, tomando $z_n = y_n - A\alpha^n - B\beta^n$, mostraremos que $z_n = 0$ para todo n natural. Logo,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - A\alpha^n(\alpha^2 + p\alpha + q) - B\beta^n(\beta^2 + p\beta + q)$$

Note que $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$, porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Notemos também que $\alpha^2 + p\alpha + q = \beta^2 + p\beta + q = 0$, pois α e β são as raízes de $x^2 + px + q = 0$. juntos, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $A\alpha + B\beta = y_1$ e $A\alpha^2 + B\beta^2 = y_2$, temos que

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - A\alpha^1 - B\beta^1 \\ &= y_1 - (A\alpha + B\beta) \\ &= y_1 - y_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_2 &= y_2 - A\alpha^2 - B\beta^2 \\ &= y_2 - (A\alpha^2 + B\beta^2) \\ &= y_2 - y_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $z_1 = z_2 = 0$. Logo, como $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então $z_n = 0$ para todo n natural. □

Podemos, a partir desse último teorema, afirmar que basta conhecer o valor de dois termos de uma recorrência da forma: $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, onde α e β são raízes da equação característica, com $\alpha \neq \beta$, para encontrar a sua solução.

Podemos resolver um sistema de equações para encontrar os valores de A e B na solução.

Exemplo 13. *Resolva a recorrência* $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$, *com* $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Sua equação característica é $x^2 + 3x - 4 = 0$, onde suas raízes são 1 e -4. Portanto, pelo Teorema acima temos $a_n = A + B \cdot (-4)^n$, onde A e B são constantes arbitrárias.

Teorema 6. *Se as raízes de* $x^2 + px + q = 0$ *são iguais, tais que* $\alpha = \beta = r$, *então* $x_n = Ar^n + nBr^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, *quaisquer que sejam os valores das constantes* A *e* B.

Demonstração. Se as raízes são iguais então $r = -\dfrac{p}{2}$. Substituindo $x_n = Ar^n + nBr^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} Ar^{n+2} + (n+2)Br^{n+2} + p(Ar^{n+1} + (n+1)Br^{n+1}) + q(Ar^n + nBr^n) &= \\ Ar^n(r^2 + pr + q) + Bnr^n(r^2 + pr + q) + Br^{n+1}(2r + p) &= \\ Ar^n \cdot 0 + Bnr^n \cdot 0 + Br^{n+1} \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 7. *Se as raízes de* $x^2 + px + q = 0$ *são iguais,* $\alpha = \beta = r$, *então todas as soluções da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ *são da forma* $a_n = Ar^n + Bnr^n$, *com* A *e* B *constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Daí A e B são as soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} Ar + Br = y_1 \\ Ar^2 + 2 \cdot Br^2 = y_2 \end{cases}$$

ou seja,

$$A = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

Isso é possível pois $r \neq 0$. Afirmamos que $y_n = Ar^n + nBr^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que provará o teorema.

De fato, seja $z_n = y_n - Ar^n - nBr^n$. Mostraremos que $z_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos:

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - Ar^n(r^2 + pr + q) - nBr^n(r^2 + pr + q) - Br^{n+1}(2r + p).$$

Nessa soma, temos que $(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = 0$, pois y_n é solução da recorrência em questão. Como r é raiz da equação $x^2 + px + q = 0$ a segunda e terceira parcela se igualam a zero; e $2r + p = 0$, já que $\alpha = \beta = r$, logo, $r = -\dfrac{p}{2}$.

Então, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Além disso, como $Ar + Br = y_1$ e $Ar^2 + 2Br^2 = y_2$, temos

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - Ar^1 - 1Br^1 \\ &= y_1 - (Ar + Br) \\ &= y_1 - y_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_2 &= y_2 - Ar^2 - 2Br^2 \\ &= y_2 - (Ar^2 + 2Br^2) \\ &= y_2 - y_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas, se $z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = 0$, e $z_1 = 0$ e $z_2 = 0$, então $z_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 14. *Resolva a recorrência* $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$.

Solução: Sua equação característica é $x^2 - 4x + 4 = 0$, onde suas raízes são iguais a 2. Portanto, pelo Teorema acima temos $a_n = A2^n + Bn2^n$, onde A e B são constantes arbitrárias.

O teorema a seguir transforma uma recorrência linear de 2ª ordem não–homogênea é uma homogênea.

Teorema 8. *Se* a_n *é uma solução da equação* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, *então a substituição* $x_n = a_n + y_n$ *transforma a equação em* $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.

Demonstração. Substituir x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtemos

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, pois a_n é uma solução da equação

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n).$$

Logo, a equação se transforma em

$$\begin{aligned}(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) &= f(n) \Rightarrow \\ f(n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) &= f(n) \Rightarrow \\ y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n &= 0.\end{aligned}$$

□

Exemplo 15. *Resolva a recorrência* $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$.

Solução: A equação característica da equação homogênea da recorrência

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$$

é $x^2 - 6x + 8 = 0$, cujas raízes são $\alpha = 2$ e $\beta = 4$. Portanto, a solução da homogênea $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é

$$h_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n.$$

Encontraremos agora uma solução t_n da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$. Isso se dar por tentativa, ou seja, devemos imaginar que t_n seja a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial de base 3, logo tentaremos $t_n = An + B + C \cdot 3^n$. Substituindo em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$, temos

$$\begin{aligned}&(A(n+2) + B + C \cdot 3^{n+2}) - 6(A(n+1) + B + C \cdot 3^{n+1}) + 8(An + B + C \cdot 3^n) = \\ = \;& An + 2A + B + 9C \cdot 3^n - 6An - 6A - 6B - 3 \cdot 6 \cdot C \cdot 3^n + 8An + 8B + 8C \cdot 3^n \\ = \;& 3An + 3B - 4A - C \cdot 3^n \\ = \;& n + 3^n.\end{aligned}$$

Logo t_n será solução se $3An = n$, $3B - 4A = 0$ e $-C = 1$. Sendo assim, $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{9}$ e

$C = -1$. Daí, $t_n = \frac{1}{3} \cdot n + \frac{4}{9} - 3^n$. Portanto, a solução da recorrência não homogênea é

$$x_n = h_n + t_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n + \frac{1}{3} \cdot n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

3 Problemas sobre Sequências Recursivas ao Nível Médio

Vários problemas sobre sequências recursivas já foram e serão aplicados a alunos de nível médio. Problemas esses, ministrados em concursos, seletivos e exames de acesso a instituições de ensino superior. Neste capítulo será falado um pouco sobre alguns desses problemas, e suas principais referências são (MORGADO, CARVALHO; 2015), (LIMA, WAGNER, MORGADO, CARVALHO; 2016), (COHEN,VILLARD;), (FUVEST), (ITA), (IME), (ENAP) e (ESPM).

3.1 Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um dos quebra-cabeças matemáticos mais populares, também conhecida por torre do bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi publicada em 1883 pelo matemático frances Edouard Lucas com o pseudônimo Prof. N. Claus (de Siam), um anagrama de seu nome. A publicação dizia que o jogo vinha do Vietnã, sendo popular também na China e no Japão e acompanhava a caixa do quebra-cabeças.

O problema da Torre de Hanoi envolve um ambiente formado por uma base contendo 3 pinos, onde, em um deles, há uma pilha de discos furados no meio e de diâmetros diferentes ordenados de forma que o disco maior esteja em baixo e o menor esteja em cima, formando assim uma torre.

Fonte: `donapitoquinha.com.br`

O problema consiste na transferência da torre de um pino a outro, obedecendo as seguintes restrições:

a) Só é possível movimentar um disco por vez para qualquer pino;

b) Um disco maior nunca poderá ser colocado sobre um menor;

c) A solução deverá ser encontrada com o menor número de passos possível.

O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três.

Com base nisso, faz–se o estudo do número da quantidades mínimas de movimentos necessários para a realização de todas as transferências.

Tabela 1 – número mínimo de movimentos para 6 peças

Quantidade de discos das torres	Quant. de movimentos de cada peça						Total de movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	
1	1	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	31
6	32	16	8	4	2	1	63

Fonte: Proveniente de tentativas dos alunos ao jogar

Essa sequência formada pelos números que representa a quantidades mínimas de movimentos necessários para a realização de todas as transferências é uma sequência recursiva.

3.1.1 Dedução da Equação de Recorrência

Considerando $n \in \mathbb{N}$ e tomando h_{n-1} o número mínimo de movimentos para transferir $n-1$ discos de uma haste para outra.

Como são três hastes, então há h_{n-1} movimentos para transferir os $n-1$ discos da primeira haste para a segunda. Como o n-ésimo disco é o maior de todos, então ele não interfere no processo, logo faz-se mais um movimento, levando-o para a terceira haste. Em seguida, dá-se mais h_{n-1} movimentos para transferir os $n-1$ discos da segunda haste para a terceira.

Portanto, para transferir os n discos de uma haste para outra são necessários

$$h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1},$$

ou seja, $h_n = 2h_{n-1} + 1$, para todo natural $n > 1$.

3.1.2 Cálculo de Recorrência

Para $n = 1$, isto é, para um disco, basta um movimento para transferi-lo de uma haste para outra, logo $h_1 = 1$. Como $h_n = 2h_{n-1} + 1$ é uma recorrência não homogênea de 1ª ordem, então tomemos a_n, uma solução não nula da homogênea $h_n = 2h_{n-1}$, logo, $a_n = 2a_{n-1}$, e também temos,

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1, \\ a_3 &= 2a_2, \\ a_4 &= 2a_3, \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= 2a_n. \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro e fazendo as simplificações adequadas temos

$$a_{n+1} = 2^n \cdot a_1.$$

Tomando $a_1 = 1$, temos $a_{n+1} = 2^n$. Fazendo $h_{n+1} = a_{n+1} \cdot y_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= 2h_n + 1 \Rightarrow \\ a_{n+1} \cdot y_{n+1} &= 2a_n \cdot y_n + 1 \Rightarrow \\ 2^n y_{n+1} &= 2 \cdot 2^{n-1} \cdot y_n + 1 \Rightarrow \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Resolvendo essa recorrência temos:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{1}{2}, \\ y_3 &= y_2 + \frac{1}{2^2}, \\ y_4 &= y_3 + \frac{1}{2^3}, \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro e fazendo as simplificações adequadas temos

$$y_n = y_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Note que $h_1 = a_1 \cdot y_1 \iff 1 = 1 \cdot y_1 \iff y_1 = 1$. Tem-se também que, a soma dos termos da P.G. acima é

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y_n &= 1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Como $h_n = a_n \cdot y_n$, temos $h_n = 2^{n-1} \cdot \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^n - 1$. Portanto $h_n = 2^n - 1$.

