Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Entre primos e compostos: uma abordagem do Teorema Fundamental da Aritmética no 6º ano do Ensino Fundamental

Francisco José da Silva França

Teresina – PI

2019

Francisco José da Silva França

Dissertação de Mestrado:

Entre primos e compostos: uma abordagem do Teorema Fundamental da Aritmética no 6º ano do Ensino Fundamental

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Profº. Dr. Arnaldo Silva Brito

Teresina – PI

2019

F814e França, Francisco José da Silva.
Entre primos e compostos: uma abordagem do Teorema Fundamental da Aritmética no 6º ano do Ensino Fundamental / Francisco José da Silva França. - 2019.
95f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
"Orientador(a): Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito."

1. Números Primos e Compostos. 2. Teorema Fundamental da Aritmética. 3. Situações-Problema. 4. Ensino Fundamental. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

FRANCISCO JOSÉ DA SILVA FRANÇA

ENTRE PRIMOS E COMPOSTOS: UMA ABORDAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Arnaldo Silva Brito

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Presidente
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Ezequias Matos Esteves

Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves – Examinador
Instituto Federal do Piauí – IFPI

Pedro Antonio Soares Júnior

Prof . Dr. Pedro Antônio Soares Júnior – Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Setembro/2019

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, aos meus amados pais José e Francisca a quem eu rogo todos os dias a minha existência, aos meus irmãos Renato e Solimar pelo apoio de sempre e à minha noiva Patrícia pela paciência, pelo incentivo, pela força, pelo carinho e, sobretudo, pela compreensão quanto às minhas horas e finais de semana dedicados aos estudos.

Agradecimentos

A Deus, autor do meu destino, pelo dom da vida e por sempre está comigo nas trajetórias árduas de minhas caminhadas. Obrigado, Deus, por sua infinita bondade.

Aos professores doutores da Universidade Estadual do Piauí (UESPI), pelas produtivas aulas, dedicação e atenção dadas aos alunos. Em especial aos professores Pedro Antônio Soares Junior e Afonso Norberto da Silva por todo o suporte e incentivo que culminaram na conclusão do curso.

Ao professor Dr. Arnaldo Silva Brito que foi meu professor na graduação e, anos depois, neste mestrado exercendo também a função de me orientar durante toda a elaboração deste trabalho com esclarecimentos, correções e sugestões.

À professora Dra. Valdirene Gomes de Sousa que de modo competente, carinhoso e marcado pelo diálogo e respeito nos conduziu na disciplina TCC e que, de forma valorosa, contribuiu para o enriquecimento de cada parágrafo escrito neste trabalho no papel de minha coorientadora.

Aos meus amigos de curso, aos quais eu chamo carinhosamente de "turma boa", por compartilharem comigo os finais de semana e feriados debruçados em estudos. Obrigado a todos, vocês são os melhores.

À CAPES pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à Sociedade Brasileira da Matemática – SBM pela coordenação e apoio.

E por fim, mas não menos importante, a todas as pessoas que fizeram e fazem parte da minha trajetória de vida, familiares, colegas de trabalho e ex-alunos que de alguma forma contribuíram para que eu seguisse firme em busca desse objetivo.

A todos, o meu muitíssimo obrigado!

Resumo

Neste trabalho apresentamos discussões a respeito das principais definições e propriedades que tratam sobre alguns conceitos da aritmética elementar como os números primos e compostos e conduzem ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Para a sua realização, o presente trabalho teve por objetivo abordar o estudo do Teorema Fundamental da Aritmética e dos principais conceitos associados a ele com um grupo de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Para alcançar o objetivo proposto, como campo empírico da pesquisa, bem como dos seus sujeitos, realizamos um estudo com alunos de uma escola filantrópica situada na região sudeste de Teresina. Fizemos opção pela referida escola por que foi nesse espaço que lecionamos por mais de quatro anos. A fundamentação teórica da pesquisa contou com a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gerard Vergnaud. A metodologia constou de um estudo dividido em três etapas. A primeira referiu-se a aplicação coletiva de uma avaliação inicial. A segunda voltou-se para a fase de intervenção que foi divida em quatro grupos de atividades abordando o desenvolvimento de estratégias adequadas para que os alunos compreendessem e, assim, diferenciassem o conceito de número primo e número composto favorecendo, também, dentro desse contexto, a compreensão do conceito de múltiplos, divisores e decomposição em fatores primos. E, por fim, a terceira correspondeu à aplicação, também coletiva, de uma avaliação final, com as mesmas questões da avaliação inicial. No fechamento do estudo, são apresentadas as considerações finais cujo foco mostra que os alunos desenvolveram esquemas próprios para lidar com os conceitos em construção. As discussões abertas ao final de cada atividade da proposta de ensino sobre as definições e propriedades ali envolvidas criaram condições para o desenvolvimento conceitual dos participantes dessa pesquisa contribuindo para o avanço na compreensão de uma série de conceitos matemáticos que, ainda que implícitos, estavam presentes em suas ações.

Palavras–chave: Números primos e compostos; Teorema Fundamental da Aritmética; Situações-Problema; Ensino Fundamental.

Abstract

In this research we present discussions about the main definitions and properties that deal with some concepts of elementary arithmetic such as prime and compound numbers and lead to the Fundamental Theorem of Arithmetic (FTA). For its achievement, the present work aimed to approach the study of the Fundamental Theorem of Arithmetic and the main concepts associated with it with a group of 6th grade students. To reach the proposed objective as an empirical camp of research, as well as its subjects, we conducted a study with students from a philanthropic school located in the southeast region of Teresina. We opted for this school because it was in this space that we taught for over four years. The theoretical foundation of the research relied on the Theory of Conceptual Fields proposed by Gerard Vergnaud. The methodology consisted of a three-stage study. The first referred to the collective application of an initial assessment. The second turned to the intervention stage, which was divided into four groups of activities that addressed the development of appropriate strategies for students to understand and thus differentiate the concept of prime number and compound number, also favoring, within this context, understanding the concept of multiples, dividers and decomposition into prime factors. And finally, the third corresponded to the collective application of a final evaluation, with the same questions as the initial evaluation. At the end of the study, the final considerations are presented whose focus shows that the students developed their own schemes to deal with the concepts about construction. The opened discussions at the end of each activity of the teaching proposal about the definitions and properties involved there created conditions for the conceptual development of the participants of this research, contributing to the advance in the comprehension of a series of mathematical concepts that, although implicit, they were present in each one of your actions.

Keywords: Prime and compound numbers; Fundamental Theorem of Arithmetic; Problem situations; Elementary School.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Quando os alunos das séries finais do Ensino Fundamental ou até mesmo no Ensino Médio se deparam com questões que envolvam os conceitos utilizados na decomposição de um número em fatores primos, é comum apresentarem manifestações que demonstram as dificuldades no procedimento dos cálculos associados a essa operação tais como os critérios de divisibilidade e a identificação de múltiplos e divisores. Sobretudo, quando se trata de números que possuem em sua composição três ou mais algarismos. Em geral os alunos só conseguem resolver tais operações com auxílio de uma calculadora.

Direcionando o foco para o campo pedagógico, na busca pela compreensão dessa dificuldade acerca desses conceitos, vemos que o tratamento dado aos mesmos e a forma como são abordados em salas de aula, conduzem o aluno à memorização de algoritmos e de definições "vazios de sentido". Assim, quando os mesmos são indagados, por exemplo, a respeito do processo utilizado em tais algoritmos, ou ainda sobre conexões entre as definições mencionadas, notamos que, em geral, as respostas não apresentam indícios de que haja um domínio eficaz sobre esses conceitos matemáticos.

Em decorrência, quando os objetivos de tais conceitos como a decomposição de um número em fatores primos que, por exemplo, auxilia na simplificação e na otimização de cálculos não são alcançados, o estudante se vê limitado a memorizar e reproduzir uma série de regras cujos significados e aplicações ele desconhece, tomando para si a ideia de que os conhecimentos matemáticos são inatingíveis e fortalecendo aquela imagem, socialmente construída, de que aprender matemática fica restrito a um grupo seleto de pessoas cujo intelecto seria mais evoluído.

Pesquisas em Educação Matemática[1] sinalizam a existência destes problemas no ensino e na aprendizagem da Aritmética. No que diz respeito à proposta curricular, podemos perceber que o estudo dos conceitos aritméticos não tem sido enfatizado no Ensino Fundamental. Embora tal estudo ocorra, observamos este tratamento mecanizado, com base em problemas e exercícios repetitivos. Com isso, os alunos não têm tido oportunidade de se apropriarem das variações nos algoritmos que possam ser úteis para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e estimativas. Lins e Gimenez (1997, p. 33) apontam esta constatação ao afirmarem que:

[1]Machado et al (2003, 2005), Resende (2007), Santos et al (2007).

> Os conceitos aritméticos usados na Educação Matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos. Tem-se esquecido frequentemente que a aritmética inclui também: Representações e significações diversas (pontos de referência e núcleos, que ampliam a ideia simples do manipulativo); b) Análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e habilidades); e d) descobertas ou "teoremas"(descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínios).

Em outras palavras, pouca atenção tem sido dada às reflexões sobre o funcionamento dos conceitos aritméticos. Todas as possibilidades de abordagem destes conceitos são reduzidas apenas ao ensino de algoritmos.

Assim, diante desta problemática educacional relativa ao ensino da Matemática no que diz respeito à Aritmética, tomaremos, como tópico a ser abordado e apresentado no presente trabalho, o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e os principais conceitos associados a ele, os quais contemplam noções básicas essenciais como, por exemplo, a de número primo na resolução de problemas e no desenvolvimento de conceitos mais complexos.

Segundo Hefez (2016, p. 123), o TFA garante que "todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos". Dessa forma, os conceitos que se associam favorecendo a sua compreensão são as relações de múltiplos e fatores que podem se estabelecer entre um par de números naturais e as propriedades que derivam destas relações, bem como os critérios de divisibilidade, a diferenciação entre primos e compostos e a decomposição de um número em fatores primos. Trata–se, portanto, de conceitos relevantes em relação ao corpo de conhecimentos matemáticos a serem estudados durante o ensino Fundamental e Médio. Neste sentido, o texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta algumas habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos no 6º ano do ensino fundamental, dentre a quais destacamos:

> (EF06MA05) Classifcar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor (BRASIL, 2017, p. 297).

A partir do exposto, entendemos que a divisibilidade associada a números naturais envolve a divisão e a multiplicação. O fato de conhecer alguns critérios de divisibilidade permite ao aluno efetuar cálculos mentais e estimativas. Saber decompor um número em fatores primos auxilia–o na obtenção do mínimo múltiplo comum (M.M.C) e do máximo divisor comum (M.D.C), bem como no cálculo envolvendo radiciação e simplificação de frações. Boa parte destes conceitos são conteúdos programáticos de Matemática desde o 6º ano do Ensino Fundamental, sendo retomado nos anos subsequentes apenas com aumento gradual dos números, cuja decomposição é solicitada aos alunos.

Assim, ao considerarmos que o objetivo desta pesquisa é abordar o estudo do TFA e dos principais conceitos associados a ele com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, trazemos, primeiramente, um suporte teórico que acreditamos ser o conteúdo mínimo de conhecimento do qual o professor deve se apropriar para realizar uma aula abordando as principais definições, propriedades e teoremas a respeito do nosso objeto de estudo, o TFA. Partimos da noção de divisibilidade, com uma ampla discussão sobre as propriedades inerentes a tal conceito, descrevemos o processo de divisão euclidiana, apresentamos as propriedades do M.M.C e do M.D.C, destacamos a definição e a importância dos números primos chegando, por fim, ao TFA e suas aplicações no Ensino Básico. Em seguida apresentamos a fundamentação teórica de nossa pesquisa e uma proposta de metodologia de ensino, que conduz ao TFA, construída à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud.

Nesta sugestão metodológica, procuramos enfatizar a importância das interações entre os indivíduos em trabalhos coletivos e de seu raciocínio em atividades individuais, criando condições para os estudantes produzirem seus esquemas de investigação e resolução, destacando os invariantes envolvidos e valorizando formas diversas de representação, assim como os mecanismos que promovem transformação de uma representação em outra. Ao fim de cada atividade buscamos a construção das definições e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo através da elaboração e interpretação de propriedades e teoremas.

Como já descrevemos anteriormente, o foco de nossa pesquisa reside na abordagem do estudo do TFA com alunos do 6º do ensino fundamental analisando, através dessa abordagem, os momentos em que os alunos realizam as generalizações dos padrões aritméticos aí envolvidos. Em outras palavras, nossa questão geral é:

Como abordar o estudo do teorema fundamental da aritmética e dos principais conceitos associados a ele com alunos do 6º ano do ensino fundamental?

Para responder a essa questão apresentamos estratégias para que os alunos compreendessem e diferenciassem o conceito de número primo e número composto assim como fizemos uso, por meio de atividades lúdicas, dos conceitos de múltiplos, fatores e divisores favorecendo a compreensão da decomposição dos números em fatores primos e de seu uso na otimização e simplificação de cálculos.

Justificamos, nesse sentido, que nossa pesquisa parte da necessidade de uma abordagem que priorize a apropriação de conceitos e não simplesmente a memorização de algoritmos que são abordados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, dando oportunidade para o aluno se expressar e decentralizando do professor a fala e o desenvolvimento de modo de pensar sobre o conteúdo matemático que está sendo estudado.

Desse modo, quando dizemos que o objetivo do nosso estudo é abordar o Teorema Fundamental da Aritmética com um grupo de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental por meio de uma proposta de ensino centrada nos principais conceitos ligados a ele, queremos dizer que nosso olhar está voltado às ações dos alunos, na medida em que eles expressam os objetos matemáticos que estão sendo apropriados. Se tal apropriação desses conceitos não for favorecida, o indivíduo enfrentará dificuldades durante sua vida escolar, sobretudo, quando confrontado com situações que lhe exijam tomar decisões e estabelecer estratégias de resolução de problemas. As dificuldades poderão se fazer presentes, inclusive, em níveis de ensino mais elevados, pois ideias, inicialmente, mal concebidas, se constituirão em obstáculos para a compreensão de futuros conceitos.

2 Conceitos Fundamentais e o Teorema Fundamental da Aritmética

Consideramos que os tópicos que serão abordados a seguir fornecendo as definições, os resultados básicos e os teoremas da aritmética elementar que se tornam indispensáveis ao desenvolvimento deste capítulo, são essenciais para o professor conceber uma forma própria de trabalhar em um nível adequado às turmas do sexto ano do Ensino Fundamental com os conceitos de divisibilidade, múltiplos, divisores, divisão euclidiana, números primos e compostos chegando, por fim, ao nosso objeto de estudo: o Teorema Fundamental da Aritmética. Estes conceitos fundamentais destacam–se não pela linguagem e pela técnica que desenvolvem, mas pelos tipos de problemas e resultados que possuem e pela interdisciplinaridade e imaginação que eles exigem em sua resolução. Por esta razão, a área atrai simpatizantes de todos os ramos da matemática. Sua apresentação a alunos do Ensino Fundamental se torna uma boa alternativa para o ensino do rigor e do pensamento matemático.

A maneira como tais conceitos são discutidos nesse primeiro momento de aprendizagem pode guiar o aluno a uma concepção sólida em seu futuro contato com tópicos menos elementares. Logo, entendemos que o educando não deve limitar–se à reprodução. Para subir os degraus que, para alguns, pode ser abstrato, ele precisa se apropriar das definições refletindo e argumentando sobre conceitos e processos matemáticos orientado pelo professor que domina o assunto em patamares mais elevados.

2.1 Divisibilidade

Nesta seção, iremos iniciar, com o conjunto dos números inteiros, a discussão sobre divisibilidade em uma trajetória distinta dos livros didáticos tradicionais. Constantemente o que vemos nas salas de aula é a definição de divisibilidade associada à noção de divisão euclidiana. Isto é, um número é considerado divisível por outro quando sua divisão por ele deixa resto zero. Ao partir dessa premissa, podemos levar os alunos a pensar que a divisão somente pode ser realizada quando um número é divisível por outro, criando, assim, uma espécie de bloqueio para a aprendizagem de posteriores divisões que deixam restos não nulos. Assim, partiremos da premissa de que um número é divisível por outro quando é múltiplo do mesmo.

O que segue tomamos como referência Alencar Filho (1981), Hefez (2016), Krerley e Adán (2012) e Santos (2009).

Definição 1 (Divisibilidade)**.** *Dados dois números inteiros* a *e* b*, com* $a \neq 0$*, diremos que* a *divide* b*, escrevendo* $a \mid b$*, quando existir um número inteiro* c *tal que*

$$b = a \cdot c.$$

Nesse caso, diremos também que a é um divisor ou fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a ou que b é divisível por a.

Observe que a notação $a \mid b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{Z}$, nem representa uma fração. Trata–se de uma sentença que diz ser verdade que existe um número c inteiro tal que $b = a \cdot c$. A negação dessa sentença é representada por $a \nmid b$, significando que não existe nenhum número inteiro c tal que $b = a \cdot c$.

Exemplo 1. $3 \mid 21$ *pois* $21 = 7 \cdot 3$*. Por outro lado* $3 \nmid 8$ *pois considerando o conjunto* $M = \{3m \mid m \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ *dos múltiplos positivos de* 3 *vemos que* 8 *não pertence ao mesmo.*

A seguinte proposição é um bom exercício para entender os conceitos enunciados acima.

Proposição 1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}^*$ *e* $c, d \in \mathbb{Z}$*. Tem-se que*

1. $a \mid 0, \quad 1 \mid a \quad$ *e* $\quad a \mid a$*;*
2. *Se* $a \mid 1$*, então* $a = \pm 1$*;*
3. *Se* $a \mid b$ *e se* $c \mid d$*, então* $ac \mid bd$*;*
4. *Se* $a \mid b$ *e se* $b \mid c$*, então* $a \mid c$*;*
5. *Se* $a \mid b$ *e se* $b \mid a$*, então* $a = \pm b$*;*
6. *Se* $a \mid b$ *com* $b \neq 0$*, então* $|a| \leqslant |b|$*;*
7. *Se* $a \mid b$ *e se* $a \mid c$*, então* $a \mid (bx + cy)$*, para todo* x *e* y *inteiros.*

Demonstração. (1) Pela definição se $a \mid 0$, existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = a \cdot q_1$, dai $q_1 = 0$, ou seja, $0 = a \cdot 0$; se $1 \mid a$ existe $q_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 1 \cdot q_2$, dai $q_2 = a$, ou seja, $a = 1 \cdot a$; E se $a \mid a$ existe $q_3 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = a \cdot q_3$, dai $q_3 = 1$, ou seja, $a = a \cdot 1$;

(2) Se $a \mid 1$, então existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = a \cdot q$ implicando nas seguintes possibilidades: $a = 1$ e $q = 1$ ou $a = -1$ e $q = -1$. Logo $a = \pm 1$.

(3) Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q_1, \text{ com } q_1 \in \mathbb{Z} \qquad (1) \\ d &= c \cdot q_2, \text{ com } q_2 \in \mathbb{Z} \qquad (2) \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro em (1) e (2), tem–se

$$b \cdot d = (a \cdot c)(q_1 \cdot q_2) \Longrightarrow ac \mid bd$$

(4) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q_1, \text{ com } q_1 \in \mathbb{Z} \qquad (3) \\ c &= b \cdot q_2, \text{ com } q_2 \in \mathbb{Z} \qquad (4) \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro em (3) e (4), tem–se

$$b \cdot c = (a \cdot b)(q_1 \cdot q_2) \Longrightarrow c = a(q_1 \cdot q_2) \Longrightarrow a \mid c$$

(5) Se $a \mid b$ e se $b \mid a$, então

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q_1, \text{ com } q_1 \in \mathbb{Z} \qquad (5) \\ a &= b \cdot q_2, \text{ com } q_2 \in \mathbb{Z} \qquad (6) \end{aligned}$$

Substituindo (5) em (6),

$$a = a(q_1 q_2) \Rightarrow q_1 q_2 = 1 \Rightarrow q_1 \mid 1.$$

Pelo item 2 desse teorema implica que $q_1 = \pm 1$, então $a = \pm b$.

(6) Se $a \mid b$ com $b \neq 0$, então existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot q$, aplicando o modulo em ambos os membros temos

$$|b| = |a \cdot q| = |a| \cdot |q|. \qquad (7)$$

Como $q \neq 0$, já que $b \neq 0$, então $1 \leqslant |q|$, dai multiplicando por $|a|$, tem–se

$$|a| \leqslant |q| \cdot |a| \tag{8}$$

Logo de (7) e (8) obtemos que $|a| \leqslant |b|$.

(7) Se $a \mid b$ e se $a \mid c$, então

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q_1, \text{ com } q_1 \in \mathbb{Z} && (9)\\ d &= c \cdot q_2, \text{ com } q_2 \in \mathbb{Z} && (10)\end{aligned}$$

Portanto, quaisquer que sejam os inteiros x e y, multiplicando (9) por x e (10) por y e somando obteremos:

$$bx + cy = aq_1x + aq_2y = a(q_1x + q_2y)$$

então $a \mid (bx + cy)$, para todo x e y inteiros. □

Exemplo 2. *Prove que o número* $N = 5^{45362} - 7$ *não é divisível por* 5.

