Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

A música como estratégia de organização do Ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

Davi Cunha Silva

Teresina – PI

2019

Davi Cunha Silva

Dissertação de Mestrado:

A música como estratégia de organização do Ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa

Teresina – PI

2019

S586m Silva, Davi Cunha.
A música como estratégia de organização do Ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental / Davi Cunha Silva. - 2019.
88f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
“Orientador(a): Prof. Dra. Valdirene Gomes de Sousa.”

1. Matemática. 2. Música. 3. Organização do Ensino. 4. Ensino Fundamental. 5. Anos Finais. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

DAVI CUNHA SILVA

A MÚSICA COMO ESTRATÉGIA DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Valdirene Gomes de Sousa

Profª. Dra. Valdirene Gomes de Sousa - Presidente e Examinadora
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Jurandir de Oliveira Lopes

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes – Examinador
Universidade Federal do Piaui - UFPI

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Setembro/2019

Dedico este trabalho a Deus, a minha família, amigos, aos alunos que estiveram sob minha responsabilidade e a todos os professores que contribuíram para a minha formação.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida, pela graça inigualável, a misericórdia sem fim, o amor incondicional, por todo cuidado que tem por mim, por sua bondade e fidelidade, por sua paz e alegria, por me fortalecer a cada dia, por não desistir de mim e por ter-me feito chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, João Batista e Maria das Dores, pela educação que deram a mim, por acreditarem e investirem em mim, pelo exemplo que são e que tanto contribuiu para a construção do caráter que hoje tenho, dos valores e princípios que levo comigo, por me amarem e orarem por mim todos os dias.

À minha esposa, Gildenys, pelo amor e carinho que tem por mim, por me ajudar a cada dia, sendo essa companheira sempre atenciosa e presente, pela paciência que tem para comigo, pela compreensão diante das minhas ausências por conta do estudo, pelo abraço que me acalma, o sorriso que me alegra e pela doce voz que ecoa em meu ouvido.

Aos meus amigos e irmãos por serem tão presentes em minha vida, por partilharem comigo das minhas alegrias e tristezas, pela confiança e o apoio constantes, pela ajuda e o incentivo, pelo privilégio de tê-los ao meu lado.

Aos meus companheiros de luta do PROFMAT/UESPI, essa turma tão notável, unida e bem-humorada, que tanto me ajudou durante o curso, somando as ideias, subtraindo as dificuldades, dividindo o conhecimento e multiplicando o saber.

Aos meus professores do PROFMAT/UESPI, por toda dedicação, compromisso e zelo no ensino, pelo exemplo profissional que são e que tanto me inspira e me motiva a melhorar como professor. Em especial, à minha orientadora, Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa, por ser tão presente e atenciosa, pela paciência e ajuda, por acreditar em mim e no meu trabalho, pela confiança em mim depositada e por me incentivar a cada dia a concluir este trabalho.

A todos vocês, o meu muito obrigado!

"*Estou bem certo que não alcancei, sou imperfeito e falho, eu sei, mas continuo, vou caminhando, vivendo, prossigo e não volto atrás.*"

Paulo César Baruk.

Resumo

O presente trabalho teve como objetivo analisar os meios de utilização da música como subsídio na organização do ensino de conceitos matemáticos nos anos finais do Ensino Fundamental. Para tanto, fez-se uma busca histórica das relações entre matemática (e matemáticos) e música, além de elaborar e propor o ensino de conceitos matemáticos através de sequências didáticas, bem como a utilização de paródias como forma de possibilitar a apropriação de determinadas regras operacionais (ou propriedades) matemáticas e, ainda, com destaque para a experimentação e construção de instrumentos musicais, através de roteiros de ações, com ênfase e base matemática. Este estudo foi realizado com 39 alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da zona leste de Teresina, capital do estado do Piauí, com destaque para as seguintes etapas: aplicação de um questionário inicial, realização de uma aula com conceitos básicos de teoria musical, aplicação das sequências didáticas propostas, experimentação e construção de instrumentos musicais, finalizando com uma entrevista, especificamente feita com 4 alunos. O embasamento teórico foi fundamentado em autores, dentre os quais, destacam-se: Eves (2011), em relação à História da Matemática; Abdounur (2015), relações entre Matemática e Música; Med (2017), Teoria Musical; e Cabral (2017), Sequências Didáticas. Os resultados obtidos foram analisados, interpretados e discutidos à luz de fundamentações em Zabala (2002), que trata sobre Práticas Educativas; Lorenzato (2010), sobre o Aprender Matemática; e Carvalho (2010) sobre Metodologias de Ensino e Aprendizagem de Matemática. A presente pesquisa contou com a aceitação dos alunos, explicitada por seu envolvimento e participação, expressos, sobretudo, na realização das atividades propostas. Os resultados apontaram que a utilização da música como estratégia utilizada na organização do ensino de conceitos matemáticos, pelos professores dos anos finais do Ensino Fundamental, revela indícios de envolvimento dos alunos nas aulas de Matemática e aprendizagem conceitual. Destaca-se ainda que, durante o processo desencadeado pela pesquisa, o modo como o professor organiza as aulas para estabelecer a relação da matemática com a música se apresenta propício à aprendizagem discente. Para tanto, apresenta-se implicado nesse processo a realização do trabalho em grupo, do diálogo e da abertura às manifestações de necessidades conceituais subsidiadas por procedimentos considerados, pelos alunos, mais dinâmicos.

Palavras-chave: Matemática. Música. Organização do Ensino. Ensino Fundamental. Anos Finais.

Abstract

This work aimed to analyze the means of music use as a subsidy in the organization of mathematical concepts teaching in the final years of elementary school. For this, a historical research on the relations between mathematics (and mathematicians) and music was made, besides elaborating and proposing the mathematical concepts teaching through didactic sequences, as well as the use of parodies as a way to enable the appropriation of certain mathematical operational (or properties) rules, as well as the experimentation and construction of musical instruments, through action scripts, with emphasis and mathematical basis. This study was conducted with 39 students from a 9^{th} grade class of a elementary school in the east area of Teresina, capital of the state of Piauí, highlighting the following steps: application of initial questionnaire, class conducted under music theory concepts, application of proposed didactic sequences, experimentation and construction of musical instruments, ending interviewing, specifically, 4 students. The theoretical basis was grounded on authors, among which the following stand out: Eves (2011), regarding to the History of Mathematics; Abdounur (2015), regarding to the relation between Mathematics and Music; Med (2017), Music Theory; and Cabral (2017), Didactic Sequences. The results obtained were analyzed, interpreted and discussed in the light of basis of Zabala (2002), which deals with Educational Practices; Lorenzato (2010), on Mathematics Learning; and Carvalho (2010) on Mathematics Teaching and Learning Methodologies. The present research had the acceptance of students, explicit by their involvement and participation, expressed, above all, in the accomplishment of the proposed activities. The results showed that the utilization of music as a strategy used in the organization of mathematical concepts teaching, by teachers of the final years of elementary school, reveals evidence of involvement of students in mathematics classes and conceptual learning. It is also remarkable that during the process triggered by the research, the way the teacher organizes classes to establish the relationship of mathematics with music contributes to student learning. So, it is implicit in this process the accomplishment of group work, dialogue and openness to the manifestations of conceptual needs subsidized by procedures considered, by the students, more dynamic.

Keywords: Mathematics. Music. Teaching Organization. Elementary School. Final Years.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Matemática e música parecem, à primeira vista, disciplinas com pouca, ou mesmo, nenhuma relação, pois em quase todos os povos da antiguidade, encontramos registros dessas duas áreas em separado (ABDOUNUR, 2015). No entanto, a história nos mostra que as relações entre matemática e música existem e são bem antigas. A escola pitagórica (séc. VI a.C.), por exemplo, tinha um programa de estudos que trabalhava as artes liberais básicas. Este programa era constituído por quatro disciplinas: aritmética, geometria, música e astronomia. Posteriormente, já na idade média, este conjunto de disciplinas passou a ser chamado de quadrivium e, a ele, acrescentou-se o trivium, composto por gramática, lógica e retórica (EVES, 2011).

Durante muito tempo, o ensino seguiu este padrão, sendo amplamente difundido em todo o mundo. No Brasil, por exemplo, o currículo do ciclo fundamental do ensino secundário, organizado pela Reforma Francisco Campos (1931), destacava várias disciplinas, entre elas, matemática e música, abrangendo matérias literárias e também científicas. Desse modo, assemelhava-se ao modelo das escolas medievais que se utilizavam das sete artes liberais (FERREIRA JR, 2010).

O tempo passou e os currículos de ensino sofreram diversas mudanças, inclusive no Brasil. A mais recente dessas mudanças é a criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que está em acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, nº 9.394/1996) e com as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN), conforme explicitada no documento: "A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica"(BRASIL, 2017, p.7). Nela, o conhecimento matemático é destacado como essencial para todos os alunos da Educação Básica, e deve garantir, no Ensino Fundamental, que os alunos sejam capazes de relacionar observações do mundo real a atividades matemáticas, fazendo induções e conjecturas (BRASIL, 2017).

Neste sentido, é manifestada a defesa de uma educação matemática conectada ao mundo real, fazendo uso de situações cotidianas para exemplificar conceitos matemáticos, bem como para aplicar o conhecimento adquirido em sala de aula. Essa proposta entende que, desse modo, o aluno será capaz de identificar a matemática presente em seu dia a dia e conseguirá ainda se utilizar dela para resolver problemas da vida prática. No entanto, contextualizar conceitos, bem como ligá-los a outros saberes e disciplinas, constituem atualmente um dos grandes desafios do ensino, não somente de matemática.

Neste contexto, as Diretrizes Nacionais da Educação Básica (DCN, 2013, p.118) destacam que:

> Em relação à organização dos conteúdos, há necessidade de superar o caráter fragmentário das áreas, buscando uma integração no currículo que possibilite tornar os conhecimentos abordados mais significativos para os educandos e favorecer a participação ativa de alunos com habilidades, experiências de vida e interesses muito diferentes.

Em outras palavras, predomina a defesa de que o que se ensina na escola deve estar mais próximo da realidade dos alunos, bem como as próprias disciplinas que compõem os respectivos currículos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, devem estar articuladas entre si, de modo que o que se aprende possa ser visto de uma maneira universal, onde os saberes se conectam e se complementam. O que ressalta a necessidade de se fazer trabalhos, projetos e planos de aula que se utilizem da interdisciplinaridade com o fim de proporcionar ao aluno experiências que lhe possibilitem a apropriação dos conteúdos estudados em sala de aula e estabeleçam relações com o seu contexto diário. Como nos afirma David (2015, p.243):

> A interdisciplinaridade é entendida como um nível de associação entre diferentes disciplinas/áreas em que o princípio da cooperação provoca verdadeiros intercâmbios e, consequentemente, um mútuo enriquecimento de conhecimento. Para que ocorra a interdisciplinaridade, são necessários vontade, disposição e compromisso na construção de um objetivo comum, superando assim a fragmentação existente e estabelecendo uma interação entre as disciplinas, numa perspectiva de totalidade.

Assim compreendida, a interdisciplinaridade, quando estabelecida, organizada e desenvolvida, proporciona ao aluno (e ao professor) a oportunidade de contato de um determinado conceito, possibilitando, inclusive, a sua apropriação.

Portanto, levando em consideração o que fora exposto e, diante das necessidades de construção de pontes entre os saberes, justificamos o presente trabalho, uma vez que procuramos meios de organizar o ensino de conceitos matemáticos, articulando música e matemática, no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental. Mas, como isso pode ser feito?

A resposta para a pergunta anterior não é simples, nem tampouco pode ser expressa através de uma fórmula pronta que pudéssemos utilizar para chegar ao resultado final. Mas também não é algo inconcebível, inalcançável. Enfatizamos que unir matemática e música em sala de aula é, para nós, um desejo antigo. Em algumas poucas vezes tivemos a oportunidade de estabelecer essa união, mesmo que ainda de forma elementar. A ideia era criar as condições para estabelecimento de um ambiente agradável, onde pudéssemos ensinar matemática através da música. Para tanto, utilizamos paródias que subsidiaram a organização do ensino de propriedades de equações e também de trigonometria. Mesmo na superficialidade, sem a fundamentação necessária, essas experiências nos mostraram que era algo que poderia ser feito, explorado e bem melhor aprofundado.

A vivência no mestrado, particularmente, na produção desta pesquisa nos proporcionou a oportunidade de aprofundarmos o estudo sobre a relação entre a matemática e a música, de fazer uma busca histórica das relações entre essas áreas do conhecimento, dos conteúdos matemáticos que possuem aspectos comuns com a música, bem como de estratégias de aplicação instrumental dos conteúdos. Isso fez com que o trabalho tomasse uma forma mais consistente e estruturada, inclusive nos encaminhando à definição do problema de pesquisa e dos objetivos que permitissem, assim, a elaboração de uma sequência de ações para o desenvolvimento do mesmo. Assim, definimos o seguinte problema central de pesquisa: como a música pode subsidiar a organização do ensino de matemática possibilitando a apropriação conceitual por alunos no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental? Para responder a essa questão, delimitamos como objetivo geral deste estudo analisar as possibilidades de utilização da música como meio de subsidiar a organização do ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

De posse das informações que foram levantadas, ainda faltava a forma de aplicação, de modo que a música não fosse apenas um recurso didático, mas que fosse parte essencial para o desenvolvimento das aulas com os conceitos que foram selecionados. Em outras palavras, o que faltava era um link do conteúdo ao ensino, com a parte didática. Como nos diz Da Cruz (2017, p. 674):

> Ensinar requer uma variada e complexa articulação de saberes passíveis de diversas formalizações teórico-científicas, científico-didáticas e pedagógicas. Esses conhecimentos são requeridos porque na atividade docente há inúmeros fatores implicados, por exemplo, a forma como o professor compreende e analisa as suas práticas educativas, articula diferentes saberes no seu ato de ensinar e age diante do inesperado e do desconhecido.

Dessa forma, procuramos um meio de organizar os conteúdos de matemática selecionados através de sequências didáticas, utilizando a música em todo o corpo do conteúdo. Assim, a música esteve presente como conteúdo e também como recurso didático na organização das aulas de matemática. Como conteúdo, selecionamos conforme a relação com o conceito matemático trabalhado em sala de aula. Como recurso didático, utilizamos aplicações que podem ser vistas, de forma prática na execução de um compasso musical, no tocar de um instrumento, assim como no aprendizado de uma paródia que permitisse a relação com os conteúdos em estudo.

O trabalho apresenta ainda um conjunto de oficinas de construção de instrumentos musicais que, aliados aos conhecimentos adquiridos no decorrer das aulas, puderam mostrar aos alunos como a matemática é utilizada na construção de um instrumento musical.

Dessa forma, o presente trabalho apresenta relações históricas entre matemática e música, destacando contribuições de matemáticos para o desenvolvimento do estudo da música. Apresenta ainda uma série de conceitos básicos da música que possibilitaram o desenvolvimento dos conteúdos durante o processo investigativo.

Destacamos assim a relevância do presente estudo, pois, academicamente, trata-se de uma temática ainda pouco explorada, carente de estudos e materiais, haja vista, por exemplo, o banco de dissertações do PROFMAT que atualmente tem apenas 13 dissertações que tratam de matemática e música, o que corresponde a menos de 0,3% do total de trabalhos presentes no sistema; profissionalmente, oferece aos professores de matemática a oportunidade de ter em mãos um material que foi produzido para fins de discussão e compreensão do que ocorre em sala de aula; pessoalmente, é a concretização de um sonho, um desejo de melhorar didática e conceitualmente nas aulas de matemática, sendo, portanto, uma realização pessoal, acadêmica e profissional.

Diante do exposto, o presente trabalho foi dividido em 7 (sete) seções, de modo que pudéssemos abordar toda a temática proposta no decorrer da pesquisa. Assim, a primeira seção traz o texto introdutório, apresentando uma visão panorâmica de todo o trabalho.

A segunda seção trata de um breve histórico da relação entre matemática e música, com ênfase nas contribuições matemáticas musicais de alguns personagens da história. A terceira seção apresenta um conjunto de conceitos básicos de teoria musical, importantes para a melhor compreensão dos estudos que se seguem. Na quarta seção, tratamos da metodologia da pesquisa, apresentando a classificação da pesquisa, os métodos utilizados, os sujeitos da pesquisa, os instrumentos de apreensão de dados, bem como os procedimentos para análise e interpretação dos mesmos. A quinta seção é onde concentra o cerne de todo o trabalho, tratando da música nas aulas de matemática, como recurso didático e conceitual, na tentativa que tenha uma correlação com a matemática, além de destacar o uso e experimentação de instrumentos musicais com ênfase e base matemática. A sexta seção apresenta a análise e a interpretação dos dados obtidos durante a pesquisa por meio dos instrumentos descritos na seção quatro. A sétima seção, apresenta as considerações finais sobre a investigação realizada.

2 Breve histórico da relação entre matemática e música

Nesta seção apresentamos um panorama resumido das relações históricas existentes entre matemática e música, destacando, sobretudo, traços das biografias de alguns matemáticos que, através dos seus estudos e experiências, contribuíram para o desenvolvimento atual tanto da matemática quanto da música.

2.1 Pitágoras e os pitagóricos

Como nos conta Boyer (1974), Pitágoras (580 - 500 a.C, aproximadamente) foi um matemático e filósofo grego, nascido na ilha de Samos, próximo à cidade de Mileto. Viajou por boa parte do mundo antigo na época, conhecendo e absorvendo informações sobre a cultura, o pensamento e a religião de vários povos, como os egípcios, babilônios, entre outros.

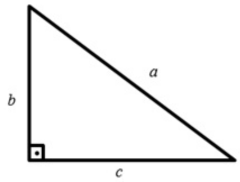
Esse contato com outros povos, sem dúvida, enriqueceu em muito o pensamento matemático e filosófico de Pitágoras. Ao retornar à Grécia, Pitágoras se estabeleceu em Crotona, uma colônia grega ao sul da Itália. Lá ele fundou uma escola, que ficou conhecida na história como a "Escola Pitagórica", local onde se estudava e discutia-se matemática, filosofia, ciências naturais, entre outras, além de ser considerada também uma espécie de sociedade secreta, onde os seus membros, chamados pitagóricos, participavam de certos rituais e cerimônias que lhes eram restritos (EVES, 2011).

Um fato importante que envolve Pitágoras e sua escola, em relação às descobertas feitas por lá, chama a atenção no que diz respeito aos créditos do que era produzido. A escola, mesmo sendo uma sociedade secreta, era, ao mesmo tempo, comunitária, e o conhecimento e propriedade eram comuns a todos. Assim, o que era descoberto por qualquer de seus membros era creditado à escola, embora, no final das contas, o crédito fosse dado ao mestre e fundador da escola, Pitágoras, conforme a tradição da época (BOYER, 1974).

Outro aspecto que destacamos na história dos pitagóricos é o fato de que o conhecimento era transmitido basicamente de forma oral. Desse modo, é difícil dizer o que realmente foi obra de Pitágoras, além de ser "[...] difícil separar o que foi fato do que foi versão, ou mera fantasia" (SPINOLA, 2016, p.35).