Usaremos indução para verificar que a regra acima é valida para todo natural $n > 0$.

i) Para $n = 1$, será válida a regra pois $h_1 = 2^1 - 1 = 1$, satisfazendo o que ja foi dito anteriormente.

ii) Tomando válida a regra para um $n = k$, ou seja, $h_k = 2^k - 1$, provaremos para $n = k + 1$.

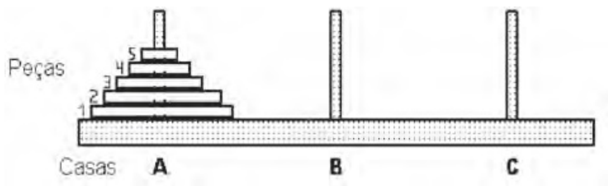
Com efeito temos que

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= 2 \cdot h_k + 1 \\ &= 2 \cdot (2^k - 1) + 1 \\ &= 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

o que verifica a regra.

Uma aplicação deste problema ocorreu em 2011 no Exame Nacional do Ensino Médio – Enem. Tal questão está citada a seguir.

Problema 1 (Enem 2011)**.** *A torre de Hanói é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimento, respeitando-se as regras. As regras são:*



1. *um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor;*
2. *pode-se mover um único disco por vez;*
3. *um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.*

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (X) *e o número mínimo de movimentos* (Y)*:*

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

A relação entre (X) *e* (Y) *é*

a) $Y = 2^X - 1$

b) $Y = 2^{X-1}$

c) $Y = 2^X$

d) $Y = 2 \cdot X - 1$

e) $Y = 2 \cdot X - 4$

Solução: Observando a tabela, podemos garantir que a alternativa correspondente ao gabarito desse problema do Enem 2011 é a letra A.

O resultado também comprova o que foi demonstrado anteriormente.

3.2 Permutação Caótica

Em análise combinatória, um desarranjo, também conhecido como permutação caótica ou derangement (do francês) é uma espécie de permutação em que nenhum elemento do conjunto permanece na mesma posição.

O número de permutações caóticas de n elementos poderá ser representado tanto por uma equação de recorrência, como por uma regra matemática em função de n, é o que mostraremos a seguir.

3.2.1 Dedução da Equação de Recorrência

Tomaremos D_{n+2} o número de permutações simples dos números 1, 2, ... , n, $n+1$ e $n+2$ nos quais nenhum desses elementos ocupa seu lugar primitivo. Tomando D_n como sendo o número de permutações caóticas com n elementos e D_{n+1} o número de permutações caóticas com $n+1$ elementos, teremos:

i) Permutação em que o 1 ocupará a posição do número que ocupará o primeiro lugar.

Como são $n+2$ números, incluindo o 1, então tem-se $(n+1)$ possibilidades para o número que permutará com o 1. Logo, tanto o número escolhido, como o 1, que ocupará seu lugar, não estarão em seus lugares primitivos. Como sobram n elementos, e existem D_n permutações caóticas entre eles, então haverá $(n+1) \cdot D_n$ permutações caóticas com $n+2$ elementos.

ii) Permutação em que o 1 não ocupará a posição do número que ocupará o primeiro lugar.

Neste caso, haverá $(n+1)$ possibilidades para escolher o lugar onde o 1 ficará. Como sobram $(n+1)$ elementos, haverá D_{n+1} permutações caóticas entre eles. Logo, haverá $(n+1) \cdot D_{n+1}$ permutações caóticas com $n+2$ elementos.

Portanto, segue que o número de permutação caótica entre $n+2$ elementos será

$$\begin{aligned} D_{n+2} &= (n+1) \cdot D_n + (n+1) \cdot D_{n+1} \\ &= (n+1) \cdot (D_n + D_{n+1}). \end{aligned}$$

3.2.2 Cálculo de Recorrência

Notemos que $D_{n+2} = (n+1) \cdot (D_n + D_{n+1})$ é uma recorrência de 2^a ordem cujos coeficientes não são constantes, logo podemos rescrevê-la como:

$$\begin{aligned} D_{n+2} &= (n+1) \cdot (D_n + D_{n+1}) \\ &= (n+1) \cdot (D_n) + (n+1) \cdot (D_{n+1}) \\ &= (n+1) \cdot (D_n) + (n+1) \cdot (D_{n+1}) + D_{n+1} - D_{n+1} \\ &= (n+1) \cdot (D_n) + (n+2) \cdot (D_{n+1}) - D_{n+1}. \end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} D_{n+2} - (n+2) \cdot (D_{n+1}) &= (n+1) \cdot (D_n) - D_{n+1} \\ &= -(D_{n+1} - (n+1) \cdot D_n). \end{aligned}$$

Segue daí que,

$$\begin{aligned} D_3 - 3D_2 &= -(D_2 - 2D_1), \\ D_4 - 4D_3 &= -(D_3 - 3D_2), \\ D_5 - 5D_4 &= -(D_4 - 4D_3), \\ D_6 - 6D_5 &= -(D_5 - 5D_4), \\ &\vdots \\ D_n - nD_{n-1} &= -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}). \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades e fazendo as simplificações adequadas temos:

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2} \cdot (D_2 - 2D_1).$$

Como $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, $D_2 = 1$ e $D_1 = 0$, temos:

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= (-1)^{n-2} \cdot (D_2 - 2D_1) \\ &= (-1)^n \cdot (1-0) \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Portanto, define-se,

$$D_n = (-1)^n + nD_{n-1}.$$

Uma recorrência de 1ª ordem não homogênea. Tomaremos a_n uma solução não nula da homogênea $D_n = nD_{n-1}$. Logo,

$$\begin{aligned} a_3 &= 3a_2, \\ a_4 &= 4a_3, \\ a_5 &= 5a_4, \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= (n+1) \cdot a_n. \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro e fazendo as simplificações adequadas tem–se,

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2!} \cdot a_2$$

Tomando $a_2 = 1$, então $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2!}$. Fazendo $D_{n+1} = a_{n+1} \cdot y_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{n+1} + (n+1)D_n \Rightarrow \\ a_{n+1} \cdot y_{n+1} &= (-1)^{n+1} + (n+1)a_n \cdot y_n \Rightarrow \\ \frac{(n+1)!}{2!} \cdot y_{n+1} &= (-1)^{n+1} + (n+1) \cdot \frac{n!}{2!} \cdot y_n \Rightarrow \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Note que $y_2 = \dfrac{D_2}{a_2} = \dfrac{1}{1} = 1$. Segue que,

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + \frac{2\cdot(-1)^3}{(3)!},\\
y_4 &= y_3 + \frac{2\cdot(-1)^4}{(4)!},\\
y_5 &= y_4 + \frac{2\cdot(-1)^5}{(5)!},\\
&\vdots\\
y_n &= y_{n-1} + \frac{2\cdot(-1)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades e fazendo as simplificações adequadas tem–se

$$\begin{aligned}
y_n &= y_2 + 2\cdot\left[\frac{(-1)^3}{(3)!} + \frac{(-1)^4}{(4)!} + \frac{(-1)^5}{(5)!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]\\
&= 1 + 2\cdot\left[-\frac{1}{(3)!} + \frac{1}{(4)!} - \frac{1}{(5)!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
D_n &= a_n\cdot y_n\\
&= \frac{n!}{2}\cdot\left[1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)\right]\\
&= n!\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]\\
&= n!\cdot\left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]\\
&= n!\cdot\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]\\
&= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},
\end{aligned}$$

para todo natural $n \geqslant 0$.

Usaremos indução para verificar a validez da fórmula acima para todo $n \geqslant 1$.

Sabendo que $D_1 = 0$, pois não há possibilidade de ter uma permutação caótica com um único elemento e sabendo que $D_2 = 1$, pois a única permutação caótica com dois elementos é $(2, 1)$; tem–se:

i) a equação é válida para $n = 1$ e $n = 2$, já que

$$\begin{aligned} D_1 &= 1! \cdot \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) \\ &= 1! \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1}\right) \\ &= 1! \cdot (1 - 1) \\ &= 1! \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_2 &= 2! \cdot \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

ii) Tomando a equação válida para $n = k$ e $n = k + 1$, ou seja,

$$D_k = k! \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{e} \quad D_{k+1} = (k+1)! \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(-1)^n}{n!},$$

provaremos a validez para $n = k+2$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
D_{k+2} &= (k+1)(D_k + D_{k+1}) \\
&= (k+1)\cdot\left[k!\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + (k+1)!\sum_{n=0}^{k+1}\frac{(-1)^n}{n!}\right] \\
&= (k+1)\cdot k!\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + (k+1)(k+1)!\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + (k+1)(k+1)!\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= [(k+1)! + (k+1)(k+1)!]\cdot\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + (k+1)(-1)^{k+1} \\
&= [(k+1)!(k+2)]\cdot\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + [(k+2)-1]\cdot(-1)^{k+1} \\
&= (k+2)!\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + (k+2)\cdot(-1)^{k+1} + (-1)^{k+2} \\
&= (k+2)!\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(k+2)(k+1)!\cdot(-1)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(k+2)!}{(k+2)!}\cdot(-1)^{k+2} \\
&= (k+2)!\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(k+2)!\cdot(-1)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(k+2)!}{(k+2)!}\cdot(-1)^{k+2} \\
&= (k+2)!\cdot\left[\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+2)!}\right] \\
&= (k+2)!\cdot\sum_{n=0}^{k+2}\frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

o que verifica a equação.