Solução: Suponhamos, por absurdo, que o número N seja divisível por 5. Logo, pela definição, existe um número inteiro q tal que $5^{45362} - 7 = 5 \cdot q$. Logo,

$$\begin{aligned} 7 &= 5^{45362} - 5q\\ &= 5 \cdot (5^{45361} - q)\\ &= 5q', \quad \text{onde} \quad q' = 5^{45361} - q,\end{aligned}$$

ou seja, 7 seria divisível por 5, o que é um absurdo.

Exemplo 3. *Sejam* a *e* b *inteiro. Mostre que se* $a \mid b$ *e se* $a \mid c$*, então* $a^2 \mid bc$.

Demonstração. Se $a \mid b$ e se $a \mid c$, então

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q_1, \text{ com } q_1 \in \mathbb{Z} && (11)\\ c &= a \cdot q_2, \text{ com } q_2 \in \mathbb{Z} && (12)\end{aligned}$$

Portanto, multiplicando membro a membro (11) e (12) obtemos:

$$b \cdot c = a \cdot a \cdot (q_1 \cdot q_2) \Rightarrow b \cdot c = a^2 \cdot (q_1 \cdot q_2)$$

Logo, $a^2 \mid bc$. □

O próximo passo de nossa discussão é ver o que acontece quando um número não é divisível por outro. Por exemplo, analisemos se o número 31 é divisível por 7 e para isto listaremos a diferença entre 31 e os múltiplos positivos de 7, isto é:

$$\begin{aligned} r_1 &= 31 - 7 \cdot 1 = 24, \\ r_2 &= 31 - 7 \cdot 2 = 17, \\ r_3 &= 31 - 7 \cdot 3 = 10, \\ r_4 &= 31 - 7 \cdot 4 = 3, \\ r_5 &= 31 - 7 \cdot 5 = -4, \\ r_6 &= 31 - 7 \cdot 6 = -11, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Claramente 31 não é divisível por 7, pois caso contrário teríamos que alguma das diferenças acima seria igual a zero, o que não ocorre pois as diferenças $r_q = 31 - 7q$ com $1 \leqslant q \leqslant 4$ são todas positivas e com $q \geqslant 5$ são todas negativas. Entretanto, notamos que entre as diferenças positivas a única que é menor que 7 corresponde ao caso $q = 4$.

O resultado seguinte (Divisão Euclidiana) nos diz o que acontece no caso geral da divisão de um inteiro $b \neq 0$ por um inteiro positivo a.

2.2 Divisão Euclidiana

Veremos agora um importante teorema descrito por Euclides, em sua mais famosa obra, *Os Elementos*. Esse resultado trata do fato de que dados dois inteiros a e b, com $b \neq 0$, é sempre possível realizar a divisão de a por b, ainda que haja um pequeno resto[2]. Tal algoritmo continua sendo a forma mais prática de se efetuar uma divisão com resto, e por isso, é um dos resultados mais importantes da Teoria dos Números e de fácil

[2]Devemos observar que Euclides só tratava números naturais.

entendimento e aplicação. É estudado desde o Ensino Fundamental, passando pelo Ensino Médio e chegando ao Ensino Superior onde é abordado de forma mais geral.

Antes de introduzirmos a Divisão Euclidiana, conhecida também como Algoritmo da Divisão, enunciaremos e demonstraremos o chamado Teorema de Eudoxius[3].

Teorema 1 (Eudoxius). *Dados a e b inteiros com $b \neq 0$, então a é múltiplo de b ou se encontra entre dois múltiplos consecutivos de b, isto é, correspondendo a cada par de inteiros a e $b \neq 0$ existe um inteiro n tal que, para $b > 0$,*

$$nb \leqslant a < (n+1)b,$$

e para $b < 0$

$$nb \leqslant a < (n-1)b.$$

Demonstração. Para nossa demonstração vamos considerar $a > 0$ e $b > 0$ (os casos em que $a < 0$ ou $b < 0$ podem ser demonstrados de maneira análoga). Deste modo, temos duas possiblidades: ou $a|b$, ou $a \nmid b$.

1. Se $a \mid b$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a = n \cdot b$. Nesse caso não há o que provar e o resultado segue;

2. Se $a \nmid b$, então $a \neq n \cdot b \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Nesse caso existe um menor inteiro k que satisfaz a condição: $a < k \cdot b$.

Afirmamos que

$$(k-1)b < a.$$

De fato, pois, caso $a < (k-1)b$ teríamos uma contradição uma vez que $a < k \cdot b$ e k é o menor inteiro em que isto ocorre. Deste modo, devemos ter que $(k-1)b < a$ e então $(k-1)b < a < kb$. Tomando $n = k-1$ obtemos

$$n \cdot b \leqslant a < (n+1)b,$$

$\square$

[3]Este resultado costuma ser erroneamente atribuído a Arquimedes e chamado "Princípio de Arquimedes".

Exemplo 4. *Para* $a = 17$ *e* $b = 4$*, devemos tomar* $n = 4$*.*

$$4 \cdot 4 \leqslant 17 < 5 \cdot 4 \Longrightarrow 16 \leqslant 17 < 20$$

Para $a = -17$ *e* $b = 4$*, escolhemos* $n = -5$*.*

$$(-5) \cdot 4 \leqslant -17 < (-4) \cdot 4$$

Para $a = 25$ *e* $b = -2$*, tomamos* $n = -13$*.*

$$(-13) \cdot (-2) \leqslant 25 < (-14) \cdot (-2)$$

Abordaremos agora o Algoritmo da Divisão de Euclides, objeto de estudo do Teorema a seguir.

Teorema 2 (Algoritmo da Divisão de Euclides)**.** *Dados dois inteiros* a *e* b*, com* $b > 0$*, então existem e são único os inteiros* q *e* r *tais que*

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leqslant r < b.$$

Os inteiros q *e* r *são chamados respectivamente de quociente e resto,* $r = 0$ *se, somente se,* b *é divisor de* a*, ou seja,* $b \mid a$*.*

Demonstração. Pelo Teorema de Eudoxius, como $b > 0$, existe um número inteiro q satisfazendo

$$qb \leqslant a < (q + 1)b,$$

o que implica $0 \leqslant a - qb$ e $a - qb < b$. Desta forma, se definirmos $r = a - qb$, teremos, garantida, a existência de q e r. A fim de mostrarmos a unicidade, vamos supor a existência de outro par q_1 e r_1 verificando

$$a = q_1 b + r_1 \quad \text{com} \quad 0 \leqslant r_1 < b.$$

Temos $(qb + r) - (q_1 b + r_1) = 0$, isto é $b(q - q_1) = r_1 - r$, o que implica $b \mid (r_1 - r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ e, portanto, como $b \mid (r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que nos permite concluir que $r = r_1$. Logo $q_1 b = qb$ e daí $q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$. $\square$

Corolário 1. *Se* a *e* b *são dois inteiros, com* $b \neq 0$*, existem e são únicos os inteiros* q *e* r *que satisfazem as condições:*

$$a = qb + r, \ \textit{com } 0 \leqslant r < |b|.$$

Demonstração. Se $b > 0$, nada há para demostrar, e se $b < 0$, então $|b| > 0$, e por conseguinte existem e são únicos os inteiros q_1 e r tais que

$$a = q_1|b| + r, \ \text{com } 0 \leqslant r < |b|.$$

ou seja, por ser $|b| = -b$:

$$a = q_1(-b) + r \Rightarrow a = (-q_1)b + r, \ \text{com } 0 \leqslant r < |b|.$$

Portanto, existe e são únicos os inteiros $q = q_1$ e r tais que

$$a = qb + r, \ \text{com } 0 \leqslant r < |b|.$$

$\square$

Exemplo 5. *Determine o quociente* q *e o resto* r *na divisão de* $a = 53$ *por* $b = -13$ *que satisfazem às condições do Algoritmo da Divisão.*

Solução: Efetuando a divisão usual dos valores absolutos de a e b, obtemos:

$$53 = 13 \cdot 4 + 1 \Rightarrow 53 = (-13) \cdot (-4) + 1$$

onde $0 \leqslant 1 < |-13|$.

Logo, o quociente $q = -4$ e o resto $r = 1$.

Exemplo 6. *Determine o quociente* q *e o resto* r *na divisão de* $a = -89$ *por* $b = 11$ *que satisfazem às condições do algoritmo da divisão.*

Solução: Efetuando a divisão usual dos valores absolutos de a e b, obtemos:

$$89 = 11 \cdot 8 + 1 \Rightarrow -89 = 11 \cdot (-8) - 1$$

Como $r = -2 < 0$ não satisfaz à condição $0 \leqslant r < |11|$, somando e subtraindo o valor de 11 de b ao segundo membro da igualdade anterior, teremos:

$$-89 = 11 \cdot (-8) + -11 + 11 - 1 \Rightarrow -89 = 11 \cdot (-9) + 10,$$

como $0 \leqslant 10 < 11$. Logo, o quociente $q = -8$ e o resto $r = 10$.

2.3 Sistema de Numeração

No sistema de numeração decimal, também conhecido como sistema numérico na base 10, todo número pode ser representado como uma sequência de 10 símbolos, constituídos pelo 0 (zero) e os algarismos $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 9$. Por serem dez os algarismos, o sistema é chamado decimal. Por exemplo, o número 345 escreve–se na base decimal da seguinte forma.

$$345 = 300 + 40 + 5 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$$

Assim como 2768 se escreve da forma

$$2768 = 2000 + 700 + 60 + 8 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8.$$

De modo geral, se denotamos por $a = r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0$ o número inteiro positivo formado pelos algarismos $r_n,\ r_{n-1}, \ldots,\ r_1$ e r_0, nessa ordem, então a se escreve na base decimal da forma

$$a = r_n \cdot 10^n + r_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + r_1 \cdot 10 + r_0$$

Daremos, a seguir, os critérios de divisibilidade por 5, por 10, por 3 e por 9 para números representados na base 10.

Proposição 2 (Critério de divisibilidade por 5 e por 10)**.** *Seja* $a = r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0$ *um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 5 (respectivamente por 10) é que* r_0 *seja* 0 *ou* 5*.*

Demonstração. Sendo $a = 10 \cdot (r_n r_{n-1} \ldots r_1) + r_0$, temos que a é divisível por 5 se, e somente, se, r_0 é divisível por 5, e, portanto, $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$. Por outro lado, a é divisível por 10 se, e somente se, r_0 é divisível por 10, o que somente ocorre quando $r_0 = 0$. □

Antes de provar o critério de divisibilidade por 3 e por 9 no sistema de numeração decimal, provamos, a seguir, uma identidade muito útil.

Proposição 3. *Sejam* a, $b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Temos que* $a - b$ *divide* $a^n - b^n$.

Demonstração. Vamos provar isto por indução sobre n. É óbvio que a afirmação é verdade para $n = 1$, pois $a - b$ divide $a^1 - b^1 = a - b$.

Suponhamos, agora, que $(a - b) \mid (a^n - b^n)$. Escrevamos

$$a^{n+l} - b^{n+l} = a \cdot a^n - b \cdot a^n + b \cdot a^n - b \cdot b^n = (a - b)a^n + b(a^n - b^n).$$

Como $(a - b) \mid (a - b)$ e, por hipótese, $(a - b) \mid (a^n - b^n)$, decorre da igualdade acima e da Proposição 2.1 (7) que $(a - b) \mid (a^{n+1} - b^{n+1})$. Estabelecendo o resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Uma aplicação interessante da proposição acima é o fato de que todo número da forma $10^n - 1$, onde n é natural, seja divisível por 9, como veremos a seguir na Proposição 2.4. De fato, basta pôr na proposição $a = 10$ e $b = 1$, obtendo que $a - b = 9$ divide $a^n - b^n = 10^n - 1$.

Proposição 4 (Critério de divisibilidade por 3 e por 9)**.** *Seja* $a = r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0$ *um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que* a *seja divisível por 3 (respectivamente por 9) é que* $r_n + \dots r_1 + r_0$ *seja divisível por 3 (respectivamente por 9).*

Demonstração. Temos que

$$a-(r_n+\dots r_1+r_0) = r_n \cdot 10^n + \dots r_1 \cdot 10 + r_0 - (r_n + \dots r_1 + r_0) = r_n(10^n - 1) + \dots r_1(10 - 1).$$

Como o termo à direita nas igualdades acima é divisível por 9 pela proposição 2.3, temos, para algum número q,

$$a = (r_n + \dots r_1 + r_0) + 9q,$$

Como $9 \mid 9q$, então $9 \mid (r_n + \dots r_1 + r_0)$ se, e somente se, $9 \mid (r_n + \dots r_1 + r_0 + 9q) = a$. $\square$

Exemplo 7. *Prove, sem fazer muitas contas, que o número* $N = 13424136 + 1234567890$ *é divisível por* 3.

Solução: Note que não precisamos fazer a soma dos números anteriores. Para mostrar isso, basta observar que cada um dos números acima é divisível por 3, pois a soma de seus dígitos é um múltiplo de 3. Assim, temos que $3 \mid (13424136 + 1234567890)$, ou seja, $3 \mid N$.

Problema 1 (PROFMAT 2015 – ENQ – EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO)**.** *Determine TODOS os valores possíveis para os algarismos* x *e* y *de modo que o número abaixo, representado na base 10, tenha a propriedade mencionada:*

$$3x90586y$$

é divisível por 60*.*

Solução: $3x90586y$ é divisível por $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ se, e somente se, é divisível simultaneamente por 4, 3 e 5.

i) $3x90586y$ é divisível por 5 se, e somente se, $y = 0$ ou $y = 5$.

ii) $3x90586y$ é divisível por 4 se, e somente se, $6y$ é divisível por 4. Pelo item anterior, $y = 0$, pois 65 não é divisível por 4.

iii) $3x905860$ é divisível por 3 se, e somente se, $3 + x + 9 + 0 + 5 + 8 + 6 + 0 = 31 + x$ é divisível por 3. Os possíveis valores para x são: 2, 5, 8.

Resposta: 32905860, 35905860 ou 38905860.

2.4 Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum

Nesta seção estudaremos três conceitos fundamentais que aparecem naturalmente em vários problemas de divisibilidade, assim como a relação existente entre eles.

2.4.1 Máximo Divisor Comum

O primeiro destes conceitos está relacionado com os inteiros positivos que dividem simultaneamente dois inteiros prefixados e é denominado máximo divisor comum.

Daqui por diante só consideraremos os divisores positivos de um determinado número.

Definição 2 (Máximo Divisor Comum)**.** *Sejam* a *e* b *inteiros diferentes de zero. O máximo divisor comum, resumidamente mdc, entre* a *e* b *é o número* d *que satisfaz as seguintes condições:*

1. d *é um divisor comum de* a *e* b*, isto é,* $d \mid a$ *e* $d \mid b$*;*

2. d *é o maior inteiro positivo com a propriedade (1), isto é, se* $c \mid a$ *e se* $c \mid b$*, então* $c \leqslant d$*.*

Neste caso, denotamos o mdc entre a e b por $d = (a, b) = (b, a)$ ou por $d = \mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(b, a)$. Se $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, então dizemos que a e b são primos entre si ou coprimos.

Exemplo 8. *Observando que* $12 = 2 \cdot 6$*,* $18 = 3 \cdot 6$ *temos que* $\mathrm{mdc}(12, 18) = 6$*. Por outro lado,* $\mathrm{mdc}(4, 15) = 1$*, logo os números* 4 *e* 15 *são primos entre si.*

Vejamos agora algumas das propriedades dos divisores comuns de dois números inteiros a e b. Para estes números é imediato e valem as seguintes afirmações:

1. $\mathrm{mdc}(0, 0)$ não existe;

2. $\mathrm{mdc}(a, 1) = 1$;

3. se $a \neq 0$, então o $\mathrm{mdc}(a, 0) = |a|$;

4. se $a \neq 0$, então o $\mathrm{mdc}(a, a) = |a|$;

5. se $a \mid b$, então o $\mathrm{mdc}(a, b) = |a|$.

Em particular, é imediato verificar que:

$$\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(-a, b) = \mathrm{mdc}(a, -b) = \mathrm{mdc}(-a, -b).$$

O Teorema a seguir é uma das ferramentas básicas na resolução de problemas que envolvem o mdc entre dois números. O resultado foi provado pela primeira vez por Claude–Gaspard Bachet de Méziriac (1581 – 1638) e mais tarde generalizado para polinômios por Étienne Bézout (1730 – 1783). Frequentemente, na literatura se enuncia este resultado como teorema (ou identidade) de Bézout, esquecendo–se o nome Bachet.

Teorema 3 (Teorema de Bached–Bézout)**.** *Seja* d *o máximo divisor comum entre* a *e* b*, então existem inteiros* x *e* y *tais que*

$$\mathrm{mdc}(a, b) = ax + by \tag{13}$$

isto é, o $\mathrm{mdc}(a, b)$ *é uma combinação linear de* a *e* b*.*

Demonstração. Seja S o conjunto de todas as combinações lineares $ma+nb$ onde m e n são inteiros, isto é:

$$S = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Este conjunto contém, claramente, números negativos, positivos e também o zero, por outro lado S não é vazio ($S \neq \emptyset$).

Vamos escolher m_0 e n_0 tais que $c = m_0a + n_0b$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto S. Vamos provar que $c \mid a$ e que $c \mid b$. Como as demontrações são análogas, mostraremos apenas que $c \mid a$. Suponhamos por contradição que $c \nmid a$. Pelo Teorema Algoritmo da Divisão de Euclides, existem q e r tais que

$$a = qc + r \quad \text{com} \quad 0 \leqslant r < c.$$

o que dá:

$$\begin{aligned} r = a - qc &= a - q(m_0a + n_0b) \\ &= (1 - qm_0)a + (-qn_0)b, \end{aligned}$$

isto é, o resto r é uma combinação linear de a e b. Isto mostra que $r \in S$, pois $(1-qm_0)$ e $(-qn_0)$ são inteiros, o que é uma contradição, visto que $0 \leqslant r < c$ e c é o menor elemento positivo de S.

Logo $c \mid a$ e de forma análoga se prova que $c \mid b$. Como d é um divisor comum de a e b, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a = k_1d$ e $b = k_2d$ e, portanto,

$$c = m_0a + n_0b = m_0k_1d + n_0k_2d = d(m_0k_1 + n_0k_2),$$

ou seja, $d \mid c$ e então $d \mid c$ (visto que c e d são números positivos) e como $d < c$ não é possível, uma vez que d é o máximo divisor comum, oncluímos que

$$d = c = m_0a + n_0b.$$

$\square$

Exemplo 9. *Sejam os inteiros* $a = 18$ *e* $b = 6$. *Temos*

$$\mathrm{mdc}(18, 6) = 6 \Longrightarrow 18x + 6y = 6 \tag{14}$$

Tomando $x_0 = 1$ *e* $y_0 = -2$ *tem–se* $18 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) = 6$. *Em geral, todos os pares de inteiros* $(x_0,\ y_0)$ *que satisfazem a expressão (14) pode ser obtido por:*

$$x = 1 + k \quad e \quad y = -2 - 3k$$

Onde $k \in \mathbb{Z}$, *note que* $18(1 + k) + 6(-2 - 3k) = 6$.

2.4.2 Algoritmo de Euclides

Apesar de conhecermos propriedades teóricas do mdc entre dois inteiros, encontrá-lo de fato pode ser uma tarefa complicada sem auxílio das ferramentas corretas. Lembrando o seu significado, o leitor talvez pudesse pensar que devemos calcular todos os divisores de a, todos os divisores de b e descobrir qual é o maior elemento comum aos dois conjuntos. De fato, isso seria muito trabalhoso. Para achar o mdc se faz uso de um importante método denominado *Algoritmo de Euclides*.

O Lema seguinte nos apresenta um resultado elementar, mas de grande importância na demonstração do Algoritmo de Euclides (Teorema 2.4)

Lema 1. *Sejam* a, b, $n \in \mathbb{Z}$. *Se existe* $\mathrm{mdc}(a, b - an)$ *então* $\mathrm{mdc}(a, b)$ *existe e*

$$\mathrm{mdc}(a, b - an) = \mathrm{mdc}(a, b)$$

Demonstração. Seja $d = \mathrm{mdc}(a, b - na)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b - n \cdot a)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b; logo, c é um divisor comum de a e $b - n \cdot a$ e, portanto, $c \mid d$. Isso prova que $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. □

Observe que, com a mesma técnica usada na prova do Lema acima, poder–se–ia provar que, para todos a, b, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{mdc}(a, b - an) = \mathrm{mdc}(a, b),$$

ou que, se $n \cdot a > b$, então $mdc(a, b - an) = mdc(a, b)$.