A maior contribuição matemática creditada a Pitágoras é, sem dúvida alguma, o teorema que recebe o seu nome, embora não saibamos com certeza se foi o próprio Pitágoras que o descobriu (LIMA, 2013). Estudos sugerem, ainda, que os egípcios (bem antes de Pitágoras) possivelmente tivessem algum conhecimento das relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo (ZÚÑIGA, 2003). O teorema de Pitágoras diz que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. A hipotenusa é o lado maior do triângulo, que é oposto ao ângulo reto. Os outros dois lados são os catetos, conforme apresentamos na figura abaixo, onde a é a hipotenusa enquanto b e c são os catetos.

Figura 1: Triângulo retângulo (I)

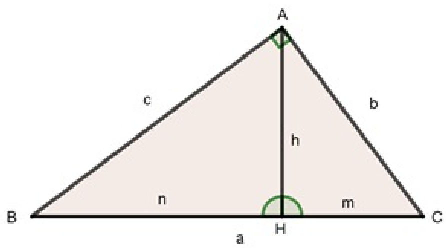


Fonte: Próprio autor

O enunciado do teorema de Pitágoras pode ser expresso de forma simplificada com o uso da seguinte fórmula matemática: $a^2 = b^2 + c^2$. Em face da necessidade de uma demonstração para o referido teorema, apresentamos aqui uma prova inspirada no texto de Lima (2013), na qual utilizamos semelhança de triângulos:

A partir de um triângulo ABC, retângulo em A, traçamos a altura AH, dividindo o segmento BC em outros dois, BH, de comprimento n e, HC, de comprimento m, conforme a figura abaixo.

Figura 2: Triângulo retângulo (II)



Fonte: Próprio autor

Verificamos que os triângulos AHB e AHC são, ambos, semelhantes ao triângulo ABC, pelo fato de cada um possuir dois ângulos congruentes com o mesmo. Assim, da semelhança dos triângulos AHC e ABC, temos que $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$, o que implica que $b^2 = am$. Da semelhança dos triângulos AHB e ABC, temos que $\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$, o que implica que $c^2 = an$.

Por fim, somando, membro a membro os dois resultados anteriores, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a \cdot a = a^2,$$

o que conclui a nossa prova do Teorema de Pitágoras.

Vale ressaltar que existem centenas de demonstrações para o referido teorema, tal como podemos conferir, por exemplo, o livro The Pithagorean Proposition (1940), de Elisha Scott Loomis. Em relação a este teorema, Lima (2013, p.70-71) nos diz que "é um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos, e ocupa uma posição especial na história do nosso conhecimento matemático", tendo em vista as muitas demonstrações, com destaque para as diversas aplicações do teorema de Pitágoras, na própria matemática, em outros contextos, bem como na resolução de problemas.

Muitas histórias cercam Pitágoras, entre fatos e lendas, inclusive no que diz respeito à sua contribuição para a música. Em uma das lendas, conta-se que Pitágoras ouviu os sons de marteladas em uma bigorna, enquanto passava em frente ao estabelecimento de um ferreiro e que isso lhe chamou a atenção pelos sons que eram produzidos, ora harmoniosos em suas relações, sendo, portanto, agradáveis ao ouvido, ora desagradáveis ao ouvido. (SPINOLA, 2016)

Independentemente do que tenha inicialmente motivado Pitágoras, o fato é que ele construiu um instrumento chamado monocórdio, que era basicamente uma caixa acústica de madeira, sobre a qual era colocada uma corda cujas extremidades estavam sobre dois cavaletes fixos, havendo ainda um cavalete móvel utilizado para dividir a corda em diferentes comprimentos. Com isso ele pôde verificar como os sons se relacionavam, conforme a variação do cavalete móvel que deslizava sobre o monocórdio (Figura 3), deixando a corda com comprimentos diferentes. Essa experiência é, segundo Abdounur (2015, p. 26) a "[...] primeira experiência registrada da história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial".

Figura 3: Monocórdio

Fonte: professorabimael.com.br

Para o referido autor, Pitágoras observou que ao reduzir o comprimento da corda à sua metade, o som obtido era praticamente igual ao da corda solta, sem divisão. No entanto, mais agudo, o que hoje chamamos de oitava do som; ao reduzir o comprimento da corda a $\frac{2}{3}$ (dois terços) do seu tamanho original, gerava um som que era harmonioso ao som da corda solta, sendo tal som, uma 5ª (quinta) acima ao do som original, como chamamos hoje; assim como, reduzindo o comprimento da corda a $\frac{3}{4}$ (três quartos) do seu tamanho inicial, gerava um som que também combinava com o som da corda solta, sendo uma 4ª (quarta) acima do som original. O que Pitágoras observou, no final das contas, foi a razão entre os comprimentos das cordas, verificando que, quando as razões entre os comprimentos envolviam relações simples de números inteiros, estabelecia-se uma consonância entre os sons, sendo considerados, portanto, intervalos puros, ainda mais pelo fato de que os números presentes nestes intervalos em destaque eram 1, 2, 3 e 4, que, segundo o misticismo dos pitagóricos, representava a perfeição, sobretudo no que se refere ao número 4, que representava os elementos básicos da natureza (água, terra, fogo e ar), além do fato de que $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, símbolo de perfeição.

Muitos estudos sobre as relações entre os sons se seguem após Pitágoras e os pitagóricos, o que em muito contribuiu para o processo de formação das escalas musicais que temos atualmente.

2.2 Marin Mersenne

Marin Mersenne (1588 - 1648) nasceu na cidade francesa de Oize. Estudou Teologia entre 1609 e 1611, quando então passou a compor a Ordem dos Mínimos (uma entidade religiosa do catolicismo), e, por isso, é também conhecido na história como um padre (ou frade) minimita. Além de teologia, os estudos de Mersenne adentram a filosofia, a matemática e a música (ZÚÑIGA, 2003; ABDOUNUR, 2015).

Mersenne aparece como uma figura fundamental quanto à divulgação de trabalhos matemáticos na primeira metade do século XVI, sobretudo pela proximidade que teve com outros matemáticos da época, como Pierre de Fermat (1601 - 1665), René Descartes (1596 - 1650), Blaise Pascal (1623 - 1662), além de outros personagens históricos, dentre os quais Galileu Galilei. Muitos desses grandes pensadores mantinham trocas de correspondências com Mersenne sobre as suas produções, estudos e avanços teóricos. Tão logo Mersenne ficasse a par das novas descobertas matemáticas, tratava de levá-las ao conhecimento de outros, fazendo um amplo trabalho de difusão de informações em boa parte da Europa (BOYER, 1974; ZÚÑIGA, 2003).

Entretanto, o maior destaque de Mersenne para a matemática refere-se ao seu estudo sobre números primos, que são, segundo Hefez (2016), números naturais, maiores que 1 e que possuem apenas dois divisores, sendo um deles o 1 e, o outro, o próprio número. Como nos conta Du Sautoy (2008), Mersenne se baseou na prova de Euclides (300 a.C) sobre a infinidade dos números primos e, portanto, teve a ideia de multiplicar o número 2 repetidas vezes por ele mesmo e, então, subtrair uma unidade, na tentativa de obter um número primo. Assim, temos os chamados primos de Mersenne que, como define Hefez (2016), são os números da forma $M_p = 2^p - 1$, onde p é um número primo. É importante notar que não é tomando qualquer p - primo e substituí-lo na "fórmula" anterior que obteremos um outro número primo, por exemplo, se tomarmos $p = 11$, temos $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$, que não é primo, uma vez que $23 \cdot 89 = 2047$, que mostra que 2047 tem, além de 1 e 2047, outros dois divisores.

Segundo Eves (2011), o primo de Mersenne correspondente a $p = 4253$ foi o primeiro primo conhecido com mais de 1000 dígitos e o correspondente a $p = 216091$ era o maior primo conhecido até 1986. Com o advento dos computadores e a evolução tecnológica, o número de primos conhecidos aumentou significativamente nos últimos tempos. Em 15 de janeiro de 2019, em uma publicação no site Olhar Digital[1], Renato Santino divulgou o número $2^{82589933} - 1$, sendo este o maior número primo descoberto até então, que é um número de Mersenne, destacando a importância de tal descoberta sobretudo para o avanço tecnológico, em especial para os sistemas de proteção de informações no atual sistema de

[1]Disponível em: https://olhardigital.com.br/noticia/projeto-descobre-o-maior-numero-primo-ja-registrado-entenda-a-importancia/81245.

criptografia RSA, criado em 1978 por Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, conforme Hefez (2016).

Muitos matemáticos se dedicaram ao estudo sobre os números primos, buscando inclusive uma forma de obtê-los através de uma fórmula fechada, como uma função dos naturais nos primos sem, contudo, obter sucesso, de modo que, o que temos de mais evoluído neste estudo, até o presente momento são exatamente os primos de Mersenne.

Em relação à contribuição musical de Mersenne, destacamos a elaboração do seu trabalho intitulado Harmonie Universelle, de 1636 que, como nos diz Abdounur (2015), faz uma abordagem que alterna entre teoria e prática. Nele relata diversos experimentos e estudos sobre o som, além de reflexões envolvendo matemática e música, o que o faz, muitas vezes, ser considerado o pai da acústica, haja vista o fato de que ele foi o primeiro a determinar a frequência de uma nota musical estabelecida, assim como medir a velocidade de propagação do som no ar.

Ainda com base no referido autor, Mersenne aborda em sua obra pontos relacionados à teoria, execução, bem como classificação de instrumentos musicais. Composta por 7 livros, dos quais 4 referem-se a instrumentos de cordas, 1 sobre instrumentos de sopro, 1 sobre órgão e 1 sobre instrumentos de percussão, a obra de Mersenne figura entre as principais fontes do pensamento e saber musical no início do período Barroco na França. Entre os estudos de Mersenne sobre os instrumentos musicais, destaca-se a pesquisa feita em relação à estrutura dos mesmos, que o levou a uma busca por respostas que explicassem os diferentes sons gerados pelos instrumentos conforme a variação do seu comprimento, largura, tipo de material que foi utilizado na construção, além do estudo sobre materiais que seriam ideais para a construção de determinados instrumentos com o intuito de melhorar a sua sonoridade e também a sua afinação. Como exemplo, Mersenne percebeu que havia diferença entre os sons de sinos que, apesar de terem o mesmo tamanho, haviam sido construídos com materiais distintos, além de explorar, através de seus experimentos, formas de produzir diferentes sons com um mesmo sino, ou, até mesmo, um copo, ao colocar água, ou outro líquido, dentro do recipiente e fazer variar a sua quantidade no mesmo.

Sem dúvida, encontramos nos estudos de Mersenne a base que expressa a matemática por trás da estrutura dos instrumentos musicais que nos motivou a realizar, através do presente trabalho, as oficinas de construção de instrumentos musicais, descritas com mais detalhes na seção 6 deste estudo.

Vale ressaltar ainda que, assim como Pitágoras, o monocórdio também foi o ponto de partida dos estudos de Mersenne, pois, como nos afirma Abdounur (2015, p. 83-84):

> Mersenne considerava o monocórdio como suporte fundamental à compreensão não somente dos instrumentos de corda, mas de toda ciência musical. Sob a ótica do pensador francês, alcançar-se-ia tal ciência explicando todas as maneiras de divisão do monocórdio, o que o levou a constatação de que diferentes frações poderiam corresponder a uma mesma consonância ou dissonância.

Neste sentido, a obra de Mersenne fez um avanço significativo aos estudos iniciados por Pitágoras cerca de 2000 anos antes.

2.3 Descartes

René Descartes (1596 - 1650), nascido em La Haya, na França, foi um grande pensador matemático e filósofo do século XVII, talvez o mais conhecido de seu tempo. Ingressou em uma escola jesuíta em La Flèche aos 8 anos de idade e, posteriormente, formou-se em direito na Universidade de Poitier. Em 1617, passou a integrar o exército de Maurício, príncipe de Nassau, iniciando uma carreira militar que durou aproximadamente 9 anos. Depois de abandonar a carreira militar, Descartes viajou, em período de 4 ou 5 anos, por alguns países, como Alemanha, Holanda e Itália. Depois disso, retornou à França, mais especificamente, Paris, onde ficou por 2 anos desenvolvendo seus estudos e trabalhando na construção de instrumentos ópticos. Após esse período, Descartes decide ir para a Holanda, onde viveu cerca de 20 anos, dedicando-se à matemática, filosofia e a ciência de uma maneira geral, período em que mais produziu e publicou suas obras. Descartes morreu em 1650, vítima de uma doença pulmonar, poucos meses após ter ido à Suécia, a convite da rainha Cristina. (BOYER, 1974; EVES, 2011; ZÚÑIGA, 2003).

Conforme Boyer (1974) e Eves (2011), a obra mais famosa de René Descartes é o Discurso do Método, publicado em 1637, que aborda, ao mesmo tempo, diversos saberes, sobretudo filosóficos relacionados à ciência de uma forma universal. Essa obra tinha ainda três apêndices, que eram a dióptrica, os meteoros e a geometria. No primeiro apêndice aparece a primeira publicação da lei da refração. No segundo, figura a primeira explicação quantitativa considerada satisfatória em relação ao arco-íris. E, no último apêndice, o qual Descartes escreveu cerca de 100 páginas, dividindo o conteúdo tratado em 3 partes, destaca-se as bases da geometria analítica que temos nos dias de hoje.

Ainda, segundo os referidos autores, dentre as três partes em que dividiu o apêndice de geometria, Descartes trata, na primeira parte, de uma geometria algébrica, superando a visão grega, como, por exemplo, quanto à forma como entendiam e interpretavam expressões como x, x^2 e x^3, destacando ainda o fato de que tais notações (das potências) foram por ele adotadas, além de padronizar o uso das primeiras letras do alfabeto para valores fixos, enquanto que as últimas eram usadas para representar variáveis. Na segunda parte, Descartes aborda, entre outros aspectos, uma classificação de curvas e uma forma de construir retas tangentes a determinadas curvas. A terceira e última parte de sua geometria trata sobre resolução de equações de grau maior que 2, fazendo uso do que hoje é conhecido como a regra de sinais de Descartes.

Outro resultado importante ligado à história de Descartes é, segundo Eves (2011), a fórmula $V + F = A + 2$, que relaciona o número de vértices, faces e arestas de um poliedro convexo. É também conhecida como fórmula de Euler (1707-1783), tendo em vista sua publicação independente em 1752 sendo que, possivelmente, essa relação já fosse conhecida bem antes por Arquimedes (c.225 a.C).

Em relação à contribuição musical de Descartes, destacamos o primeiro de todos os seus trabalhos, a obra chamada Compendium Musicae, de 1618, embora esta só tenha sido publicada após a sua morte, em 1650. Trata-se de uma abordagem reflexiva em relação a música, onde o autor busca mostrar que "[...] a melhor forma de compreender a música, é através da experiência, deduzindo a partir dela o estudo da percepção sensorial, relacionadas com fenômenos físicos e psicológicos"(PEREIRA, 1996, p. 99). Conforme nos conta Abdounur (2015), Descartes abordou diversos temas em seu compêndio, tais como harmonia, dissonância, entre outros, sendo inclusive uma base para os trabalhos e estudos de Mersenne e, posteriormente, aos de Philippe Rameau, em seu Tratado de Harmonia.

Apesar dessa obra de Descartes possuir uma grande variedade de tabelas e gráficos matemáticos relacionados à música, conforme vemos em uma tradução de Flores e Gallardo (2001) e que reforçam, inclusive, as ideias expostas no presente trabalho, optamos por destacar aqui aquilo que fez esse compêndio de Descartes ser diferente de muitos outros tratados musicais anteriores e posteriores a ele, uma vez que já mostramos um aspecto mais exploratório e técnico da música e do som, relacionados à matemática e a física, feito por Mersenne.

Nos dizeres de Pereira (1996, p. 103), “A originalidade de Descartes foi sem dúvida a de dar aos sentidos e à emoção um lugar na apreciação de uma obra musical”. Desse modo, o diferencial da obra de Descartes é exatamente a sua forma filosófica, mostrando uma preocupação musical estética, enfatizando, ainda, os sentidos, as emoções e as expressões de afeto por trás da métrica e proporção matemática utilizada nas composições.

Ainda segundo o referido autor (1966, p. 107), “Descartes fica na história da música como o primeiro teórico que refletiu sobre a estrutura da forma musical... mas, o que resta de mais marcante é a importância de atribuir ao som musical uma capacidade de mover o ouvinte”. Com isso, ressaltamos a influência que a música pode trazer às pessoas, motivo pelo qual apresentamos, no presente trabalho, uma proposta de utilização da mesma como recurso didático para o ensino de matemática.

3 Conceitos básicos de teoria musical

Nesta seção apresentamos uma série de conceitos básicos da teoria musical que possibilitam uma melhor compreensão da discussão que se segue no presente trabalho, bem como uma apropriação dos termos da linguagem musical. Para tanto, nos utilizamos de programas de computador como o MuseScore e o Paint que nos ajudaram a produzir as figuras que utilizamos para exemplificar alguns dos conceitos presentes nesta seção.

3.1 O som e suas características

Segundo Med (2017), o som é a sensação produzida no ouvido pelas vibrações (regulares ou irregulares) de corpos elásticos. De forma simplificada, é tudo o que ouvimos. Por exemplo, o som de um instrumento musical, o som dos pássaros a cantar, o som do mover das águas do mar, etc.

Assim compreendido, dizemos que os sons podem ser classificados em dois tipos básicos: sons musicais e ruídos. Os sons musicais têm altura definida e são gerados por vibrações regulares - como, por exemplo, o som de um violão, o som de um coral, entre outros. Já os ruídos são sons de altura indefinida, gerados por vibrações irregulares, como, por exemplo, o som de um objeto que cai no chão, o som produzido por uma roçadeira, o som de uma sirene, entre outros.

As principais características do som, segundo Med (2017), são altura, duração, intensidade e timbre. Para melhor compreendermos cada uma, esclarecemos com base no referido autor que a altura é determinada pela frequência das vibrações, isto é, da sua velocidade. Quanto maior for a velocidade da vibração, mais agudo será o som. Esta característica nos permite classificar os sons como graves, médios ou agudos. O mugido de uma vaca seria um exemplo de som grave, enquanto que o miado de um gato seria um exemplo de som agudo.

Já a duração é o período de tempo durante o qual o som é captado pelo nosso ouvido. Esta característica nos permite classificar um som como curto ou longo. O som da 6ª (sexta) corda de um violão sendo tocada solta deixando que retorne ao seu estado original de forma natural é um exemplo de som longo, enquanto que o tocar de uma baqueta em outra é um exemplo de som curto.

A intensidade é determinada pela força ou pelo volume do agente que as produz. Esta característica nos permite classificar um som como forte ou fraco. O som produzido pela queda de um objeto a um metro do chão é um exemplo de som fraco, enquanto que a queda do mesmo objeto de uma altura de 10 metros ao chão seria um exemplo de som forte.