A Universidade de São Paulo – USP, através da FUVEST em 2017 cobrou dos seus candidatos uma questão em que o emprego da permutação caótica seria essencial. Tal problema está citado a seguir.

Problema 2 (FUVEST – 2017)**.** *Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo secreto (ou amigo oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é:*

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{7}{24}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\dfrac{3}{8}$

e) $\dfrac{5}{12}$

Solução: Observe que existem $P_4 = 4! = 24$ permutações simples, das quais

$$\begin{aligned} D_4 &= 4! \cdot \left[\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!}\right] \\ &= 24 \cdot \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right] \\ &= 9. \end{aligned}$$

Logo a probabilidade será

$$P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Gabaritando a letra "D".

3.3 Sequência de Fibonacci

No livro de Líber Abacci, é apresentado no capítulo 12, o problema mais famoso, entre todos os tratados por Fibonacci:

"Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?"

A quantidade de casais no n-ésimo mês é dado por uma equação de recorrência e por uma regra matemática em função de n. É o que mostraremos a seguir.

3.3.1 Dedução da Equação de Recorrência

Sabendo que nos dois primeiros meses só haverá o casal original, tem-se que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. A partir daí, o casal original tem um novo casal por mês e cada casal de filhotes, ao amadurecer, após 2 meses, também terá um novo casal de filhotes por mês. Sendo assim, no n-ésimo mês, a quantidade de casais de coelhos, F_n, será a quantidade de casais que existiam no mês anterior, F_{n-1}, mais uma quantidade de novos casais. Essa quantidade será justamente a quantidade de casais que havia a dois meses atrás, F_{n-2}, pelo fato de que irão gerá um novo casal no n-ésimo mês. Além disso, os casais gerados no mês $n-1$ não procriam no n-ésimo mês. Portanto,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

3.3.2 Cálculo de Recorrência

Note que a recorrência acima poderá ser escrita como $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$, cuja a equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$, onde $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são as raízes. Logo, sua solução geral será,

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Como podemos definir $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, teremos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 & = & 0 \\ C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 0 \\ C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & = & 1 \end{array}\right.$$

Da primeira equação temos $C_1 = -C_2$. Substituindo na segunda equação obtemos:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot (-C_2) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot C_2 & = & 1 \\ C_2 \cdot \left[-(1-\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5}) \right] & = & 2 \\ C_2 \cdot 2\sqrt{5} & = & 2 \\ C_2 & = & \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{array}$$

Daí, $C_1 = -C_2$ implica $C_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} F_n & = & C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \end{array}$$

para todo $n \geqslant 2$.

Faremos a verificação da fórmula acima por indução em $n \geqslant 0$.

De fato, temos que:

i) Para $n = 0$ e $n = 1$, temos:

$$F_0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0.$$

Por outro lado, temos

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

ii) Supondo válida a fórmula para $n = k$ e $n = k+1$, ou seja,

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad F_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}},$$

provaremos então a fórmula para $n = k+2$. De fato, temos que:

$$\begin{aligned}
F_{k+2} &= F_{k+1} + F_k \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

A Escola de Administração Fazendária (ESAF), em 2010, propôs um problema sobre sequência na qual seus valores representam a sequência de Fibonacci. Tal questão está representado a seguir:

Problema 3 (Escola de Administração Fazendária ESAF – 2010)**.** *A partir da lei de formação da sequência* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...; *Calcule o valor mais próximo do quociente entre o 11º e o 10º termo.*

a) 1,732

b) 1,667

c) 1,618

d) 1,414

e) 1,5

Solução: A sequência em destaque nessa questão é a de Fibonacci, tal que a equação de recorrência é $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Portanto, tem-se que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ e $F_8 = 21$. Segue que $F_9 = F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34$, $F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55$ e $F_{11} = F_{10} + F_9 = 55 + 34 = 89$. Portanto, o valor mais próximo do quociente entre o 11º e o 10º termo, ou seja, $89 : 55 \approx 1,618$, logo letra "C".

Uma segunda solução seria,

$$\begin{aligned}
\frac{F_{11}}{F_{10}} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{11} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{11}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}\right]} \\
&= \frac{91136\sqrt{5}}{2 \cdot 28160\sqrt{5}} \\
&= \frac{91136}{56320} \\
&= 1,618
\end{aligned}$$

3.4 Uma sequência especial de Fibonacci

Uma consequência interessante da sequência de Fibonacci é a aplicação a seguir.

Problema 4 (ESPM – 2017)**.** *Foi proposto o seguinte desafio pela Escola Superior de Propaganda e Marketing - ESPM: Uma sequência de números naturais é obtida de modo que, se um número é par, o próximo será sua metade mas, se for ímpar, o próximo será uma unidade a mais que ele, até chegar no número 1. Por exemplo:* $J_{42} = (42, 21, 22, 11, 12, 6, 3, 4, 2, 1)$*.*
O número de termos dessa sequência é igual a 10.
Podemos afirmar que a quantidade de sequências assim definidas e com exatamente 7 termos é igual a:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

3.4.1 Resolução do problema

Começaremos a resolver esse problemas observando alguns exemplos de sequências com essa característica.
Para $n = 1$, existe apenas a sequência (1).
Para $n = 2$, existe apenas a sequência $(2,\ 1)$.
Para $n = 3$, existe apenas a sequência $(4,\ 2,\ 1)$.
Para $n = 4$, existem as sequências $(8,\ 4,\ 2,\ 1)$ e $(7,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1)$.
Para $n = 5$, existem as sequências $(16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1)$, $(6,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1)$ e $(7,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1)$.
Para $n = 6$, existem as sequências $(32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1)$, $(12,\ 6,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1)$, $(5,\ 6,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1)$, $(14,\ 7,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1)$ e $(15,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1)$. Entre outros.

Podemos observar que todas as sequências com $n - 1$ termos que começam com um número par, originarão duas novas sequências, com n termos, uma que começa com um número par e outra com um número ímpar. Já, todas as sequências com $n - 1$ termos que começam com um número ímpar, originarão uma única nova sequência de n termos que começa com um número par.

Portanto, a quantidade de sequências com n termos, J_n, é exatamente uma quantidade J_{n-1} de sequências com n termos, todos com o primeiro termos par, mais uma quantidade

J_{n-2} de sequências com n termos, todas com primeiro termo ímpar. Isso se justifica, porque as J_{n-1} sequências com $n-1$ termos, todas originará uma sequência de n termos com o primeiro par, e somente as sequências com $n-1$ termos, com o primeiro par originará uma sequência com n termos, todas com o primeiro número ímpar.

A quantidade de sequências, com n—1 termos, com o primeiro número par é justamente a quantidade de sequências que se originaram das J_{n-2} sequências anteriores, já que todos originarão J_{n-2} sequências de $n-1$ termos que iniciam com um número par.

Portanto, para todos $n \geqslant 4$, tem-se:

$$J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$$

Observe que $J_3 \neq J_2 + J_1$, logo a equação de recorrência so vale para $n \geqslant 4$. Sendo assim como a equação $J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$ é igual a equação $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, mudando apenas o conjunto domínio da função que determina essa sequência,já que $n \geqslant 4$. Então temos que $J_1 = J_2 = J_3 = 1$. Além disso, sua fórmula fechada é:

$$J_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}},$$

para todo $n \geqslant 2$.

Iremos fazer a verificação da propriedade acima por indução, para todo $n \geqslant 2$.

i) Iremos provar inicialmente para $n = 2$ e $n = 3$. De fato, notemos que:

$$J_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\cdot\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Por outro lado, temos,

$$J_3 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\cdot\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

ii) Supondo válida a fórmula para $n = k$ e $n = k+1$, ou seja,

$$J_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

e

$$J_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}{\sqrt{5}},$$

provaremos então a fórmula para $n = k+2$. De fato, temos que:

$$\begin{aligned}
J_{k+2} &= J_k + J_{k+1} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{[(k+2)-1]} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{[(k+2)-1]}}{\sqrt{5}},
\end{aligned}$$

o que verifica a equação.

Portanto, a quantidade de sequências com exatamente 7 termos é:

$$J_7 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{7-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{7-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{576+256\sqrt{5}}{64}\right) - \left(\frac{576-256\sqrt{5}}{64}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{512\sqrt{5}}{64}}{\sqrt{5}} = 8.$$

Portanto, o gabarito do problema mencionado anteriormente é "C".

3.5 Pizza de Steiner

O grande geômetra alemão Jacob Steiner (1796-1863) propôs e resolveu um belíssimo problema, do qual questiona qual o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos.

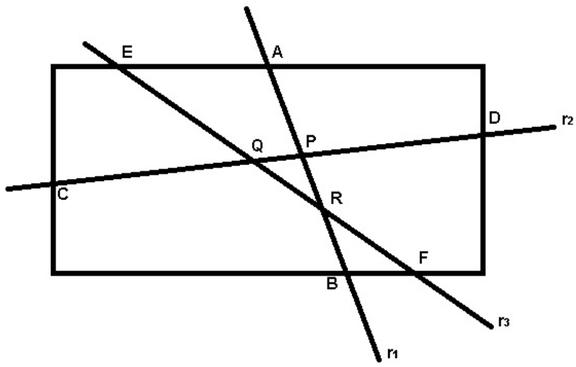
Uma maneira interessante foi pensar no plano como se fosse uma grande pizza, explicação para o nome do problema. Com algumas observações, Stainer adquiriu uma equação de recorrência que regesse o número de regiões ao passar a n-ésima reta, e posteriormente formalizou uma regra matemática em função de n para essa sequência recursiva. É isso que se observa a frente.

3.5.1 Dedução da Equação de Recorrência

Para que se tenha o número máximo de regiões ao se passar a n-ésima reta, é necessário que, a reta intersecte todas as $n-1$ retas já existentes, em pontos distintos. Isso se dar, pelo fato de que, traçando desta maneira, a corda determinada pela n-ésima reta terá n segmentos dois a dois adjacentes, que dividirá n regiões já existentes e fazendo aumentar n novas regiões. O que não ocorre se traçarmos a n-ésima reta por um ou mais pontos já existentes, isto é, a corda determinada pela n-ésima reta terá uma quantidade de pontos de intersecção menor que $n-1$ pontos, que por consequência terá uma quantidade menor de segmentos dois a dois adjacentes formados por esses pontos, obtendo, em seguida, uma quantidade de novas regiões menor que n.