Teorema 4 (Algoritmo de Euclides)**.** *Dados* a*,* $b \in \mathbb{Z}$*, podemos supor* $b \leqslant a$*. Se* $b = 1$ *ou* $a = b$*, ou ainda* $b \mid a$*, já vimos que* $mdc(a, b) = b$*. Suponhamos, então, que* $1 < b < a$ *e que* $b \nmid a$*. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever*

$$a = bq_1 + r_1, \quad \textit{com} \quad r_1 < b.$$

Temos duas possibilidades:

a) $r_1 \mid b$. Em tal caso $r_1 = mdc(b,\ r_1)$ e, pelo Lema 2.1, temos que

$$r_1 = mdc(b,\ r_1) = mdc(b,\ a - q_1 b) = mdc(b,\ a) = mdc(a,\ b)$$

e o algoritmo termina.

b) $r_1 \nmid b$. Em tal caso, podemos efetuar a divisão de b por r_1 obtendo

$$b = r_1 q_2 + r_2, \quad \text{com} \quad 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, temos duas possibilidades:

i) $r_2 \mid r_1$. Nesse caso $r_2 = mdc(r_1, r_2)$ e novamente, pelo Lema 2.1,

$$r_2 = mdc(r_1,\ r_2) = mdc(r_1,\ b - q_2 r_1) = mdc(r_1,\ b) = mdc(a - q_1 b,\ b) = mdc(a,\ b)$$

e paramos, pois termina o algoritmo.

ii) $r_2 \nmid r_1$. Nesse caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2 obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad \text{com} \quad 0 < r_3 < r_2.$$

Este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > \ldots$ que não possui menor elemento, o que não é possível pela Propriedade da Boa Ordem. Logo, para algum n, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, o que implica que $mdc(a, b) = r_n$.

O algoritmo acima pode ser sintetizado e realizado na prática, como mostramos a seguir.

Inicialmente, efetuamos a divisão $a = bq_1 + r_1$ e colocamos os números envolvidos no seguinte diagrama:

	q_1	
a	b	
r_1		

A seguir, continuamos efetuando a divisão $b = r_1q_2 + r_2$ e colocamos os números envolvidos no diagrama

	q_1	q_2	
a	b	r_1	
r_1	r_2		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos

	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-1}	$r_n = \mathrm{mdc}(a,\ b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\dots$		

Mostramos, a seguir, um exemplo de como aplicamos o algoritmo apresentado acima.

Exemplo 10. *Calculemos o mdc de 372 e 162:*

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6
48	18	12	6		

Observe que, no exemplo acima, o Algoritmo de Euclides nos fornece:

$$\begin{aligned}
6 &= 18 - 1 \cdot 12 \\
12 &= 48 - 2 \cdot 18 \\
18 &= 162 - 3 \cdot 48 \\
48 &= 372 - 2 \cdot 162
\end{aligned}$$

Donde se segue que

$$\begin{aligned}6 &= 18-1\cdot 12 = 18-1\cdot(48-2\cdot 18) = 3\cdot 18-48 = 3\cdot(162-3\cdot 48)-48\\ &= 3\cdot 162-10\cdot 48 = 3\cdot 162-10\cdot(372-2\cdot 162) = 23\cdot 162-10\cdot 372.\end{aligned}$$

Temos, então, que

$$\mathtt{mdc}(372,162) = 6 = 23\cdot 162+(-10)\cdot 372.$$

Note que conseguimos, através do uso do Algoritmo de Euclides, de trás para frente, escrever $6 = \mathtt{mdc}(372,162)$ como múltiplo de 162 menos um múltiplo de 372.

Em geral, seguindo o procedimento detalhado no exemplo acima, vê–se que o Algoritmo de Euclides também nos fornece um meio de escrever o mdc de dois números como soma de múltiplos dos dois números em questão. Desta forma, quando lidamos com números pequenos[4], achar o mdc é uma tarefa fácil, pois podemos calcular o mesmo valendo–se das fatorações dos números envolvidos. No entanto, quando estamos trabalhando com números grandes[5] o Algoritmo de Euclides, em geral, é mais acessível que a fatoração, podendo ser esta última bem difícil.

Quando utilizamos o Algoritmo de Euclides para expressar $\mathtt{mdc}(a,b)$ na forma $ma+nb$, com $m,\ n\in\mathbb{Z}$, referir–nos–emos a ele como *Algoritmo de Euclides Estendido.*

Exemplo 11. *Determine o máximo divisor comum dos números 471 e 1176.*

Solução: Aplicando o algoritmo de Euclides obtemos a seguinte sequência de divisões com resto:

$$\begin{aligned}1176 &= 471\cdot 2+234\\ 471 &= 234\cdot 2+3\\ 234 &= 78\cdot 3,\end{aligned}$$

então o $\mathtt{mdc}(471,1176) = 3$.

Exemplo 12. *Determine o* $\mathtt{mdc}(\underbrace{111\ldots111}_{100\ vezes},\ \underbrace{11\ldots11}_{60\ vezes})$.

[4]Nos referimos a números que possuem em sua composição, no máximo, dois algarismos.

[5]Números que possuem em sua composição três ou mais algarismos.

Solução: Primeiro escrevemos os números na base decimal, isto é,

$$\begin{aligned}\underbrace{111\ldots111}_{100 \text{ vezes}} &= 10^{99}+10^{98}+\ldots+1,\\ \underbrace{11\ldots11}_{60 \text{ vezes}} &= 10^{59}+10^{58}+\ldots+1.\end{aligned}$$

Aplicamos agora o algoritmo de Euclides para obter as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\underbrace{111\ldots111}_{100 \text{ vezes}} &= \left(10^{59}+10^{58}+\ldots+1\right)\cdot 10^{40}+10^{39}+10^{38}+\ldots+1\\ 10^{59}+10^{58}+\ldots+1 &= \left(10^{39}+10^{38}+\ldots+1\right)\cdot 10^{20}+10^{19}+10^{18}+\ldots+1\\ 10^{39}+10^{38}+\ldots+1 &= \left(10^{19}+10^{18}+\ldots+1\right)\cdot 10^{20}+10^{19}+10^{18}+\ldots+1\end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\mathrm{mdc}(\underbrace{111\ldots111}_{100 \text{ vezes}}, \underbrace{11\ldots11}_{60 \text{ vezes}}) = 10^{19}+10^{18}+\ldots+1 = \underbrace{11\ldots11}_{20 \text{ vezes}}.$$

Problema 2 (PROFMAT 2014 – ENQ – EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO)**.** *O máximo divisor comum de dois inteiros positivos é* 20*. Para se chegar a esse resultado pelo processo das divisões sucessivas, os quocientes encontrados foram, pela ordem,* 1, 5, 3, 3, 1 *e* 3*. Encontre os dois números.*

Solução: Utilizando o processo das divisões sucessivas, para os inteiros positivos a e b, obtém–se:

- $a = b \cdot 1 + r$; $0 < r < b$
- $b = r \cdot 5 + r_1$; $0 < r_1 < r$
- $r = r_1 \cdot 3 + r_2$; $0 < r_2 < r_1$
- $r_1 = r_2 \cdot 3 + r_3$; $0 < r_3 < r_2$
- $r_2 = r_3 \cdot 1 + r_4$; $0 < r_4 < r_3$
- $r_3 = r_4 \cdot 3$

Portanto, $r_4 = \mathrm{mdc}(a, b) = 20$ e $r_3 = 60$. Substituindo esses valores nas equações anteriores encontra–se $a = 6180$ e $b = 5200$.

2.4.3 Mínimo Múltiplo Comum

Agora passamos ao último conceito desta seção. O mesmo está relacionado com os inteiros positivos que são simultaneamente múltiplos de dois inteiros prefixados e é denominado mínimo múltiplo comum.

Definição 3 (Mínimo Múltiplo Comum)**.** *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O mínimo múltiplo comum, resumidamente mmc, entre a e b é o inteiro positivo m que satisfaz as seguintes condições:*

1. *m é um múltiplo comum de a e b, isto é, $a \mid m$ e $b \mid m$;*

2. *se c é um múltiplo comum de a e b, então $m \mid c$.*

Se c é um múltiplo comum de a e b, então, da condição (2) da definição acima, temos que $m \mid c$, e, portanto, $m \leqslant c$, o que nos diz que o mínimo múltiplo comum, se existe, é único e é o menor dos múltiplos comuns de a e b. O mínimo múltiplo comum de a e b, se existe, é denotado por $mmc(a, b)$ ou por $[a, b]$.

Caso exista $mmc(a, b)$ é fácil mostrar que

$$mmc(-a, b) = mmc(a, -b) = mmc(-a, -b) = mmc(a, b).$$

Assim, para efeito do cálculo do mmc de dois números, podemos sempre supô-los não negativos.

É também fácil verificar que $mmc(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$. De fato, se $mmc(a, b) = 0$, então 0 divide ab, que é múltiplo de a e de b, logo $ab = 0$ e, portanto, $a = 0$ ou $b = 0$. Reciprocamente, se $a = 0$ ou $b = 0$, então 0 é o único múltiplo comum de a e b, logo $mmc(a, b) = 0$.

Proposição 5. *Dados dois números inteiros a e b, temos que $mmc(a, b)$ existe e*

$$mmc(a, b) \cdot mdc(a, b) = ab.$$

Demonstração. Ponhamos $m = \dfrac{ab}{mdc(a, b)}$. Como

$$m = a \cdot \frac{b}{mdc(a, b)} = b \cdot \frac{a}{mdc(a, b)}$$

temos que $a \mid m$ e $b \mid m$.

Seja c um múltiplo comum de a e b; logo, $c = na = n'b$. Segue daí que

$$n \cdot \frac{a}{mdc(a,b)} = n' \cdot \frac{b}{mdc(a,b)}.$$

Como, $\frac{a}{mdc(a,b)}$ e $\frac{b}{mdc(a,b)}$ são primos entre si, segue–se, que $\frac{a}{mdc(a,b)}$ divide n', e, portanto, $m = b \cdot \frac{a}{mdc(a,b)}$ divide $n'b$ que, é igual a c □

Em virtude da proposição acima, o mínimo múltiplo comum de dois números inteiros não nulos pode ser encontrado por meio do Algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc, pois basta dividir o módulo do produto dos dois números pelo seu mdc.

Exemplo 13. *Dois amigos passeiam de bicicleta, na mesma direção, em torno a uma pista circular. Para dar uma volta completa um deles demora 15 minutos e o outro demora 18 minutos. Eles partem juntos e combinam interromper o passeio quando os dois se encontrarem pela primeira vez no ponto de partida. Quantas voltas deu cada um?*

Solução: Denotemos por n_1 e n_2, respectivamente, o número de voltas do primeiro e do segundo amigo. Notemos que o tempo total da corrida é o menor valor positivo de T que satisfaz as igualdades

$$T = 15n_1 = 18n_2,$$

ou seja

$$T = mmc(15, 18).$$

É fácil ver que $mdc(15, 18) = 3$. Aplicamos agora o Proposição 2.5

$$mmc(15, 18) \cdot mdc(15, 18) = 15 \cdot 18.$$

Disso resulta que

$$T = mmc(15, 18) = \frac{15 \cdot 18}{3} = 90.$$

Portanto, $n_1 = 6$ e $n_2 = 5$.

Corolário 2. *Se a e b são números inteiros primos entre si, então $mmc(a, b) = ab$.*

Demonstração. Como a e b são primos, segue–se que $mdc(a, b) = 1$, usando a proposição anterior, temos $1 \cdot mmc(a, b) = ab$. Logo segue que $mmc(a, b) = ab$. □

Podemos estender a noção de $\mathtt{mmc}$ para vários números, como faremos a seguir. Diremos que um número natural m é um $\mathtt{mmc}$ dos inteiros não nulos $a_1, \ldots, a_n$, se m é um múltiplo comum de $a_1, \ldots, a_n$, e, se para todo múltiplo comum m' desses números, tem–se que $m \mid m'$.

Verificamos que o $\mathtt{mmc}$, se existe, é único, sendo denotado por $\mathtt{mmc}(a_1, \ldots, a_n)$. Além disso, o $\mathtt{mmc}$ de vários inteiros não nulos é o menor múltiplo comum positivo desses inteiros.

Proposição 6. *Sejam* $a_1, \ldots, a_n$ *números naturais. Então existe o número* $\mathtt{mmc}(a_1, \ldots, a_n)$ *e*

$$\mathtt{mmc}\Big(a_1, \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1}, a_n\Big) = \mathtt{mmc}\Big(a_1, \ldots,\ a_{n-2},\ \mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n)\Big).$$

Demonstração. Basta provar que, se existe $\mathtt{mmc}\Big(a_1, \ldots,\ a_{n-2}, \mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n)\Big)$, vale a igualdade acima. A existência do mdc segue facilmente disso, por indução. Seja

$$m = \mathtt{mmc}\Big(a_1, \ldots,\ a_{n-2}, \mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n)\Big).$$

Logo, $a_1, \ldots, a_{n-2}$ e $\mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n)$ dividem m. Como

$$a_{n-1} \ \Big| \ \mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n) \quad \text{e} \quad a_n \ \Big| \ \mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n),$$

segue que m é um múltiplo comum de $a_1, \ldots, a_n$. Por outro lado, suponha que m' seja um múltiplo comum de $a_1, \ldots, a_n$. Logo, $a_1 \mid m',\ \ldots,\ a_{n-2} \mid m'$ e $\mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n) \mid m'$; daí segue que m' é multiplo de

$$m = \mathtt{mmc}\Big(a_1, \ldots,\ a_{n-2}, \mathtt{mmc}(a_{n-1}, a_n)\Big).$$

□

Exemplo 14. *Determine* $\mathtt{mmc}(-56,\ 16,\ 24)$

Solução: Pela proposição anterior, temos que

$$\mathtt{mmc}(-56,\ 16,\ 24) = \mathtt{mmc}\Big(56, \mathtt{mmc}(16, 24)\Big) = \mathtt{mmc}(56,\ 48) = 336.$$

2.5 Números Primos e Compostos

Ao longo da história da Matemática, os números primos foram protagonistas de célebres problemas que motivaram o desenvolvimento de teorias e técnicas pelas mentes mais férteis, como Fermat, Euler e Gauss. Até hoje muitos desses problemas, simples de enunciar, que envolvem números primos são desafios intelectuais para toda a humanidade.

Esta seção será dedicada ao estudo de propriedades básicas dos números primos. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4 (Número Primo). *Um número maior do que* 1 *que só possui como divisores* 1 *e ele próprio é chamado de número primo.*

Dados dois números primos p *e* q *e um número inteiro* a *qualquer, decorrem da definição acima os seguintes fatos:*

(i) *Se* $p \mid q$*, então* $p = q$.

De fato, como $p \mid q$ *e sendo* q *primo, temos que* $p = 1$ *ou* $p = q$*. Sendo* p *primo, tem–se que* $p > 1$*, o que acarreta* $p = q$.

(ii) *Se* $p \nmid a$*, então* $\text{mdc}(p, a) = 1$.

De fato, se $\text{mdc}(p, a) = d$*, temos que* $d \mid p$ *e* $d \mid a$*. Portanto,* $d = p$ *ou* $d = 1$*. Mas* $d \neq p$*, pois* p *não divide* a *e, consequentemente,* $d = 1$.

Um número maior do que 1 e que não é primo será chamado número *composto.*

Portanto, se um número natural $n > 1$ é composto, existirá um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que

$$n = n_1 n_2, \quad \text{com} \quad 1 < n_1 < n \quad \text{e}, \quad 1 < n_2 < n.$$

Por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são números primos, enquanto que 4, 6, 8, 9, 10, 12 e 15 são compostos

Observação 1. *Como podemos observar, com exceção do número 2, todos os demais números primos são ímpares. E, além disso, de modo geral o número 1 não é considerado nem primo nem composto.*

Do ponto de vista da estrutura multiplicativa dos naturais, os números primos são os mais simples e ao mesmo tempo são suficientes para gerar todos os números naturais, logo, todos os números inteiros não nulos, conforme veremos mais adiante no Teorema Fundamental da Aritmética.

Proposição 7 (Lema de Euclides)**.** *Sejam* $a,\ b,\ p \in \mathbb{Z}$*, com* p *primo. Se* $p \mid ab$*, então* $p \mid a$ *ou* $p \mid b$*.*

Demonstração. Se $p \mid a$, nada há que o demostrar, e se, ao invés, p não divide a, então são dito primo, ou seja, $mdc(a, p) = 1$. Logo se tem que $p \mid b$. □

Corolário 3. *Se* $p,\ p_1,\ \ldots,\ p_n$ *são números primos e, se* $p \mid p_1 \cdots p_n$*, então* $p = p_i$ *para algum* $i = 1,\ \ldots,\ n$*.*

Demonstração. Use a Proposição anterior (Lema de Euclides) indução sobre n, e o fato de que, se $p \mid p_i$, então $p = p_i$. □

Exemplo 15. *Mostre que o número* $n = 2^{20} - 25^4$ *é composto.*

Solução: Escrevemos n de outra forma, com o objetivo de facilitar nosso trabalho. Com efeito, observamos que

$$n = \left(2^{10}\right)^2 - \left(25^2\right)^2 = 1024^2 - 625^2,$$

logo é composto por ser diferença de quadrados. Além disso,

$$\begin{aligned} n &= 1024^2 - 625^2 \\ &= (1024 - 625)(1024 + 625) \\ &= 399 \cdot 1649 \\ &= 3 \cdot 133 \cdot 1649. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que $3 \mid n$.

Problema 3 (Revista do Professor de Matemática – RPM Nº 47)**.** *Eu e meu irmão caçula temos idades entre 10 e 20 anos e hoje nossas idades são expressas ambas por números primos, fato que se repetirá pela próxima vez daqui há 18 anos. Determine minha idade sabendo que a idade de nosso irmão mais velho, que, hoje, também é um número primo, é uma unidade maior do que a soma das nossas idades.*

Solução: As duplas de primos entre 10 e 20 são:

$$11 \text{ e } 13, \qquad 11 \text{ e } 17, \qquad 11 \text{ e } 19, \qquad 13 \text{ e } 17, \qquad 13 \text{ e } 19 \qquad \text{e} \qquad 17 \text{ e } 19.$$

Como a soma dos números adicionada de 1 deve resultar um primo, descarto as duplas 11 e 13 e 13 e 19. Como daqui a 18 anos as idades voltam a ser representadas por números primos, descarto as duplas que incluem o 17. Resta apenas uma possibilidade: minha idade é 19 anos e a do meu irmão é 11 anos.

Problema 4 (Revista do Professor de Matemática – RPM Nº 47)**.** *Uma equação do 2º grau, cujos coeficientes são todos números primos, pode apresentar duas raízes iguais?*

Solução: Para que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com a, b e c primos) admita duas raízes iguais, devemos ter $b^2 - 4ac = 0$ ou $b^2 = 4ac$, o que implica b^2 par. Logo, b também é par e, como é primo, $b = 2$. De $b^2 = 4ac$ temos $ac = 1$, o que é absurdo para a e c primos.

Problema 5 (Revista do Professor de Matemática – RPM Nº 47)**.** *Para quantos pontos da circunferência* $x^2 + y^2 = 361$ *as duas coordenadas são números primos?*

Solução: Se x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 361$, sendo 361 ímpar, devemos ter x par e y ímpar ou x ímpar e y par. Se x é par e primo, então, $x = 2$; logo, $y^2 = 357$ e y não é, então, um número inteiro. Do mesmo modo verificamos ser impossível ter y par e x ímpar; logo, nenhum ponto da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 361$ tem ambas as coordenadas dadas por números primos.

Agora vamos enunciar um dos resultados mais clássicos da Matemática que garante a existência de infinitos números primos. Até onde se conhece, a demonstração a seguir foi a primeira demonstração escrita utilizando o método de redução ao absurdo e é devida a Euclides cerca de 300 a.C.

Teorema 5 (Teorema de Euclides)**.** *A quantidade de números primos é infinita.*

Demonstração. Faremos a prova por redução ao absurdo. Suponha que existe uma quantidade finita de números primos e denotemos estes por

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots,\ p_k$$

Consideremos o número

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k + 1$$

e chamamos de q o seu menor divisor primo. Obviamente q não coincide com nenhum dos números p_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, pois caso contrário, como ele divide n, teria que dividir 1, o que é impossível. Logo, temos uma contradição à hipótese de termos uma quantidade finita de primos. □

2.6 Teorema Fundamental da Aritmética

Os números primos são "células" dos números naturais, no sentido de que qualquer número natural é produto de números primos. Por exemplo,

$$560 = 56 \cdot 10 = 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2,$$

onde cada um dos fatores que aparecem no produto são números primos. Perguntamo-nos, o que acontece se começamos com uma outra fatoração inicial de 560, por exemplo, $560 = 28 \cdot 20$. Vejamos:

$$560 = 28 \cdot 20 = 14 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

Surpreendentemente chegamos à mesma representação anterior, salvo a ordem dos fatores. Assim, o número 560 é composto de quatro "células" do tipo 2, uma "célula" do tipo 5 e uma "célula" do tipo 7.

O fato observado acima vale para qualquer número natural maior que 1. Especificamente, temos o seguinte resultado, objeto de nosso estudo, conhecido como *Teorema Fundamental da Aritmética*[6].

Teorema 6 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural maior do que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Demonstração. Usaremos a segunda forma do Princípio de Indução. Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado.

[6]O Teorema Fundamental da Aritmética foi enunciado precisamente por Gauss (1777 – 1855). Seus antecessores, Fermat, Euler, Lagrange e Legendre, utilizavam este teorema sem a preocupação de tê–lo enunciado ou demonstrado com precisão.

Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que

$$n = n_1 n_2, \quad \text{com} \quad 1 < n_1 < n \quad \text{e,} \quad 1 < n_2 < n.$$

Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$ tais que

$$n_1 = p_1 \cdots p_r \quad \text{e} \quad n_2 = q_1 \cdots q_s.$$

Portanto, $n = p_1 \cdots p_r \cdot q_1 \cdots q_s$.

Vamos, agora, provar a unicidade da escrita. Suponha, agora, que $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p \mid (q_1 \cdots q_s)$, pelo Corolário 2.3, temos que $p = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1, \ldots, q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares. □

Enunciado dessa forma, o Teorema Fundamental da Aritmética é um resultado que, além de garantir a existência da representação de um número natural maior do que 1 como um produto de seus divisores primos, garante que essa representação é única. Entre outros benefícios, esse resultado garante que podemos iniciar o processo de procura dos divisores primos pelo primo que nos for conveniente.

Além disso, podemos observar que a maneira como representamos o número n na demonstração do Teorema como o produto de primos $n = p_1 \cdots p_r \cdot q_1 \cdots q_s$, estávamos admitindo que os primos que aparecem nesta decomposição *não são necessariamente distintos*, o que atende, inclusive, ao exemplo inicial dessa nossa seção onde vimos que o número 560 é composto de quatro células do tipo 2, uma célula do tipo 5 e uma célula do tipo 7, isto é

$$560 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ ou ainda, } 560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Assim, em particular, também podemos enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética da seguinte maneira.

Seja n *um número natural,* $\mathrm{n} > 1$*. Então existem números primos* $\mathrm{p}_1 < \mathrm{p}_2 < \mathrm{p}_3 < \ldots < \mathrm{p}_r$*, e, também, números naturais não nulos* $\mathrm{n}_1,\ \mathrm{n}_2,\ \mathrm{n}_3,\ \ldots,\ \mathrm{n}_r$*, univocamente determinados, com* $\mathrm{r} \geqslant 1$*, tais que*

$$\mathrm{n} = \mathrm{p}_1^{\mathrm{n}_1} \cdot \mathrm{p}_2^{\mathrm{n}_2} \cdot \mathrm{p}_3^{\mathrm{n}_3} \cdots \mathrm{p}_r^{\mathrm{n}_r}.$$

Observamos que escrito nessa forma, n está decomposto como produto de potências cujas bases são números primos distintos dois a dois.

Esta forma de representar um número natural $\mathrm{n} > 1$,

$$\mathrm{n} = \mathrm{p}_1^{\mathrm{n}_1} \cdot \mathrm{p}_2^{\mathrm{n}_2} \cdot \mathrm{p}_3^{\mathrm{n}_3} \cdots \mathrm{p}_r^{\mathrm{n}_r}$$

é denominada "*decomposição canônica de n em fatores primos*".

Observação 2. *Dizemos que um inteiro positivo é livre de quadrados se ele não é divisível pelo quadrado de nenhum número inteiro maior do que* 1*. Por exemplo, os números* 15 *e* 42 *são livres de quadrados visto que* $15 = 3 \cdot 5$ *e* $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ *(não estão decompostos como produto de potências cujas bases são números primos distintos dois a dois), enquanto que* 40 *e* 1372 *não são livres de quadrados, uma vez que* $40 = 2^3 \cdot 5$ *e* $1372 = 2^2 \cdot 7^3$ *(estão decompostos como produto de potências cujas bases são números primos distintos dois a dois).*

A decomposição única em primos se aplica em contextos mais gerais, como veremos mais adiante (subseção 2.6.1). Aqui, como aplicação imediata do Teorema Fundamental da Aritmética, listaremos, a seguir, através de exemplos e problemas, o uso desta ferramenta em variados contextos e níveis de ensino.

Exemplo 16. *Nas turmas de sextos anos de uma escola há* 120 *alunos, e nos sétimos anos há* 105 *alunos. Para realizar um trabalho comunitário, os alunos serão organizados em grupos do maior tamanho possível, todos com o mesmo número de alunos e sem que se misturem alunos de anos diferentes. Pergunta–se:*

a) Qual é o número máximo de alunos que pode haver em cada grupo?

b) Que fração irredutível representa a razão entre o número de alunos do sétimo e sexto anos?

c) Seja N *o número total de alunos de ambas as turmas. Então* $\sqrt{\mathsf{N}}$ *vale?*
Aqui temos uma aplicação imediata do Teorema Fundamental da Aritmética na determinação do $\mathtt{mdc}$ *(máximo divisor comum) entre dois inteiros positivos, na simplificação de frações e, ainda, na obtenção de uma raiz exata.*

Solução item a): Conhecidas as decomposições canônicas de dois inteiros positivos $a > 1$ e $b > 1$, o $\mathrm{mdc}(a, b)$ é o produto dos fatores comuns às duas decomposições tomados cada um com o menor expoente, e o $\mathrm{mmc}(a, b)$, a saber, é o produto dos fatores primos comuns e não comuns às duas decomposições tomados cada um com o maior expoente. Assim, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, temos:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{e} \quad 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Os fatores primos comuns são 3 e 5. Portanto, o número de alunos em cada grupo será o maior divisor comum aos dois números, nesse caso, $3 \cdot 5 = 15$. Logo, o número máximo de alunos em cada grupo será 15.
Solução item b): A razão entre o número de alunos do sétimo e sexto ano é $\dfrac{105}{120}$. Como o item solicita a fração irredutível representada por essa razão, basta utilizarmos a resposta do item a), isto é, dividir o numerador e o denominador dessa fração por 15

$$\frac{105^{\div 15}}{120_{\div 15}} = \frac{7}{8}.$$

Note que poderíamos, também, ter decomposto em fatores primos cada um dos termos dessa fração e, de uma maneira prática, cancelar aqueles fatores em comum chegando ao mesmo resultado.

$$\frac{105}{120} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}} = \frac{7}{8}.$$

Solução item c): Como N é a soma do número de alunos das turmas do sexto e sétimo anos, temos:

$$\mathsf{N} = 120 + 105 = 225$$

Agora o nosso problema se resume em determinar $\sqrt{\mathsf{N}}$, isto é, $\sqrt{225}$.

Uma alternativa para a obtenção dessa raiz é o método da decomposição em fatores primos. Através da decomposição do número 225 em fatores primos e da simplificação dos expoentes dos fatores pelo índice do radicando, extraímos a sua raiz quadrada eliminando dessa forma o radical. Assim, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, segue que:

$$225 = 3^2 \cdot 5^2.$$

Portanto, $\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = 3 \cdot 5 = 15$.

Problema 6 (OBM 2013 – 2º FASE – NÍVEL 1)**.** *Um número natural é chamado quadrado perfeito quando ele é o quadrado de outro número natural. Por exemplo,* 1 *e* 25 *são quadrados perfeitos pois* $1 = 1^2$ *e* $25 = 5^2$*. Qual é o menor valor de* $a + b$*, com* a *e* b *números naturais não nulos, para que os números* $28 \cdot a^3 \cdot b$ *e* $7 \cdot a \cdot b^5$ *sejam ambos quadrados perfeitos?*

Solução: Um número é quadrado perfeito quando os primos em sua fatoração tem expoente par. Assim, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, observamos que $28 = 2^2 \cdot 7$ e $7 = 7^1$. Nota–se que devemos intervir no expoente do 7. Fora isso, não devemos nos preocupar com o 2, pois o seu expoente em 28 é 2, que é par. Então, pelo menos um dos números a ou b é divisível por 7, ou seja, um deles é pelo menos 7 e o outro é pelo menos 1 . Logo a soma é no mínimo 8. Note que os valores $a = 7$ e $b = 1$ satisfazem a condição, já que e que $28 \cdot a^3 \cdot b = 98^2$ e $7 \cdot a \cdot b^5 = 7^2$.

Exemplo 17. *Determine o menor inteiro positivo pelo qual se deve dividir o número* 10800 *para se obter um cubo perfeito.*

Solução: Um número é dito cubo perfeito quando os primos em sua decomposição tem expoente igual a um múltiplo de 3. Assim, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, temos que

$$10800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

Desta forma, para determinar o número que devemos dividir 10800, devemos retirar de sua decomposição em primos um fator igual a dois (2) e os dois fatores iguais a cinco (5^2) resultando em um cubo perfeito

$$2^3 \cdot 3^3.$$

Portanto, o menor número que divide 10800 resultando em um cubo perfeito é $2 \cdot 5^2 = 50$.

Problema 7 (ENC 2002 – EXAME NACIONAL DE CURSOS)**.** *Qual é o menor número natural n que torna n! divisível por 1000?*

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética segue que $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$. Assim, temos:

$$\mathtt{n}! = 1000 \cdot \mathtt{k} = 2^3 \cdot 5^3 \cdot \mathtt{k}, \quad \mathtt{k} \in \mathbb{N}$$

Para que seja possível que $\mathtt{n}!$ tenha números cujo o produto seja 1000, deve acontecer $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, isto é

$$\begin{aligned} \mathtt{n}! &= 2^3 \cdot 5^3 \cdot \mathtt{k} \\ \mathtt{n}! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2^2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2^3) \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \end{aligned}$$

Note que com o produto de três números pares consecutivos obtemos o caso 2^3, por outro lado, o caso 5^3 acontece quando multiplicamos os números $5,\ 10$ e 15. Portanto $\mathtt{n} = 15$.

Problema 8 (PROFMAT 2013 – ENA – EXAME NACIONAL DE ACESSO)**.** *Seja* $\mathsf{N} = 12^{2012} + 2012^{12}$*. O maior valor de* $\mathtt{n}$ *tal que* $2^{\mathtt{n}}$ *é divisor de* N *é*

(A) 10 *(B)* 12 *(C)* 16 *(D)* 24 *(E)* 36

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética podemos escrever os números 12 e 2012 como um produto de fatores primos, isto é

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad \text{e} \quad 2012 = 2^2 \cdot 503$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathsf{N} &= (2^2 \cdot 3)^{2012} + (2^2 \cdot 503)^{12} \\ \mathsf{N} &= 2^{4024} \cdot 3^{2012} + 2^{24} \cdot 503^{12} \\ \mathsf{N} &= 2^{24} \cdot \left(2^{4000} \cdot 3^{2012} + 503^{12}\right) \end{aligned}$$

Então 2^{24} divide N. Para saber se existe uma potência de 2 maior que 2^{24} que divide N, precisamos saber se o número entre parênteses é par ou ímpar. Se for ímpar, então não é divisível por 2 e 24 é a potência máxima que divide N.

Ora, o termo da esquerda, entre parênteses, é claramente um múltiplo de 2, portanto é par. Já o termo da direita é uma potência de um número ímpar, que sempre é ímpar. A soma dos dois termos é, portanto, ímpar. Logo, 24 é a maior potência de 2 que divide N.

Problema 9 (PROFMAT 2013–ENA – EXAME NACIONAL DE ACESSO). *A média geométrica de três números positivos é a raiz cúbica do produto dos três. Se a média geométrica de três números naturais distintos é igual a 5, qual é a soma desses três números?*

(A) 15 *(B)* 16 *(C)* 21 *(D)* 30 *(E)* 31

Solução: Temos $\sqrt[3]{abc} = 5$, onde a, b e c são números naturais distintos, logo $abc = 5^3 = 125$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, a, b e c são potências de 5. Supondo, sem perda de generalidade, que $a < b < c$, devemos ter $a = 5^0$, $b = 5$ e $c = 5^2$, pois se $c = 5^3$, os outros dois teriam que ser iguais a 1, e não seriam então distintos. Se nenhum deles for 5^2, então os três têm que ser 1 ou 5, ou seja, necessariamente dois deles seriam iguais, o que não é permitido. Logo $a + b + c = 1 + 5 + 25 = 31$.

Exemplo 18. *Prove que um número n é par se, e somente se, o número 2 aparece na fatoração de n em fatores primos.*

Demonstração. Obviamente, se 2 aparece na fatoração em primos de N, então N é par. Ora, se n é par temos que $n = 2q$. Por outro lado q e n se fatoram, respectivamente, como

$$q = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m} \quad \text{e} \quad p = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}.$$

Logo,

$$2 \cdot q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}.$$

Pela unicidade de fatoração, para algum i, com $1 \leqslant i \leqslant s$, o correspondente p_i, deve ser igual a 2. Portanto, 2 aparece na fatoração de n. $\square$

Para encerrar este capítulo, vejamos ainda outras aplicações do Teorema Fundamental da Aritmética no Ensino Básico.

2.7 Aplicações do Teorema Fundamental da Aritmética

Além do uso na simplificação de frações e radicais, na determinação da raiz enésima aritmética e do cálculo do mmc e do mdc de dois ou mais números inteiros positivos, uma das aplicações mais recorrentes do TFA em turmas do Ensino Básico é o uso do mesmo, por exemplo, para determinar a quantidade de divisores de um número inteiro qualquer positivo.

A seguir, listamos quatro teoremas que nos darão, por meio do TFA, fórmulas e procedimentos que nos fornecerão, respectivamente, os divisores, o número de divisores de um inteiro positivo e, as não tão usuais, soma e produto dos divisores de um número inteiro positivo.

2.7.1 Divisores de um inteiro positivo

Teorema 7. *Se* $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ *é decomposição canônica do inteiro positivo* $n > 1$*, então os divisores positivos de* n *são precisamente os inteiros* d *da forma:*

$$d = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r},$$

onde $0 \leqslant h_i \leqslant k_i$ *(*$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$*).*

Demonstração. Obviamente, os divisores triviais $d = 1$ e $d = n$ de n se obtém quando, respectivamente:

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_r = 0$$

e

$$h_1 = k_1,\ h_2 = k_2,\ \ldots,\ h_r = k_r$$

Suponhamos, pois, que d é um divisor não trivial de n, isto é:

$$n = dd_1, \quad \text{com} \quad d > 1 \quad \text{e} \quad d_1 > 1.$$

Exprimindo d e d_1 como produtos de primos, não necessariamentes distintos, temos:

$$d = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s, \quad d_1 = t_1 \cdot t_2 \cdots t_u$$

obtemos:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_u$$

que são duas decomposições do inteiros positivo n num produto de primos, e como é única uma decomposição de n de tal natureza, então cada primo q_i coincide com o p_j, de modo que, substituindo os produtos de primos iguais por potências de expoente inteiro, teremos:

$$d = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r}$$

onde é possivel alguma $h_i = 0$.

Reciprocamente, todo inteiro

$$d = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r}$$

onde $0 \leqslant h_i \leqslant k_i$ é um divisor de n, pois, podemos escrever:

$$\begin{aligned} n &= p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \\ n &= \left(p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r}\right) \cdot \left(p_1^{k_1-h_1} \cdot p_2^{k_2-h_2} \cdots p_r^{k_r-h_r}\right) \\ n &= d \cdot \left(p_1^{k_1-h_1} \cdot p_2^{k_2-h_2} \cdots p_r^{k_r-h_r}\right) \end{aligned}$$

onde $k_i - h_i \geqslant 0$ para cada i. Logo, d é um divisor de n, ou seja, $d \mid n$. $\square$

Exemplo 19. *Determine os divisores positivos do inteiro* $n = 1350$.

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, o número 1350 pode ser escrito da seguinte forma: $n = 1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

São precisamente os inteiros d da forma:

$$d = 2^{h_1} \cdot 3^{h_2} \cdot 5^{h_3}$$

onde $0 \leqslant h_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant h_2 \leqslant 3$, $0 \leqslant h_3 \leqslant 2$, isto é,

$$h_1 = 0,\ 1; \quad h_2 = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \quad h_3 = 0,\ 1,\ 2.$$

Assim, como $h_1 = 1$, $h_2 = 2$ e $h_3 = 0$, obtemos o divisor:

$$\begin{aligned} d &= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \\ d &= 2 \cdot 9 \cdot 1 \\ d &= 18 \end{aligned}$$

do inteiro 1350. Realmente: $1350 = 18 \cdot 75$.

Como $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ e $h_1 = 1$, $h_2 = 3$, $h_3 = 2$ acham–se os divisores triviais $d = 1$ e $d = 1350$ do inteiro em questão.

2.7.2 Número de divisores

Teorema 8. *Se* $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ *é a decomposição canônica do inteiro positivo* $n > 1$*, então:*

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_r + 1)$$

Demonstração. Pelo teorema anterior, os divisores positivos de n são precisamente os inteiros d da forma:

$$d = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r}$$

onde,

$$0 \leqslant h_1 \leqslant k_1, \quad 0 \leqslant h_2 \leqslant k_2, \quad \ldots, \quad 0 \leqslant h_r \leqslant k_r$$

Temos $k{+}1$ maneiras de escolher o expoente h_1, $k_2{+}1$ maneiras de escolher o expoente h_2, $\ldots$, $k_r{+}1$ maneiras de escolher o expoente h_r e, portanto, o número total de maneiras de escolher os expoentes h_1, h_2, $\ldots$, h_r é dado pelo produto:

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_r + 1)$$

Assim sendo, o número $d(n)$ de divisores positivos do inteiro $n > 1$ é dado pela fórmula:

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\cdots(k_r + 1),$$

ou seja,

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r}(k_i + 1).$$

□

Exemplo 20. *Determinar a quantidade de divisores positivos do inteiro* $n = 756$.

Solução: Decompondo o número 756 em um poduto de números primos, temos:

$$n = 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(756) &= (2+1)\cdot(3+1)\cdot(1+1) \\ d(756) &= 3\cdot 4\cdot 2 \\ d(756) &= 24 \end{aligned}$$

Logo existem 24 divisores positivos de 756.

Problema 10 (PROFMAT 2012 – ENA – EXAME NACIONAL DE ACESSO)**.** *O número total de divisores positivos de* $10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ *é igual a:*
A) 15 *B)* 270 *C)* 320 *D)* 1024 *E)* 10!

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, observe que 10! pode ser escrito como

$$\begin{aligned} 10! &= 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= (2\cdot 5)\cdot(3\cdot 3)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot 7\cdot(2\cdot 3)\cdot 5\cdot(2\cdot 2)\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7. \end{aligned}$$

Logo, cada divisor de 10! será da forma $2^m\cdot 3^n\cdot 5^p\cdot 7^q$ onde são números naturais tais que $0\leqslant m\leqslant 8$; $0\leqslant n\leqslant 4$; $0\leqslant p\leqslant 2$; $0\leqslant q\leqslant 1$.

Portanto, pelo princípio multiplicativo temos que a quantidade de divisores de 10! é

$$(8+1)\cdot(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 9\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 270$$

Problema 11 (ENEM 2014)**.** *Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número* N *é dado pela expressão* $2^x\cdot 5^y\cdot 7^z$*, na qual* x, y *e* z *são números inteiros não negativos. Sabe–se que* N *é múltiplo de* 10 *e não é múltiplo de* 7*. O número de divisores de* N*, diferentes de* N*, é*

A) $x\cdot y\cdot z$

B) $(x+1)\cdot(y+1)$

C) $x\cdot y\cdot z-1$

D) $(x+1)\cdot(y-1)\cdot z$

E) $(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)-1$

Solução: Temos que o número $N = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$. O fato de N ser múltiplo de 10, significa que na decomposição de N irá aparecer pelo menos um fator 2 e pelo menos um fator 5, ou seja, tanto o expoente x como o expoente y são diferentes de 0. Do mesmo modo que o fato de N não ser múltiplo de 7 significa que na fatoração de N não haverá nenhum fator 7, ou seja, o expoente z será igual a 0. Para obtermos o número de divisores de um número N a partir de sua decomposição em fatores primos, devemos obter todas as combinações possíveis para seus expoentes incluindo o zero. Assim, em nosso caso, as possibilidades para o expoente do fator 2 são iguais a x mais o zero[7], isto é, $x+1$. De modo análogo, as possibilidades para os expoentes y e z, respectivamente são $y+1$ e $z+1$. Assim, temos que o número de divisores de N é $(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)$, incluindo o próprio N. Como queremos os divisores diferentes de N, teremos: $(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)-1$.

Problema 12 (OBM 2012 – 1º FASE – NÍVEL 2). *Qual é o menor número ímpar que possui exatamente 10 divisores positivos incluindo o 1 e o próprio número?*

A) 1875 *B) 405* *C) 390* *D) 330* *E) 105*

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, os números que possuem exatamente 10 divisores positivos podem assumir apenas uma das possíveis formas: p^4q ou p^9 onde p e q representam primos distintos. O menor número ímpar da primeira forma é $3^4 \cdot 5 = 405$, enquanto o segundo número é 3^9, que é bem maior do que 405. Logo, a resposta correta é 405.

Problema 13 (OBMEP 2015 – 2º FASE – NÍVEL 3). *Seja* n *um número inteiro positivo. Se, para cada divisor primo* p *de* n*, o número* p^2 *não divide* n*, dizemos então que* n *é livre de quadrados. Mostre que todo número livre de quadrados tem uma quantidade de divisores que é igual a uma potência de* 2.

Solução: Seja n um número inteiro positivo livre de quadrados. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos escrever n como um produto de fatores primos

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

onde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ é igual a 0 ou 1, pois $p \nmid n$.