Em relação ao timbre, o autor nos esclarece que é a combinação de vibrações determinadas pela espécie do agente que as produz. Esta característica nos permite reconhecer a origem do som. Como exemplo, podemos citar o associar da voz de uma pessoa com quem convivemos à sua fisionomia (ou ao seu nome), bem como o identificar dos instrumentos que estão sendo tocados ao ouvirmos uma música, etc.

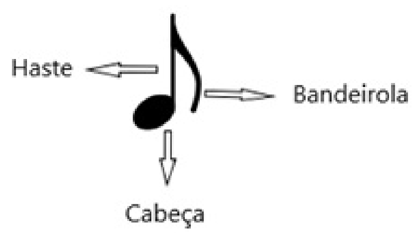
3.2 A música

Segundo Lacerda (1966, p.17), a música é, simplesmente, "a arte do som". Já Med (2017), vai além e diz que a música é a arte de combinar os sons de forma simultânea e sucessiva, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo, sendo que, na música, usamos tanto os sons regulares como os irregulares. Assim compreendida, a música é a expressão artística que mistura os sons, nas mais variadas formas, conforme o gosto de quem a produz. Particularmente, as principais partes que compõem a música são:
Melodia: sons tocados sucessivamente.
Harmonia: sons tocados simultaneamente.
Contraponto: conjunto de melodias tocadas simultaneamente.
Ritmo: alternância de durações.

3.3 Notação Musical

Em música, nota é um símbolo que representa de maneira gráfica um som na escrita musical (LACERDA, 1966). Na figura 4, vemos as partes que compõem uma nota musical.

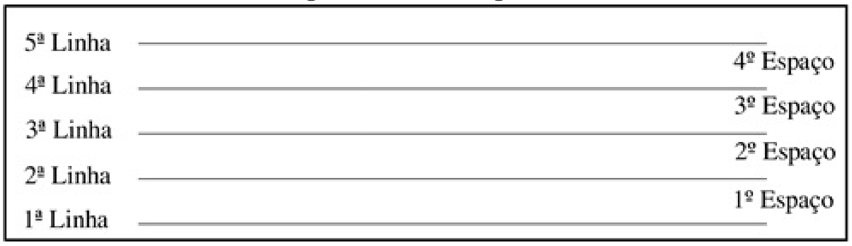
Figura 4: Partes de uma nota musical



Fonte: Próprio autor

Pentagrama: também chamado de pauta musical, é um conjunto de 5 linha horizontais paralelas e 4 espaços iguais entre elas. É no pentagrama que escrevemos as notas musicais. Tanto as linhas como os espaços são contados de baixo para cima, conforme apresentado na figura 5.

Figura 5: Pentagrama



Fonte: Próprio autor

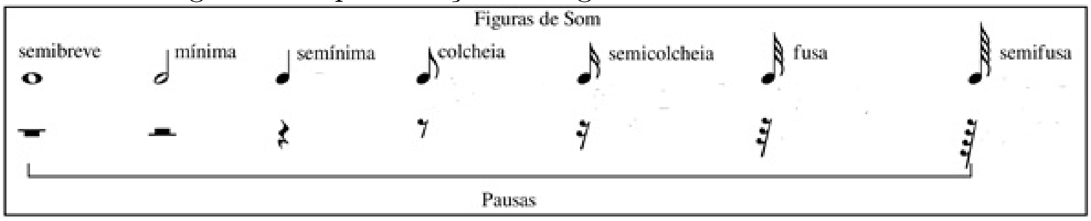
Segundo Lacerda (1966), para dar nomes às notas no pentagrama, precisamos de uma clave, que é "um sinal colocado no início da pauta, que dá seu nome à nota escrita em sua linha" (MED, 2017, p. 16). Os três tipos de clave utilizados atualmente são: a de sol, a de fá e a de dó, conforme exposto a seguir, na figura 6.

Figura 6: Claves

Fonte: Próprio autor

As notas são colocadas no pentagrama segundo os seus valores, que representam basicamente a sua duração. No atual sistema musical utilizamos 7 valores que representam as figuras de som e de silêncio (pausa), sendo que, para cada figura de som, há uma de silêncio que a corresponde. São elas: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa. Na figura 7, a seguir, apresentamos as figuras de som acima citadas, bem como suas respectivas figuras de silêncio correspondentes.

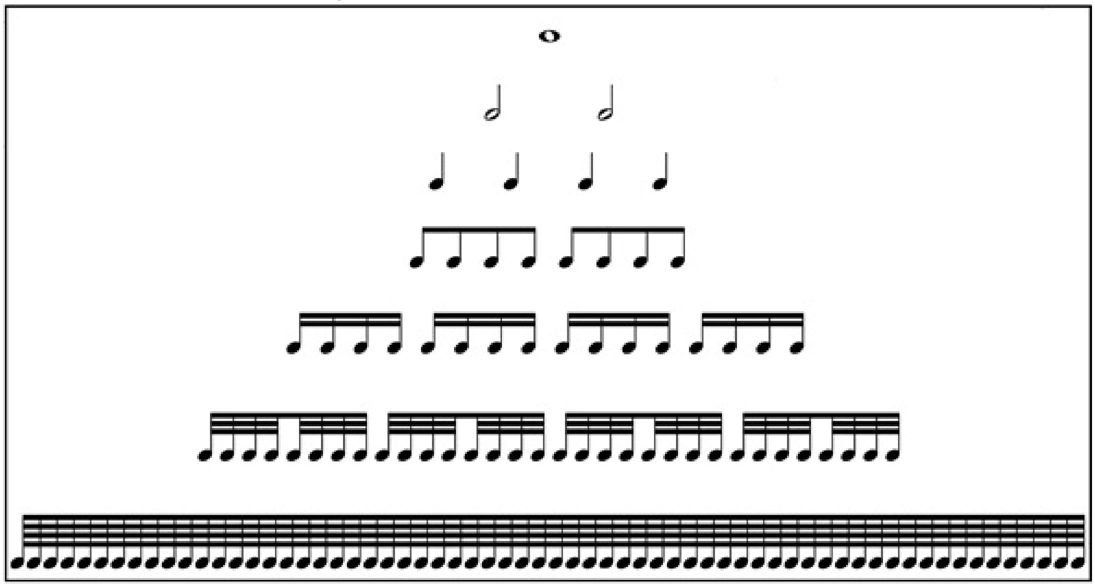
Figura 7: Representação das figuras de som e de silêncio



Fonte: Próprio autor

Há uma relação entre os valores das figuras de som (e também de silêncio). Começando pela semibreve, passando pela mínima, semínima e, até chegar a semifusa, a relação entre uma figura e a seguinte é de 1 para 2, ou seja, uma semibreve corresponde a duas mínimas, uma mínima corresponde a duas semínimas e assim sucessivamente. De acordo com Med (20017, p. 27), esta é a divisão binária de valores, como podemos ver na figura 8:

Figura 8: Divisão binária de valores



Fonte: Próprio autor

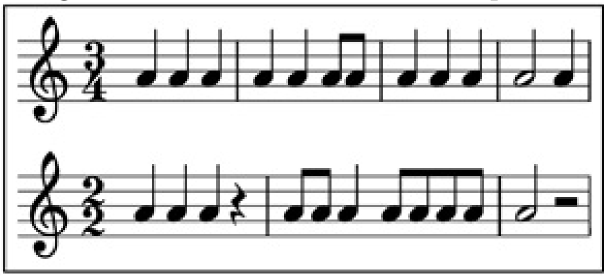
Além do pentagrama, das notas e dos seus respectivos valores, destacamos a necessidade de abordarmos um pouco sobre compasso musical, que é definido por Lacerda (p. 17), como a "divisão da música em pequenas partes de duração igual ou variável". A classificação de um compasso varia conforme a quantidade de tempos que ele possui. Se um compasso possui dois tempos ele é chamado binário, se possui três, ternário, quatro, quaternário e assim sucessivamente. "Os compassos são separados por uma barra vertical, chamada barra de compasso ou travessão" (MED, p. 113), conforme expomos na figura 9:

Figura 9: Compassos musicais

Fonte: Próprio autor

O compasso é definido, inicialmente, pela fórmula de compasso, que é basicamente uma expressão escrita na forma de uma fração, colocada geralmente no início de uma peça musical, onde o numerador indica quantas figuras cabem no compasso e o denominador, a espécie dessa figura (MED, 2017). O compasso $\frac{3}{4}$, por exemplo, indica que cabem três semínimas dentro dele, enquanto que o compasso $\frac{2}{2}$, indica que cabem duas mínimas dentro dele. Podemos colocar figuras diferentes das indicadas na fórmula de compasso, bem como alterná-las com pausas e outros sinais, desde que seja respeitada a fórmula de compasso. A figura 10, apresentada a seguir, mostra diversas formas de preenchimento de compassos.

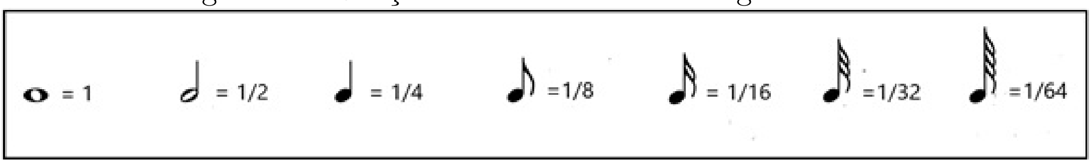
Figura 10: Preenchimento de compassos



Fonte: Próprio autor

Na figura 11, abaixo exposta, demostramos o porquê do denominador 4 (quatro), na fórmula de compasso, indicar a semínima, o denominador 2 (dois), indicar a mínima, bem como outras referências de valores dadas por outros denominadores.

Figura 11: Relação entre os valores das figuras de som



Fonte: Próprio autor

3.4 Notas musicais, intervalos e alterações

Muitos são os sons utilizados na música. No entanto, para representá-los, utilizamos basicamente 7 notas. São elas: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si (MED, 2017). Este conjunto de notas se repete de 7 em 7, de modo que, ascendentemente, as notas vão ficando mais agudas, enquanto que, descendentemente, vão ficando mais graves (LACERDA, 1966), conforme representamos no seguinte esquema.

$$\text{mais grave} \xleftarrow{\quad} \overset{\text{...- Dó - Ré - Mi - Fá - Sol - Lá - Si - Dó - Ré - Mi - Fá - Sol - Lá - Si -...}}{\longleftrightarrow} \xrightarrow{\quad} \text{mais agudo}$$

As notas possuem uma diferença de altura entre si. Essa diferença é chamada, segundo Lacerda (1966), de intervalo. Na música ocidental, o menor intervalo, ou seja, a menor distância entre duas notas é chamada de semitom (ou meio tom). O tom, por sua vez, corresponde a distância de dois semitons somados. Observemos, na figura 12, a distância entre as notas, partindo de um dó, até a sua primeira repetição.

Figura 12: Distâncias entre as notas musicais naturais

<table>
<tr><td colspan="2">Tom</td><td colspan="2">Semitom</td><td colspan="2">Tom</td><td colspan="2">Semitom</td></tr>
<tr><td>Dó</td><td>Ré</td><td>Mi</td><td>Fá</td><td>Sol</td><td>Lá</td><td>Si</td><td>Dó</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Tom</td><td colspan="2">Tom</td><td colspan="2">Tom</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Próprio autor

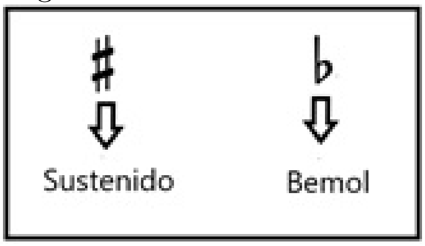
Notemos que, apenas nos intervalos, mi - fá e si - dó, é que temos uma distância de meio tom. Estes são os chamados semitons naturais. Nos demais, a distância entre as notas consecutivas é de um tom. Assim, somando todas as distâncias, de um dó a outro dó (como mencionado acima) temos:

$$1 \text{ Tom} + 1 \text{ Tom} + \tfrac{1}{2} \text{ Tom} + 1 \text{ Tom} + 1 \text{ Tom} + 1 \text{ Tom} + \tfrac{1}{2} \text{ Tom} = 6 \text{ Tons}$$

A essa distância damos o nome de oitava. De modo que, se a dividirmos em partes de meio tom obtemos um total de 12 semitons. Nisto consiste basicamente o sistema musical ocidental (também conhecido como sistema temperado). Assim, já não são somente 7 notas, mas 12. As outras 5 notas são obtidas através de alterações nas notas cujas distâncias são de 1 tom.

Essas alterações recebem o nome de acidentes musicais. As mais usuais são o sustenido e o bemol, apresentados na figura 13, a seguir:

Figura 13: Acidentes musicais



Fonte: Próprio autor

Ao ser colocado junto à nota, o sustenido faz com que a altura da mesma seja elevada em meio tom. Por exemplo, Dó# (lemos: dó sustenido) é uma nota cuja altura é meio tom superior à da nota Dó. O bemol, por sua vez, ao ser colocado junto à nota, faz com que a altura da mesma seja diminuída em meio tom. Por exemplo, Lá *b* (lemos: lá bemol) é uma nota cuja altura é meio tom abaixo da nota Lá.

Outro sinal importante nessa questão é o bequadro (Figura 14), cujo símbolo está representado na figura abaixo. Ele basicamente anula qualquer acidente, fazendo com que a nota volte à sua altura primitiva (LACERDA, 1966).

Figura 14: Bequadro

Fonte: Próprio autor

Além dos acidentes musicais aqui citados, há outros como o dobrado sustenido que eleva a altura da nota em dois semitons e, o dobrado bemol, que reduz a altura da nota em dois semitons.

Todos os conceitos apresentados nesta seção podem ser aprofundados, pois possuem particularidades, além de diversos exemplos de aplicações e formas de se utilizar. Entretanto, para fins de desenvolvimento do presente estudo, a ênfase pairou sobre a conceituação e a exemplificação, fornecendo aos alunos noções básicas do contexto e da linguagem musical.

4 Metodologia

Nesta seção fazemos uma descrição da metodologia empregada para o desenvolvimento da pesquisa, caracterizando-a, apresentando os seus sujeitos, bem como o campo da pesquisa. Trazemos ainda a técnica e o instrumento utilizados na apreensão dos dados e, por fim, os procedimentos que realizamos no processo de análise desses dados.

4.1 Caracterização da pesquisa

A pesquisa é definida, segundo Gil (2010, p. 1), como "o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos".

Este trabalho foi construído com o intuito de criar e apresentar propostas de ensino de conceitos matemáticos através da música. Neste sentido, a pesquisa tem um teor prático, mostrando as experiências vividas pelos sujeitos envolvidos durante o desenvolvimento do trabalho. Por essa razão, esta pesquisa é de natureza aplicada, pois, conforme Gil (2010), trata-se de uma pesquisa que tem por finalidade resolver problemas identificados no âmbito em que vivem os pesquisadores.

Em relação à abordagem, destacamos que para atender às necessidades da pesquisa, ora precisamos quantificar dados para análise e apresentação, ora precisamos levar em consideração as opiniões dos participantes da pesquisa. Neste sentido, a abordagem escolhida foi a mista, pois combina dados quantitativos e qualitativos (MACÊDO; EVANGERLANDY, 2018).

Para o encaminhamento do presente trabalho foi necessária uma busca inicial por informações que relacionassem matemática e música na história, na natureza e, sobretudo, na educação. Só então, depois disso, é que este estudo começou a ser delineado, ao se delimitar o tema da pesquisa, ao fixar os objetivos, bem como a formulação de uma hipótese. Neste sentido, levando em consideração os seus objetivos, esta pesquisa pode ser caracterizada como exploratória, pois, além do que já fora citado, envolve no seu desenvolvimento levantamentos biográficos, bem como análise de exemplos que estimulam a compreensão do estudo em questão (PRODANOV; FREITAS, 2013).

No intuito de atendermos aos objetivos propostos, apresentamos uma série de sequências didáticas produzidas e aplicadas em sala de aula com os sujeitos envolvidos neste processo investigativo. Por isso, em relação aos procedimentos técnicos, o trabalho é caracterizado como sendo de campo.

4.2 Campo da pesquisa

O presente trabalho foi desenvolvido em uma escola da rede municipal de Teresina, situada na zona leste da referida cidade, capital do estado do Piauí. A escola foi fundada no ano de 1994, atendendo inicialmente ao público do Ensino Fundamental I, na época da 1ª a 4ª série. Posteriormente, passou a oferecer o Ensino Fundamental completo, da 1ª a 8º série, funcionando nos três turnos, sendo manhã e tarde, ensino regular, e à noite, na modalidade da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

A escola passou por algumas reformas durante o período de sua existência, a mais recente foi em 2017. Seu espaço físico possui uma área aproximada de 6.809,96 m^2, sendo que a área construída chega a ser, aproximadamente 2.284,77 m^2. Hoje, a escola conta com 14 salas de aula, 1 biblioteca, 1 laboratório de ciências, 1 laboratório de matemática, 1 sala de recursos para Atendimento Educacional Especializado (AEE), 1 sala de professores, 1 secretaria e 1 sala de coordenação pedagógica e direção. Conta ainda com 1 cozinha, 1 refeitório, 1 quadra de esportes coberta, 1 pátio coberto, 4 banheiros para alunos, sendo 2 adaptados para pessoas com deficiência física e, ainda, 2 banheiros para professores.

A última reforma teve o objetivo de preparar a estrutura da escola para passar a funcionar em tempo integral, atendendo, de segunda a sexta-feira, nos turnos manhã e tarde, das 7:30h às 16:30h, apenas alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). A instituição continua, até a presente data, atendendo a demanda de alunos na modalidade EJA, no turno da noite.

Em relação ao quadro de pessoal, conta, atualmente, com 4 pessoas compondo a gestão, 5 merendeiras, 3 agentes de portaria, 6 zeladores, 2 bibliotecários, 4 secretárias e um total de 47 professores, sendo 28 efetivos, 6 substitutos e 13 estagiários.

Quanto aos discentes, a escola atende um total de 530 no tempo integral (manhã e tarde), distribuídos em 14 salas, do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Já a noite, na modalidade EJA, funcionam 6 salas, com um total de 150 estudantes.

4.3 Sujeitos da pesquisa

No tempo integral, a escola funciona com um horário diário de 7 horas/aulas e, por semana, 35 horas/aulas. Cada turma conta com uma carga horária de 9 horas/aulas de matemática, sendo 6 horas para as atividades regulares e 3 horas para atividades de prática matemática. Sendo assim, a pesquisa foi feita com uma turma de 9º ano, escolhida por conveniência de horário do pesquisador e também da própria turma, dentro do que seria o seu horário de prática matemática, cedido pela escola mediante ofício emitido pela coordenação do PROFMAT, utilizando apenas 2 horas, das 3 horas semanais a que são destinadas para tal prática. A turma escolhida possui um total de 39 alunos, sendo 17 do sexo masculino e 22 do sexo feminino, todos na faixa etária de 13 a 15 anos.