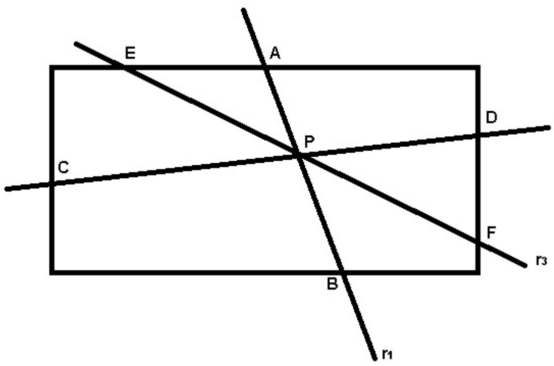
Logo, faz-se necessário traçar uma reta intersectando as retas já existentes em pontos distintos aos pontos já existentes.

Como exemplo, pode-se observar que ao traçar a terceira reta r_3, teremos na corda EF, determinada pela terceira reta, três segmentos dois a dois adjacentes, EQ, QR e RF; que divide três regiões já existentes em duas partes cada.



Fonte: De autoria

Observe que se tivéssemos traçado a terceira reta pelo ponto já existente, tal que $P = AB \cap CD$, teríamos dividido a corda EF em dois segmentos, que causaria a divisão apenas de duas regiões, o que não seria o máximo.



Fonte: De autoria

Portanto, ao se passar a n-ésima reta, sua corda terá n segmentos dois a dois adjacentes e sem ponto de intersecção em seus interiores, determinando n novas regiões no máximo.

Tomando R_{n-1} como o número máximo de regiões ao passar $n-1$ retas, e R_n a quantidade de regiões ao passar a n-ésima reta, então:

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

3.5.2 Cálculo de Recorrência

Trabalhando a equação de recorrência $R_n = R_{n-1} + n$, para $n \geqslant 1$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
R_2 &= R_{2-1} + 2, \\
R_3 &= R_{3-1} + 3, \\
R_4 &= R_{4-1} + 4, \\
&\vdots \\
R_n &= R_{n-1} + n,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
R_2 &= R_1 + 2, \\
R_3 &= R_2 + 3, \\
R_4 &= R_3 + 4, \\
&\vdots \\
R_n &= R_{n-1} + n.
\end{aligned}
$$

Adicionando e fazendo as simplificações adequadas tem-se que

$$R_n = R_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n.$$

Como $R_1 = 2$, pois ao passar uma reta num círculo, obtém-se duas novas regiões. Substituindo R_1 na expressão acima, tem-se:

$$
\begin{aligned}
R_n &= R_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \\
&= 2 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \\
&= 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) \\
&= 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2 + n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + 2}{2},
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

Iremos fazer a verificação da fórmula por indução.

De fato, tem-se que para $n = 1$, o número de regiões será

$$R_1 = \frac{1^2 + 1 + 2}{2} = \frac{1 + 1 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

O que mostra válido para $n = 1$. Supondo válido para $n = k$, ou seja $R_k = \dfrac{k^2 + k + 2}{2}$, provaremos para $n = k + 1$. Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= R_k + (k+1) \\ &= \frac{k^2 + k + 2}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k^2 + k + 2 + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{(k^2 + 2k + 1) + (k+1) + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}. \end{aligned}$$

O que verifica a fórmula matemática para todo natural.

Em 1971, o Instituto tecnológico de Aeronáutica (ITA), em seu teste seletivo, cobrou de seus candidatos um problema sobre a Pizza de Steiner. Tal problema está citado a seguir.

Problema 5 (ITA – 71). *Qual o maior número de partes que um plano pode ser dividido por n linhas retas?*

a) n^2

b) $n(n+1)$

c) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

d) $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$

Solução: A resposta da questão acima é $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$, pelo o que já foi discutido. Portanto, letra "D".

3.6 O Queijo de Steiner

Uma consequência bem interessante ao problema anterior é O queijo de Steiner. Nesse problema, há um raciocínio semelhante a pizza de Steiner, onde Jacob questionou qual o número máximo de regiões espaciais que se pode obter ao passar o n-ésimo plano no espaço. Para isso, o mesmo imaginou o espaço como sendo um enorme queijo, e ao estudar as possibilidades adquiriu uma equação de recorrência e uma fórmula em função de n para o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por n planos. E é justamente isso que veremos a seguir.

3.6.1 Dedução da Equação de Recorrência

Ao traçar, no espaço, o n-ésimo plano, os $n-1$ planos distintos já existentes determinam no n-ésimo plano, $n-1$ retas de intersecção distintas, logo, esse plano será dividido em no máximo R_{n-1} regiões planas, segundo a Pizza de Steiner. Cada uma dessas regiões planas divide em duas, uma região espacial existente anteriormente, gerando R_{n-1} novas regiões espaciais. Portanto, o número máximo de regiões no espaço ao passar o n-ésimo plano no espaço poderá ser calculado por $Q_n = Q_{n-1} + R_{n-1}$, para todo $n \geqslant 1$, onde Q_{n-1} é a quantidade máxima de regiões espaciais ao passar $n-1$ planos no espaço e $R_{n-1} = \dfrac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2}$.

3.6.2 Cálculo de Recorrência

Afim de adquirir a fórmula matemática que rege essa sequência faremos:

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= Q_{2-1} + R_{2-1}, \\
Q_3 &= Q_{3-1} + R_{3-1}, \\
Q_4 &= Q_{4-1} + R_{4-1}, \\
&\vdots \\
Q_n &= Q_{n-1} + R_{n-1},
\end{aligned}
$$

segue que

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 + R_1, \\ Q_3 &= Q_2 + R_2, \\ Q_4 &= Q_3 + R_3, \\ &\vdots \\ Q_n &= Q_{n-1} + R_{n-1}. \end{aligned}$$

Adicionando e fazendo as simplificações adequadas temos:

$$Q_n = Q_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \ldots + R_{n-1},$$

onde $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 7$, $R_4 = 11$, e assim por diante; ou seja $(2,\ 4,\ 7,\ 11, \ldots)$ é uma progressão aritmética de 2ª ordem.

Para resolver essa P.A, usaremos o fato de que a soma dos termos de uma P.A de 2ª ordem gera um polinômio de grau 3. Logo, $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$, além disso, $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 7$ e $S_4 = 11$.

Daí, podemos montar o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{aligned} a + b + c + d &= 2 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 6 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 13 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 24 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 7a + 3b + c &= 4 \\ 19a + 5b + c &= 7 \\ 37a + 7b + c &= 11 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 12a + 2b &= 3 \\ 18a + 2b &= 4 \end{aligned}\right.$$

resolvendo esse último sistema temos,

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Logo,

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d = \frac{n^n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} + 0 = \frac{n^3 + 3n^2 + 8n}{6}.$$

Sabendo que $Q_1 = 2$, já que se passarmos um plano no espaço dividiremos o espaço em duas regiões espaciais. Portanto, voltando para ideia inicial, temos:

$$\begin{aligned}
Q_n &= Q_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \ldots + R_{n-1} \\
&= 2 + (2 + 4 + 7 + 11 + \ldots + R_{n-1}) \\
&= 2 + \frac{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 8(n-1)}{6} \\
&= \frac{12 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 3n^2 - 6n + 3 + 8n - 8}{6} \\
&= \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.
\end{aligned}$$

Iremos fazer a verificação da fórmula acima por indução para todo $n \geqslant 1$.

Para $n = 1$, temos que

$$Q_1 = \frac{1^3 + 5 \cdot 1 + 6}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Logo, a fórmula matemática é válida para $n = 1$.

Tomemos válido para $n = k$, ou seja, $Q_k = \dfrac{k^3 + 5k + 6}{6}$; provemos a fórmula para $n = k + 1$. De fato, tem-se que:

$$\begin{aligned}
Q_{k+1} &= Q_k + R_k \\
&= \frac{k^3 + 5k + 6}{6} + \frac{k^2 + k + 2}{2} \\
&= \frac{k^3 + 5k + 6 + 3k^2 + 3k + 6}{6} \\
&= \frac{(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (5k + 5) + 6}{6} \\
&= \frac{(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 5(k + 1) + 6}{6} \\
&= \frac{(k + 1)^3 + 5(k + 1) + 6}{6}.
\end{aligned}$$

O que verifica a propriedade para todo natural $n \geqslant 1$.

3.7 Problema de sequências de n termos, pertencentes a (1, 2, 3), que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero

O problema consiste em analisar a quantidade de sequências de n termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$; que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero.

Inicialmente, iremos colocar alguns exemplos para clarear a ideia do problema. Para isso, chamaremos de x_n a quantidade de sequências de n termos pertencentes a $(0, 1, 2)$; que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero:

1. Para $n = 1$, ou seja, as sequências com apenas um termo pertencente a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, temos que $x_1 = 3$, pois existem três sequências que são $(0),\ (1),\ (2)$.

2. Para $n = 2$, ou seja, as sequências com dois termos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, temos que $x_2 = 8$, pois existem oito sequências que são $(0, 1),\ (0, 2),\ (1, 1),\ (1, 2)(1, 0),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (2, 0)$.

Note que a sequência formada por esses resultados, $(3,\ 8, \ldots)$ é uma sequência recursiva. Portanto, determinaremos sua equação de recorrência e sua fórmula matemática para o n-ésimo termo, e provaremos sua validez por indução.