[7]Note que o expoente $x \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ x\}$, isto é, este expoente x do fator 2 pode assumir x valores naturais variando de 1 até ele mesmo além do zero obtendo, assim, $x+1$ possibilidades. De forma análoga segue para os expoentes $y \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ y\}$ e $z \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ z\}$ dos fatores 5 e 7 respectivamente.

A quantidade de divisores de um número é a combinação entre todos os expoentes diferentes de cada fator primo variando de 0 a α_i, com $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k$.

Assim temos dois possíveis expoentes para α_1, dois para α_2, até k, dois para α_k. Logo a quantidade de divisores é

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{k \text{ vezes}} = 2^k,$$

ou seja, uma potência de 2.

Problema 14 (PROFMAT 2017 – ENQ – EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO)**.** *Prove que um número inteiro positivo n possui uma quantidade ímpar de divisores positivos se, e somente se, é um quadrado perfeito.*

Demostração: Pelo Teorema Fundamental da Aritmética,

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

sendo $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ números primos e $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ números inteiros positivos. A quantidade de divisores de n é dado por

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

($\Longrightarrow$) Se n tem um número ímpar de divisores, então todos os fatores de $d(n)$ são números ímpares, ou seja, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ são números pares. Portanto

$$n = \left(p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cdots p_k^{\frac{\alpha_k}{2}}\right)^2$$

($\Longleftarrow$) Por outro lado, se n é um quadrado perfeito, então $n = c^2$ para algum $c \in \mathbb{Z}$. Isto implica que todos os α_i são números pares e então $d(n)$ é ímpar, por ser o produto de ímpares.

2.7.3 Soma dos divisores

Teorema 9. *Se* $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ *é a decomposição canônica do inteiro positivo* $n > 1$*, então a soma dos divisores de* n*, denotado por* $S(n)$*, é dada pela expressão:*

$$s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Demonstração. Consideremos o produto

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{k_2}\right)\ldots\left(1 + p_r + p_r^2 + \ldots + p_r^{k_r}\right)$$

Pelo Teorema (2.8), cada divisor positivo de n é um termo do desenvolvimento deste produto e vice–versa, de modo que

$$s(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{k_2}\right)\ldots\left(1 + p_r + p_r^2 + \ldots + p_r^{k_r}\right)$$

Aplicando a cada parêntese do segundo membro desta igualdade a fórmula que dá a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, temos:

$$s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1},$$

ou seja,

$$s(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1},$$

□

Exemplo 21. *Determine a soma dos divisores positivos do inteiro* $n = 180$.

Solução: Pelo Teorema Fundamental da Aritmática, temos: $n = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Logo,

$$\begin{aligned} s(180) &= \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} \\ s(180) &= 7 \cdot 13 \cdot 6 \\ s(180) &= 546 \end{aligned}$$

a soma de todos os divisores positivos é 546.

2.7.4 Produto dos divisores

Teorema 10. *O produto dos divisores positivos de um inteiro positivo* $n > 1$ *é igual a*

$$n^{\frac{d(n)}{2}}.$$

Demonstração. Sejam $d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{n(d)}$ todos os divisores positivos de n, de modo que existem os inteiros $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n(d)}$ tais que

$$n = d_1q_1, \quad n = d_2q_2, \quad \ldots, \quad n = d_{n(d)}q_{n(d)}.$$

Como $d_1d_2\cdots d_{n(d)} = q_1q_2\cdots q_{n(d)}$, porque cada um dos inteiros $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n(d)}$ também é divisor de n, temos:

$$n^{d(n)} = \left(d_1 \cdot d_2 \cdots d_{n(d)}\right)^2 \Longrightarrow d_1 \cdot d_2 \cdots d_{n(d)} = n^{\frac{d(n)}{2}}.$$

□

Exemplo 22. *Determine o produto dos divisores positivos do inteiro* $n = 16$.

Solução: Temos que $d_1 \cdot d_2 \cdots d_{n(d)} = 16^{\frac{d(16)}{2}}$. Como $d(16) = 5$, segue que

$$\begin{aligned} d_1 \cdot d_2 \cdots d_5 &= 16^{\frac{5}{2}} \\ &= (4^2)^{\frac{5}{2}} \\ &= 4^5 \\ &= 1024 \end{aligned}$$

De fato, os divisores positivos do número 16 são $1,\ 2,\ 4,\ 8$ e 16, e o produto destes 5 divisores é igual a 1024.

Chegamos aos parágrafos finais deste capítulo no qual abordamos o Teorema Fundamental da Aritmética e suas aplicações e os principais conceitos fundamentais da aritmética elementar que estão associados a ele.

A seguir, descrevemos o quadro teórico fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais que serviu de base para a nossa pesquisa e para a elaboração da nossa proposta de ensino.

3 Referencial Teórico

3.1 A Teoria dos Campos Conceituais.

Por se tratar, também, de uma análise qualitativa, buscamos o suporte teórico da Teoria dos Campos Conceituais. Esta Teoria foi criada por Gérard Vergnaud, um matemático, psicólogo e filósofo francês. Aluno de Jean Piaget em Genebra, atualmente é diretor emérito de estudos do Centro Nacional de Pesquisas Científicas (CNRS) em Paris.

Ao desenvolver sua teoria, Vergnaud demonstra interesse pelo processo de ensino e aprendizagem da matemática no contexto escolar, investigando como o estudante aprende em ação. Desta forma, a Teoria dos Campos Conceituais foi inicialmente desenvolvida para explicar o processo de construção de conceitos das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra.

Vergnaud (1990, p. 135) a define da seguinte maneira:

> A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que se relevam das ciências e das técnicas.

Neste sentido, o autor propõe o estudo de um campo conceitual em vez de um conceito isolado, pois resolver uma situação qualquer exige a união de vários outros conceitos ali envolvidos.

Podemos afirmar que, durante atividades que envolvam a decomposição em fatores primos, por exemplo, o estudante está em constante ação e é levado a resolver situações variadas que lhe permitem combinar e descobrir diferentes aspectos dos conceitos envolvidos.

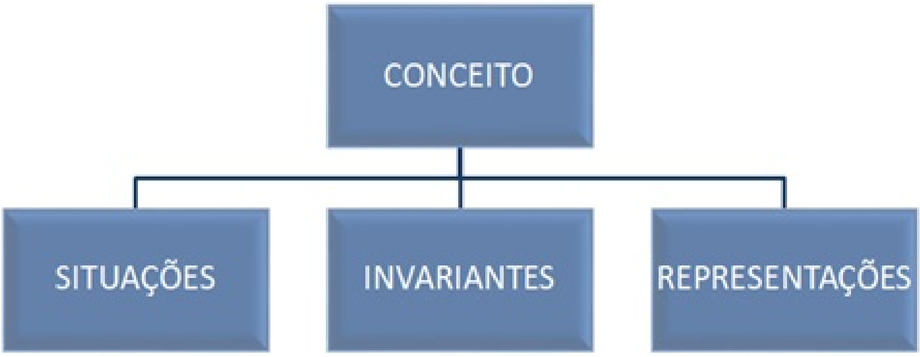
Para Vergnaud (1993, p. 17), um conceito "é uma síntese do conjunto das situações que constituem a referência de suas diversas propriedades e do conjunto dos esquemas que são utilizados pelo estudante". Esta definição é chamada pelo autor de uma definição pragmática, em que ele apresenta de forma completa todos os elementos que permitem ao estudante construir de fato um conceito. Ao identificar a operacionalidade de um conceito, não se pode considerar apenas a ação operatória, mas é necessário analisar o uso de significantes; ou seja, o indivíduo deve ser capaz de expressar o conceito de forma simbólica, através de uma linguagem natural, símbolos, representações, diagramas, entre outros. Além disso, Vergnaud define conceito como uma trinca de conjuntos $C = (S, I, R)$, sendo:

- S – conjunto das situações. A análise de um campo conceitual se inicia a partir de situações, que são responsáveis pelo sentido que é atribuído ao conceito (referência);

- I – conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas. Representam aquilo que se preserva nos conceitos e em seus processos de manipulações. São suas propriedades e os teoremas relacionados. Os invariantes simbolizam o significado do conceito;

- R – conjunto das representações simbólicas. São as diversas formas em que um conceito pode se apresentar, uma ideia pode ser descrita, por exemplo, através de um gráfico, tabela, por uma linguagem algébrica ou ainda pela própria linguagem idiomática tanto oral, quanto escrita. Trata-se do significante do conceito.

Figura 1: Definição de conceito descrita por Vergnaud



Fonte: Autoria própria (2019)

Neste sentido, entendemos que para o autor, a construção de um conceito se dá a partir da relação entre esses três conjuntos (situações, invariantes e representação) cujo sentido depende unicamente da situação, que, por sua vez, depende dos invariantes evocados no sujeito. Deixemos claro que o conjunto situações (S) a que Vergnoud se refere em sua teoria não tem relação com a já conhecida situação didática, mas sim com as tarefas em si.

Considerando o conceito de decomposição em fatores primos, podemos supor as seguintes situações, invariantes e representações que formam a trinca, desse conceito, expostas a seguir.

Figura 2: Quadro de conceito de decomposição em fatores primos formado pela trinca (S,I,R)

Conjunto das Situações - S	Conjunto das Invariantes - I	Conjunto das Representações - R
Que divisores do número **36** são: a) Primos? b) Compostos? c) Quadrados perfeitos?	**36** é um número composto e pode ser escrito como produto de fatores primos.	**36** | **2** **18** | **2** **9** | **3** **3** | **3** **1** | Dispositivo prático Para decompor um número em fatores primos $\mathbf{36 = 2^2 \cdot 3^2}$ Representação do número 36 em produto de números primos

Fonte: Autoria própria (2019)

3.2 Esquema

Grande é a importância dada à noção de esquema nesta teoria. O conceito de esquema criado por Piaget é complementado por Vergnaud (1993, p. 2) quando o define como

> [...] a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada. É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do estudante, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do estudante seja operatória.

Portanto, para Vergnaud, um esquema é um conjunto de ações, de coleta de dados e controle que variam de acordo com cada situação, organizando as ações e o pensamento. Ao verificar um esquema utilizado por um aluno frente a um problema, construindo sua solução, podemos selecionar os elementos cognitivos que fizeram, ou não, com que a ação desse sujeito fosse operatória. A análise de um esquema que alcançou seu objetivo, leva o professor a inferir, por exemplo, se o meio utilizado foi o mais eficiente. Além disso, a observação de um esquema equivocado dá ao professor ferramentas para buscar a superação de dúvidas, já que pode revelar o ponto em que o aluno está tendo dificuldades para explorar e aplicar propriedades que estão sendo ensinadas. A partir desses dados o professor consegue elaborar um planejamento mais adequado a seu grupo, aprimorando sua técnica e ampliando as chances de sua turma obter um bom rendimento.

A construção de conceitos ocorre a partir das situações que o estudante já domina; por isso podemos afirmar que ela tem características locais, e o domínio do estudante está restrito aos seus esquemas que precisam ser ampliados. Vergnaud (1993, p. 20), argumenta que "essa construção não é imediata a partir de uma explicação, mas um processo lento no qual novas situações devem ser constantemente introduzidas, cada vez mais complexas, ampliando o repertório de esquemas". Se um aluno tem uma concepção errônea, ela só pode ser mudada se confrontada com situações em que não pode ser utilizada. Decompor um número em fatores primos é algo constante em atividades como, por exemplo, simplificação de radicais, calculo de raízes enésimas aritméticas, determinação da quantidade de divisores inteiros positivos de um número qualquer e cálculo do M.M.C e M.D.C de dois números prefixados. Esses exemplos de cálculos utilizam o conceito de decomposição em fatores primos sob diferentes aspectos, que variam de acordo com a situação e permitem ao aluno explorar e testar seus esquemas para a construção do conceito.

Os ingredientes de um esquema, são, segundo Vergnaud:

- Metas e antecipações: Apresentada uma situação, o sujeito pode esperar certos efeitos ou eventos, premeditar o resultado de algumas escolhas, começando a elaborar assim uma estratégia;

- Regras de ação: Busca de informação, do conhecimento que valide a estratégia, e ainda do controle dos resultados da ação;

- Invariantes operatórios: São os conhecimentos que dão base à formação do esquema. São os teoremas-em-ação, que consistem nas proposições consideradas verdadeiras, que estão relacionadas ao objeto de estudo, e os conceitos-em-ação, que são as categorias de pensamento, de definições consideradas como pertinentes.

- Possibilidades de inferências: Diferentes possibilidades de raciocínios para efetuar o desenvolvimento da solução de uma situação-problema, a partir dos invariantes operatórios contidos no repertório do sujeito.

Um esquema está sempre apoiado em uma conceitualização implícita. Mesmo que o estudante não saiba expressar esse conceito, ele precisa compreendê-lo para que seu esquema funcione corretamente. Um exemplo pode ser representado pela situação proposta a seguir.

Determine o menor número inteiro positivo x *para o qual o número* $360 \cdot x$ *seja um cubo perfeito.*

Para que o aluno compreenda a situação proposta faz-se necessário que ele tenha conhecimentos prévios para que comece a montar seu esquema. Identificar que o número 360 é composto será o invariante operacional inicial, e dentro desse contexto ele irá buscar conceitos implícitos como a decomposição em fatores primos para começar a elaborar, assim, sua estratégia em direção à resolução da situação proposta.

$$
\begin{array}{c|c}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
\cline{2-2}
1 & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1
\end{array}
$$

$$360 \cdot x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot x$$

Ao decompor o número 360 em fatores primos e diante da nova representação, o aluno é lavado a raciocinar para que valores x deve assumir para que $360 \cdot x$ seja um cubo perfeito, x, a saber, é igual a $3 \cdot 5^2$, que por sua vez, é igual a 75.

A ação de decompor o número em fatores primos pode levar o estudante a mobilizar outros conceitos implícitos como divisibilidade, divisores, múltiplos e raiz cúbica aritmética. Esses são possíveis conceitos a serem utilizados para a resolução desse problema. Um estudante que não tenha se apropriado dos conceitos de radiciação e decomposição em fatores primos e com os demais conceitos envolvidos, poderá realizar a situação de forma mais exploratória atribuindo e testando os menores valores possíveis para x e criando um algoritmo que representa cada etapa do caminho a ser percorrido para chegar ao resultado de um cubo perfeito. A partir dessa situação, identificamos a existência de vários conceitos implícitos durante a sua solução, mas cada estudante, a partir de seus esquemas e experiências anteriores, pode ativar um grupo diferente de conceitos para solucioná-la.

Embora reconheçamos a importância do trabalho do professor, foi esse aspecto relevante na teoria de Vergnaud, que foi decisivo para que a escolhêssemos para fundamentar nossa pesquisa: o valor que ele atribui às características específicas do conceito a ser construído pelo aluno, tanto no processo de construção como em seu desenvolvimento cognitivo. Vergnaud (1983, p. 392) alerta para o fato de que, no estudo do processo de conceitualização do real,

> Qualquer reducionismo é perigoso na medida em que ela é específica do conteúdo e não pode ser reduzida nem às operações lógicas gerais, nem às operações puramente linguísticas, nem à reprodução social, nem à emergência de estruturas inatas, nem, enfim, ao modelo do processamento da informação.

Em outras palavras, para ele, um conceito não pode ser reduzido a uma definição, sobretudo se estivermos interessados em seu ensino e em sua aprendizagem. E é nesse sentido que recorreremos neste trabalho, a uma diversidade de situações e representações visto que, segundo esta teoria, é por meio das situações a resolver que um conceito adquire sentido para o aluno.

Na verdade, estabelece–se, uma relação dialética entre as características específicas do conceito e tais situações e problemas. Afinal, também, podemos afirmar que são justamente as características específicas do conceito a ser construído que irão orientar o trabalho do professor na escolha de situações a serem enfrentadas pelo aluno.

A seguir, apresentamos a metodologia da nossa pesquisa na qual descrevemos a natureza, o contexto, os sujeitos, os instrumentos para a coleta de dados e as etapas da mesma que trazem uma proposta de ensino que proporciona opções para o desenvolvimento da Matemática de forma lúdica e participativa, sem perder, porém, o prazer de nos aprofundarmos nos conhecimentos teóricos a partir da praticidade e curiosidades que o Teorema Fundamental da Aritmética e os principais conceitos associados a ele trazem ao nosso cotidiano.

4 Metodologia da Pesquisa

Neste capítulo, apresentamos os aspectos metodológicos que subsidiaram o caminho percorrido no desenvolvimento da pesquisa. Inicialmente, descrevemos a natureza, o contexto e os sujeitos da pesquisa. Abordamos, na sequência, os instrumentos utilizados na apreensão dos dados e, por fim, as etapas que englobaram a aplicação dos testes diagnósticos e da proposta de ensino, bem como a análise e interpretação dos dados apreendidos.

4.1 Natureza da Pesquisa

Quanto à forma de abordagem do problema, nossa pesquisa é de natureza mista, assim denominada por combinar métodos quantitativos e qualitativos.

De acordo com Creswell e Clark (2013, p.22), uma pesquisa mista combina métodos, uma filosofia e uma orientação à pesquisa. O pesquisador que se utiliza de uma pesquisa de métodos mistos deve: coletar e analisar dados de forma rigorosa, tanto quantitativos quanto qualitativos com base nas questões do estudo; misturar ambas as formas de dados, concomitantemente, incorporando um no outro; utilizar este procedimento em uma única pesquisa ou entre as diversas fases; adequar os procedimentos às concepções teóricas e filosóficas e os combinam nos projetos para direcionar o estudo.

Do ponto de vista dos objetivos, nossa pesquisa é de natureza descritiva, pois tem o intuito de entender o pensamento do aluno no processo de apropriação dos principais conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, no que diz respeito à generalização desses elementos e às estratégias e procedimentos adotados. De acordo com Gil (2008), as pesquisas descritivas "possuem como objetivo a descrição das características de uma população, fenômeno ou de uma experiência". Ao final de uma pesquisa descritiva, teremos reunido e analisado muitas informações sobre o conteúdo pesquisado proporcionando novas visões sobre uma realidade já conhecida.

4.2 Contexto e sujeitos da pesquisa

A presente pesquisa foi realizada com um grupo de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. A maioria com 11 anos, o que denota adequação idade/série. Caracterizamos o grupo pelo compromisso, traduzido em um constante clima de participação, sobretudo nos debates e questionamentos durante as aulas no desenvolvimento das atividades. Para a sua realização, tivemos como lócus específico uma escola Filantrópica que atende alunos de baixa renda, localizada no bairro Todos os Santos, região sudeste de Teresina. No momento da seleção do contexto da pesquisa, fizemos opção pela referida escola porque foi nesse espaço em que trabalhamos por mais de quatro anos. Foram anos de uma convivência que nos permitiu não só o acompanhamento detalhado do crescimento da escola, mas também receber dela contribuições significativas para a análise de nossos estudos com o referido grupo de alunos que, do ponto de vista formal da sala de aula, já tinham tido contato com conceitos associados ao TFA como múltiplo, divisor, números primos e compostos, bem como a decomposição em fatores primos.

No desenvolvimento dessa investigação, definimos, inicialmente, uma amostra de 22 alunos e a concluímos com 16 participantes, visto ser esse o total de respondentes do pós–teste, portando consideramos para a análise dos testes apenas os dados desses alunos.

No restante do mês de outubro e na primeira quinzena de novembro de 2018, desenvolvemos a proposta de ensino, usando, para cada atividade, duas aulas de 50 minutos as quais ocorriam duas vezes por semana, as terças e quintas–feiras, no horário das 9h50 às 11h30.

4.3 Instrumento e técnicas de apreensão dos dados

Considerando o objetivo deste estudo: abordar o TFA com alunos do 6º do Ensino Fundamental, definimos o instrumento e as técnicas para a apreensão dos dados:

- Questionário

Segundo Marconi & Lakatos (2017, p. 111) questionário "é um instrumento de coleta de dados constituída por uma série de perguntas que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do pesquisador".

Para a nossa pesquisa utilizamos um material escrito com nove questões, sendo duas delas com subitens, proposto individualmente para os alunos da turma.

- Teste

Para Marconi & Lakatos (2017, p. 109) teste "é uma técnica utilizada quando se deseja medir o potencial dos indivíduos. São apresentados de várias formas como, por exemplo, verbais, de lápis e papel, visuais e podem ser feitos individualmente ou coletivamente".

Para a nossa pesquisa utilizamos testes lúdicos que possuíam características diversas e demandavam da turma trabalho individual e em pequenas equipes que eram formadas aleatoriamente. Ao final de cada atividade iniciávamos um debate com discussões abertas promovendo a troca de informações entre os participantes. Após a última atividade, para verificar possíveis contribuições da proposta, aplicamos o mesmo questionário inicial (avaliação final).

No quadro a seguir, apresentamos de forma sintetizada as atividades, na ordem em que foram aplicadas.

Tabela 1: Quadro geral com apresentação da proposta de ensino

ATIVIDADE	**TEMPO DE APLICAÇÃO**	**OBSERVAÇÃO**
Realização do teste diagnóstico inicial	100 minutos	Questionário com nove questões (duas questões com subitem)
Construção de retângulos	100 minutos	Reconhecimento dos divisores de um número
Bingo dos múltiplos, fatores (ou divisores)	100 minutos	Compreensão das relações "múltiplo de" , "fator de" , "divisível por", "divisor de" e diferenciação de número primo e número composto
Jogo da árvore	100 minutos	Compreender que a decomposição em fatores primos é feita de forma única (ao menos a ordem de seus fatores)
Descobrindo a senha	100 minutos	Decomposição de um número em fatores primos e apresentação do teorema fundamental da aritmética
Realização do teste diagnóstico final	100 minutos	Questionário com nove questões (duas questões com subitem).