Nesse sentido, o desenvolvimento da pesquisa não interferiu no horário normal de aula da referida turma, não apresentou qualquer necessidade de custos por parte dos alunos, bem como não implicou em idas à escola em horários ou dias diferentes dos que já compõem a sua jornada escolar diária e semanal. Contudo, para viabilizar a realização da pesquisa, o pesquisador solicitou uma reunião com os pais (ou responsáveis) dos alunos para apresentar-lhes o trabalho e colher assinaturas de autorização dos mesmos para a participação na presente pesquisa. Mesmo com a autorização dos pais, foi facultado ao aluno o direito de escolher participar ou não desta investigação, sem qualquer prejuízo para os seus estudos.

Todos os alunos envolvidos na pesquisa tiveram preservadas as suas identidades, sendo que qualquer atividade produzida por eles, bem como os preenchimentos dos questionários e entrevistas colhidos não tiveram qualquer traço que permitisse a quebra do anonimato dos mesmos.

4.4 Técnica e instrumento de apreensão dos dados

Chizzoti (2010, p. 45) afirma que "antes de ir a campo, é necessário elaborar o questionário, o esquema da entrevista, a grade de observação, as questões do texto etc. e o registro dos dados fundamentais da pesquisa". Em outras palavras, precisamos construir adequadamente as técnicas e/ou os instrumentos de apreensão de dados, embasados nos objetivos e nas questões norteadoras da pesquisa. Mas, por que isso é tão importante?

Para respondermos a essa pergunta, observamos o que nos diz Barbosa[2] (2005):

[2]Disponível em: `http://www.inf.ufsc.br/~vera.carmo/Ensino_2013_2`, acesso em 22/08/19.

> Um sistema de monitoramento e avaliação de projetos só pode ser implementado com sucesso com a definição dos meios para obtenção de dados confiáveis sobre processos, produtos e resultados. Um sistema de avaliação, mesmo com um planejamento perfeito, pode fracassar inteiramente se dos dados necessários para análise não puderem ser obtidos, ou se os mesmos são imprecisos ou sem confiabilidade.

Neste sentido, a etapa da construção dos instrumentos de apreensão de dados de uma pesquisa destaca-se por sua fundamental influência no resultado final do trabalho, mais especificamente, na análise dos resultados e, consequentemente, nas conclusões do estudo.

Diante do que fora exposto e, levando em consideração os objetivos do presente estudo, selecionamos o seguinte instrumento e técnica para que nos possibilitassem a apreensão dos dados no desenvolvimento deste trabalho investigativo:

1) O Questionário, que é um conjunto de questões (abertas e/ou fechadas) sobre um tema ou problema, que sejam previamente construídas, para serem respondidas por um interlocutor, de forma escrita ou oralmente (CHIZZOTTI, 2010).

2) A Entrevista, que é uma comunicação entre dois interlocutores, o pesquisador (entrevistador) e o informante (entrevistado), com o intuito de esclarecer uma questão. A entrevista pode ser livre, estruturada ou semiestruturada, caso tenha ou não perguntas específicas (ou não) sobre um determinado tema (CHIZZOTTI, 2010).

Em relação ao instrumento questionário, fizemos uso no início do desenvolvimento prático da pesquisa, aplicando o que definimos como questionário inicial, cujo intuito era de verificar a relação que os sujeitos da pesquisa tinham com o tema do estudo, levantar qualquer informação que mostrasse a vivência de alguma experiência semelhante ao que seria proposto nesta pesquisa, bem como identificar e avaliar o nível de conhecimento que os participantes tinham do conteúdo pertinente ao estudo em questão, identificando assim o perfil inicial da turma, de modo que pudéssemos saber, inclusive as suas expectativas quanto ao desenvolvimento do projeto apresentado. Nessa aplicação, os sujeitos foram identificados como termos indexados, sendo A_1 para o primeiro aluno, A_2 para o segundo e assim sucessivamente, conforme a devolutiva do questionário aplicado.

Em relação à entrevista, o uso desta técnica foi feito em um único momento, posterior aos estudos aplicados. Para tanto, solicitamos aos alunos que, aqueles que desejassem participar deste momento final, fizessem algum sinal. Como o número dos que queriam ser entrevistados foi superior a 4 (o que corresponde a um pouco mais de 10% do total dos alunos), realizamos um sorteio para que pudéssemos selecionar essas 4 pessoas[3] e prosseguir com a entrevista, que seguiu, portanto, de forma individual, levando um tempo estimado de 10 minutos por aluno. Utilizamos uma forma semiestruturada de entrevista para que o aluno, através das perguntas direcionadoras, pudesse expor suas impressões, fazer auto avaliação da sua participação na pesquisa, avaliação do trabalho aplicado, bem como dar suas sugestões para o estudo. Nessa etapa, seguindo a ordem de entrevista, os sujeitos foram identificados pelo sequencial A, B, C e D.

4.5 Procedimentos de análise e interpretação dos dados

Depois de elaborados os instrumentos de apreensão de dados e feitas as suas devidas aplicações, tomamos posse das informações colhidas durante a pesquisa. E, antes de passarmos a interpretar e analisar essas informações, precisamos organizá-las de forma sistemática, de modo a facilitar a visualização, leitura e identificação das mesmas. Desta feita, seguimos em frente.

Para Prodanov e Freitas (2013, p. 112), "A análise e a interpretação desenvolvem-se a partir das evidências observadas, de acordo com a metodologia, com relações feitas através do referencial teórico e complementadas com o posicionamento do pesquisador". Neste sentido, esta etapa reúne tudo o que foi construído na metodologia do presente estudo, incluindo ainda os dados apreendidos no trabalho de campo, os textos e autores que utilizamos como referência de pesquisa e embasamento teórico, bem como as experiências que vivenciamos no desenvolvimento desta pesquisa.

Assim, retomando a abordagem escolhida para a presente pesquisa, fizemos uso de meios de análise e interpretação de dados, tanto estatístico como de análise de conteúdo. O primeiro, observando o fato de podermos utilizar esta técnica de análise com os dados apreendidos através dos questionários, ora registrando a frequência, ora fazendo comparações, correlações, associações, etc. O segundo, empregado para a construção de textos que mostrem o teor do conteúdo extraído das entrevistas feitas, expressando a realidade das opiniões dos entrevistados, bem como as impressões do próprio pesquisador entrevistador.

[3]Como a pesquisa é mista e, neste caso, estamos buscando opiniões dos alunos, o número de alunos participantes da entrevista não invalida as inferências, pois o foco neste caso não é a quantificação. Dessa forma, poderíamos ter selecionado, inclusive, menos alunos (ou mesmo mais), sem prejuízo para a pesquisa.

5 A música nas aulas de matemática

Nesta seção abordamos a utilização da música nas aulas de matemática, destacando-a como recurso didático, fazendo uso de paródias que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem, além de propor, estruturar e apresentar a aplicação de sequências didáticas de matemática com música e, ainda, propondo o uso de instrumentos musicais na sala de aula, por meio de oficinas de experimentação e construção desse recurso.

5.1 A música como recurso didático

A música está presente em nosso dia a dia, em diferentes estilos e idiomas, sendo apreciada por muitas pessoas em todo o mundo. Está presente ainda na história das civilizações antigas, nas diferentes culturas, religiões, sendo, ainda, um elemento de comunicação e expressão artística, sentimental, um legado que, com o tempo, evoluiu e foi aprimorada, ganhando uma linguagem própria, bem como um teor científico.

Nos dias atuais, a música tem sido utilizada para diversos fins, levando em consideração os seus muitos benefícios, bem como sua vasta aplicação nos diferentes segmentos de estudo, como, por exemplo, a musicoterapia, que é, segundo a União Brasileira das Associações de Musicoterapia (UBAM[4] , 2018):

> Um campo de conhecimento que estuda os efeitos da música e da utilização de experiências musicais, resultantes do encontro entre o/a músico terapeuta e as pessoas assistidas. A prática da Musicoterapia objetiva favorecer o aumento das possibilidades de existir e agir, seja no trabalho individual, com grupos, nas comunidades, organizações, instituições de saúde e sociedade, nos âmbitos da promoção, prevenção, reabilitação da saúde e de transformação de contextos sociais e comunitários; evitando dessa forma, que haja danos ou diminuição dos processos de desenvolvimento do potencial das pessoas e/ou comunidades.

Neste sentido, observando os benefícios que a música pode trazer as pessoas, aproveitando, ainda, do seu poder de influência e interação, propomos no presente estudo uma forma de se utilizar da música como um recurso didático. Ressaltamos que esta não se trata de uma proposta inovadora, tendo em vista a utilização da música em sala de aula, sobretudo na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, onde se concentra inclusive, grande parte dos trabalhos que se relacionam a essa temática específica, possivelmente em virtude das Diretrizes Nacionais para a operacionalização do

[4]Disponível em: `http://ubammusicoterapia.com.br/definicao-brasileira-de-musicoterapia/`.

ensino de música na Educação Básica, conforme o parecer 12/2013 do CNE/CEB, aprovado em 04/12/2013, que trata das competências e especificidades relativas ao ensino de música nessa etapa da escolaridade, onde menciona, em destaque, a inserção de conteúdos que envolvam música no processo de formação dos profissionais de Pedagogia, a fim de capacitá-los a desenvolverem atividades concernentes a esse processo específico de formação.

Observamos ainda, segundo o parecer citado no parágrafo anterior, que quando se trata dos anos finais do Ensino Fundamental, bem como no Ensino Médio, o texto do parecer não apresenta diretrizes específicas sobre a operacionalização do ensino de música, nestas etapas da Educação Básica. Entretanto, levando em consideração as necessidades crescentes de desenvolvimento de práticas educativas diversificadas, inclusive em outras etapas da Educação Básica, neste caso, nos anos finais do Ensino Fundamental, utilizamos a música como um recurso didático que auxiliasse as sequências didáticas propostas neste trabalho, através de paródias com os temas trabalhados, procurando, de algum modo, possibilitar aos alunos uma forma alternativa de ver determinado conteúdo para que, se possível, melhorasse, em alguns aspectos, a apropriação conceitual em sua parte mais formal, que exige, inclusive, um pouco mais de cálculo, bem como, em alguns casos, a memorização de formas ou regras de operação.

Mas, o que vem a ser uma paródia? A resposta para essa pergunta pode ser um tanto longa e complexa, em virtude da existência de vários significados, além de uma história própria relacionada à origem do termo em si, conforme sua etimologia, interpretação e, até mesmo modificação (ou agregação) dos significados ao longo do tempo. Entretanto, apresentamos uma definição mais simples, conveniente à proposta do presente trabalho, dada por Machado (2015, p.14), ao dizer que a "paródia é a modificação da letra original de uma música... utilizada, por exemplo, em campanhas eleitorais... propaganda de produtos... programas de humor... desenhos."

Com base nesse entendimento, selecionamos algumas músicas, modificamos as suas letras e as utilizamos em sala de aula, ressaltando que esta é uma prática permitida por lei, conforme o Art. 47 da lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, que fala dos direitos autorais.

5.2 Sequência didática

Nesta subseção tratamos acerca das sequências didáticas, apresentando formas de definição e meios de estruturação que serviram de base para a produção das sequências didáticas que produzimos e cujos relatos de aplicação são apresentados nas subseções 5.3 e 5.4 do presente texto.

5.2.1 O que é?

Para Lima (2007, p.159):

> As aplicações constituem para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe. Encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor. Elas devem fazer parte das aulas, correr em muitos exercícios e ser objeto de trabalhos de grupo.

Neste sentido, é que procuramos, através do presente estudo, trazer a música para a sala de aula, fazendo o uso da mesma, em suas múltiplas formas de estudo e aplicação em conceitos matemáticos. Por essa razão, optamos por elaborar sequências didáticas que nos permitissem uma melhor aproximação dos temas matemáticos em estudo aos conceitos musicais que pudessem ser relacionados com os mesmos.

Mas, o que vem a ser uma sequência didática? Segundo Zabala (1998, p. 18), as sequências didáticas são um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores, como pelos alunos". Em outras palavras, consiste em método de ensino organizado em etapas, compostas por atividades que seguem uma sequência preestabelecida, tendo cada uma delas um objetivo específico que, aliado aos demais, conduz ao objetivo geral de ensino definido na estruturação da sequência didática.

Cabral (2017, p. 12), aplicando à matemática, afirma que sequência didática é:

> [...] um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas.

Assim entendida, uma sequência didática reúne diversas ferramentas de ensino que possibilitam a realização de um trabalho ordenado e coeso, construído com intuito de proporcionar ao aluno a experiência de realizar atividades que lhe permitam aguçar sua observação, formular ideias e estabelecer conexões entre os conteúdos estudados.

Dessa forma, além de trazer em si o conteúdo ministrado, uma sequência didática busca, em suas etapas e atividades, despertar o interesse do aluno pelo tema em questão, bem como manter o seu olhar atento ao desenvolvimento do trabalho, tornando-o um participante ativo do processo de ensino-aprendizagem, à medida que realiza as atividades propostas pela sequência didática.

5.2.2 Como estruturar?

As definições de sequências didáticas vistas anteriormente nos dão uma base do que é necessário para construir uma sequência didática. Se tivermos um tema ou conteúdo definido, assim como os objetivos, podemos construir uma sequência didática, suas atividades, bem como suas formas de aplicação. Assim, adotamos aqui um modelo desenvolvido por Cabral (2017) para a estruturação de sequências didáticas, no qual, o referido autor se utiliza de Unidades Articuladoras de Reconstrução Conceitual (UARC), que são, basicamente, as etapas que compõem uma sequência didática. O referido modelo é composto por 06 (seis) categorias, definidas pelo próprio autor, a saber: Intervenção Inicial (Ii), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (Ie), Intervenção Formalizante (If), Intervenção Avaliativa Restritiva (IAr) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa). Destacamos que o termo "intervenção", utilizado pelo autor refere-se, como ele mesmo destaca, apenas na intencionalidade de cada atividade proposta.

A fim de esclarecer sobre cada uma das categorias acima mencionadas, explicamos ainda, com base no referido autor, que:

1) a Intervenção Inicial é o ponto de partida da sequência didática, o primeiro elemento dessa construção, que visa estimular a percepção dos alunos quanto a alguma ideia matemática.

2) a Intervenção Reflexiva se caracteriza por um questionamento, ou seja, os alunos são estimulados a refletir sobre o que estão fazendo, bem como sobre as consequências das atividades que estão desenvolvendo.

3) a Intervenção Exploratória busca fazer com que o aluno se aprofunde nas ideias que

teve ao responder (ou pelo menos tentar) aos questionamentos a que foram orientados na categoria anterior, momento em que os alunos são convidados a realizar tarefas de experimentação, de exploração do tema, seja construindo gráficos, preenchendo tabelas, entre outras.

4) a Intervenção Formalizante é o momento em que o professor sintetiza o que foi construído até então, trazendo as definições formais, com a terminologia e a linguagem próprias do conteúdo em destaque. É onde entram também as propriedades, as regras, os métodos de manipulação algorítmica e operacional.

5) a Intervenção Avaliativa Restritiva é o primeiro teste de aprendizagem do conceito que foi (re) construído até então no desenvolvimento da sequência didática. Chama-se restritiva ainda pelo fato de se resumir apenas a uma avaliação conceitual e de manipulação do conteúdo estudado. Em outras palavras, visa verificar se o aluno entendeu as ideias bases do conteúdo e se sabe manusear o mesmo dentro do contexto em que foi apresentado.

6) a Intervenção Avaliativa Aplicativa é a etapa final, momento em que os alunos são colocados para resolver problemas de aplicação. Neste momento, a avaliação sai do contexto inicial, das regras e operações trabalhadas e busca verificar se os alunos se apropriaram do conceito abordado, se conseguem fazer relações do mesmo em diferentes contextos com o propósito de resolver os problemas a que são propostos.

5.3 Sequência didática de frações

Apresentamos a seguir o desenvolvimento da sequência didática elaborada para resolver problemas envolvendo adição e subtração de frações. A escolha desse tema foi feita levando em consideração as relações entre o conteúdo e o seu potencial uso em relação à música, sobretudo no que se refere à escrita musical. Outro fator que influenciou a nossa escolha foi a dificuldade recorrente que os alunos, em geral, têm tido com esse conteúdo em específico. Assim, seguindo a estrutura apresentada anteriormente, elaboramos e desenvolvemos a sequência didática, como segue:

Inicialmente, entregamos, para cada aluno, uma cópia com a descrição da sequência didática a ser desenvolvida que começou com uma atividade de execução rítmica, que consistiu basicamente em gerar sons com a boca, especificamente utilizando a sílaba TÁ, variando a sua duração conforme as figuras musicais descritas em um trecho musical dado. Neste momento, retomamos os nomes, conceitos e significados das figuras de som e silêncio, bem como das fórmulas de compassos e outros que foram vistos na apresentação dos conceitos básicos de teoria musical. Na sequência, fizemos a execução do primeiro trecho musical, dando aos alunos o exemplo de como deveriam proceder. Assim, puderam executar o trecho exemplificado e mais outro proposto, finalizando essa atividade, considerada como nossa intervenção inicial.

Prosseguindo com a sequência didática, os alunos foram conduzidos a um momento de reflexão, relacionado à atividade anterior. Eles tinham que observar os trechos musicais que haviam executado e responder algumas perguntas contidas nas cópias da sequência didática que tinham em mãos. Como exemplo, deveriam verificar se os compassos tinham as mesmas quantidades de tempos e se havia compassos iguais nos dois trechos musicais dados. Após o tempo para eles refletirem, fizemos a correção dessa atividade, destacando a observação que eles deveriam dar para a contagem dos tempos de cada compasso.

Em continuidade, propomos duas atividades para que, ao realizá-las, os alunos pudessem explorar as ideias e o conhecimento que obtiveram e a que foram conduzidos. Assim, eles estiveram preenchendo compassos que estavam incompletos, bem como colocando as barras de compassos que faziam a separação entre o fim de um compasso e início de outro. Em todo o momento acompanhamos a realização das atividades, tirando dúvidas dos alunos e fazendo correções, quando necessárias.

Dando prosseguimento, o passo seguinte era formalizar as ideias e, dessa forma, pudemos apresentar as operações de adição e subtração com frações. Dessa forma, mostramos aos alunos que, diante de uma adição ou subtração de frações com denominadores iguais, eles deveriam, segundo Silveira (2015), adicionar ou subtrair os numeradores, ao passo que repetiriam os denominadores. E, caso os denominadores fossem diferentes, os alunos deveriam, ainda segundo Silveira (2015), encontrar frações equivalentes às iniciais, igualando os denominadores e, depois disso, somar ou subtrair essas frações. Fizemos diversos exemplos seguindo os procedimentos descritos e, ao final, apresentamos ainda uma paródia (Apêndice B) que elaboramos com intuito de resumir as ideias apresentadas para a execução de uma adição e uma subtração de frações. Depois de cantar a paródia, fizemos uma análise da letra, para ver se esta se adequava aos procedimentos descritos para adicionar ou subtrair uma fração. Além disso, buscamos mostrar que, enquanto realizavam as contagens dos tempos nas atividades anteriores, eles estavam a somar frações e que, quando tentavam descobrir as figuras que faltavam para preencher os compassos, estavam subtraindo frações do inteiro que era representado pelo compasso.