3.7.1 Dedução da Equação de Recorrência

Para deduzir a equação de recorrência, tomaremos x_n como sendo a quantidade de sequências de n termos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero. Logo, para determinar a quantidade de sequências com $n+2$ termos, todos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$; que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, devemos analisar de três modos:

- Se o primeiro termo for o número 1, então existirá x_{n+1} sequências com $n + 2$ termos, todos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, pois se o primeiro termo é o número 1, basta determinar os termos a partir do primeiro, o que pode ser feito de x_{n+1} modos diferentes, isto é, se o primeiro termo é o 1, então haverá apenas uma possibilidade para o primeiro termo, já para os $n + 1$ termos seguintes haverá x_{n+1} modos de agrupar os termos, todos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $1 \cdot x_{n+1} = x_{n+1}$ sequências com $n+2$ termos, todos com pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, que começam com o 1.

- Analogamente, se o primeiro termo for o número 2, então existirá x_{n+1} sequências com $n + 2$ termos, todos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, que começam com o 2.

- Já, se o primeiro termo é o número zero, é necessário que o segundo termo ou seja 1 ou seja 2, já que não poderá haver dois zeros consecutivos. Os outros n termos, todos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, poderão se agrupar de x_n modos distintos de tal forma que não possuam dois termos consecutivos iguais a zero. Sendo assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, como há apenas uma possibilidade para o primeiro termo, que é o 0, dois para o segundo termo, ou o 1 ou o 2, e os demais n termos poderá se agrupar de x_n modos distintos, então tem-se $1 \cdot 2 \cdot x_n = 2 \cdot x_n$ sequências de $n + 2$ termos, todos pertencentes a $(0,\ 1,\ 2)$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, que começam com o 0.

Sendo assim, a quantidade de sequências de $n+2$ termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$ que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, será

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_{n+1} + 2 \cdot x_n \Longrightarrow x_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 2 \cdot x_n.$$

3.7.2 Cálculo de Recorrência

Para resolver essa equação de recorrência, que é de 2ª ordem, usaremos a equação característica relacionada a equação de recorrência $x_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 2 \cdot x_n$, que no caso é $r^2 = 2r + 2$, que é equivalente a $r^2 - 2r - 2 = 0$, e tem como raízes $r_1 = 1 - \sqrt{3}$ e $r_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Portanto, existirão duas constantes C_1 e C_2, tais que,

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \cdot (r_1)^n + C_2 \cdot (r_2)^n \\ &= C_1 \cdot (1 - \sqrt{3})^n + C_2 \cdot (1 + \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

Para finalizarmos a resolução dessa fórmula matemática tomaremos $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, já definidos anteriormente. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{cases} C_1 \cdot (1 - \sqrt{3})^1 + C_2 \cdot (1 + \sqrt{3})^1 = 3 \\ C_1 \cdot (1 - \sqrt{3})^2 + C_2 \cdot (1 + \sqrt{3})^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \cdot (1 - \sqrt{3}) + C_2 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 3 \\ C_1 \cdot (4 - 2 \cdot \sqrt{3}) + C_2 \cdot (4 + 2 \cdot \sqrt{3}) = 8 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por $4+2\cdot\sqrt{3}$ e a segunda equação por $-(1+\sqrt{3})$, tem-se:

$$\begin{cases} C_1\cdot(1-\sqrt{3})(4+2\cdot\sqrt{3})+C_2\cdot(1+\sqrt{3})(4+2\cdot\sqrt{3})=3\cdot(4+2\cdot\sqrt{3}) \\ -C_1\cdot(4-2\cdot\sqrt{3})(1+\sqrt{3})-C_2\cdot(4+2\cdot\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=-8\cdot(1+\sqrt{3}) \end{cases}$$

o que implica em,

$$\begin{aligned} C_1\cdot\Big[(-2-2\cdot\sqrt{3})-(-2+2\cdot\sqrt{3})\Big] &= 4-2\cdot\sqrt{3} \\ C_1\cdot(-4\cdot\sqrt{3}) &= 4-2\cdot\sqrt{3} \\ C_1 &= \frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{(-4\cdot\sqrt{3})} \\ C_1 &= \frac{3-2\cdot\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Substituindo $C_1=\dfrac{3-2\cdot\sqrt{3}}{6}$ em uma das equações do sistema, temos

$$C_2=\frac{3+2\cdot\sqrt{3}}{6}.$$

Portanto, temos que:

$$sex_n=C_1\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^n+C_2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^n$$

então,

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{3-2\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^n+\left(\frac{3+2\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^n \\ &= \frac{(3-2\cdot\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})^n+(3+2\cdot\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})^n}{6}. \end{aligned}$$

A validade da expressão pode ser verificada por indução em $n\geqslant 1$.

Inicialmente mostraremos que a fórmula matemática é válida para $n=1$ e $n=2$. De fato, temos que,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(3-2\cdot\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})^1+(3+2\cdot\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})^1}{6} \\ &= \frac{(3-2\cdot\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})+(3+2\cdot\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}{6} \\ &= \frac{3-3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}+6+3+3\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}+6}{6} \\ &= \frac{18}{6} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{(3-2\cdot\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})^2+(3+2\cdot\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})^2}{6} \\ &= \frac{(3-2\cdot\sqrt{3})\cdot(4-2\cdot\sqrt{3})+(3+2\cdot\sqrt{3})\cdot(4+2\cdot\sqrt{3})}{6} \\ &= \frac{12-6\cdot\sqrt{3}-8\cdot\sqrt{3}+12+12+6\cdot\sqrt{3}+8\cdot\sqrt{3}+12}{6} \\ &= \frac{48}{6} \\ &= 8. \end{aligned}$$

Em ambas as aplicações, a fórmula é satisfeita. Supondo a fórmula válida para $n = k$ e $n = k+1$, ou seja,

$$x_k = \frac{(3-2\cdot\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})^k+(3+2\cdot\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})^k}{6}$$

e

$$x_{k+1} = \frac{(3-2\cdot\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})^{k+1}+(3+2\cdot\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})^{k+1}}{6},$$

provaremos a validez da fórmula para $n = k + 2$. De fato, temos que,

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= 2 \cdot x_{k+1} + 2 \cdot x_k \\
&= \frac{2 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})^k [1 + (1 - \sqrt{3})] + 2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})^k \cdot [1 + (1 + \sqrt{3})]}{6} \\
&= \frac{(3 - 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})^k (4 - 2 \cdot \sqrt{3}) + (3 + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})^k \cdot (4 + 2 \cdot \sqrt{3})}{6} \\
&= \frac{(3 - 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})^k \cdot (1 - \sqrt{3})^2 + (3 + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})^k \cdot (1 - \sqrt{3})^2}{6} \\
&= \frac{(3 - 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})^{k+2} + (3 + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})^{k+2}}{6}.
\end{aligned}$$

O que valida a fórmula matemática acima.

No livro *A Matemática do Ensino Médio – Volume 2* de Lima, Wagner, Morgado e Carvalho, consta um problema baseado nas ideias ditas anteriormente. Tal problema está citado a seguir.

Exemplo 16. *Quantas são as sequências de* 10 *termos, pertencentes a* $(0, 1, 2)$*, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero?*

Solução: Usando a equação de recorrência

$$x_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 2 \cdot x_n,$$

e os valores $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, temos:

$$\begin{cases}
x_3 = 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 22, \\
x_4 = 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 8 = 60, \\
x_5 = 2 \cdot x_4 + 2 \cdot x_3 = 2 \cdot 60 + 2 \cdot 22 = 164, \\
x_6 = 2 \cdot x_5 + 2 \cdot x_4 = 2 \cdot 164 + 2 \cdot 60 = 448, \\
x_7 = 2 \cdot x_6 + 2 \cdot x_5 = 2 \cdot 448 + 2 \cdot 164 = 1224, \\
x_8 = 2 \cdot x_7 + 2 \cdot x_6 = 2 \cdot 1224 + 2 \cdot 448 = 3344, \\
x_9 = 2 \cdot x_8 + 2 \cdot x_7 = 2 \cdot 3344 + 2 \cdot 1224 = 9136, \\
x_{10} = 2 \cdot x_9 + 2 \cdot x_8 = 2 \cdot 9136 + 2 \cdot 3344 = 24960.
\end{cases}$$

Portanto, são 24960 sequências.

Já usando a fórmula matemática para o n-ésimo termo, temos:

$$x_{10} = \frac{(3 - 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})^{10} + (3 + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})^{10}}{6} = \frac{149760}{6} = 24960.$$

Portanto, são 24960 sequências.

3.8 Problema de sequências de n termos, pertencentes a (1, 2, 3), com um número ímpar de termos iguais a zero

Um problema semelhante ao problema anterior. Esse problema consiste em analisar a quantidade de sequências de n termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero.

Inicialmente, iremos colocar alguns exemplos para clarear a ideia do problema. Para isso, chamaremos de x_n a quantidade de sequências de n termos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero:

1. Para $n = 1$, ou seja, as sequências com apenas um termo pertencente a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, temos que $x_1 = 1$, pois só há apenas uma sequência que é (0).

2. Para $n = 2$, ou seja, as sequências com dois termos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, temos que $x_2 = 4$, pois existem quatro sequências que são $(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)$

3. Para $n = 3$, ou seja, as sequências com três termos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, temos que $x_3 = 13$, pois existem treze sequências que são $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(2, 0, 1)$, $(2, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(0, 0, 0)$.

Note que a sequência formada por esses resultados, $(1,\ 4,\ 13, \ldots)$ é uma sequência recursiva. Portanto, determinaremos sua equação de recorrência e sua fórmula matemática para o n-ésimo termo, e provaremos sua validez por indução.

3.8.1 Dedução da Equação de Recorrência

Para deduzir a equação de recorrência, tomaremos x_n como sendo a quantidade de sequências de n termos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero. Logo, para determinar a quantidade de sequências com $n+1$ termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, devemos analisar de três modos:

- Se o primeiro termo for o número 1, então existirá x_n sequências com $n+1$ termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, pois se o primeiro termo é o número 1, basta determinar os termos a partir do primeiro, o que pode ser feito de x_n modos diferentes, isto é, se o primeiro termo é o 1, então haverá apenas uma possibilidade para o primeiro termo, já para os n termos seguintes haverá x_n modos de agrupar os termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $1 \cdot x_n = x_n$ sequências com $n+1$ termos, todos com pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, que começam com o 1.