Fonte: Autoria própria (2019)

4.4 Etapas da pesquisa

Nossa pesquisa foi organizada em três fases, sendo a primeira descritiva, a segunda, sistemática em termos de coleta de dados por meio dos testes diagnósticos e a terceira, consistiu–se na análise e interpretação dos dados.

No primeiro momento, na fase descritiva, o pesquisador define mais precisamente o objeto de estudo, os instrumentos de coleta de dados, a amostragem, a construção dos fundamentos teóricos conceituais a serem empregados, a escolha do espaço, do grupo de pesquisa e da estratégia a ser utilizada em campo. Nela, efetuamos as seguintes ações:

- Estabelecemos os contatos iniciais com a turma;
- Discutimos e elaboramos o teste diagnóstico, as atividades da proposta de ensino e o cronograma de realização dos mesmos.

Na segunda fase, coletamos os dados, ou seja, propusemos o teste diagnóstico (avaliação inicial), colocamos em prática a proposta de ensino por meio das atividades e reaplicamos o teste diagnóstico (avaliação final)

Por fim, na terceira fase, realizamos a análise quantitativa e a análise qualitativa das informações coletadas, alicerçadas nos fundamentos da Teoria dos Campos Conceituais.

A seguir, apresentamos a proposta de ensino desenvolvida com os alunos através de quatro atividades associadas ao nosso objeto de estudo: o TFA

4.4.1 Atividade I : Construção de Retângulos

Objetivos

- Compreender que todo número natural pode ser escrito como um produto de dois fatores;
- Reconhecer os divisores de um número;
- Construir uma representação geométrica para os conceitos de fator, divisor e múltiplo;
- Registrar as seguintes igualdades matemáticas e perceber a equivalência entre as mesmas: $a \cdot b = c$, $c \div b = a$ e $c \div a = b$, com a, b e c naturais.

Normas e Procedimentos

Divide–se a turma em duplas. Em posse de fichas de registros (semelhantes a que segue) e da folha de papel quadriculado onde cada quadrado tem 1 cm de lado, a dupla seguiu as indicações do professor, que expôs pra turma as seguintes situações–problema:

Figura 3: Ficha de Registro

Número de Unidades Quadradas	Igualdades Envolvendo Produtos	Igualdades Envolvendo Divisões	

Fonte: Costa (2015)

Quantos retângulos podemos formar, cuja área seja, por exemplo:

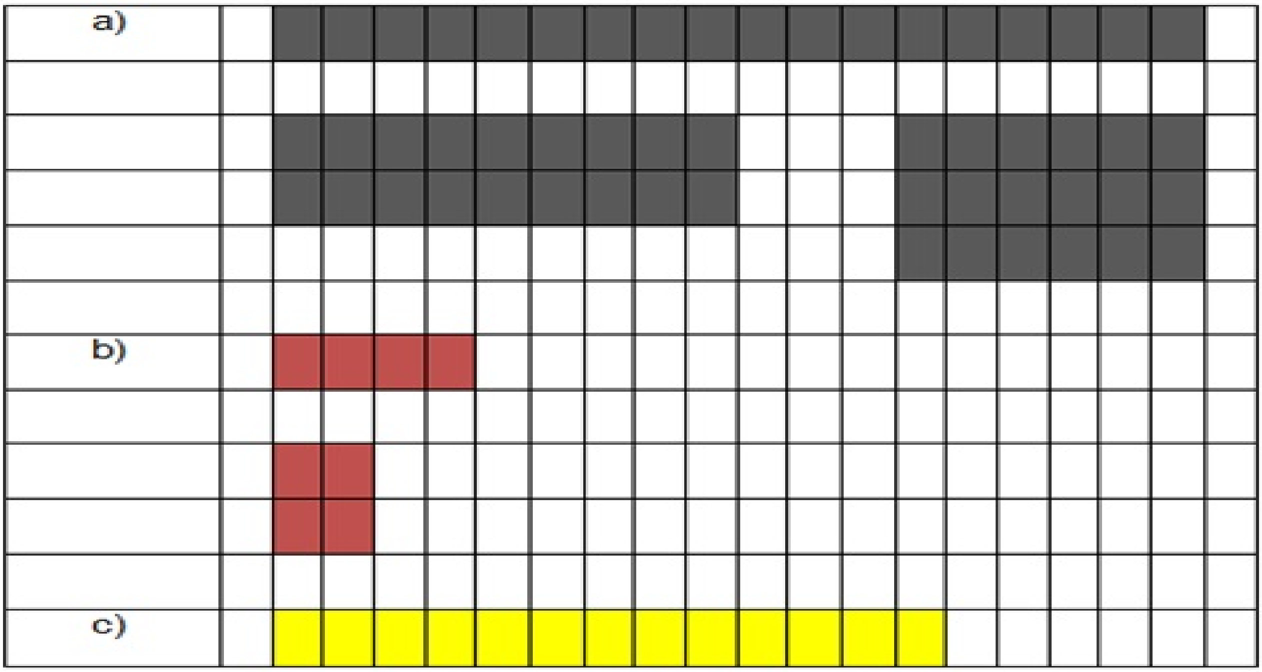
a) 18 cm^2?

b) 4 cm^2?

c) 11 cm^2?

O docente conduziu sua turma às soluções gráficas como mostra a figura a seguir.

Figura 4: Exemplo de solução gráfica



Fonte: Costa (2015)

Em seguida, acompanhou também o preenchimento da ficha que foi entregue:

Figura 5: Exemplo de solução gráfica

Número de Unidades Quadradas	Igualdades Envolvendo Produtos	Igualdades Envolvendo Divisões	
18 cm ^{2}	$18 = 18 \cdot 1$ $18 = 2 \cdot 9$ $18 = 3 \cdot 6$	$18 \div 1 = 18$ $18 \div 2 = 9$ $18 \div 3 = 6$	$18 \div 18 = 1$ $18 \div 9 = 2$ $18 \div 6 = 3$
4 cm ^{2}	$4 = 4 \cdot 1$ $4 = 2 \cdot 2$	$4 \div 1 = 4$ $4 \div 2 = 2$	$4 \div 4 = 1$
11 cm^2	$11 = 11 \cdot 1$	$11 \div 1 = 11$	$11 \div 11 = 1$

Fonte: Costa (2015)

Note que os exemplos contemplam um número composto que não é quadrado perfeito, um número composto que é quadrado perfeito, podendo ser fatorado como o produto de dois primos, e o último um número primo.

4.4.2 Atividade II: Bingo dos múltiplos e divisores (ou fatores)

Objetivos

- Compreender as relações de “múltiplo de” , “fator de” , “divisível por”, “divisor de”:
- Diferenciar um número primo de um número composto.

Normas e Procedimentos

Divide–se a turma em grupos de quatro pessoas. Coloca–se em uma urna uma sequência de números (escritos em um pedaço enrolado de papel no lugar das tradicionais bolinhas numeradas) acompanhados das expressões “múltiplo de”, “fator de”, “divisor de” e “divisível por”. Começado o sorteio, a equipe teve um intervalo de tempo de 30 segundos para marcar suas cartelas até o próximo o sorteio. Os grupos devem identificar quais dos números sorteados são múltiplos, fatores, divisores ou divisíveis e marcar na cartela. Ganha o jogo a equipe que bater e marcar corretamente a cartela e responder ao final desta atividade, quais dos números da cartela são primos e quais são compostos.

Observação 3. *A equipe poderá marcar mais um número na cartela a cada sorteio.*

Por exemplo, suponhamos que a "bolinha" (pedaço de papel) sorteado está escrito a expressão "Fator[8] de 7". A equipe irá marcar, na cartela da figura a seguir, por exemplo, os números 1 e 7.

Figura 6: Modelo da cartela

B	I	N	G	O
1	13	30	49	66
4	15	35	55	60
5	23	41	63	77
7	25	42	56	75

Fonte: Autoria própria (2019)

Se a cartela do modelo acima fosse da equipe que conseguiu marcá-la por total e corretamente, os quatros integrantes, para vencer o jogo, ainda tinham que identificar e responder para o docente quais são os números primos e os números compostos desta cartela, ou seja: 5, 7, 13, 23 e 41 seriam os primos e 4, 15, 25, 30, 35, 42, 49, 55, 56, 60, 63, 66, 75 e 77 seriam os compostos.

Figura 7: Material utilizado na atividade

Fonte: Autoria própria (2019)

[8]Cada um dos divisores de um número, os quais, quando multiplicados, têm como produto esse número. Como exemplos temos $1 \times 7 = 7$ e $2 \times 6 = 12$. Assim 1 e 7 são fatores do número 7 e 2 e 6 são fatores do número 12.

4.4.3 Atividade III : Método da árvore para a decomposição em fatores primos

O Teorema Fundamental da Aritmética, TFA, nos diz que todo número inteiro maior que um, ou é primo, ou se escreve de maneira única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de números primos. A demonstração desse teorema é, para os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, de entendimento complexo. Contudo, defendemos aqui, mais uma vez, que o fato de um determinado conceito matemático ter uma definição mais abstrata ou de um teorema ter uma demonstração que utiliza linguagens e conhecimentos mais avançados, não significa que o professor deve simplesmente expor os mesmos esquivando-se de uma discussão sobre o assunto. A generalização do processo de decomposição em fatores primos, que conduz ao TFA, poderia ser feita com a turma, através da observação, manipulação e criação de exemplos, selecionando de tais casos particulares as propriedades que lhes são comuns, construindo a partir delas tal teorema.

Apresentaremos nesta atividade o Método da Árvore para Decomposição em Fatores Primos como alternativa para a formulação de casos que ilustrem o TFA aplicado ao conjunto dos números naturais. Esta forma de representar a fatoração nos permite observar que pode existir mais de uma maneira de se efetuar este algoritmo chegando a um mesmo resultado, além de proporcionar mais clareza na determinação dos divisores do número que está sendo fatorado.

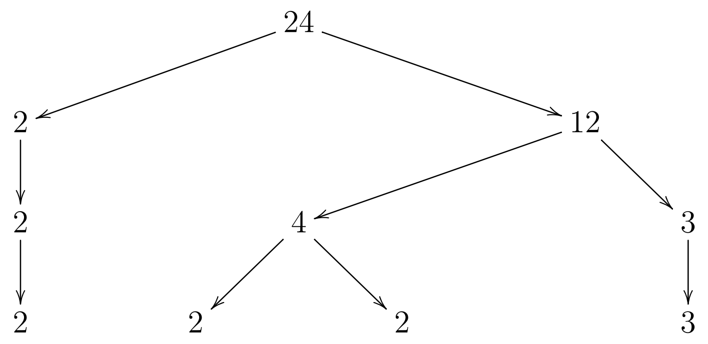
Objetivos

- Decompor um número em fatores compostos e em fatores primos;
- Reconhecer que todo número natural maior que um, ou é primo, ou pode ser decomposto de maneira única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de números primos;
- A partir da observação da decomposição de um número em fatores primos, determinar seus divisores.

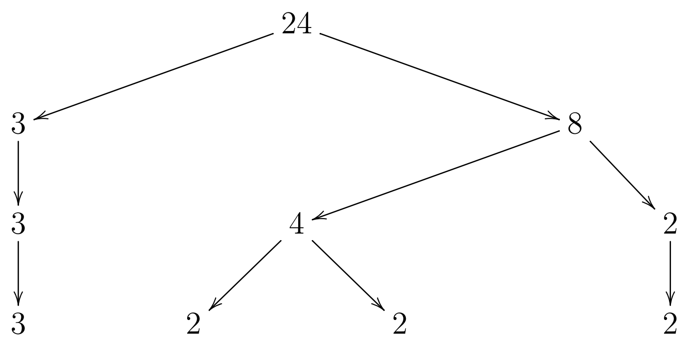
Normas e Procedimentos

A turma ficará organizada em duplas, porém cada aluno fará seu registro individual em sua ficha de avaliação. O objetivo da formação em duplas é a troca de informações e ideias durante a atividade. Inicialmente serão apresentados exemplos da decomposição de um número em fatores primos através do Método da Árvore, para posterior generalização do algoritmo. Escolhemos, a seguir, para maior compreensão da atividade, o número 24 que, ao ser fatorado, nos dá mais de uma possibilidade para a construção da árvore.

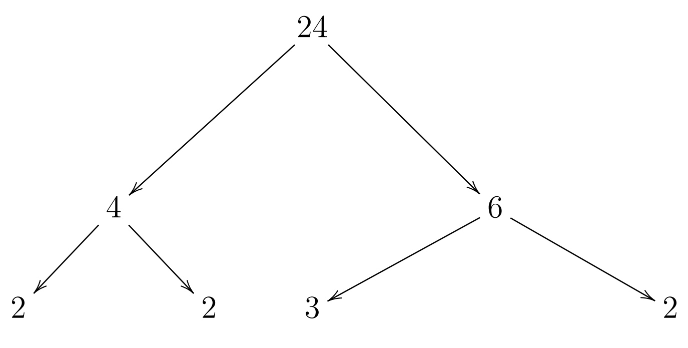
1º Possibilidade



2º Possibilidade



3º Possibilidade



A descrição oral detalhada de cada possibilidade é essencial para a aprendizagem.

Finalizada essa exposição para a classe, pode-se iniciar uma discussão de uma versão generalizada para a realização de uma decomposição em fatores primos para um número qualquer.

Assim como foi feito nesta pesquisa, para trabalhar a habilidade de exteriorizar o raciocínio através da escrita, o professor pode pedir aos estudantes que respondam as seguintes questões antes de passarem para a atividade de avaliação:

- A ultima linha da 1º possibilidade nos dar $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$, por outro lado, na ultima linha da 2º possibilidade nos dar $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3$. Assim, podemos afirmar que $2^3 \times 3 = 3 \times 2^3$?

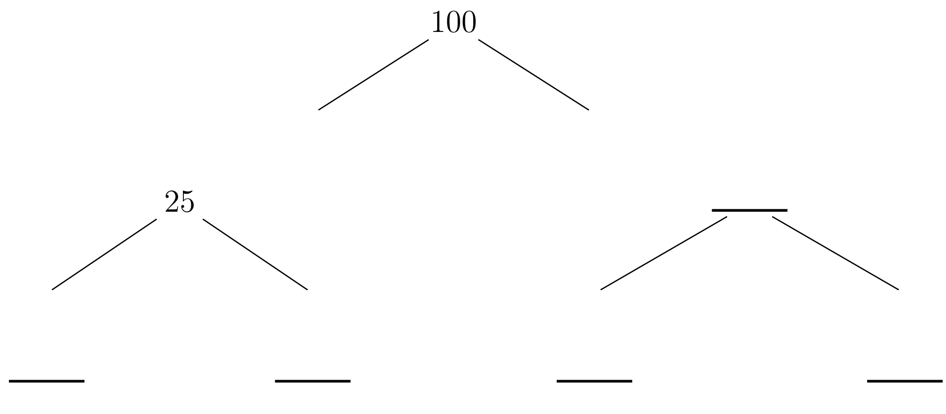
- Ao final das três possiblidades apresentadas pode se obter o mesmo conjunto e a mesma quantidade de fatores?

- É possível listar os divisores do número 24 a partir da observação de suas decomposições em cada uma das três possibilidades?

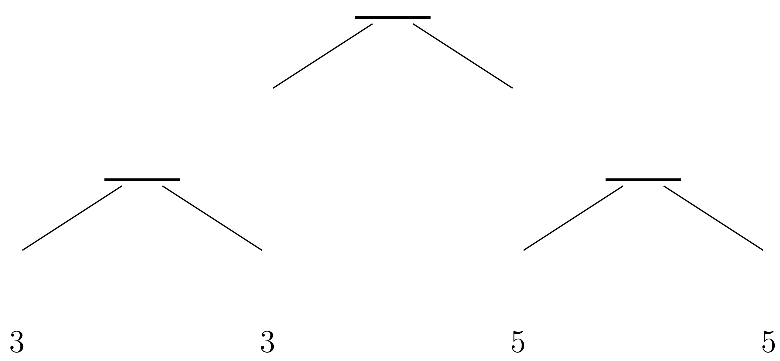
ATIVIDADE PROPOSTA

Complete as árvores de decomposição que seguem:

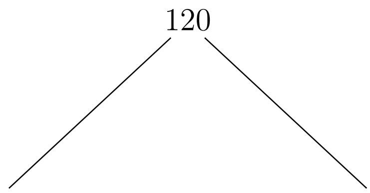
a)



b)



c)



Observação: no item c) a dupla deve fazer, pelo menos, duas decomposições obtendo fatores em outra ordem.

Explicitar um processo como esse, sem dúvida não é algo simples, tanto pela natureza do exercício, como pelo fato de não ser usual na prática pedagógica. Permitir que os alunos escrevam sem intervenções, entregando ao professor suas produções, é uma boa forma de avaliar como os mesmos atuam diante dessa tarefa, tida como complexa.

4.4.4 Atividade IV: Descobrindo a Senha

Objetivos

- Trabalhar a criatividade e as ideias matemáticas de decomposição, multiplicação e divisão através do lúdico dos jogos;
- Praticar a decomposição de um número em fatores primos;
- Apresentar o Teorema Fundamental da Aritmética.

Normas e Procedimenttos

Esta atividade consiste em fazer com que o aluno consiga abrir um documento contendo uma mensagem salva em um notebook protegida por uma senha que pode ser uma palavra ou um conjunto de palavras. Para descobrir essa senha você precisa efetuar as decomposições de alguns números em fatores primos e substituir o valor encontrado pela letra correspondente a esta decomposição que será fornecida por um código como mostra o exemplo a seguir:

Veja a senha a ser descoberta:

Figura 8: Senha a ser descoberta

15	20	42	25	72	20
?	?	?	?	?	?

Fonte: Autoria própria (2019)

O código fornecido é:

Figura 9: Código fornecido

$2^2.5$	5^2	$2^2.3.7$	5.3^2	$3^2.2^3$
o	i	d	c	g

Fonte: Autoria própria (2019)

Note que para descobrir a senha, inicialmente você deve decompor em fatores primos os números 15, 20, 42, 25 e 72 um a um e em seguida substituir o valor encontrado pela letra correspondente a essa decomposição fornecida pelo código.

$15 = 5 \cdot 3$ que corresponde à letra "c"

$20 = 2^2 \cdot 5$ que corresponde à letra "o"

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ que corresponde à letra "d"

$25 = 5^2$ que corresponde à letra "i"

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ que corresponde à letra "g"

Portanto, a senha é a palavra CÓDIGO.

Figura 10: Senha descoberta

15	20	42	25	72	20
C	O	D	I	G	O

Fonte: Autoria própria (2019)

Observação 4. *Note que o número* 20 *apareceu duas vezes representando a letra "O", mas que a decomposição foi realizada apenas uma vez sem precisar repeti–la.*

ATIVIDADE PROPOSTA

Figura 11: Senha a ser descoberta

140	98	99	300	98	175	840

12	77	48	52	840	175	48	140	840	50

52	840

840	300	34	140	34	175	98	140	34	28	840

Fonte: Autoria própria (2019)

Código fornecido é:

Figura 12: Código fornecido

$5^2.7$	11.7	$2^2.13$	$2^4.3$	$2^2.3$	$5^2.2$	17.2	$2^2.7$	$7^2.2$	$2^3.5.3.7$	$5^2.3.2^2$	$3^2.11$	$2^2.5.7$
m	u	d	n	f	l	i	c	e	a	r	o	t

Fonte: Autoria própria (2019)

Observe que a senha a ser descoberta no final desta atividade é:

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA.

Tendo sido realizada essa atividade, o professor expõe no quadro o enunciado do TFA, que deve ser registrado. Sua demonstração formal, não deve ser apresentada, já que não condiz com o conhecimento matemático da classe, mas sua existência e sua função de real validação do teorema devem ser mencionadas.