Depois desse momento, passamos a uma avaliação, restrita apenas as técnicas operacionais trabalhadas e a problemas que estivessem dentro do contexto inicial, voltado para a música. Assim, os alunos estiveram realizando uma série de adições e subtrações de frações com denominadores iguais e/ou diferentes e também foram desafiados a resolver problemas semelhantes aos que puderam ver na etapa de exploração, só que agora com um nível mais alto[5].

Finalizando a sequência didática, fizemos outra avaliação, com situações problemas fora do contexto inicial, que poderiam ser resolvidos com adição e subtração de frações. Dessa forma, pudemos verificar as compreensões, por parte dos alunos, do conhecimento trabalhado, mais especificamente, aplicado à resolução de problemas em diversos contextos.

5.4 Sequência didática de Princípio Fundamental da Contagem

Apresentamos a descrição do desenvolvimento da sequência didática de Princípio Fundamental da Contagem, aplicada com os sujeitos da nossa pesquisa.

Começamos esta sequência didática entregando uma cópia contendo as atividades que seriam desenvolvidas. Assim, propomos aos alunos uma atividade inicial, que consistia em preencher o maior número de compassos musicais diferentes utilizando apenas as figuras que foram disponibilizadas, a saber, semínima e sua pausa.

Depois de um tempo aproximado de 5 minutos, conduzimos os alunos a um momento de reflexão acerca do que tinham produzido. Eles foram perguntados sobre a quantidade de compassos que haviam conseguido preencher e se saberiam dizer se a quantidade que encontraram representaria, de fato, o número máximo de compassos distintos. Depois de observadas as respostas, fizemos a construção dos compassos e pedimos que os alunos estivessem comparando com o que haviam feito.

Em seguida, como intervenção exploratória, solicitamos aos alunos que estivessem preenchendo o maior número de compassos, utilizando agora 3 figuras (as duas anteriormente mencionadas e uma outra, a colcheia), conforme as orientações estabelecidas. Finalizamos esse momento observando as respostas dos alunos.

Dando prosseguimento à sequência didática, chegamos ao momento da intervenção

[5]Questões extraídas de: concurso professor de matemática (SEMEC-2016); ENEM (2009).

formalizante, onde pudemos apresentar o Princípio Fundamental da Contagem, conforme definido por Morgado e Carvalho (2015), que diz "[...] se há x modos de tomar a decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.". Dessa forma, apresentamos alguns exemplos, mostrando o procedimento de resolução, mais especificamente, como identificar as decisões de forma organizada para, então, aplicar o Princípio de forma correta.

Posteriormente, passamos à intervenção avaliativa restritiva, voltando ao contexto inicial, propondo aos alunos um problema com preenchimento de compassos. Eles deveriam dizer quantos compassos distintos poderiam ser preenchidos com as figuras dadas (conforme as orientações) sem desenhar os compassos. Deixamos que tentassem resolver o problema utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, com orientações (APÊNDICE C) para quem tivesse dificuldade de identificar a relação. Finalizamos esse momento apresentando para os alunos a resolução do problema, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, procedendo conforme os exemplos da etapa de formalização feita anteriormente.

Dando continuidade à sequência didática, passamos ao momento em que fizemos a intervenção avaliativa aplicativa, solicitando aos alunos que respondessem uma lista de problemas, em diversos contextos, seguindo os procedimentos e estratégias mostrados, aplicando assim, o Princípio estudado. Após o tempo gasto na resolução dos problemas, solicitamos aos alunos que compartilhassem as suas respostas, comparando os resultados obtidos com os obtidos pelos colegas. Observadas as respostas, finalizamos a sequência didática corrigindo os problemas propostos, apresentando assim a sua solução.

5.5 Construção de instrumentos musicais

Nesta subseção apresentamos o uso de instrumentos musicais na sala de aula, tanto como experimentação, como através de construções, destacando a matemática presente neste contexto. Na experimentação, repetimos o feito de Pitágoras com o monocórdio. Na construção, apresentamos a descrição da atividade realizada para confeccionar um xilofone de garrafas e uma flauta de Pan.

5.5.1 Refazendo a experiência do monocórdio

Na seção 2 do presente trabalho estivemos apresentando um pouco da história de Pitágoras, destacando, sobretudo, a relação e a contribuição que ele dera para a música, especialmente na realização do experimento com o monocórdio que ele mesmo fizera. O monocórdio de Pitágoras era composto apenas por uma espécie de prancha, sobre a qual fora colocada dois cavaletes fixos e uma corda esticada entre estes, conforme nos diz Abdounur (2015). Entretanto, mesmo com a simplicidade, o experimento de Pitágoras destaca-se na história por sua importância, podendo ser considerado o ponto de partida para o estudo da música enquanto ciência.

Assim, observando a relevância da herança musical deixada por Pitágoras com o seu monocórdio, procuramos, no presente estudo, uma forma de proporcionar aos alunos o reviver da experiência realizada pelo referido pensador grego. Para tanto, construímos um monocórdio, fazendo algumas adaptações, inspiradas em um vídeo da TV Escola[6] e também na estrutura de um violão. Assim, acrescentamos uma corda ao monocórdio e este passou a ter duas, afinadas na mesma nota, conforme a figura 15.

Figura 15: Monocórdio adaptado

Fonte: Próprio autor

Dessa forma, pudemos realizar o experimento com os alunos. Uma das cordas ficava fixa em seu comprimento e era tocada para comparar o som com a outra que variava o seu comprimento com o deslocamento do cavalete móvel sobre a superfície do monocórdio.

Dando sequência a atividade, estabelecemos um roteiro de ações a serem executadas pelos alunos que, à medida que as realizavam, eram instruídos acerca de determinados ter-

[6]Disponível em
`https://api.tvescola.org.br/tve/video/matematica-em-toda-parte-matematica-na-musica`.

mos, conceitos como consonância e dissonância que, embora antes comentados, pareciam agora lhes fazer mais sentido durante a atividade prática.

Dessa forma, mediante o roteiro de ações, os alunos puderam comparar os sons que eram gerados ao tocar as cordas, verificando inclusive que, quanto mais se encurtava o comprimento de uma corda, mais agudo ficava o som. Além disso, os alunos puderam medir a distância entre os cavaletes fixos (Figura 16) e, a partir dessa distância, calcular as medidas correspondentes a 1/2, 2/3 e a 3/4 da distância medida inicialmente, como pode ser visto na figura 16. Com isso puderam ver e ouvir, na situação vivenciada, os intervalos de "consonância perfeita" identificados por Pitágoras.

Figura 16: Medindo a distância entre os cavaletes fixos

Fonte: Próprio autor

5.5.2 Construindo um xilofone de garrafas

Segundo Massin (1997), o xilofone é originário provavelmente de Java, uma ilha da Indonésia. É um instrumento de percussão, composto por lâminas de madeira, dispostas geralmente em duas fileiras, tocadas por baquetas de ebonita, uma espécie de resina de origem vulcânica. O uso desse instrumento na Europa vem desde o século XVI, sendo, pela primeira vez, utilizado em orquestra numa música chamada Dança Macabra, de Saint-Saëns.

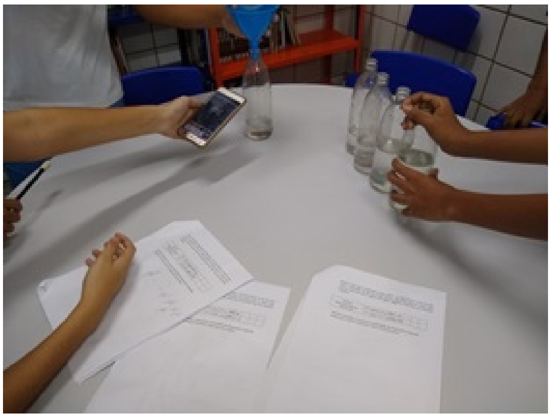
Hoje é comum encontrar xilofones de diversos modelos e tamanhos, bem como de diferentes materiais. Assim, propomos aos alunos a construção de xilofones utilizando garrafas de vidro, todas com mesmo tamanho e formato, variando apenas a quantidade de água colocada no interior de cada garrafa.

Para a realização dessa atividade, disponibilizamos para os alunos os materiais necessários, a saber: garrafas de vidro (originalmente utilizadas para comportar cajuína), copo com marcação para medir líquidos, funil, lápis com borracha, afinador e água. Além desses materiais, elaboramos um roteiro que estabelecia algumas ações para que os alunos tivessem a oportunidade de experimentar e entender a estrutura base de funcionamento do instrumento específico.

Dessa forma, solicitamos, aos alunos, através do roteiro, que colocassem uma quantidade qualquer de água na garrafa e, logo em seguida, tocassem a garrafa utilizando o lápis com borracha como baqueta, onde a borracha seria a ponta que tocaria a garrafa. Depois, solicitamos que colocassem um pouco mais de água, tocassem novamente a garrafa com o lápis e comparassem os sons que obtiveram com as duas medidas de água que experimentaram. Assim, eles apresentaram a seguinte síntese a partir de suas observações: o primeiro som era mais agudo que o segundo e, à medida que colocavam mais água na garrafa, o som ficava mais grave, ao passo que, quanto mais água fosse tirada da garrafa, o som obtido era mais agudo.

Dando prosseguimento à atividade, fornecemos aos alunos a informação de que a nota sol poderia ser ouvida ao tocar a garrafa, tendo esta uma medida aproximada de 323 ml (obtida previamente por experimentação). Então, solicitamos aos alunos que buscassem outras notas, a partir da referência dada, variando a medida de água e verificando a afinação com o afinador, conforme a figura 17.

Figura 17: Determinando as notas musicais no xilofone



Fonte: Próprio autor

Assim, eles puderam encontrar outras notas, sendo estas *lá*, *si*, *dó*, *ré* e *mi*. Em seguida, pedimos que eles ordenassem as garrafas, da mais grave a mais aguda, ou vice-versa, e mostrassem o resultado final, como podemos ver na figura 18.

Figura 18: Xilofone de Garras Finalizado

Fonte: Próprio autor

Por fim, fornecemos uma linha melódica da música "brilha, brilha, estrelinha" que tocamos como exemplo e, logo em seguida, pedimos que eles tentassem executar, repetindo o procedimento demonstrado.

5.6 Construindo uma flauta de Pan

Segundo Cerqueira Filho (2009), a flauta de Pan é um instrumento muito antigo, sendo utilizada por diversas civilizações primitivas, tais como os Maias, Astecas e Incas. Esse tipo de flauta é composto por vários tubos de comprimentos diferentes, geralmente de bambu, os quais possuem as extremidades inferiores tapadas, enquanto que as superiores são abertas. Os tubos são unidos, lado a lado, por meio de cordas finas, réguas de madeira ou mesmo cola, fazendo com que o formato da flauta lembre uma espécie de balsa.

Ainda, segundo o referido autor, há registros antigos do conhecimento e uso da flauta de Pan em outros lugares do mundo, como por exemplo o Japão, o Egito e a Grécia, destacando, inclusive, a ligação dessa flauta a tradições folclóricas, bem como a relação com o encantamento e o amor. Atualmente podem ser encontradas na Bolívia, na Birmânia, no Peru, em Portugal, bem como em outros países, inclusive entre povos indígenas, contendo pequenas diferenças quanto ao estilo, estrutura e nome, dependendo do país.

Escolhido como o segundo instrumento a ser construído no presente estudo, a flauta de Pan, estruturada, neste caso, a base de canos de PVC, nos foi inspirada por um vídeo e em uma questão do livro texto da disciplina de Matemática Discreta, da coleção de livros do PROFMAT. A questão é a seguinte:

> Pitágoras, que estudou a geração dos sons, observou que duas cordas vibrantes, cujos comprimentos estivessem na razão de 1 para 2, soariam em uníssono. Hoje, sabemos que a razão das frequências dos sons emitidos por essas cordas seria a razão inversa dos seus comprimentos, isto é, de 2 para 1 e que duas cordas vibram em uníssono se, e só se, a razão de seus comprimentos é uma potência inteira de 2.
>
> A frequência da nota lá padrão (o lá central do piano) é 440 Hz e a frequência do lá seguinte, mais agudo, é 880 Hz (Hz é a abreviatura de hertz, unidade de frequência, que significa ciclo por segundo).
>
> A escala musical ocidental (de J.S. Bach para cá), dita cromática, divide esse intervalo em doze semitons iguais, isto é, tais que a razão das frequências de notas consecutivas é constante.
>
> Sabendo que essas notas são LÁ - LÁ# - SI - DÓ - DÓ# - RÉ - RÉ# - MI - FÁ - FÁ# - SOL - SOL# - LÁ, determine:
>
> a) A frequência desse DÓ, primeiro DÓ seguinte ao lá padrão.
>
> b) A frequência do sinal de discar de um telefone, que é o primeiro SOL, anterior ao LÁ padrão.
>
> c) A nota cuja frequência é 186 Hz.

Não apresentaremos aqui a solução[7] dessa questão, por envolver conteúdos como progressão geométrica (PG) e logaritmos, que não são pertinentes ao contexto da presente pesquisa (anos finais Ensino Fundamental). Entretanto, fizemos uma adaptação, a partir da ideia dada por essa questão, em que utilizamos, ao invés de frequências, os comprimentos dos canos, que poderiam ser obtidos com operações simples, em especial, a divisão e a potenciação, através de uma calculadora, justificando, é claro, o porquê destes cálculos.

A construção da flauta de Pan se deu da seguinte maneira: inicialmente, fornecemos aos alunos os materiais necessários à construção do instrumento, a saber, 2 m de cano de PVC de 20 mm, uma esponja, cortador de canos, régua, pincel, estilete, afinador e calculadora. Disponibilizamos, ainda, um roteiro de ações, com os passos para a sua execução.

Dando sequência à atividade, mostramos a construção do primeiro tubo, com comprimento de 34,1 cm, referente à nota Dó. Em seguida, pedimos aos alunos que, em seus grupos procedessem como o exemplo dado e construíssem o primeiro tubo. Logo depois, mostramos a forma de obtenção dos comprimentos das demais notas, que dependiam da nota inicial, já dada. Utilizamos a seguinte fórmula[8]: $C = 34,1 \div 2^{\frac{n}{12}}$, em que C é o comprimento do tubo e n é um número natural, no caso em específico, restrito de 0 a 12. Assim, eles puderam variar o valor de n, lembrando a disposição intervalar entre as notas

[7] A solução pode ser encontrada em Morgado e Carvalho (2015).

[8] Montamos a fórmula adaptando a questão do PROFMAT, citada anteriormente.

Dó - Ré - Mi - Fá - Sol - Lá - Si - Dó, obtendo os seguintes valores, de forma aproximada: Ré $= 30,4$ cm; Mi $= 27,1$ cm; Fá $= 25,6$ cm; Sol $= 22,8$ cm; Lá $= 20,3$ cm; Si $= 18,1$ cm e o outro Dó $= 17,1$ cm (este último é a oitava do primeiro dó, que foi dado inicialmente).

De posse das medidas dos tubos da flauta de Pan, os alunos tiveram então que medir os comprimentos no cano e cortar todos os tubos, conforme a figura 19.

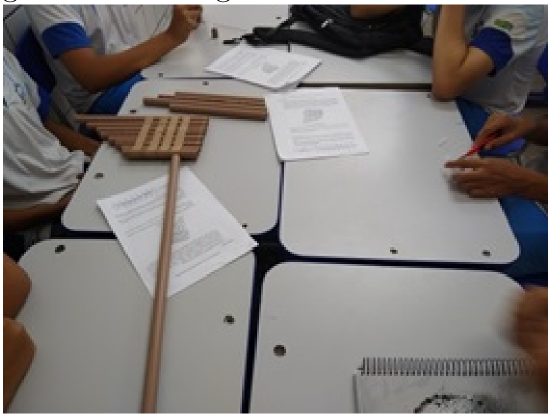
Figura 19: Cortando os tubos de PVC

Fonte: Próprio autor

Depois de cortar os tubos, a tarefa era cortar a esponja e colocá-la em uma das extremidades do cano, tapando-a, dessa forma. Ao proceder de igual modo com todos os tubos, os alunos precisaram conferir a afinação de cada tubo, utilizando, para tanto, o afinador. Caso a nota soasse abaixo da altura desejada, os alunos teriam que empurrar a esponja um pouco mais para dentro do cano e, caso a afinação ficasse acima do esperado, eles deveriam puxar um pouco mais a esponja.

Finalizada a afinação dos tubos, os alunos foram solicitados a ordená-los, do mais grave ao mais agudo, ou vice-versa e, através de ligas bem como fita adesiva, uni-los, lado a lado, formando assim, a flauta de Pan, conforme a figura 20.

Figura 20: Montagem final da flauta de Pan



Fonte: Próprio autor

Por fim, disponibilizamos um trecho da linha melódica da IX Sinfonia de Beethoven que tocamos, como exemplo, pedindo, em seguida, que os alunos tentassem executá-la no instrumento que haviam acabado de construir, conforme o procedimento demonstrado.

6 Análise dos resultados

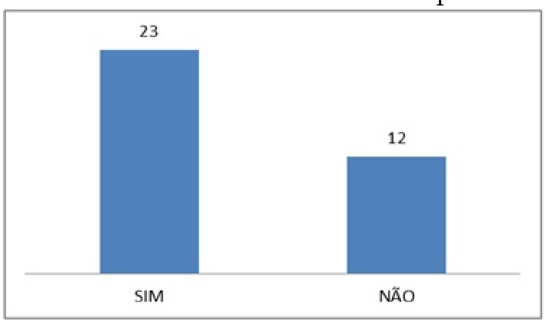
Nesta seção apresentamos a análise dos resultados obtidos com a realização da pesquisa em todas as suas etapas, trazendo um destaque para os dados produzidos através do questionário que foi aplicado com os alunos, a entrevista feita com os mesmos, bem como as interpretações a partir do referencial teórico que utilizamos no presente trabalho. Para tanto, esta seção está organizada a partir dos seguintes eixos: relações entre música e o ensino de matemática sob a perspectiva dos discentes: um panorama dos dados do questionário inicial; e relações entre música e o ensino de matemática sob a perspectiva avaliativa dos discentes: o que revelam as entrevistas.

6.1 Relações entre música e o ensino de matemática sob a perspectiva dos discentes: um panorama dos dados do questionário inicial

Neste eixo, trazemos os dados produzidos a partir da aplicação do questionário, aplicado na primeira etapa. A intenção era fazer um levantamento geral da turma quanto a sua afinidade com a matemática, com a música, dos conhecimentos e experiências que os alunos tiveram que relacionassem essas duas áreas do conhecimento em questão, pois, como afirma Lorenzato (2010, p. 25), "[...] todo ensino deve partir de onde o aluno está". Enfim, aplicamos o questionário inicial, composto por 8 (oito) questões que mesclavam entre objetivas e discursivas na sua forma estrutural. Desta etapa participaram 35 alunos.