- Analogamente, se o primeiro termo for o número 2, então existirá x_n sequências com $n+1$ termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, que começam com o 2.

- Já, se o primeiro termo é o número zero, é necessário que os outros n termos sejam sequências com termos todos pertencentes a $(0, 1, 2)$ mas com uma quantidade par de zeros, e isso se dá de $3^n - x_n$ modos distintos, pois, pelo o Princípio Fundamental da Contagem, como são n termos e há três possibilidades para cada termo, ou seja, ou o 0, ou o 1, ou o 2, tem-se ao todo 3^n sequências distintas com todos os termos pertencentes a $(0, 1, 2)$. Mas para ficar apenas as sequências de n termos, que tenham uma quantidade par de termos, tem-se que se retirar das 3^n sequências as x_n sequências com termos todos pertencentes a $(0, 1, 2)$ mas com uma quantidade ímpar de zeros, com n termos, totalizando $3^n - x_n$ sequências com n termos, todos pertencentes a $(0, 1, 2)$ mas com uma quantidade par de zeros . Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $1 \cdot (3^n - x_n) = 3^n - x_n$ sequências com $n+1$ termos, todos com pertencentes a $(0, 1, 2)$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero, que começam com o 0.

Sendo assim, a quantidade de sequências de $n+1$ termos, todos pertencentes a $(0,1,2)$ mas com uma quantidade ímpar de zeros, será

$$x_{n+1} = x_n + x_n + (3^n - x_n),$$

ou seja,

$$x_{n+1} = x_n + 3^n.$$

3.8.2 Cálculo de Recorrência

Para resolver essa equação de recorrência, usaremos a adição membro a membro, e faremos as simplificações cabíveis:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 3^1, \\ x_3 &= x_2 + 3^2, \\ x_4 &= x_3 + 3^3, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Após as simplificações, temos:

$$x_n = x_1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1}.$$

mas como $x_1 = 1$, temos que

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} \\ &= 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} \\ &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} \\ &= \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

Iremos fazer a verificação da propriedade acima por indução para todo $n \geqslant 1$.

Inicialmente mostrar que a fórmula matemática é válida para $n = 1$. De fato, temos que,

$$x_1 = \frac{3^1 - 1}{2} = 1.$$

Supondo a fórmula válida para $n = k$, ou seja,

$$x_k = \frac{3^k - 1}{2},$$

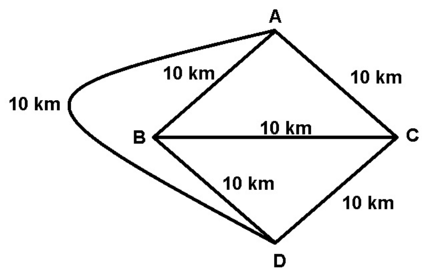
provaremos a veracidade da fórmula para $n = k + 1$. De fato, temos que,

$$x_{k+1} = x_k + 3^k = \frac{3^k - 1}{2} + 3^k = \frac{3^k - 1 + 2 \cdot 3^k}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

O que verifica a fórmula matemática que queríamos.

O Instituto Militar de Engenharia (IME), em seu concurso de admissão no ano de 2001/2002, propôs aos seus candidatos um problema no qual os conceitos de recorrência são fundamentais. Tal problema está citado no que segue.

Problema 6 (IME– 2001/2002)**.** *Quatro cidades A, B, C e D são conectadas por estradas conforme a figura abaixo:*



Fonte: De autoria

Quantos percursos diferentes começam e terminam da cidade A, e possuem:

a) exatamente 50 *km?*

b) $10 \cdot n$ *km?*

Definiremos inicialmente x_n como sendo a quantidade de percursos diferentes que começam e terminam em A com $10 \cdot n$ km percorridos. Definiremos b_n como sendo a quantidade de percursos diferentes que começam em A e terminam em B com $10 \cdot n$ km percorridos.

Analogamente, definiremos c_n e d_n como sendo as quantidades de percursos diferentes que começam em A e terminam, respectivamente em C e D, com $10 \cdot n$ km percorridos.

- Observe que se $n = 1$, o percurso será de 10 km. Logo haverá uma única maneira de sair da cidade A até a cidade B. Analogamente, Haverá uma única maneira de sair de A e chegar em C, uma única maneira de sair de A e chegar em D; ou seja, $b_1 = c_1 = d_1 = 1$.

- Observe que se $n = 2$, o percurso será de 20 km. Logo haverão duas maneiras de sair da cidade A até a cidade B: [(A,C,B);(A,D,B)]. Analogamente, Haverão duas maneiras de sair de A e chegar em C: [(A,B,C); (A,D,C)], e duas maneiras de sair de A e chegar em D: [(A,,B,D);(A,C,D)].

  Ou seja, $b_2 = c_2 = d_2 = 2$.

- Observe que se $n = 3$, o percurso será de 30 km. Logo haverão seis maneiras de sair da cidade A até a cidade B:

$$[(A, B, C, B); (A, B, D, B); (A, C, D, B); (A, D, C, B); (A, C, A, B); (A, D, A, B)]$$

  Analogamente, haverão seis maneiras de sair de A e chegar em C:

$$[(A, C, B, C); (A, C, D, C); (A, B, D, C); (A, D, B, C); (A, B, A, C); (A, D, A, C)]$$

  e seis maneiras de sair de A e chegar em D:

$$[(A, D, C, D); (A, D, B, D); (A, C, B, D); (A, B, C, D); (A, C, A, D); (A, B, A, D)]$$

  ou seja, $b_3 = c_3 = d_3 = 6$.

Portanto, pela simetria do problema, tem-se que após $10 \cdot n$ km percorridos,

$$b_n = c_n = d_n,$$

para todo n natural.

Definiremos agora x_{n+1} como sendo a quantidade de percursos diferentes que começam e terminam em A com $10 \cdot (n+1)$ km percorridos. Ou seja,a quantidade de percursos que antes do último trecho, antes de voltar para A, depois de percorrer $10 \cdot n$ km, o percurso estava ou em B, ou em C, ou em D, e de lá, seguiu para A, com mais 10 km, totalizando $10 \cdot n + 10 = 10 \cdot (n+1)$ km.

Sendo assim, a quantidade total de percursos diferentes de $10 \cdot (n+1)$ km percorridos que começam e terminam em A é

$$x_{n+1} = b_n + c_n + d_n = b_n + b_n + b_n = 3 \cdot b_n.$$

Por outro lado, um percurso que termina em B, depois de percorrer $10 \cdot n$ km, necessariamente estava ou em A, ou em C, ou em D. Antes do último trecho, até B, haviam x_{n-1} percursos diferentes de $10 \cdot (n-1)$ km percorridos que começam e terminam em A, c_{n-1} percursos diferentes de $10 \cdot (n-1)$ km percorridos que começam em A e terminam em C, d_{n-1} percursos diferentes de $10 \cdot (n-1)$ km percorridos que começam em A e terminam em D. Portanto, o número de percursos diferentes que começam em A e terminam em B depois de $10 \cdot n$ km é

$$b_n = x_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} = x_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-1} = x_{n-1} + 2 \cdot b_{n-1}.$$

Seguindo, e usando os últimos dois resultados temos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3 \cdot b_n = 3 \cdot (x_{n-1} + 2 \cdot b_{n-1}) \\ &= 3 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot (3 \cdot b_{n-1}) \\ &= 3 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot x_n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$x_{n+1} - 2 \cdot x_n - 3 \cdot x_{n-1} = 0,$$

uma recorrência de segunda ordem.

Para resolver essa equação de recorrência,que é de 2ª ordem, usaremos a equação característica relacionada a equação de recorrência $x_{n+1} - 2 \cdot x_n - 3 \cdot x_{n-1} = 0$, que no caso é $r^2 - 2r - 3$, e tem como raízes $r_1 = -1$ e $r_2 = 3$.

Portanto, existirão duas constantes C_1 e C_2, tais que,

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \cdot (r_1)^n + C_2 \cdot (r_2)^n \\ &= C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Para finalizarmos a resolução dessa fórmula matemática tomaremos $x_1 = 0$, pois não existe nenhum percurso que comece e termine em A com 10 km percorridos e $x_2 = 3$, pois existem três percursos diferentes que começam e terminam em A com 20 km percorridos: [(A,B,A);(A,C,A);(A,D,A)]. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{cases} C_1 \cdot (-1)^1 + C_2 \cdot 3^1 = 0 \\ C_1 \cdot (-1)^2 + C_2 \cdot 3^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 + 3 \cdot C_2 = 0 \\ C_1 + 9 \cdot C_2 = 3 \end{cases},$$

isso implica em $C_2 = \frac{1}{4}$ e $C_1 = \frac{3}{4}$. Portanto, tem-se que, para um percurso de $10 \cdot n$ km, começando e terminando em A, serão

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n \\ &= \frac{3}{4} \cdot (-1)^n + \frac{1}{4} \cdot 3^n \\ &= \frac{3^n + 3 \cdot (-1)^n}{4} \end{aligned}$$

para todo n natural.

Iremos fazer a verificação desse resultado através do processo de indução finita em $n \geqslant 1$.

Nossa verificação inicia-se tomando $n = 1$ e $n = 2$.

Para $n = 1$, teremos:

$$x_1 = \frac{3^1 + 3 \cdot (-1)^1}{4} = \frac{3 + 3 \cdot (-1)}{4} = 0.$$

Para $n = 2$, teremos:

$$x_2 = \frac{3^2 + 3 \cdot (-1)^2}{4} = \frac{9 + 3 \cdot 1}{4} = 3.$$

Resultados que satisfazem a propriedade, já que havíamos mencionado anteriormente que se $n = 1$, o percurso terá 10 km, e não haverá nenhum caminho que comece e termine em A, logo $x_1 = 0$. Também havíamos mencionado que se $n = 2$, o percurso terá 20 km, então existem três caminhos que comecem e terminem em A, logo $x_2 = 3$.