5 Análise dos Dados

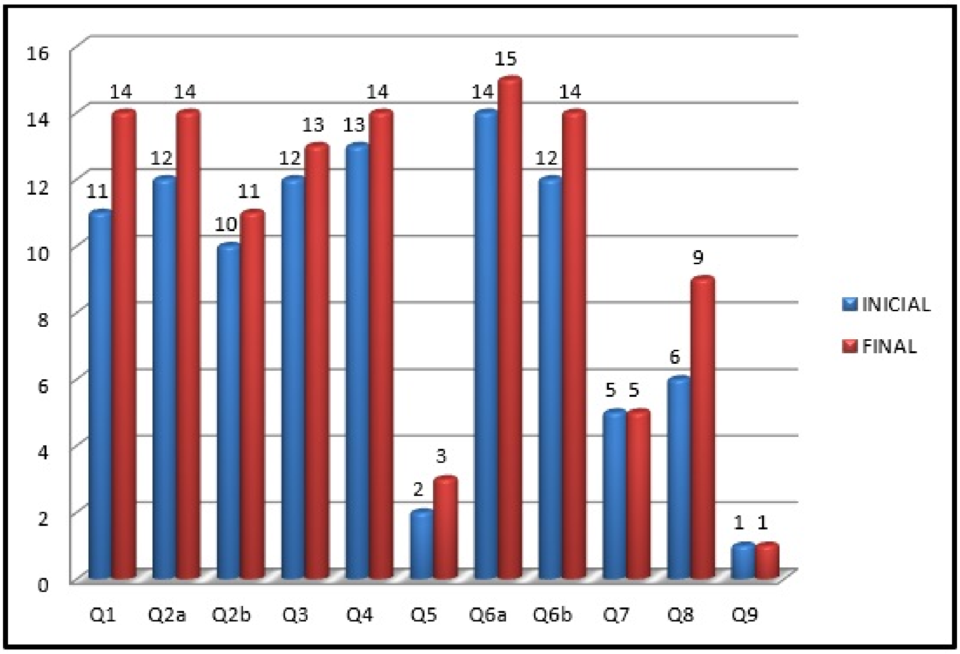
Neste capítulo, discutimos os dados coletados dos testes aplicados no início e no final da pesquisa e apresentamos os resultados obtidos da análise desses dados. Esta análise nos permite verificar se as estratégias utilizadas durante a pesquisa contribuíram ou não para a abordagem do Teorema Fundamental da Aritmética e dos principais conceitos associados a ele com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

5.1 Análise dos Testes Diagnósticos

Através dos testes foi possível ter um panorama do conhecimento dos alunos em relação ao uso do nosso objeto de estudo, Teorema Fundamental da Aritmética, e dos conceitos vinculados a ele.

A Figura 8, a seguir, traz o gráfico que apresenta o resultado do desempenho dos participantes por questão nos dois testes (inicial e final).

Figura 13: Número de acertos dos alunos no teste inicial e no teste final por questão



Fonte: Autoria própria (2019)

A análise revela que houve questões em que o percentual de crescimento foi maior: os desempenhos nas questões Q1, Q2$\mathfrak{a}$, Q5, Q6$\mathfrak{b}$ e Q8, por exemplo, cresceram respectivamente em 27,27%; 16,66%; 50%; 16,66% e 50%. Por outro lado, houve questões em que esse aumento percentual foi menor: Q2$\mathfrak{b}$, Q3, Q4 e Q6$\mathfrak{a}$ cresceram, nesta ordem, em

10%; 8,33%; 7,69% e 7,14%. Nas questões Q7 e Q9, não foi possível calcular o percentual de crescimento, visto que a quantidade de alunos que acertaram estas questões, tanto no teste inicial quanto no teste final, permaneceu invariável.

Na tentativa de justificar os resultados apresentados acima, consideremos que a diferença no teste final pode ter ocorrido tanto pelo processo de intervenção quanto por outros fatores, como por exemplo, o grau de facilidade da questão diante de conceitos que o aluno já tenha se apropriado ou da aplicação do mesmo teste.

No sentido de investigar melhor sobre o possível desenvolvimento dos alunos, no final da pesquisa, após a aplicação da proposta de ensino, passamos à discussão dos dados apresentados nas respostas de alguns alunos por grupo de questões, uma vez que eles podem contribuir com alguns aspectos para a confiabilidade dos resultados já apresentados.

5.1.1 Análise do primeiro grupo de questões

Para compreender a decomposição de um número em fatores primos e, consequentemente, usá-la na simplificação de cálculos e na realização de cálculos mentais, é necessário, antes de tudo, que o aluno admita a possibilidade de decompor um número em fatores, ou seja, escrevê-lo como produto de dois ou mais fatores.

Neste primeiro grupo que engloba as questões Q1, Q2 e Q3, abordamos a decomposição de um número em fatores primos ou compostos e a identificação desses fatores.

Figura 14: Enunciados do primeiro grupo de questões (Q1, Q2 e Q3)

1- Bebeto multiplicou dois números naturais e encontrou 40. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

_____ × _____ = 40 ou _____ × _____ = 40 ou _____ × _____ = 40

ou _____ × _____ = 40

2- Se Bebeto tivesse multiplicado dois números e encontrado 21 poderia ter escrito 3 x 7 = 21. Dizemos que 3 e 7 são **fatores ou divisores** do 21. Agora responda:

a) O número 40 possui quantos fatores?

____

b) Quais são eles?

____

3- Um dos fatores do número 21 é o 7. E o número 7, possui quantos fatores? Quais são eles? Por quê?

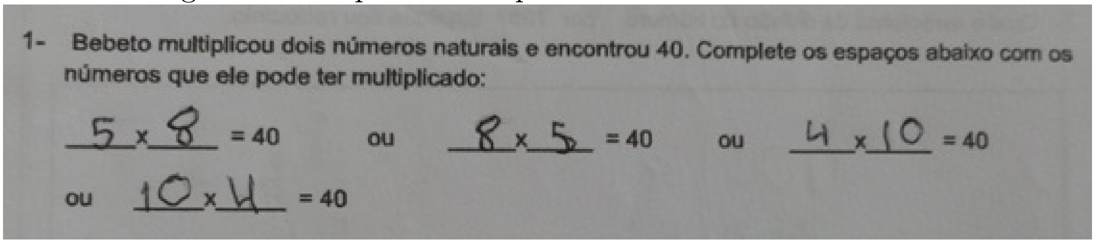
____

Fonte: Barbosa (2008)

Na questão Q1, foi proposto aos alunos decompor o número 40 em produto de dois fatores. Nas questões Q2 e Q3, propusemos que identificassem os fatores de 40 e 7 respectivamente. Escolhemos estes números justamente para verificar se haveria alguma diferença no tratamento que dariam a números primos e compostos.

Embora o resultado geral da questão 1 (Q1) tenha correspondido às nossas expectativas no sentido de que ocorressem, por parte dos alunos, poucos erros ao completarem os espaços identificando corretamente dois números cujo produto é 40, vale aqui destacar o principal equívoco conceitual cometido por alguns participantes em suas respostas. No resultado dos erros individuais, selecionamos a resposta de dois alunos (A1 e A2).

Figura 15: Resposta dada pelo o aluno $A1$ no teste inicial

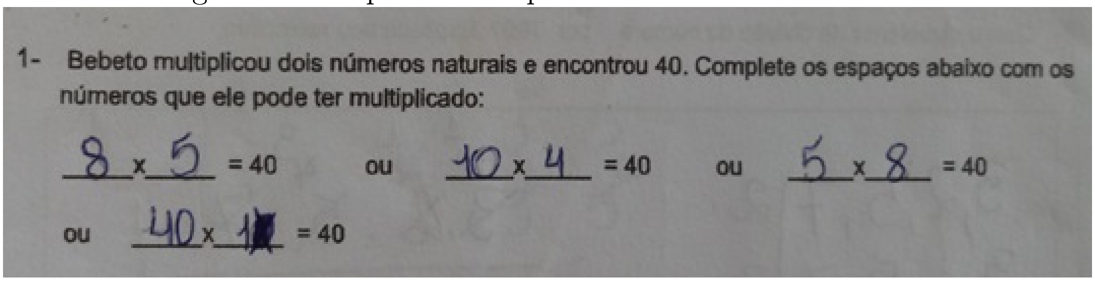


1- Bebeto multiplicou dois números naturais e encontrou 40. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

5 x 8 = 40 ou 8 x 5 = 40 ou 4 x 10 = 40

ou 10 x 4 = 40

Figura 16: Resposta dada pelo o aluno $A2$ no teste final



1- Bebeto multiplicou dois números naturais e encontrou 40. Complete os espaços abaixo com os números que ele pode ter multiplicado:

8 x 5 = 40 ou 10 x 4 = 40 ou 5 x 8 = 40

ou 40 x 1 = 40

Observamos que $A1$ e $A2$, em momentos diferentes, mesmo não tendo escrito os produtos 1×40 ou 40×1 e 2×20 ou 20×2, aplicaram a propriedade comutativa alterando apenas a ordem dos fatores e preencheram uma das lacunas com 8×5 e 5×8. Esta atitude dos alunos foi um exemplo do processo de acomodação de esquemas descrito por Vergnaud na Teoria dos Campos Conceituais. Isto é, foram buscar na bagagem de esquemas que já dominavam aquele que pudesse ajudá-los a lidar com a situação. Encontraram este que tem como invariante operatório a propriedade comutativa da multiplicação, entretanto ele não contribuiu para que o conflito (a ordem dos fatores não altera produto) fosse desfeito. Afinal, desconsiderando-se a ordem, os pares de fatores eram os mesmos e aqueles esperados (1×40 ou 40×1 e 2×20 ou 20×2) não foram encontrados.

A questão 2 (Q2) possuía dois itens que tinham como objetivo verificar se os alunos sabiam quantificar (item a) e identificar os fatores ou divisores do número 40 (item b). A identificação dos fatores como produtos foi a causa mais frequente dos equívocos conceituais cometidos por parte dos participantes de nossa pesquisa. Por exemplo, ao produzirem a igualdade $2 \times 20 = 40$, alguns alunos indicavam a expressão (2×20) ou os pares (5 e 8) e (4 e 10) como um único fator de 40 como vemos no registro de duas respostas a seguir:

Figura 17: Aluno identifica que as expressões “2×20”, “4×10”, “5×8” e “40×1” são fatores de 40

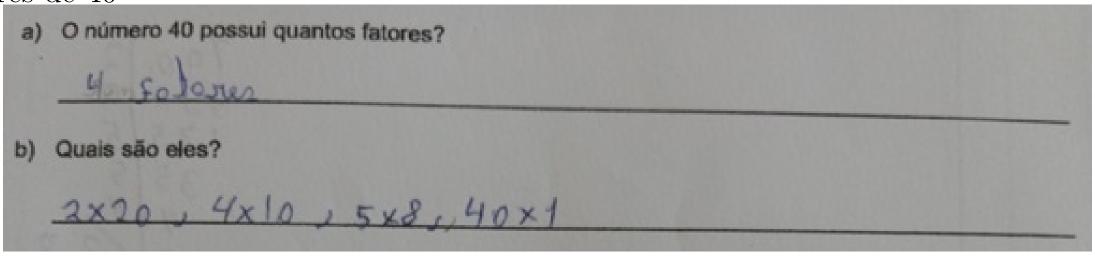
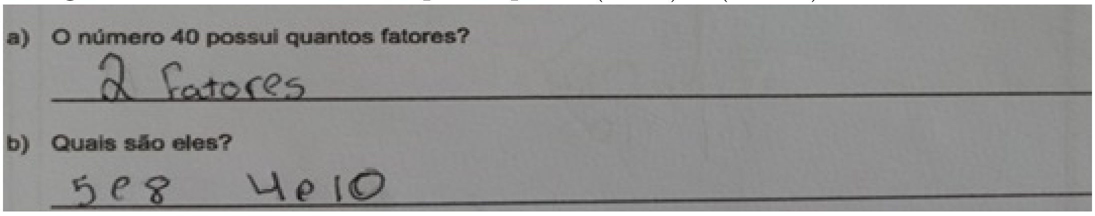


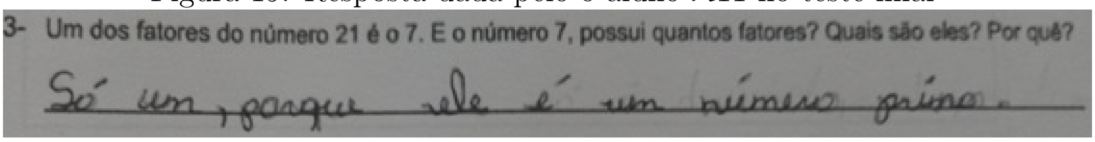
Figura 18: Aluno identifica que os pares (5 e 8) e (4 e 10) são fatores de 40



Este equívoco foi frequente na avaliação inicial e nós inferimos que o enunciado do item b), desta questão, associado ao enunciado da questão 1 (Q1) fizeram com que alguns participantes o cometessem, visto que na primeira questão foi solicitado que os alunos completassem os espaços com pares de números cujo produto é 40, já o item b) da questão 2 (Q2) solicitava que os mesmos listassem os fatores do número 40.

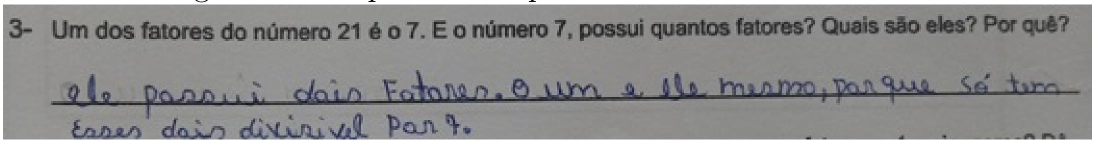
Vale destacar, ainda, que os poucos erros cometidos pelos alunos na questão 3 (Q3) tanto no teste inicial quanto no teste final estão associados à falsa concepção (aqui, ocorrendo por entenderem que o número 1 não é fator ou divisor de 7) de que todo número primo tem apenas um fator (ele mesmo) como podemos verificar, por exemplo, na resposta do aluno A11 a seguir:

Figura 19: Resposta dada pelo o aluno A11 no teste final



Encontramos também um registro da resposta de um dos nossos participantes da pesquisa (A4) no que diz respeito à diferenciação das expressões “*divisível por*” e “*divisor de*”. Embora o aluno tenha entre os seus repertórios de esquemas aquele suficiente para identificar corretamente os fatores do número 7, ele acaba por cometer o equívoco conceitual, no primeiro momento (teste inicial), na explicação de sua resposta, afirmando que o número 7 possui dois fatores “*porque só tem esses dois divisível por 7*”. Observamos que a intenção de A4 foi, no teste inicial, explicar que esses dois fatores eram, na realidade, "*divisores de 7*", equívoco, este, que foi desfeito no segundo momento (teste final), quando o aluno escreve "*divide o 7*".

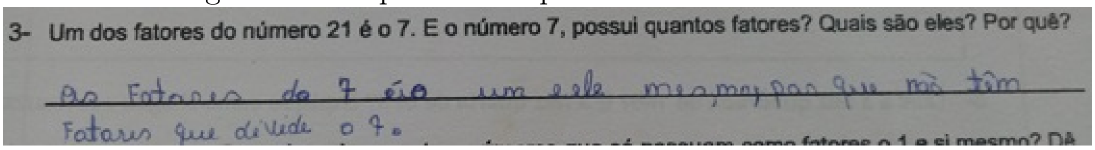
Figura 20: Resposta dada pelo aluno A4 no teste inicial



3- Um dos fatores do número 21 é o 7. E o número 7, possui quantos fatores? Quais são eles? Por quê?

ele passui dois Fatores. O um e ele mesmo, porque só tem Esses dois divisivel Por 7.

Figura 21: Resposta dada pelo aluno A4 no teste final



3- Um dos fatores do número 21 é o 7. E o número 7, possui quantos fatores? Quais são eles? Por quê?

os Fatores do 7 são um e ele mesmo, porque não tem Fatores que divide o 7.

Vale lembrar que a compreensão entre as relações das expressões "divisível por" e "divisor de" além de "múltiplo de" e "fator de" foi abordada em uma de nossas atividades durante a realização da proposta de ensino (ATIVIDADE II : BINGO DOS MÚLTIPLOS, FATORES OU DIVISORES). Nela, o aluno tinha que identificar, em uma cartela com vinte números, quais eram os múltiplos ou os fatores ou os divisores ou os divisíveis por aquele sorteado da urna fazendo com que o participante raciocinasse, selecionasse e diferenciasse essas expressões criando condições para o seu desenvolvimento conceitual.

Dessa forma, esta atividade, para nós, dá indício de que houve uma contribuição positiva para um melhor desempenho desse aluno na realização do pós- teste no que diz respeito a esta questão em analise.

5.1.2 Análise do segundo grupo de questões

Neste segundo grupo que engloba as questões Q4, Q5 e Q6, abordamos a identificação dos fatores primos de um número e sua decomposição e representação como produto de fatores primos.

Os conceitos de números primos e de decomposição de um número em fatores primos estão implícitos no Teorema Fundamental da Aritmética. A fim de investigar os conhecimentos dos alunos sobre estes conceitos, na questão 4 (Q4), solicitamos que os mesmos listassem quatro números primos, na questão 5 (Q5) pedimos que escrevessem a decomposição do número 40 em produto de fatores primos podendo repeti-los e na questão 6

(Q6) , ao contrário de Q5, a partir de um número representado como produto de primos, pedimos que os alunos determinassem que número era esse (item a) e verificassem se tal número era divisível por 3 (item b).

Figura 22: Enunciados do segundo grupo de questões (Q4, Q5 e Q6)

4- Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, quatro exemplos.

____

5- Os números que só possuem como fator o 1 e ele mesmo são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 40 como um produto envolvendo apenas ***números primos***. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

____

6- Um certo número foi escrito da seguinte forma:

2 × 3 × 5 × 13

Responda:

a) Que número é esse?

____

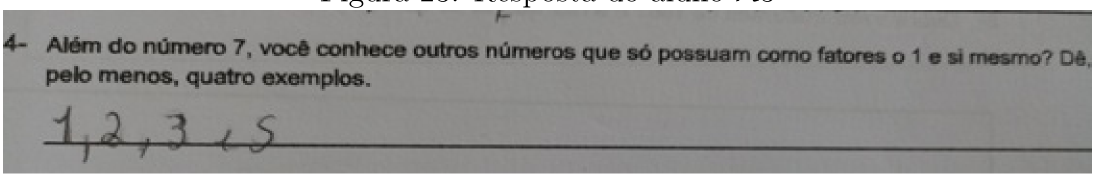
b) Esse número é divisível por 3? Por quê?

____

Fonte: Autoria própria (2019)

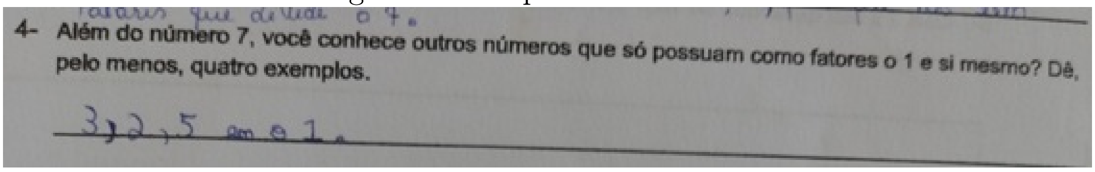
Iniciando nossa análise com a questão 4 (Q4), é importante destacar que todos os participantes que cometeram erros conceituais em suas respostas relacionadas a esta questão, tanto no teste inicial quanto no teste final, foram unânimes em afirmarem que o número 1 é um número primo como, por exemplo, mostram os dois registros a seguir:

Figura 23: Resposta do aluno A3


4- Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, quatro exemplos.

1, 2, 3, 5

Figura 24: Resposta do aluno A7



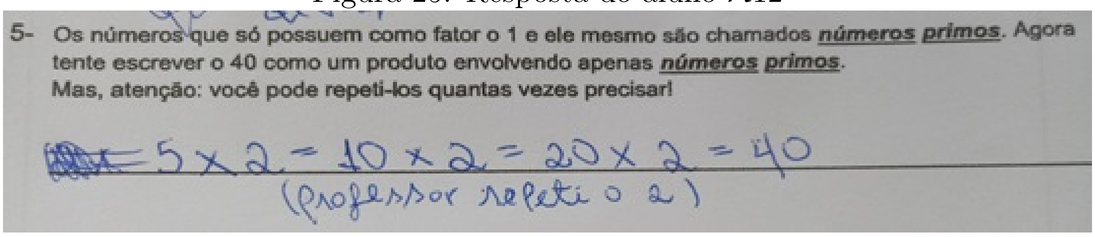
4- Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, quatro exemplos.

3, 2, 5 e o 1.

Para nós, estas escritas foram evidências de que nem todos os alunos compreendiam, de fato, o conceito de número primo[9] visto que, com exceção da representação do número 1 como um número primo em seus registros, teriam respondido a questão corretamente. Acreditamos que a ênfase dada no enunciado da questão à expressão "si mesmo" favoreceu a produção da escrita dos participantes representando o número 1 como um exemplo de número primo. Afinal, segundo Vergnaud, as representações associadas ao conceito formam um dos conjuntos que o compõem[10]. Julgamos, também, que o uso dessa representação inadequada está associado aos falsos teoremas em ação "todo número ímpar é primo" e "todo número primo é ímpar". Nas atividades da proposta de ensino, tentamos impedir que os alunos permanecessem adotando–as, abrindo, no final de cada atividade, discussões sobre o conceito de um número primo e a diferenciação deste de um número composto, criando condições para o desenvolvimento conceitual dos participantes.

Direcionando o nosso foco para questão 5 (Q5), a qual dos 16 participantes, no teste inicial, tivemos apenas 2 acertos (12, 5%) e no teste final, 3 acertos (18, 75%), é importante ressaltar que em ambos os testes, onde boa parte, nem se quer tenha tentado respondê–la, deixando–a em branco, relacionamos as dificuldades apontadas pelos participantes em elaborar suas respostas à falta de compreensão do que estava sendo pedido no enunciado.