Inicialmente os alunos foram perguntados se gostavam da disciplina de matemática e solicitamos ainda que dissessem o porquê de sua resposta inicial, expressando assim a sua justificativa. O gráfico 1 mostra o resultado obtido:

Figura 21: Gráfico 1 - Gosto dos alunos pela matemática



Fonte: Próprio autor

Conforme apresentado no gráfico 1, 65,7% dos alunos dessa turma afirmaram gostar de matemática, ao passo que 34,3% afirmaram não gostar da disciplina. A seguir, apresentamos algumas das justificativas dadas pelos alunos:

> A_{18}: Sim, porque, se pensarmos bem, tudo o que fazemos tem matemática, a influência dela, e também por ser interessante.
>
> A_{10}: Não, porque tem muitas coisas que não consigo compreender e na maioria das vezes tiro nota baixa por conta disso.

A resposta do aluno A_{18}, mesmo sem especificar os contextos, revela que o seu gostar de matemática está ligado à sua compreensão de aplicações da matemática na vida prática, o que, para ele, desperta interesse. Quanto à justificativa do aluno A_{10}, a fala é direta, revelando uma dificuldade encontrada na não compreensão de "muitas coisas" (não especificadas) que, consequentemente, lhe geram baixo rendimento em grande parte das avaliações de matemática, como resultado do que diz Lorenzato (2010, p. 4): "[...] a falta de compreensão dos alunos os conduz a acreditarem que matemática é difícil e que eles não são inteligentes, entre muitas outras consequências maléficas.".

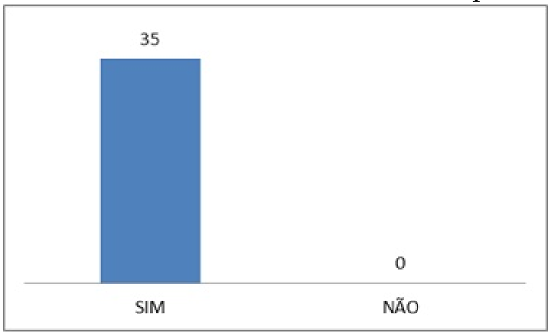
Destacamos, ainda, outras respostas, que apresentam uma aparente contradição. No entanto, revelam uma dificuldade em que os alunos encontraram em dizer simplesmente sim ou não, nos perguntando sobre outra opção, que estivesse no meio termo. Vejamos:

> A_{21}: Sim (gosto). É uma ótima matéria, que traz desafios. Mas, às vezes não consigo gostar de matemática.
>
> A_{32}: Não. Às vezes eu gosto, mas a maioria das vezes eu não sei o assunto e fico com raiva e aí não gosto.

Os relatos manifestados pelos alunos A_{21} e A_{32} mostram uma incerteza quanto ao seu gostar da disciplina em si, sugerindo que o seu gosto está diretamente ligado à compreensão do conteúdo, de modo que em dado momento podem gostar, se eles compreendem o conceito matemático estudado, caso contrário, o sentimento que se manifesta e expresso é de raiva. Além disso, destacamos no relato de A_{21} o reconhecimento da relevância da disciplina e, por isso, afirma gostar, entretanto, reconhece que "às vezes não consigo gostar de matemática".

Dando sequência ao questionário, perguntamos aos alunos se estes gostavam de música e pedimos que, semelhantemente à pergunta anterior, expressassem uma justificativa para a sua resposta. O gráfico a seguir mostra o resultado deste item.

Figura 22: Gráfico 2 - Gosto dos alunos pela música



Fonte: Próprio autor

Conforme o gráfico, 100% dos alunos disseram gostar de música e, dentre as razões apontadas por eles, destacamos:

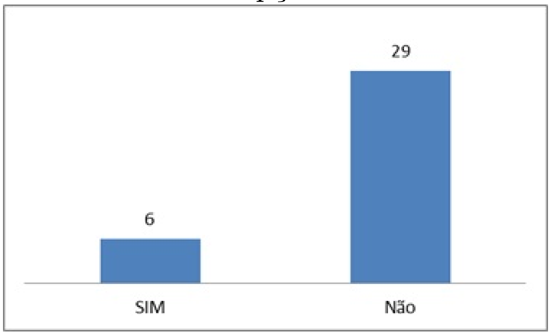
> A_{13}: Gosto porque é muito relaxante e serve pra tudo.
>
> A_{28}: Amo a música porque ela é simplesmente perfeita. Acalma e harmoniza o ambiente. Torna tudo mais belo e atrativo.

Mesmo não trazendo aqui todas as respostas, a grande maioria seguiu em um padrão que traz algumas palavras como "tranquilizar", "relaxar", "acalmar", entre outras, reforçando a ideia apresentada por Descartes (seção 2) que destaca o poder de influência da música.

Outro fator que chama a atenção é que, diferentemente da matemática, os alunos não relataram gostar de música porque (ou quando) entendem, haja vista, por exemplo, o gosto por música instrumental ou mesmo por músicas internacionais que em muitos casos nem se sabe a tradução. Assim, a justificativa pelo gosto por música é descrito pelos alunos utilizando critérios de natureza mais subjetiva e pessoal.

Prosseguindo com o questionário, perguntamos aos alunos se em algum momento haviam percebido ou identificado alguma relação entre matemática e música e que, em caso afirmativo, pudessem relatar qual(is) a(s) relação(ões) que já tinham observado. O gráfico abaixo mostra o condensado das informações colhidas neste questionamento.

Figura 23: Gráfico 3 - Percepção da música na matemática



Fonte: Próprio autor

A partir do gráfico 3, observamos que 17,1% dos alunos disseram ter identificado alguma relação entre matemática e música, enquanto que 82,9% disseram não identificar relações entre as referidas disciplinas. Entretanto, mesmo entre os que afirmaram ter identificado relações entre matemática e música, podemos perceber, através de suas respostas, que as relações descritas por eles não demostram, de fato, relações claras. Vejamos alguns relatos:

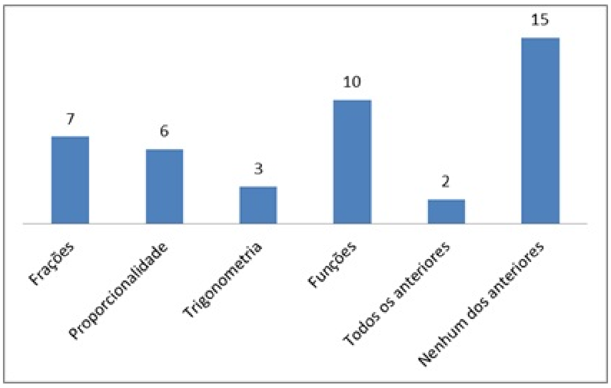
> A_{10}: Na música, muitas das vezes, têm muito da matemática.
>
> A_{35}: As duas têm sentidos contrários, mas as duas juntas ajudam a se concentrar, pensar melhor.

O aluno A_{10} diz que na música podemos encontrar muito de matemática. No entanto, não traz à tona nenhum exemplo específico. Já o aluno A_{35} não faz nenhuma menção da matemática na música, mas faz uma correlação entre as disciplinas, de modo que, embora "contrárias", em sua visão, juntas, ajudam na concentração, o que provavelmente melhora o seu rendimento, quando afirma que "pensa melhor". Cada um deles trouxe uma interpretação para a mesma pergunta, evidenciando o que D'Ambrósio (1994, p. 25) diz: "A interpretação do aluno sobre uma situação matemática... pode variar muito, dependendo de sua história pessoal e cultural.".

Em continuidade, listamos, no item seguinte, alguns conteúdos[9] de matemática e solicitamos aos alunos que assinalassem aqueles que, em sua visão, pudessem ter alguma relação com a música. O resultado obtido está expresso no gráfico a seguir.

[9]Com base em Abdounur (2015).

Figura 24: Gráfico 4 - Conteúdos de matemática relacionados à música

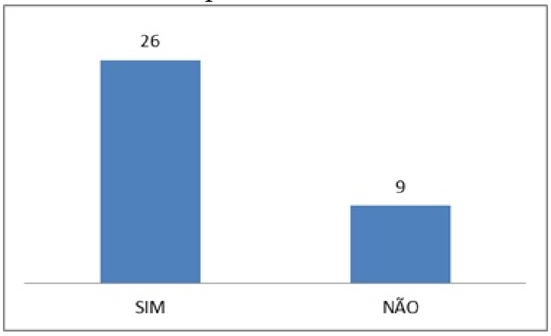


Fonte: Próprio autor

Neste item os alunos puderam marcar mais de uma opção. Por esta razão, a soma final dos resultados obtidos nas opções propostas supera a quantidade total de participantes do questionário. Em decorrência do resultado do item anterior, percebemos uma aleatoriedade nas escolhas das opções, evidenciada pela distribuição quase uniforme nas primeiras quatro opções, ao passo que identificamos uma discrepância entre os resultados que relacionam os extremos (todos os conteúdos listados têm relação com a música; nenhum dos conteúdos listados possui relação com a música), descritos pelas duas últimas opções. Provavelmente, isso se deve ao desconhecimento da maioria dos alunos no que diz respeito à relação entre matemática e música.

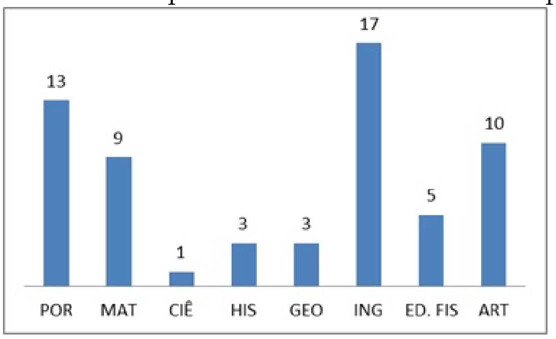
No item seguinte perguntamos aos alunos se já haviam tido alguma aula, que não fosse exclusivamente de música, em que o professor tenha utilizado a música para ministrar o conteúdo. Em caso afirmativo, pedimos aos alunos que assinalassem a(s) opção(ões) que representasse(m) a sua experiência em uma dada lista de disciplinas. O gráfico 5 mostra que aproximadamente 74,3% dos alunos disseram ter tido aula de outras disciplinas, nas quais o professor utilizou a música para ensinar determinado conteúdo, enquanto o gráfico 6 especifica essas disciplinas.

Figura 25: Gráfico 5 - Experiência de música em sala de aula



Fonte: Próprio autor

Figura 26: Gráfico 6 - Experiência do uso da música por disciplina

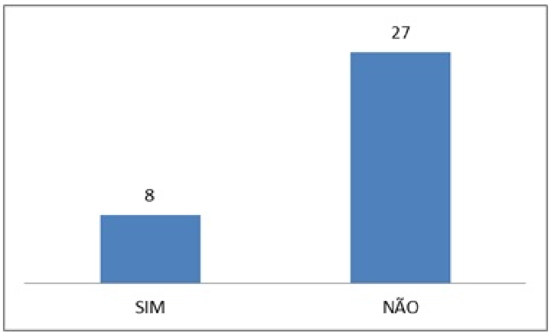


Fonte: Próprio autor

Assim, podemos observar que, na perspectiva dos alunos que compõem essa turma, conforme o gráfico 6, a música esteve presente em todas as disciplinas listadas, mas predominantemente nas disciplinas de letras (Português e Inglês). O gráfico 6 mostra ainda que a disciplina de matemática figura entre as quatro disciplinas mais citadas pelos alunos, sendo assinalada por aproximadamente 26

Dando continuidade, buscamos saber quantos, dentre os alunos, tocavam algum instrumento, pedindo que, aqueles que tocassem, pudessem dizer qual(is) instrumento(s) tocava(m). O gráfico a seguir mostra o condensado das repostas deste item.

Figura 27: Gráfico 7 - Habilidades com instrumentos musicais



Fonte: Próprio autor

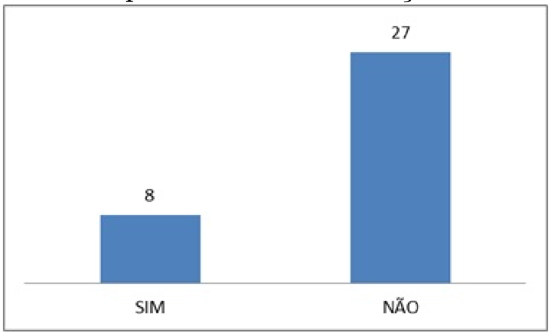
Entre os instrumentos citados pelos que afirmaram tocar algum instrumento, destacamos:

A_2: Instrumentos de percussão, como bateria, pandeiro, etc.
A_7: Piano.
A_{15}: Violino
A_{34}: Flauta e violão.

Assim, entre os poucos alunos que tocam, podemos identificar uma diversidade de instrumentos (melódicos e harmônicos) que são tocados por eles, observando a presença de instrumentos de corda, percussão e sopro. Tal informação pode ajudar quando os alunos são postos para trabalhar em grupo (nas oficinas de construção, por exemplo), considerando as habilidades e conhecimentos que alguns têm e que podem compartilhar, além, é claro, de poder montar facilmente uma pequena banda, se fosse o caso, com os alunos e, através deles, ensinar um conceito matemático através de uma música.

No item seguinte, perguntamos aos alunos se já haviam construído algum tipo de instrumento musical e, caso tivessem construído, que especificasse o instrumento. O gráfico a seguir nos mostra o resultado obtido neste item.

Figura 28: Gráfico 8 - Experiência de construção de instrumento musical



Fonte: Próprio autor

Entre os que afirmaram ter construído algum instrumento musical, destacamos:

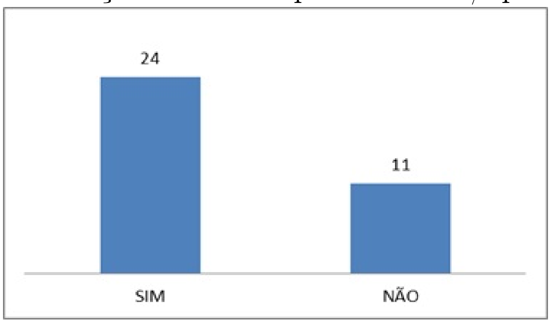
A_{15}: Um cavaquinho artesanal.

A_{19}: Um chocalho.

As citações dos alunos sobre a construção dos instrumentos supracitados referem-se à execução de uma atividade em uma aula de artes, cuja intenção era basicamente construir uma escultura ou um brinquedo que lembrasse, em sua estrutura, um instrumento musical sem, contudo, estudar as propriedades do som (a título de exemplo, temos a altura, o timbre, dentre outros que abordamos na seção 3 do presente estudo) ou se preocupar com elementos essenciais em um instrumento musical, como a afinação e o timbre.

Por fim, perguntamos aos alunos se estes consideravam que a música poderia lhes ajudar a compreender algum conteúdo ou conceito matemático e de que forma poderia ser essa ajuda. O gráfico 9 mostra o resultado deste último questionamento.

Figura 29: Gráfico 9 - Contribuição da música para o ensino/aprendizagem de matemática



Fonte: Próprio autor

As respostas observadas nos questionamentos anteriores dão indícios de que a vivência musical dos alunos dessa turma, é vaga e, como vimos, haja vista que muitas de suas respostas são diretas demais ou, até mesmo, confusas. Contudo, neste último questionamento, os resultados se mostram mais expressivos, pois os alunos manifestaram suas ideias de como a música pode contribuir para seu aprendizado em matemática. Vejamos alguns exemplos:

> A_2: Fazendo uma música de uma regra matemática ou sobre algum cálculo com o ritmo de alguma música famosa.
>
> A_{16}: A gente decora uma música ouvindo duas ou três vezes e, se fizesse uma música relacionando a matemática, seria mais fácil aprender.
>
> A_{22}: Como as pessoas gostam de música, juntando ela com uma coisa que você não conhece, fica mais fácil de aprender por ter algo que você goste.
>
> A_{33}: Relacionando a música com a matemática, você se diverte, não acha chato e ela ajuda a memorizar o conteúdo.

As respostas dos alunos acima destacados, como representação dos demais, seguem uma linha de convergência, relacionando música e matemática, de uma forma mais restrita ao uso de paródias que ajudem a memorizar algum conceito estudado, exprimindo uma espécie de expectativa ao uso da música para esse fim. Como diz Lorenzato (2010), devemos auscultar os alunos, ou seja, saber como estão, o que querem e, dessa forma analisar e interpretar as suas diferentes formas de manifestação. Assim, pudemos, entre as atividades desenvolvidas no trabalho, adequar àquelas que pudessem satisfazer, inclusive, as suas expectativas, quanto à paródia, por exemplo, fazendo uso deste recurso em sala de aula.

6.2 Relações entre música e o ensino de matemática sob a perspectiva avaliativa dos discentes: o que revelam as entrevistas

Neste eixo, trazemos os dados colhidos através das entrevistas na etapa final do presente trabalho, posteriormente ao desenvolvimento das atividades que foram elaboradas e propostas. A entrevista foi feita com 4 alunos que, voluntariamente, se propuseram a participar, contribuindo assim, para esta etapa. Os alunos foram entrevistados de forma individual, entretanto, faremos uma análise simultânea dos pontos de vista expressos por eles em cada uma das questões.

Inicialmente, os alunos foram orientados a uma reflexão, fazendo um paralelo entre o antes e o depois das aplicações das atividades relacionadas às sequências didáticas, bem como das construções e experimentações de instrumentos musicais. Assim, foram questionados acerca das relações que, nesta etapa conseguiam perceber entre matemática e música. Entre as falas, destacamos:

> Aluno A: Minha visão sobre essa relação era de que matemática e música não tinha nada a ver, mas agora eu vejo que as duas são semelhantes, parecidas.
>
> Aluno D: As frações sendo parte de notas musicais, os cálculos precisos na hora de construir os instrumentos musicais.

Como participantes de todo o processo, os alunos puderam avaliar o resultado, expressando assim, cada qual, o seu ponto de vista. Segundo Zabala (1998, p. 90) "a interpretação que irá fazendo da realidade também será diferente; apesar de possuir elementos compartilhados com os outros, terá determinadas características únicas e pessoais.". Assim, mesmo que eles não tenham sido detalhados em seus relatos, vemos traços de mudança em suas visões, como destaca o aluno A, que agora reconhece que matemática e música são bem próxima uma da outra, diferente do que pensava outrora. O aluno D, por sua vez, destaca pontos específicos quanto a relação matemática/musical que pôde observar nas frações com as notas musicais e nos cálculos que foram utilizados para construir os instrumentos musicais. Assim, o pouco que disseram já se evidencia de uma forma distinta, consistente, diferentemente do que pudemos notar nas expressões que relacionavam matemática e música no questionário inicial.

Continuando a entrevista, os alunos foram questionados sobre o que representou a experiência de construir um instrumento musical. Destacamos as seguintes respostas:

> Aluno B: Foi ótimo, porque nunca tive essa experiência e essa foi a primeira vez que fiz um instrumento.
>
> Aluno C: Foi muito legal, além de eu ter conhecido algumas coisas diferentes, pude começar a gostar até um pouco mais de matemática.