Supondo agora que a fórmula seja válida para $n = k$ e $n = k + 1$, isto é,

$$x_k = \frac{3^k + 3 \cdot (-1)^k}{4}$$

e

$$x_{k+1} = \frac{3^{k+1} + 3 \cdot (-1)^{k+1}}{4}$$

.

Provemos para $n = k + 2$.

De fato, temos pelo fato de $x_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 3 \cdot x_n$, que

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= 2 \cdot x_{k+1} + 3 \cdot x_k \\
&= 2 \cdot \left[\frac{3^{k+1} + 3 \cdot (-1)^{k+1}}{4}\right] + 3 \cdot \left[\frac{3^k + 3 \cdot (-1)^k}{4}\right] \\
&= \frac{2 \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3 \cdot (-1)^{k+1} + 3 \cdot 3^k + 3 \cdot 3 \cdot (-1)^k}{4} \\
&= \frac{2 \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3 \cdot (-1)^{k+1} + 3^{k+1} + 3 \cdot 3 \cdot (-1)^k}{4} \\
&= \frac{(2+1) \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3 \cdot (-1)^k \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot (-1)^k}{4} \\
&= \frac{3 \cdot 3^{k+1} + (-2) \cdot 3 \cdot (-1)^k + 3 \cdot 3 \cdot (-1)^k}{4} \\
&= \frac{3^{k+2} + [(-2) + 3] \cdot 3 \cdot (-1)^k}{4} \\
&= \frac{3^{k+2} + 1 \cdot 3 \cdot (-1)^k}{4} \\
&= \frac{3^{k+2} + 3 \cdot (-1)^{k+2}}{4}.
\end{aligned}$$

O que verifica a equação.

Portanto, a quantidade de caminhos diferentes que começam e terminam em A, com $10 \cdot n$ km percorridos é

$$x_n = \frac{3^n + 3 \cdot (-1)^n}{4}.$$

O que responde o item b.

Para responder o item a, basta tomar $n = 5$, já que $10 \cdot n = 10 \cdot 5 = 50$ km, como sugere a questão. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
x_5 &= \frac{3^5 + 3 \cdot (-1)^5}{4} \\
&= \frac{243 + 3 \cdot (-1)}{4} \\
&= 60.
\end{aligned}$$

Portanto, existem 60 cominhos diferentes que começam e terminam em A com 50 km de percurso.

O livro Majorando IME desde 1992, de Cohem e Villard, apresenta dois problemas similares sobre sequência recursiva e determinante de uma matriz. O primeiro problema está citado a seguir.

Problema 7 (IME). *Calcule o determinante da matriz de ordem* n *abaixo, em função de* b*, onde* b *é um número real tal que* $b^2 \neq 1$.

$$\begin{bmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{bmatrix}.$$

Para iniciarmos essa resolução, usaremos o Teorema de Laplace, que é um método para calcular o determinante de uma matriz de ordem n. O método foi desenvolvido pelo matemático e físico Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827).

O Teorema consiste em selecionar uma fila (linha ou coluna) da matriz, em seguida somar os produtos dos números da fila selecionada com seus respectivos cofatores.

Um cofator de uma matriz de ordem $n \geqslant 2$ é definido como

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij},$$

onde i e j são, respectivamente, a linha e a coluna onde se encontra o elemento a_{ij} da linha selecionada. Além disso, tem-se que D_{ij} é o determinante da matriz de ordem $n-1$, obtida da matriz original, porém omitindo-se a linha e a coluna às quais pertence o elemento a_{ij}.

Sendo assim, tomaremos D_n como sendo o determinante da matriz de ordem n dada acima. Eliminando a primeira linha e a primeira coluna, obteremos uma matriz semelhante a original, só que desta vez com $n-1$ linha e $n-1$ colunas, logo será uma matriz de ordem $n-1$, e chamaremos de D_{n-1} o determinante dessa matriz. Analogamente,

D_{n-2} será o determinante da matriz de ordem $n-2$ obtida da matriz original só que retiradas as duas primeiras linhas e as duas primeiras colunas.

Para calcular o determinante D_n, da matriz de ordem n dada, usaremos o teorema de Laplace na primeira coluna. Logo,

$$D_n = (b^2+1)\cdot A_{11} + b\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + ... + 0\cdot A_{n1} = (b^2+1)\cdot A_{11} + b\cdot A_{21},$$

onde,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot D_{n-1} = (-1)^2\cdot D_{n-1} = D_{n-1}$$

e

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot D_{21} = (-1)^3\cdot D_{21} = -D_{21}.$$

Note que D_{21} é o determinante da matriz de ordem $n-1$ obtida da matriz original dada, que não possui nem a segunda linha nem a primeira coluna da matriz original, ou seja,

$$\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & b & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b^2+1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b & b^2+1 \end{bmatrix}$$

Logo, para encontrar o determinante dessa matriz aplicaremos novamente o Teorema de Laplace, só que agora na primeira linha. Portanto,

$$D_{21} = b\cdot A'_{11} + 0\cdot A'_{21} + 0\cdot A'_{31} + \ldots + 0\cdot A'_{(n-1)1},$$

onde,

$$A'_{11} = (-1)^{1+1}\cdot D_{n-2} = (-1)^2\cdot D_{n-2} = D_{n-2}.$$

Logo,

$$D_{21} = b\cdot D_{n-2}.$$

Portanto, voltando para o cálculo do determinante da matriz original temos,

$$\begin{aligned}
D_n &= (b^2+1)\cdot A_{11} + b\cdot A_{21} \\
&= (b^2+1)\cdot D_{n-1} + b\cdot(-D_{21}) \\
&= (b^2+1)\cdot D_{n-1} - b\cdot(D_{21}) \\
&= (b^2+1)\cdot D_{n-1} - b\cdot(b\cdot D_{n-2}) \\
&= (b^2+1)\cdot D_{n-1} - b^2\cdot D_{n-2},
\end{aligned}$$

que é uma equação de recorrência de 2ª ordem.

Como $D_n = (b^2+1)\cdot D_{n-1} - b^2\cdot D_{n-2}$ é uma equação de recorrência de 2ª ordem, temos que $r^2 = (b^2+1)\cdot r - b^2$, ou seja $r^2 - (b^2+1)\cdot r + b^2 = 0$ será sua equação característica, e usando a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau temos que, se o valor do coeficiente $a = 1$, e se a soma é b^2+1 e o produto é b^2; então as raízes dessa equação serão $r_1 = b^2$ e $r_2 = 1$.

Logo, existirão duas constantes C_1 e C_2, tais que

$$D_n = C_1\cdot(r_1)^n + C_2\cdot(r_2)^n = C_1\cdot(b^2)^n + C_2\cdot 1^n = C_1\cdot b^{2n} + C_2.$$

Notemos que se a matriz é de ordem 1, ou seja $n = 1$, temos que $D_1 = b^2+1$, ja que a matriz terá como elemento apenas o número b^2+1. Por outro lado, se $n = 2$, isto é , se a matriz for de ordem 2,

$$\begin{bmatrix} b^2+1 & b \\ b & b^2+1 \end{bmatrix},$$

então $D_2 = (b^2+1)^2 - b^2 = b^4 + b^2 + 1$. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{cases} C_1\cdot b^{2\cdot 1} + C_2 = b^2+1 \\ C_1\cdot b^{2\cdot 2} + C_2 = b^4+b^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\cdot b^2 + C_2 = b^2+1 \\ C_1\cdot b^4 + C_2 = b^4+b^2+1 \end{cases},$$

multiplicando a primeira equação por -1 e adicionando membro a membro com a segunda temos:

$$\begin{cases} -C_1\cdot b^2 - C_2 = -b^2-1 \\ C_1\cdot b^4 + C_2 = b^4+b^2+1 \end{cases}.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} C_1 \cdot (b^4 - b^2) &= b^4 \\ C_1 &= \frac{b^4}{b^4 - b^2} \\ C_1 &= \frac{b^2}{b^2 - 1}. \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em $C_1 \cdot b^2 + C_2 = b^2 + 1$, tem-se:

$$\left(\frac{b^2}{b^2 - 1}\right) \cdot b^2 + C_2 = b^2 + 1.$$

Logo,

$$C_2 = b^2 + 1 - \frac{b^4}{b^2 - 1} = \frac{(b^2 + 1)(b^2 - 1) - b^4}{b^2 - 1} = \frac{b^4 - 1 - b^4}{b^2 - 1} = -\frac{1}{b^2 - 1},$$

dessa forma,

$$C_1 = \frac{b^2}{b^2 - 1} \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{1}{b^2 - 1}.$$

Como $D_n = C_1 \cdot b^{2n} + C_2$, temos que:

$$\begin{aligned} D_n &= \left(\frac{b^2}{b^2 - 1}\right) \cdot b^{2n} + \left(-\frac{1}{b^2 - 1}\right) \\ &= \frac{b^{2\cdot(n+1)} - 1}{b^2 - 1}. \end{aligned}$$

Portanto, o determinante da matriz de ordem n será:

$$D_n = \frac{b^{2\cdot(n+1)} - 1}{b^2 - 1}.$$

Verificaremos a validade desse resultado através da indução para todo natural $n \geqslant 1$.

Provaremos inicialmente que ela é válida para $n = 1$ e $n = 2$.