Segundo Gitirana e Carvalho (2010, p.39), "Os experimentos e construções são, igualmente, empregados com sucesso no ensino e aprendizagem da Matemática. O Emprego de construções... possibilitam que o aluno veja, explore e sinta, de forma concreta, conceitos e propriedades matemáticas". Da mesma forma, Lorenzato (2010, p. 72) afirma que "A experimentação facilita que o aluno levante hipóteses, procure alternativas, tome novos caminhos, tire dúvidas e constate o que é verdadeiro, válido, correto ou solução". Dessa forma, os sujeitos, em suas falas, mediante as experiências a que foram proporcionados se tornam uma evidência que comprova o pensamento defendido pelos referidos autores, sobretudo com relação à exploração do material utilizado, permitindo experiências novas aos alunos, vivência essa que aproxima o aluno do conceito trabalhado (afetivamente inclusive), bem como da disciplina em questão, movido pelo prazer de construir, experimentar e, consequentemente, estruturar o seu próprio conhecimento.

Dando sequência, pedimos que os alunos relatassem aquilo que, durante a aplicação, havia chamado mais a sua atenção. A seguir, apresentamos algumas das respostas obtidas neste questionamento:

> Aluno A: Tudo, principalmente os métodos, porque eu nunca tinha visto esse tipo de aplicação. Então esse projeto me gerou bastante atenção porque era algo novo pra mim.
>
> Aluno C: O fato de a gente ter transformado um assunto meio "chatinho" que é fração em uma paródia foi bem divertido.

A descrição do que chama a atenção de um aluno refere-se ao que ele mais gostou e, isso, depende de cada aluno. O aluno A, por exemplo, fala dos métodos e aplicações, corroborando o que diz Lorenzato (2010, p. 53) de que "Ensinar matemática utilizando-se de suas aplicações torna a aprendizagem mais interessante e realista e, por isso mesmo, mais significativa". Assim, como nos utilizamos da música, que representa algo que eles gostam, para ensinar matemática, o que se espera é que as atividades desenvolvidas tenham chamado a atenção em algum momento, sobretudo naquilo que para eles tenha gerado uma expectativa. Aqui, explicitamos, por exemplo, a ideia primeira que um aluno tem ao ouvir um professor falar que vai ensinar algum conteúdo de matemática utilizando música: "ele vai cantar sobre o conteúdo". Assim, entendemos que quando um procedimento metodológico atende a expectativa do aluno, sua afeição e interesse se tornam evidentes, como vemos no relato do aluno C, acima descrito.

Na questão seguinte, os alunos foram questionados sobre a contribuição da música para o seu aprendizado em matemática. Dentre as respostas, destacamos:

> Aluno A: A música me ajudou a aprender e compreender a matemática de uma forma mais dinâmica e divertida.
>
> Aluno C: Contribuiu pelo fato de eu não gostar muito de matemática e com essas aulas eu pude passar a vê-la como uma matéria divertida.

Embora concisas, as respostas destacam expressões que demonstram, na perspectiva dos alunos, uma possibilidade de melhoria na qualidade do seu aprendizado. Zabala (1998,

p. 29) diz que "tudo quanto fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau na formação de nossos alunos". Dessa forma, as atividades aqui propostas, nas suas mais variadas formas, proporcionaram vivências e experiências novas para os alunos, possibilitando indícios de impactar positivamente os alunos que, consequentemente, repercute numa melhoria de sua aprendizagem.

Por fim, pedimos aos alunos que expressassem os aspectos positivos e negativos identificados por eles durante a aplicação do trabalho. Dessa forma, destacamos algumas respostas:

> Aluno B: Somente aspectos positivos, especificamente o trabalho em grupo, o aprendizado de paródias e a construção de instrumentos.
>
> Aluno D: Positivo é que mostrou que a matemática pode ser uma matéria bem legal quando o professor está disposto a mudar um pouco a rotina. Negativo: só o fato de alguns alunos ficarem bagunçando e não aproveitarem uma aula descontraída que serviu muito para alguns.

As falas refletem as impressões que os alunos tiveram durante a aplicação do trabalho. A observação de aspectos positivos destaca a importância, a influência e o impacto que algumas atividades ou ações desenvolvidas exerceram sobre os sujeitos, como por exemplo, o destaque dado pelo aluno B ao se referir ao trabalho em grupo, que promove interação e compartilhamento de informações, ratificando o que diz Golbert (2002, p. 9), ao afirmar que "Muitas oportunidades de aprendizado decorrem diretamente de diálogos, nos quais há um genuíno comprometimento com a educação".

Por outro lado, a percepção de aspectos negativos caracteriza a identificação de obstáculos ou empecilhos que dificultam o enfoque, a atenção, além de prejudicar o desenvolvimento, possibilitando, ainda, a não realização de uma atividade proposta. Neste sentido, destacamos o que relata o aluno D sobre a "bagunça" feita por alguns alunos que, se aproveitando do trabalho em grupo (destacado como aspecto positivo pelo aluno B, anteriormente), utilizam-se da oportunidade para conversas fora do contexto das atividades, não cooperando com o próprio grupo e, consequentemente, atrapalhando outros.

Diante dos relatos, os resultados mostram que a música pode ser utilizada na organização do ensino de conceitos matemáticos, ao apresentar indícios de aprendizagem desses conceitos pelos alunos no contexto da educação básica. Destacamos que nesse processo se apresentam como meios propícios à aprendizagem o modo como o professor organiza as aulas, dando atenção ao trabalho em grupo, ao diálogo e a possibilidade de manifestação de suas necessidades conceituais por procedimentos, por eles considerados, mais divertidos e dinâmicos. No entanto, mesmo não tão enfatizado pelos alunos, destacamos que as atividades desenvolvidas também encontraram dificuldades, evidenciando a existência de outros aspectos negativos, dentre os quais mencionamos o barulho nas construções e nas experimentações com instrumentos, o que pode revelar a pouca vivência dos alunos com atividades coletivas.

7 Considerações Finais

As considerações aqui apresentadas perfazem o percurso de, praticamente, todo o texto do presente estudo, destacando, sobretudo, as impressões que obtivemos em cada etapa. Dessa forma, faz-se necessário retornarmos ao ponto de partida, relembrando que o objetivo desta pesquisa foi analisar as formas de utilização da música como subsídio na organização do ensino de conceitos matemáticos. Para tanto, iniciamos com um levantamento histórico das relações entre matemática e música, com ênfase na contribuição (tanto matemática, quanto musical) de alguns personagens da história. Tal levantamento mostrou-se importante, tendo em vista o impacto que gerou nos alunos ao mostrar que a matemática e a música estavam relacionadas, desde tempos longínquos, diferentemente do pensamento que muitos alunos tinham de que não havia relações entre elas.

Para que pudéssemos dar sequência ao trabalho, apresentamos aos alunos alguns conceitos básicos de teoria musical que se faziam necessários para um melhor desenvolvimento das atividades que viriam na sequência, possibilitando assim uma maior compreensão dos elementos, termos e características próprias da música que fariam relação, em algum momento, aos conceitos matemáticos ensinados através das sequências didáticas, bem como no processo de construção e experimentação de instrumentos musicais. Essa etapa, desenvolvida através de uma aula, fez com que os alunos pudessem se aproximar de conceitos e termos técnicos da música que, de uma forma superficial, era algo que eles já tinham algum conhecimento ou sabiam diferenciar, mas, no entanto, não utilizavam a nomenclatura de forma adequada.

De posse dos conhecimentos acima destacados, pudemos dar continuidade ao estudo, elaborando sequências didáticas de conteúdos de matemática, utilizando o modelo de estruturação de Cabral (2017), de modo que a música estivesse presente não apenas como recurso didático, mas como parte estruturante da própria sequência em si. Tal modelo dividia a sequência em um conjunto de intervenções, que iam desde uma atividade inicial simples e, aparentemente, sem tanta relação com o tema específico, a atividades avaliativas que aplicavam o conhecimento obtido durante o desenvolvimento da sequência. Recordando uma frase atribuída ao matemático Leibniz que diz que "a música é um exercício inconsciente de cálculos", nós, de certa forma, utilizamos dessa ideia no desenvolvimento do presente estudo ao trazer a música para a sala de aula, ao organizar e aplicar sequências didáticas de conceitos matemáticos ensinados através da música. Em suma, procuramos envolver os alunos em uma espécie de atmosfera musical, de modo que as atividades propostas os fizessem calcular em um contexto que lembrava como quando executavam ritmicamente um trecho musical ou quando procuravam determinar a figura de som que faltava em um compasso musical. Assim, os alunos puderam executar cada uma das atividades que eram propostas através das sequências didáticas, demonstrando interesse e atenção, além de respeitarem as etapas, avançando para a atividade seguinte somente quando orientados a fazê-lo.

Destacamos que, além da estruturação das sequências didáticas, utilizamos a música como recurso didático de apoio, como na elaboração de uma paródia, no exemplo do estudo com frações, que possibilitou aos alunos uma alternativa de apropriação dos procedimentos de operacionalização da adição e da subtração de frações.

Outro destaque do presente trabalho foi a realização do experimento com o monocórdio, momento em que os alunos puderam repetir o que Pitágoras fizera há mais de 2500 anos. Dessa forma, eles puderam compreender os conceitos de consonância e dissonância, além de observarem os sons que eram obtidos com a variação do comprimento da corda e conhecerem os intervalos de 4ª, 5ª e 8ª, fazendo marcações (predefinidas) no monocórdio, dividindo a corda, tocando e comparando os sons obtidos com o som da corda solta.

Finalizando a exploração da música nas aulas de matemática, desenvolvemos as oficinas de construção de instrumentos musicais, momento em que os alunos estiveram trabalhando em grupo, experimentando, calculando, fazendo estimativas e realizando os procedimentos de confecção dos instrumentos musicais propostos, a saber, o xilofone de garrafas e a flauta de Pan. Ao final, puderam ainda, tocar o próprio instrumento, tentando executar linhas melódicas de determinadas músicas que lhes foram propostas e exemplificadas.

A realização de todas as atividades, das sequências didáticas, o uso de paródias, bem como a experimentação e a construção de instrumentos musicais fez com que os alunos estivessem atentos durante parte do tempo destinado ao desenvolvimento de todo o trabalho, participando, questionando, tirando dúvidas, em um cenário propício às manifestações de suas necessidades e, por conseguinte, de possibilidades de apropriação do conhecimento estudado.

Ao analisarmos os resultados obtidos no primeiro momento, com a aplicação do questionário, antes do desenvolvimento das atividades, verificamos que o conhecimento dos alunos sobre relações entre matemática e música se apresentava no campo periférico, mas também pudemos fazer um perfil da turma, quanto ao seu gosto por música, por matemática, além da vivência musical dos alunos e, ainda, identificarmos as expectativas que eles poderiam ter ao imaginar aulas de matemática com música. Após o desenvolvimento do trabalho, das atividades propostas, fizemos uma entrevista com 4 alunos voluntários, que representaram a turma nessa espécie de "avaliação" (ou auto avaliação) que eles puderam fazer conforme as questões propostas. A análise deste último aspecto mostrou uma mudança na visão dos alunos quanto às relações entre matemática e música.

O estudo mostrou ainda que a proposta de trabalho com experimentação e construção de instrumentos musicais proporcionou a muitos dos alunos uma vivência inédita, até então, conforme os relatos da entrevista, despertando interesse e motivando-os, além de oportunizar o desenvolvimento do trabalho em grupo e do diálogo onde as partes se unem, colaborando para um fim comum.

Quanto às dificuldades encontradas para a realização e desenvolvimento das atividades, destacamos a existência de aspectos que, nesse momento, nos levam a considerar negativos, como o barulho e a conversa dos alunos no momento das construções e experimentações com instrumentos, o que pode revelar a pouca vivência dos mesmos com atividades coletivas.

Concluímos, embora provisoriamente, dizendo que, quanto à contribuição da música para o melhoramento do aprendizado dos conteúdos, descritos pelos próprios alunos, mostram um parâmetro que nos permite reconhecer que a música pode ser utilizada para organizar e ensinar conceitos matemáticos, nas mais variadas formas, seja como conteúdo que se relaciona a algum outro na matemática, seja como recurso didático, seja construindo um instrumento musical. Enfim, a presente pesquisa não esgota o estudo das relações entre matemática e música, nem tampouco encerra o número de possibilidades de se utilizar a música nas aulas de matemática, contudo, mostra que esta é uma forma concebível e aplicável e que abre oportunidades para o desenvolvimento de pesquisas neste sentido, como possibilidade de explorar e melhorar, em termos qualitativos, as ideias aqui propostas.

Referências

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

BARBOSA, Eduardo Fernandes. **Instrumentos de coleta de dados em pesquisas educacionais**. Educativa: Instituto de Pesquisa e Inovações Educacionais. [Boletim informativo da internet] 2005 [atualizado 2005 Mar; acesso em 22/08/19]. Disponível em: `http://www.inf.ufsc.br/~vera.carmo/Ensino_2013_2`.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Coleção explorando o ensino**. v.17. Brasília, MEC, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares gerais da educação**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM - PA, 2017.

CERQUEIRA FILHO, Ilton José de. **História da flauta**. São Paulo: Biblioteca24horas, 2009.

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. 11. ed. São Paulo: Cortez: 2010.

DA CRUZ, Gisele Barreto. **Didática e docência no ensino superior**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos. v. 98, n. 250, p.672-689. Brasília: INEP, Dez 2017.

DAVID, Célia Maria. **Desafios contemporâneos da educação [recurso eletrônico]**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2015.

DU SAUTOY, Marcus. **A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática**. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FERREIRA JR, Amarilio. **História da educação brasileira: da colônia ao século XX**. São Carlos, SP: EdUFSCar, 2010.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GITIRANA, Verônica; CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. **A metodologia de ensino e aprendizagem nos livros didáticos de Matemática in Coleção explorando o ensino**. V.17. Brasília, MEC, 2010, p.31-52.

GOLBERT, Clarissa Seligman. **Novos rumos na aprendizagem da matemática**. Porto Alegre: Mediação, 2002.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LACERDA, Osvaldo. **Compêndio de teoria elementar da música**. 3. ed. São Paulo: RICORDI BRASILEIRA, 1966.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages; WGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César. **Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

MACÊDO, Francisco Cristiano da Silva; EVANGERLANDY, Gomes Macêdo. **Pesquisa: passo a passo para elaboração de trabalhos científicos**. Teresina: 2018.

MED, Bohumil. **Teoria da música**. 5. ed. Brasília: Musimed, 2017.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de Freitas. **Metodologia do trabalho científico[recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2 ed. Novo Hamburgo, RS: Feevale, 2013.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática**. v.1. 3.ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SPINOLA, Noenio. **Música, matemática e dinheiro**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2016.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Trad. Ernani P. da F Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ZÚÑIGA, Ángel Ruiz. **Historia y filosofía de las matemáticas**. San José, Costa Rica: EUNED, 2003.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ

PRÓ - REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MESTRANDO: DAVI CUNHA SILVA

Apêndice A - Questionário Inicial

1 Você gosta de matemática?

( ) Sim ( ) Não

1.1 Por quê?

---

2 Você gosta de música?

( ) Sim ( ) Não

2.1 Por quê?

---

3 Em algum momento você percebeu ou identificou alguma relação entre matemática e música?

( ) Sim ( ) Não

3.1 Em caso afirmativo, qual relação você observou?

---

4 Entre os conteúdos de matemática listados abaixo, assinale aquele(s) que você supõe ter alguma relação com a música.

( ) Frações

( ) Proporcionalidade

( ) Trigonometria

( ) Funções

( ) Todos os anteriores

( ) Nenhum dos anteriores

5 Você já teve alguma aula em que o(a) professor(a) utilizou a música para ministrar o conteúdo?

( ) Sim ( ) Não

5.1 Em caso afirmativo, de qual disciplina?

( ) Português ( ) Matemática

( ) Ciências ( ) História

( ) Geografia ( ) Inglês

( ) Ed. Física ( )Artes

6 Você toca algum instrumento musical?

( ) Sim ( ) Não

6.1 Em caso afirmativo, qual(is) instrumento(s)?

7 Você já construiu algum instrumento musical?

( ) Sim ( ) Não

7.1 Em caso afirmativo, qual(is) instrumento(s)?

---

8 Você consegue pensar na contribuição da música para lhe ajudar a compreender algum conceito matemático?

( ) Sim ( ) Não

8.1 De que forma seria essa contribuição?

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ

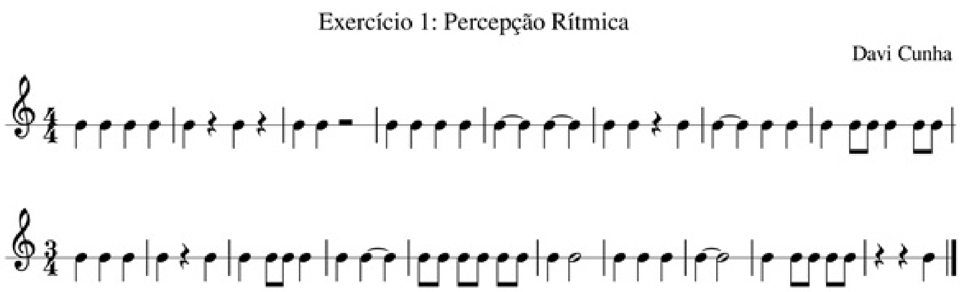
PRÓ - REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MESTRANDO: DAVI CUNHA SILVA

Apêndice B - Sequência Didática de Frações

1. (Intervenção Inicial) - Nesta primeira atividade, faremos, em conjunto, a execução de uma sequência de compassos, utilizando a sílaba TÁ, considerando 1 tempo com um valor aproximado de 1 segundo. Em alguns casos, sustentaremos a sílaba ou a dividiremos, conforme as necessidades apresentadas durante a execução.



2. (Intervenção Reflexiva) - na atividade anterior utilizamos duas fórmulas de compasso, sendo uma em cada sistema (linha). No primeiro sistema, a fórmula de compasso é 4/4, enquanto que no segundo, a fórmula é 3/4. Relembrando os significados do numerador e do denominador expressados em uma fórmula de compasso e, ainda, as relações de duração entre as figuras de som e de silêncio, responda as seguintes perguntas:

a) Os compassos do primeiro sistema são todos do mesmo tamanho?

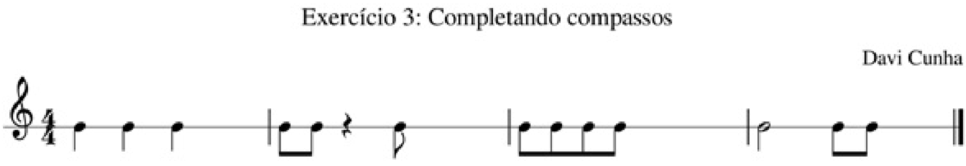
b) Os compassos do segundo sistema são todos do mesmo tamanho?

c) Algum compasso do primeiro sistema é igual a algum do segundo?

3. (Intervenção Exploratória) - Ajude João e Maria a resolver os problemas que se seguem:

a) João preencheu o sistema abaixo, esquecendo, porém, de colocar as barras de compasso. Ajude-o, colocando as barras de compasso nos seus devidos lugares.

b) Maria estava preenchendo alguns compassos, mas, sem perceber, deixou os compassos incompletos. Preencha cada um dos compassos incompletos que Maria deixou com a(s) figura(s) de som que o completa.



4. (Intervenção Formalizante) - Neste momento, vamos relembrar as operações com frações.

- Adição e Subtração com denominadores iguais: conserva-se o denominador e efetua a adição (ou subtração) com os numeradores.

- Adição e Subtração com denominadores diferentes: devemos igualar os denominadores, seja buscando frações equivalentes de forma direta ou utilizando o M.M.C. Depois é só proceder como foi feito com denominadores iguais.

Paródia: Soma e subtração de frações (em cima da música Trem Bala, de Ana Vilela)

Vamos aprender que é tão fácil somar e subtrair
Frações com o mesmo denominador é bem simples assim
A parte de baixo você tão somente tem que repetir
E parte de cima devemos somar ou subtrair

Depende da operação que é descrita no corpo do texto de cada questão (2x)

Como proceder quando a parte de baixo não é mais igual?
Você saberá que não é tão difícil, é fácil e legal
Daremos um jeito das partes de baixo ficarem iguais
O M.M.C nessa parte, então, se mostra eficaz

O novo denominador, que é comum às frações envolvidas é o M.M.C

E com ele você determina o numerador das frações que é o que falta fazer

E volta, então, ao início e tudo se torna mais simples pra mim e você...

5. (Intervenção Avaliativa Restritiva) - Resolva cada uma das questões e problemas propostos a seguir: I - Efetue corretamente:

a) $\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=$ b) $\frac{24}{23}-\frac{8}{23}=$ c) $\frac{7}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=$ d) $\frac{10}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=$

e) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$ f) $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=$ g) $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=$

II - (Concurso Professor: SEMEC - Teresina, 2016) Figuras musicais são símbolos utilizados para representar os tempos de uma música. Abaixo se tem um quadro representando cada figura, o seu nome e respectivo tempo.

NÚMERO	FIGURA	NOME	TEMPO
1	𝅝	SEMIBREVE	4
2	𝅗𝅥	MÍNIMA	2
4	𝅘𝅥	SEMÍNIMA	1
8	𝅘𝅥𝅮	COLCHEIA	$\frac{1}{2}$
16	𝅘𝅥𝅯	SEMICOLCHEIA	$\frac{1}{4}$
32	𝅘𝅥𝅰	FUSA	$\frac{1}{8}$
64	𝅘𝅥𝅱	SEMIFUSA	$\frac{1}{16}$

Sabendo que, num compasso musical, o denominador da fração informa qual a figura que servirá de referência para a análise e que o numerador informa quantas dessas figuras cabem em cada compasso, o número de semifusas que serão necessárias utilizar para preencher um compasso $\frac{2}{4}$, já tendo sido colocado duas fusas, é de:

a) 24 semifusas.

b) 25 semifusas.

c) 26 semifusas.

d) 27 semifusas.

e) 28 semifusas.

III - (ENEM 2009, Q.144) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.

Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com

a) 24 fusas.

b) 3 semínimas.

c) 8 semínimas.

d) 24 colcheias e 12 semínimas.

e) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

6. (Intervenção Avaliativa Aplicativa) - Resolva cada um dos problemas a seguir:

a) Em uma sala de cinema, $\frac{7}{10}$ das cadeiras estão ocupadas. Que fração representa as cadeiras vazias?

b) Carlos e Daniel compraram um bolo. Carlos comeu $\frac{3}{8}$ do bolo e Daniel comeu $\frac{2}{5}$ do mesmo bolo. Que fração do bolo foi comida pelos dois amigos? Que fração do bolo sobrou?

c) Uma estrada está sendo construída em 3 etapas. Na 1ª etapa foi construída $\frac{1}{2}$. Na 2ª etapa, a parte construída equivale a $\frac{1}{3}$. Que fração dessa estrada será construída na 3ª etapa?

d) Em uma sala de aula, $\frac{4}{9}$ dos alunos foram aprovados direto, $\frac{5}{12}$ foram aprovados após a recuperação e o restante ficou reprovado. Qual a fração dos alunos reprovados desta sala?

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ

PRÓ - REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

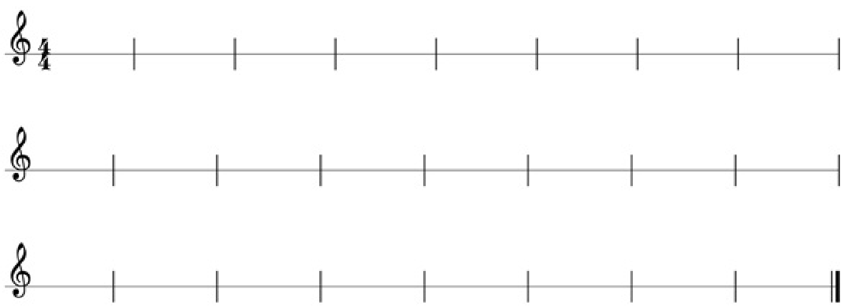
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MESTRANDO: DAVI CUNHA SILVA

Apêndice C - Sequência Didática de Princípio Fundamental da Contagem

1. (Intervenção inicial) - Nesta atividade, você deve preencher, de maneira diferente, o máximo de compassos que puder utilizando somente a semínima e sua pausa.

Exercício 1: preenchimento de compassos

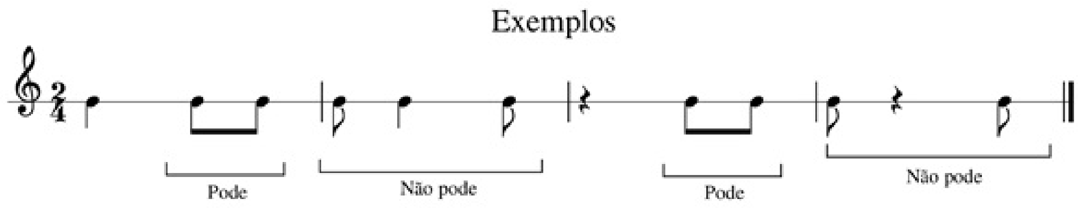


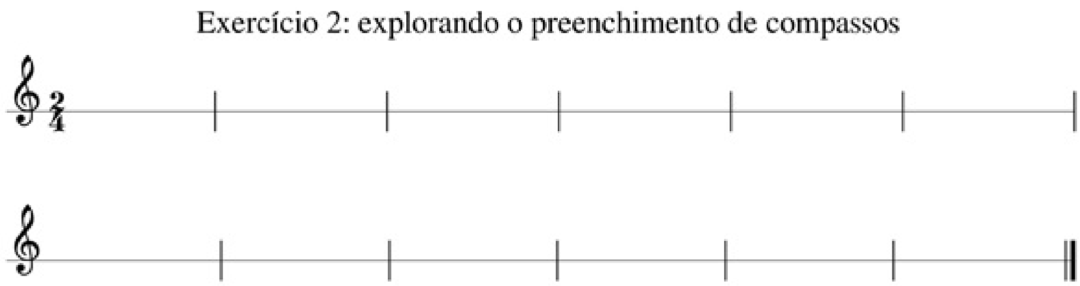
2. (Intervenção reflexiva) - Agora, responda as seguintes perguntas:

a) Quantos compassos você conseguiu preencher?

b) Seria este o número máximo de compassos diferentes que podem ser preenchidos utilizando somente as figuras dadas? Por quê?

3. (Intervenção exploratória) - proceda do mesmo modo que foi orientado no exercício 1, só que agora, utilizando a semínima, a sua pausa e a colcheia (neste último caso, se for usar uma, deverá "obrigatoriamente" utilizar outra dentro do mesmo tempo). Ressaltamos que esta não é uma regra musical, entretanto, a adotamos com intuito de simplificar o nosso exercício. Observe os exemplos antes de iniciar o exercício.





4. (intervenção formalizante) - O Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo) diz, segundo Morgado e Carvalho (2015), que "se há x modos de tomar a decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy". Observemos os seguintes exemplos:

a) Com 4 homens e 4 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução: formar um casal, equivale a tomar as seguintes decisões:

D_1: escolha do homem (4 modos).

D_2: escolha da mulher (4 modos).

Então, pelo princípio multiplicativo, temos que os diferentes modos de se formar um casal nas condições dadas é dado por $4 \cdot 4 = 16$.

b) João possui 5 camisas, 4 bermudas e 2 pares de tênis. De quantas maneiras diferentes João pode se vestir, utilizando uma camisa, uma bermuda e um par de tênis?

Solução: João se vestir, equivale a tomar as seguintes decisões:

D_1: escolher a camisa (5 modos).

D_2: escolher a bermuda (4 modos).

D_3: escolher o par de tênis (2 modos).

Então, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras diferentes de João se vestir, dadas as condições é determinado por $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$.

c) Um restaurante está com um cardápio que contém as seguintes opções:

- Arroz: branco, baião de dois, à grega ou Maria Izabel.

- Feijão: branco, preto ou carioca.
- Carnes: carne de sol, frango assado ou bisteca.
- Saladas: verde ou maionese.

De quantas maneiras distintas uma pessoa pode fazer um prato colocando um tipo de arroz, um tipo de feijão, um tipo de carne e um tipo de salada?

Solução: fazer um prato, equivale a tomar as seguintes decisões:

D_1: escolher um arroz (4 modos).

D_2: escolher um feijão (3 modos).

D_3: escolher uma carne (3 modos).

D_4: escolher uma salada (2 modos).

Então, pelo princípio fundamental da contagem, temos que o número de maneiras de uma pessoa montar um prato nesse restaurante fazendo uma escolha em cada uma das etapas é dado por $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.

5. (Intervenção avaliativa restritiva) - resolva o seguinte problema sem desenhar (ou construir) os compassos:

Quantos compassos $\frac{3}{4}$, distintos, podem ser formados utilizando somente as figuras da semínima, a sua pausa e a colcheia (esta última nas mesmas condições dadas no exercício 2)?

Dica 1: podemos reelaborar a pergunta, do seguinte modo: de quantas maneiras distintas podemos preencher um compasso $\frac{3}{4}$ dispondo das figuras dadas nas condições estabelecidas?

Dica 2: pense nas decisões como sendo cada um dos tempos do compasso.

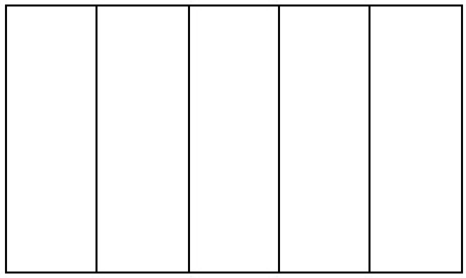
6. (Intervenção avaliativa aplicativa) - utilizando o princípio multiplicativo, resolva cada um dos problemas a seguir:

a) Quantos são os números de três algarismos distintos?

b) De quantos modos diferentes podemos dispor 5 pessoas em uma fila indiana?

c) Quantos são os gabaritos possíveis em uma prova com 5 questões de múltipla-escolha, com 4 alternativas por questão?

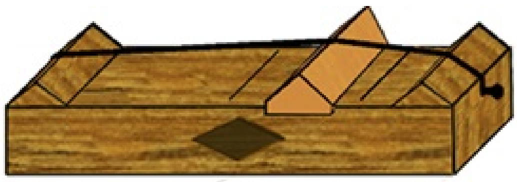
d) De quantos modos diferentes podemos colorir a bandeira abaixo dispondo das cores azul, verde e amarelo, de modo que cada listra tenha apenas uma cor e as listras adjacentes ("vizinhas") não podem ter cores iguais?



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ - REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
MESTRANDO: DAVI CUNHA SILVA

Apêndice D - Refazendo a Experiência do Monocórdio

1. Conhecendo um pouco da história do monocórdio: O monocórdio foi um instrumento construído por Pitágoras com um fim experimental, buscando observar as relações que havia entre os sons. O monocórdio de Pitágoras era composto basicamente por uma espécie de corda esticada sobre dois cavaletes fixados em uma prancha ou mesa de madeira. Utilizando ainda outro cavalete, um móvel, ele fazia variar o comprimento da corda e comparava os sons.



Fonte: sites.goole.com

2. Com o intuito de refazer a experiência de Pitágoras, construímos um monocórdio, com algumas poucas alterações. Ao invés de uma prancha ou mesa, utilizamos uma caixa de ressonância, assim como um violão. Além disso, adicionamos outra corda, com mesma afinação, buscando melhorar a comparação entre os sons ao fazer variar o comprimento somente de uma corda, ao passo que deixamos a outra livre.

Fonte: Próprio autor

3. Agora, vamos realizar as seguintes ações e fazer algumas anotações:

a) Toque as duas cordas soltas, sendo uma de cada vez. Em seguida toque-as simultaneamente. O que você consegue observar em relação aos sons?

---

b) Toque uma das cordas. Agora, com o cavalete móvel, vá diminuindo o comprimento da corda gradativamente, sempre tocando para comparar o som obtido com o da outra corda solta. O que acontece com o som à medida que o comprimento da corda é diminuído?

---

c) Utilizando uma fita métrica, meça a distância entre os cavaletes fixos. Depois, obtenha os comprimentos relativos à 1/2, a 2/3 e a 3/4 do tamanho que você mediu inicialmente. Faça os registros na tabela abaixo.

DIST. DOS CAVALETES (cm)	1/2	2/3	3/4

d) Utilizando um lápis, faça sobre o monocórdio as marcações das medidas obtidas no item anterior.

e) Agora, vá posicionando o cavalete móvel em cada uma das marcações feitas anteriormente. Ao posicionar, toque a corda dividida e também a corda solta, uma de cada vez. O que você consegue observar? Os sons parecem "combinar"?

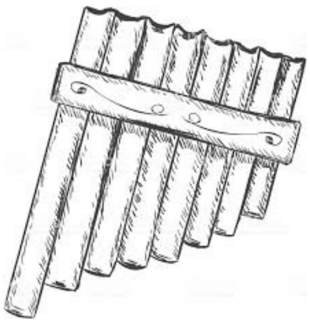
---

f) Posicione o cavalete móvel numa outra posição qualquer, diferente das que foram marcadas, no entanto, próximas a elas. Toque e compare. O que você consegue observar? Os sons parecem "combinar"?

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ - REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
MESTRANDO: DAVI CUNHA SILVA

Apêndice E - Construção da Flauta de Pan

1. Conhecendo o instrumento e um pouco da sua história:
A flauta de pan é um instrumento muito antigo, sendo utilizada por diversas civilizações primitivas, tais como os Maias, Astecas e Incas. Esse tipo de flauta é composto por vários tubos de comprimentos diferentes, geralmente de bambu, os quais possuem as extremidades inferiores tapadas, enquanto que as superiores são abertas. Os tubos são unidos, lado a lado, por meio de cordas finas, réguas de madeira ou mesmo cola, fazendo com que o formato da flauta lembre uma espécie de balsa.



Fonte: istockphoto.com

2. Vamos aprender a construir uma flauta de Pan. Para tanto, utilizaremos os seguintes materiais: 2 m de cano de PVC, de 20 mm, cortador de canos, régua, pincel, esponja, estilete, fita adesiva, ligas, calculadora e afinador.
3. Como construir:

- Inicialmente, são dados os materiais e a medida do comprimento de cano relativo à nota Dó, neste caso, igual a 34,1 cm. Observe como o professor produz este primeiro tubo.

- Agora, devemos realizar alguns cálculos para podermos determinar as medidas dos outros tubos. Para tanto, utilizaremos a seguinte expressão algébrica $\mathsf{C} = 34,1 \div 2^{\frac{n}{12}}$, em que "C" é o comprimento do cano e n é um número natural que irá variar, neste caso em específico, de 1 a 12, conforme as distâncias entre as notas musicais. Além da expressão dada, utilizaremos uma calculadora, a fim de simplificarmos os cálculos e adotaremos, ainda, uma aproximação para uma casa decimal. Conforme formos determinando os comprimentos dos canos, devemos fazer o registro na tabela a seguir:

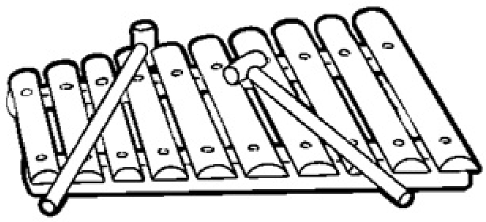
NOTAS	DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
COMPRIMENTO DOS TUBOS (cm)	34,1							

- Neste momento, produza os outros tubos, conforme os comprimentos obtidos na etapa anterior, tomando como exemplo a produção inicial feita pelo professor.
- Na sequência, devemos unir os tubos, lado a lado, utilizando a fita adesiva e as ligas.
- Finalizada a construção, vamos aprender a tocar uma música.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ - REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
MESTRANDO: DAVI CUNHA SILVA

Apêndice F - Construção do Xilofone de Garrafas

1. Conhecendo o instrumento e um pouco da sua história:
O xilofone é originário provavelmente de Java, uma ilha da Indonésia. É um instrumento de percussão, composto por lâminas de madeira, dispostas geralmente em duas fileiras, tocadas por baquetas de ebonita, uma espécie de resina de origem vulcânica. O uso desse instrumento na Europa vem desde o século XVI, sendo, pela primeira vez, utilizado em orquestra numa música chamada Dança Macabra, de Saint-Saëns.



Fonte: musica.colorir.com

2. Vamos aprender a construir um xilofone de garrafas. Para tanto, utilizaremos os seguintes materiais: Garrafas de vidro de 500 ml (todas do mesmo formato e tamanho), medidor de água, afinador, lápis com borracha e água.
3. Como construir:

- Inicialmente, ponha um pouco de água em uma das garrafas e toque-a de modo a reproduzir um som.
- Coloque um pouco mais de água e toque novamente.

Agora, responda: Qual dos dois é o mais grave e qual é o mais agudo?

Então, quanto mais água colocamos na garrafa mais __________ fica o som. E Quanto mais água tiramos da garrafa, mais __________ o som fica.

- Agora, sendo dada a quantidade de água (aprox. 323 ml) referente à nota Sol, faça variar a quantidade de água em outras garrafas procurando gerar as outras notas musicais, tanto mais graves quanto mais agudas que a nota dada. Faça isso utilizando o afinador.

NOTAS	SOL							
QUANTIDADE DE ÁGUA (ml)	323							

- Ordene as garrafas, da mais grave a mais aguda (da direita para a esquerda).

- Agora que o xilofone está pronto, vamos tocar uma música.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ - REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
MESTRANDO: DAVI CUNHA SILVA

Apêndice G - Roteiro de Entrevista

1. Fazendo um paralelo entre o antes e o depois das aulas, das sequências didáticas e das oficinas ministradas, quais relações entre matemática e música que hoje você identificar e que antes não conhecia?

2. Como foi para você a experiência de construir um instrumento musical? Descreva.

3. O que mais lhe chamou atenção durante a aplicação do projeto? Por quê?

4. De que forma a música contribuiu para a sua compreensão dos conteúdos matemáticos ministrados?

5. Em sua visão, quais aspectos positivos e quais aspectos negativos puderam ser observados durante a aplicação do projeto?