De fato, temos que se $n = 1$, então:

$$D_1 = \frac{b^{2\cdot(1+1)} - 1}{b^2 - 1} = \frac{b^{2\cdot 2} - 1}{b^2 - 1} = \frac{b^4 - 1}{b^2 - 1} = \frac{(b^2 + 1)(b^2 - 1)}{b^2 - 1} = b^2 + 1.$$

O que valida para $n = 1$. Já para $n = 2$, temos:

$$D_2 = \frac{b^{2\cdot(2+1)} - 1}{b^2 - 1} = \frac{b^{2\cdot 3} - 1}{b^2 - 1} = \frac{b^6 - 1}{b^2 - 1} = \frac{(b^4 + b^2 + 1)(b^2 - 1)}{b^2 - 1} = b^4 + b^2 + 1$$

O que valida para $n = 2$. Supondo a fórmula válida para $n = k$ e $n = k + 1$, ou seja,

$$D_k = \frac{b^{2\cdot(k+1)} - 1}{b^2 - 1}$$

e

$$D_{k+1} = \frac{b^{2\cdot[(k+1)+1]} - 1}{b^2 - 1}.$$

Provemos a validade para $n = k + 2$. De fato, temos que, como

$$D_n = (b^2 + 1) \cdot D_{n-1} - b^2 \cdot D_{n-2},$$

então,

$$\begin{aligned}
D_{k+2} &= (b^2 + 1) \cdot D_{k+1} - b^2 \cdot D_k \\
&= (b^2 + 1) \cdot \left(\frac{b^{2\cdot[(k+1)+1]} - 1}{b^2 - 1}\right) - b^2 \cdot \left(\frac{b^{2\cdot(k+1)} - 1}{b^2 - 1}\right) \\
&= \frac{b^{2\cdot[(k+2)+1]} - b^2 + b^{2\cdot(k+2)} - 1 - b^{2\cdot[(k+1)+1]} + b^2}{b^2 - 1} \\
&= \frac{b^{2\cdot[(k+2)+1]} - b^2 + b^{2\cdot(k+2)} - b^{2\cdot(k+2)} + b^2 - 1}{b^2 - 1} \\
&= \frac{b^{2\cdot[(k+2)+1]} - 1}{b^2 - 1}.
\end{aligned}$$

O que finaliza a verificação.

O segundo problema do Majorando IME desde 1992, de COHEN e VILLARD está a seguir:

Problema 8. *Seja* $D_n = \det(A_n)$*, onde* A_n *é a matriz abaixo:*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine D_n *em função de* n*, (*$n \in \mathbb{N}$*,* $n \geqslant 1$*)*

Solução: Para calcular a determinante D_n, da matriz de ordem n dada, usaremos o teorema de Laplace na primeira coluna. Logo,

$$D_n = 2 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + ... + 0 \cdot A_{n1} = 2 \cdot A_{11} - A_{21},$$

onde,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{n-1} = (-1)^2 \cdot D_{n-1} = D_{n-1}$$

e

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = (-1)^3 \cdot D_{21} = -D_{21}.$$

Note que D_{21} é o determinante da matriz de ordem $n-1$ obtida da matriz original dada, que não possui nem a segunda linha nem a primeira coluna da matriz original, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para encontrar o determinante dessa matriz aplicaremos novamente o Teorema de Laplace, só que agora na primeira linha. Portanto,

$$D_{21} = -1 \cdot A'_{11} + 0 \cdot A'_{21} + 0 \cdot A'_{31} + ... + 0 \cdot A'_{(n-1)1},$$

onde,

$$A'_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{n-2} = (-1)^2 \cdot D_{n-2} = D_{n-2},$$

logo,

$$D_{21} = -D_{n-2}.$$

Portanto, voltando para o cálculo do determinante da matriz original temos,

$$D_n = 2 \cdot A_{11} - A_{21} = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2} = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2},$$

isso implica em

$$A_{21} = D_{n-2}.$$

que é uma equação de recorrência de 2ª ordem.

Como $D_n = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}$ é uma equação de recorrência de 2ª ordem, temos que $r^2 = 2 \cdot r - 1$, ou seja $r^2 - 2 \cdot r + 1 = 0$ será sua equação característica, cujas raízes serão $r_1 = r_2 = r = 1$.

Logo, existirão duas constantes C_1 e C_2, tais que

$$\begin{aligned} D_n &= C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n \\ &= C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n \\ &= C_1 + n \cdot C_2. \end{aligned}$$

Notemos que se a matriz é de ordem 1, ou seja, $n = 1$, temos que $D_1 = 2$, já que a matriz terá como elemento apenas o número 2. Por outro lado, se $n = 2$, isto é , se a matriz for de ordem 2,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $D_2 = 3$. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{cases} C_1 + 1 \cdot C_2 = 2 \\ C_1 + 2 \cdot C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 2 \cdot C_2 = 3 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por -1 e adicionando membro a membro com a segunda temos:

$$\begin{cases} -C_1 - C_2 = -2 \\ C_1 + 2 \cdot C_2 = 3 \end{cases}.$$

Segue que, $C_2 = 1$. Substituindo esse resultado em $C_1 + C_2 = 2$, tem-se $C_1 = 1$. Logo, $C_1 = C_2 = 1$. Como $D_n = C_1 + n \cdot C_2$, temos que

$$\begin{aligned} D_n &= C_1 + n \cdot C_2 \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

Portanto, o determinante da matriz de ordem n será:

$$D_n = n + 1.$$

4 Metodologia

Para fazer o referido trabalho, realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre alguns problemas que têm como foco principal as sequências recursivas aplicadas a nível médio em exercícios de vestibulares. A fim de desenvolver tal trabalho, fez-se, inicialmente, uma pesquisa em livros de Educação Matemática e alguns sites como o da SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática e do BNCC - Base Nacional Comum Curricular, sobre a importância da matemática para a educação de forma geral, e principalmente a importância de se estudar as sequências recursivas no Ensino Médio. Em seguida, pesquisou-se nos livros do PROFMAT, as principais definições, propriedades e teoremas necessários para o desenvolvimento do trabalho, ou seja, estudou-se as recorrências de primeira e segunda ordem, o método da indução finita, o Princípio Fundamental da Contagem, as permutações e as progressões aritméticas e geométricas. Logo após, houve um levantamento, em livros do Ensino Médio, revistas e sites de algumas instituições universitárias, sobre alguns problemas de recorrência que foram aplicados em algum exercício ou prova a nível médio. Como exemplo, tem-se a Torre de Hanoi, que foi questão do ENEM; a permutação caótica, que foi questão da FUVEST; a sequência de Fibonacci, que foi questão da ESAF e da ESPM; a Pizza de Steiner, que foi questão do ITA; além de uma questão do IME e de alguns problemas pesquisados no livro "A Matemática no Ensino Médio - volume 2". Em cada um desses problemas, foi feito um estudo da determinação de suas equações de recorrência, através das análises das possibilidades. Em seguida, obteve-se as fórmulas matemáticas para o n-ésimo termo através dos cálculos de recorrência, em cada problema. Para dar mais garantia a fórmula obtida, fez-se as demonstrações, através do método de indução finita, de cada fórmula, e depois de provado, aplicou-se as fórmulas para obter a solução desses problemas.

5 Considerações Finais

A relevância deste trabalho está primeiramente em abordar um tema com questões interessantes, de raciocínio elevado e que possam ser desenvolvidos com cálculos de conteúdos estudados a nível médio, como progressões, análise e indução. Sendo assim, alunos de ensino médio, a partir da segunda série, com o domínio dos conteúdos dito anteriormente poderiam se apropriar dos conceitos de recorrência. Além disso, o estudo desse trabalho por parte desses educandos ou por parte de graduandos desenvolverá o pensamento cognitivo de cada um, fazendo os mesmos buscarem saídas semelhantes em outros problemas que farão futuramente. Sem falar na comprovação de que questões de sequências recursivas são pertinentes em concursos, vestibulares e olimpíadas.

Diante dessas palavras, a realização desse trabalho contribuirá para a comunidade matemática, por mostrar uma outra abordagem embasada em cada questão apresentada, que vai além da dedução da equação de recorrência e dos cálculos de recorrência, feita pela maioria dos livros. A demonstração por indução de cada fórmula matemática obtida e a aplicação em provas de concurso e vestibular, a nível médio, enriquece o trabalho e o conhecimento dos futuros leitores.

Por fim, ressaltamos que esse projeto poderá servir de apoio para professores da Educação Básica, pois mesmo não sendo trabalhado como deveria, os problemas de recorrência sempre aparecem em provas, testes e vestibulares, melhorando o desempenho da Educação Matemática.

6 Referências

MACÊDO, Francisco Cristiano da Silva. EVANGERLANDY. *Pesquisa: passo a passo para a elaboração do trabalho científico.* Teresina - PI, 2018.

LIMA, Elon Lages. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2.* 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

BNCC - Base Nacional Curricular Comum, Brasília 2017.

SILVA, Israel Carley da. *Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio.* Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT. SBM, Brasília, 2015

SILVA, José Aldeci de Lima. *Uma abordagem selecionada de sequências recorrentes.* Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. SBM, Fortaleza-CE, 2017.

PEREIRA, Marcus Vinícius. *Recorrências - Problemas e Aplicações.* Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. SBM, Brasília, 2014.

MORGADO, Augusto César. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta - Coleção PROFMAT, 12.* 2. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2015.

COHEN, Marcio. VILLARD, Rodrigo. *Majorando IME desde 1992.*

LIMA, Elon Larges. *Números e Funções Reais - Coleção PROFMAT, 11.* 2. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

MARTINS, Thiago Ehlers. *Equações de Recorrência na Educação Básica.* Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. SBM, Rio Grande do Sul, 2014.

AMORIM, Leonardo Moura de. *Relações de Recorrência.* Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. SBM, Recife - PE, 2014.

PINHEIRO Tárcius Alievi. LAZZARIN, João Roberto. Recorrência matemática na OBMEP-Mathematics recurrences in OBMEP. v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 36 - 46 Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM - PROFMAT. SBM, 2014

Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Rela%C3%A7%C3%A3o_de_recorr%C3%AAncia>. Acesso em 17 mai 2018.

Disponivel em: <http://www.edufscar.com.br/os-desafios-do-ensino-de-matematica-na-educacao-basica>. Acesso em 10 jul 2018.

Disponivel em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/orientacoes/qual-importancia-ensino-matematica-basica.htm>. Acesso 10 jul 2018.

Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Combinat%C3%B3ria>. Acesso em.

Disponivel em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil>. Acesso em.

Disponivel em: <https://www.fuvest.br>. Acesso em.

Disponivel em: <http://www.ita.br>. Acesso em.

Disponivel em: <http://www.ime.eb.mil.br/pt>. Acesso em.

Disponivel em: <https://www.enap.gov.br/index.php/pt>. Acesso em.

Disponivel em: <https://www.espm.br>. Acesso em.