Figura 25: Resposta do aluno A12



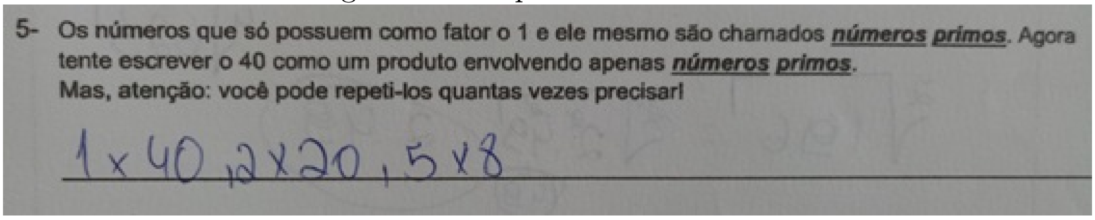
5- Os números que só possuem como fator o 1 e ele mesmo são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 40 como um produto envolvendo apenas ***números primos***.
Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

5 x 2 = 10 x 2 = 20 x 2 = 40
(professor repeti o 2)

[9] Número natural maior do que 1 e que só é divisível por 1 e por si próprio.

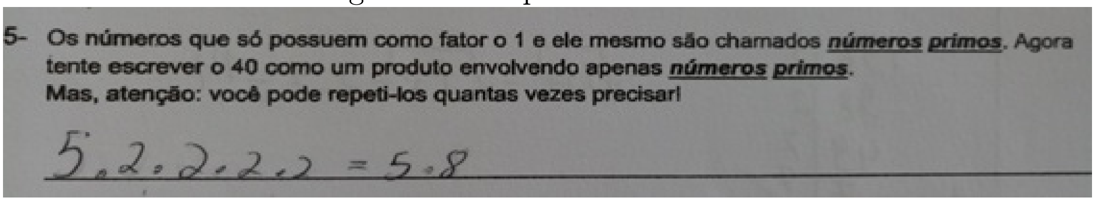
[10] Estamos no referindo à terna formada pelas situações, pelos invariantes e pelas próprias representações.

Figura 26: Resposta do aluno A15


5- Os números que só possuem como fator o 1 e ele mesmo são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 40 como um produto envolvendo apenas ***números primos***.
Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

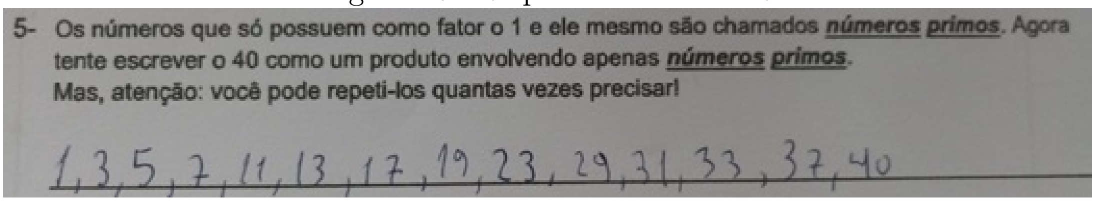
1x40, 2x20, 5x8

Figura 27: Resposta do aluno A2


5- Os números que só possuem como fator o 1 e ele mesmo são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 40 como um produto envolvendo apenas ***números primos***.
Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

5.2.2.2.2 = 5.8

Figura 28: Resposta do aluno A5


5- Os números que só possuem como fator o 1 e ele mesmo são chamados ***números primos***. Agora tente escrever o 40 como um produto envolvendo apenas ***números primos***.
Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

1,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,33,37,40

De acordo com os registros acima, podemos observar que os alunos A2, A12 e A15 sabiam decompor, no entanto, o primeiro (A12) buscou mentalmente os fatores primos de 40, mas produziu a escrita na medida em que efetuava os cálculos repetindo o fator 2 em cada uma delas. Isto favoreceu a escrita das falsas igualdades matemáticas ($5 \times 2 = 10 \times 2 = 20 \times 2 = 40$) que não lhe permitiu avançar na construção da resposta para esta situação (o número 40 como um produto apenas de primos). O segundo (A15), escreveu corretamente o 40 como produto de fatores, no entanto, não compreendeu que estes fatores teriam que ser todos primos. Já o terceiro (A2), por sua vez, compreendeu o que a questão pedia, entretanto escreveu um fator igual a 2 a mais obtendo a falsa igualdade matemática “$5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 5 \times 8$”. Verificamos, ainda, a resposta do aluno A5 que entendeu que deveria pensar em todos os números primos menores que 40, porém cometeu erros conceituais, visto que sua resposta não condizia com a pergunta da questão e que nem todos os números que listou são primos.

A questão 6 (Q6), última questão desse grupo a ser analisada, diferente da anterior, teve uma grande quantidade de acertos. Contudo o que nos chamou atenção nesta questão foram as respostas dadas, por diferentes alunos, no teste final, ao item b). Embora tenham respondido de forma correta à pergunta no primeiro momento (teste inicial), eles se posicionaram de maneira diferente em suas colocações no segundo momento como podemos verificar nos registros a seguir:

Figura 29: Resposta dada pelo o aluno A11 no teste inicial

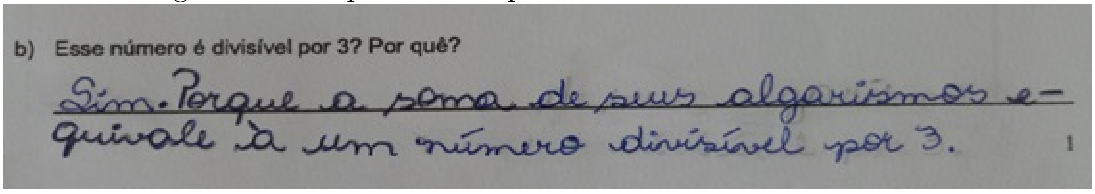


Figura 30: Resposta dada pelo o aluno A11 no teste final

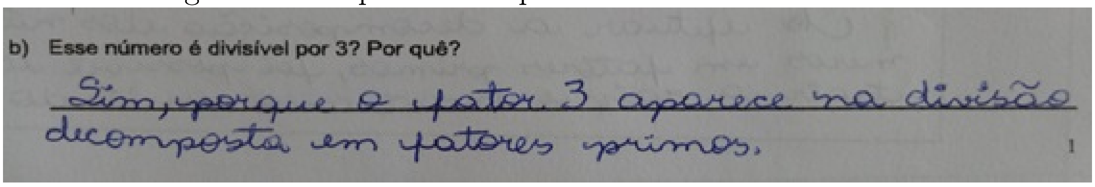


Figura 31: Resposta dada pelo o aluno A5 no teste inicial

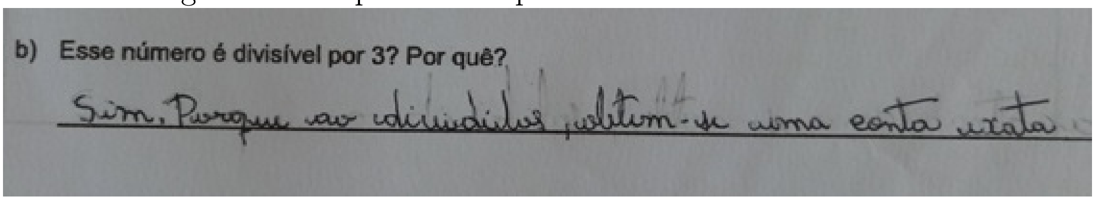
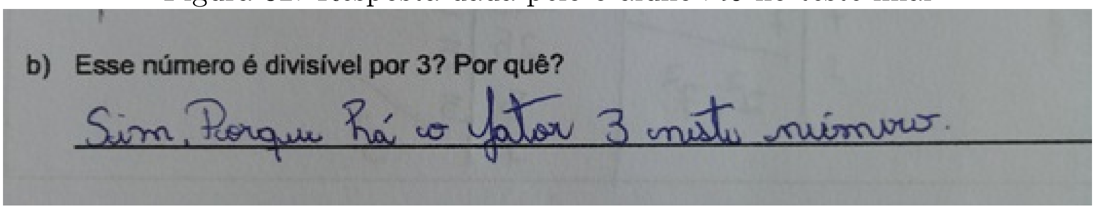


Figura 32: Resposta dada pelo o aluno A5 no teste final



Observamos, de acordo com os registros acima, que o primeiro aluno (A11) no seu registro inicial, buscou dentro dos invariantes operacionais que possuía para responder esta situação, o critério de divisibilidade por 3. Isto é, ao encontrar como resultado o número 390 no item a), somou os algarismos desse número ($3+9+0 = 12$) e concluiu que a soma resultava em um número divisível por 3. Já o invariante operacional utilizado pelo segundo aluno (A5) foi a divisão euclidiana encontrando resto igual a zero e concluindo que a divisão de 390 por 3 era exata.

Agora direcionando o nosso foco para as respostas de A5 e A11 no teste final, isto é, após a aplicação das atividades da nossa proposta de ensino nas quais foram trabalhadas a decomposição de um número em fatores primos, verificamos que aqueles invariantes operacionais citados anteriormente foram substituídos por um outro em comum: observaram que o fator 3 aparecia na decomposição do número 390 concluindo, de forma eficaz e otimizando seus cálculos, que tal número, encontrado no item a), era divisível por 3. Vale destacar que a forma como o número 390 estava representado $(2 \times 3 \times 5 \times 13)$ é o que Vergnaud, por exemplo, na sua Teoria dos Campos Conceituais, chama de significante do conceito[11].

5.1.3 Análise do terceiro grupo de questões

Neste último grupo de questões, abordamos o uso da decomposição dos números em fatores primos na otimização de cálculos e na resolução de situações problemas.

O objetivo central de toda a nossa proposta de ensino era criar condições para que os alunos operassem com a decomposição dos números em fatores primos e realizassem simplificações e cálculos mentais. Com estas questões, desejávamos investigar se já realizavam tais ações.

Figura 33: Enunciados do terceiro grupo de questões (Q7, Q8 e Q9)

7- Qual o **quociente** da divisão do número $3^2 . 2^2 . 5^4 . 7$ por **700**? Explique seu raciocínio.

8- Qual é a raiz **quadrada** de 196? E a raiz **quarta** de 625? Explique como chegou aos resultados.

9- Qual é o menor número natural pelo qual devemos multiplicar **180** para obtermos um **cubo perfeito?** Explique como chegou a esse número.

Fonte: Autoria própria (2019)

Para melhor esclarecimento, vamos à analise do desempenho das repostas dos alunos em cada uma delas.

Destacamos, inicialmente, as questões 7 e 9 (Q7 e Q9). Na primeira, foi apresentado para os alunos dividendo e divisor, sendo apenas o dividendo decomposto em fatores

[11]Maneira pela qual podemos representar um conceito a fim de buscarmos em nossa bagagem de esquemas uma ação ou pensamento na organização da resolução de uma determinada situação.

primos, e era preciso obter o quociente. Já na segunda, por sua vez, propusemos aos alunos que encontrasse o menor número natural que ao ser multiplicado por 180 obtínhamos como resultado um cubo perfeito. Vale ressaltar que uma situação curiosa ocorreu nestas questões. Conforme a Figura 8 (Gráfico), foi verificado que a quantidade de acertos do pré–teste foi igual à quantidade de acertos do pós–teste.

Na tentativa de entender o que ocorreu, é possível que os resultados apresentados nas duas situações estejam associados a não familiarização desses tipos de questões por parte dos alunos de nossa pesquisa, visto que as mesmas não são comuns na maioria dos livros didáticos adotados no 6º ano do Ensino Fundamental em geral. Entretanto, diferente daquele esperado crescimento estatístico de acertos, o que nos chamou atenção foi o crescimento relevante dos registros dos participantes na tentativa de solucionar as questões ou de buscar um caminho para as respostas das mesmas. Em outras palavras, muitos participantes no teste inicial não compreenderam o que estava sendo pedido ou o que era pra ser feito deixando as questões em branco. Já no segundo momento, esta falta de compreensão foi sendo desfeita à medida que os alunos respondiam as questões anteriores enriquecendo assim os seus invariantes operacionais e levando–os a organizarem mais ainda as suas ideias em busca da solução de tais problemas como mostra, por exemplo, alguns registros a seguir.

Figura 34: Resposta dada pelo o aluno A1 no teste final à questão 7

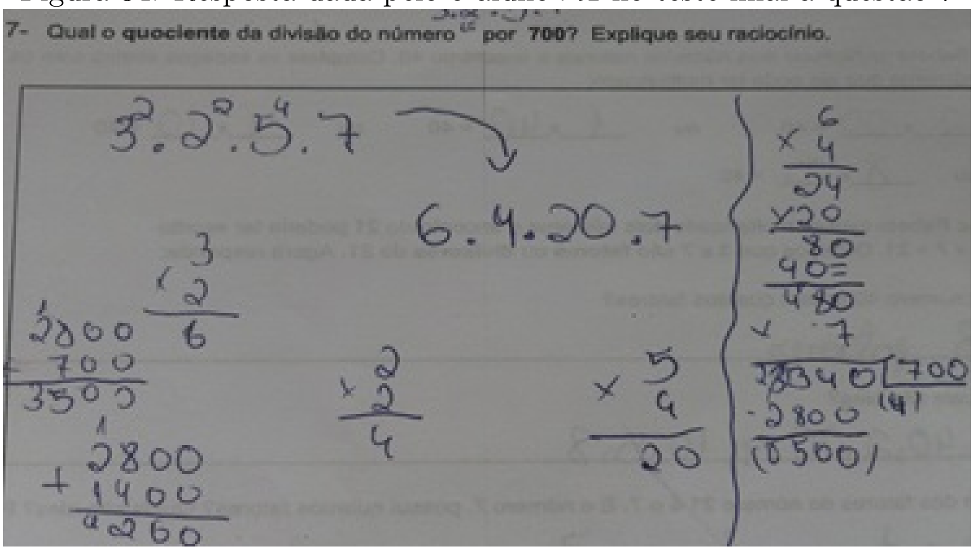


Figura 35: Resposta dada pelo o aluno A16 no teste final à questão 7

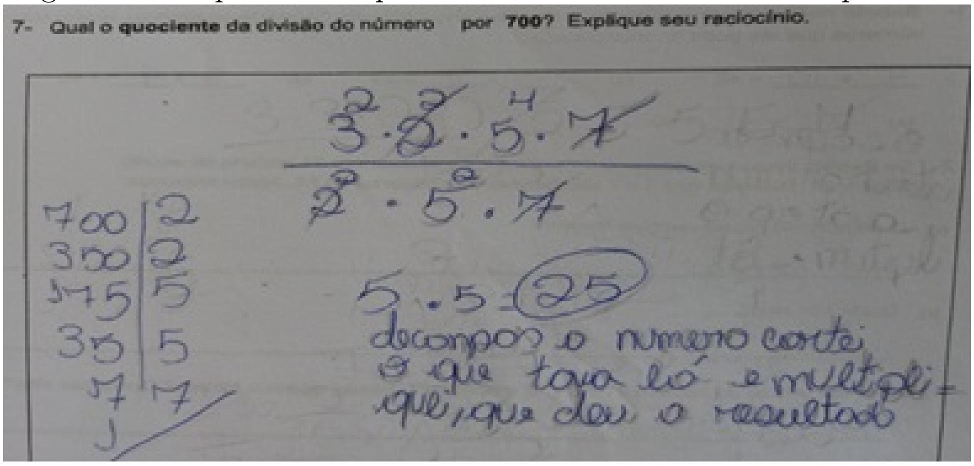


Figura 36: Resposta dada pelo o aluno A7 no teste final à questão 7

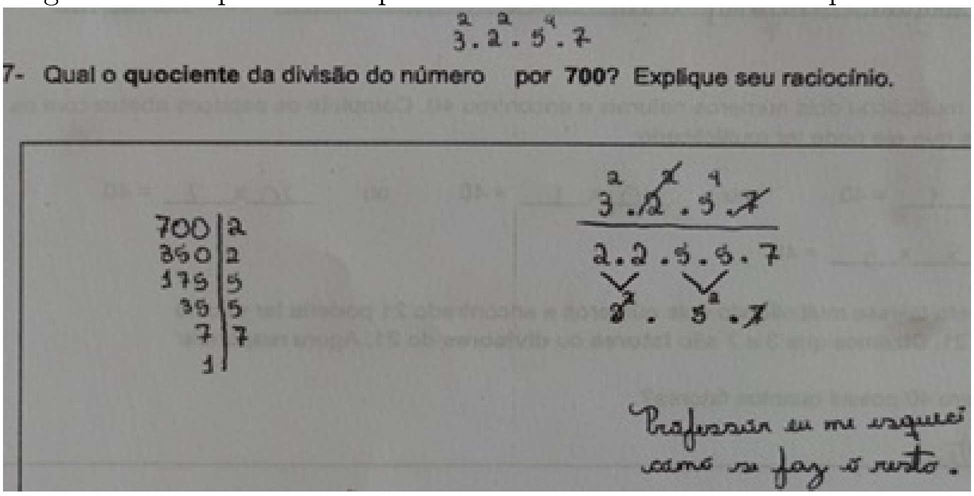


Figura 37: Resposta dada pelo o aluno A8 no teste final à questão 9

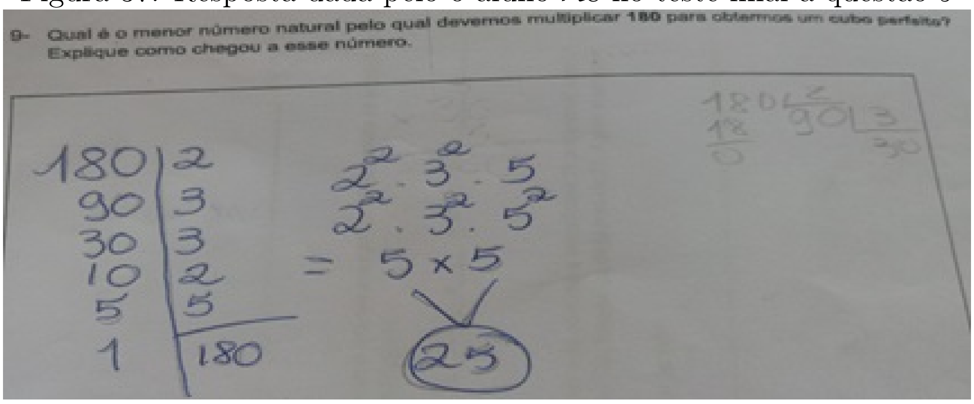
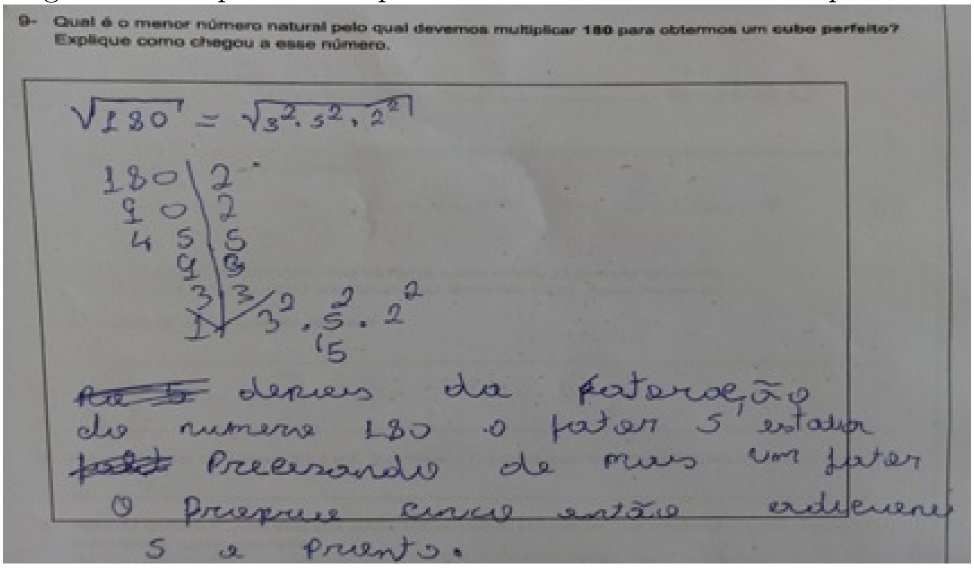


Figura 38: Resposta dada pelo o aluno A6 no teste final à questão 9



De acordo com os três primeiros registros acima, direcionados à Q7, podemos observar que o aluno A1, em busca da resposta do problema, tentou utilizar o procedimento utilizando no item a) da questão 6 (Q6), ou seja, tenta encontrar o número que está sendo representado por ($3^2 \times 2^2 \times 5^4 \times 7$) e logo em seguida dividi–lo por 700, procedimento, este, que o levou a uma divisão não exata por empregar o caminho mais longo de efetuar os cálculos e cometeu erro de definição de potências com expoentes naturais. Por outro lado, A7 e A16 usaram da decomposição em fatores primos escrevendo corretamente o número 700 como $2^2 \times 5^2 \times 7$ para tentarem solucionar o problema, porém ambos não tiveram, em seus repertórios de esquemas, invariantes suficientes para prosseguirem e concluírem o problema corretamente. Os alunos raciocinam sobre as fatorações e simplificam os cálculos tendo como referência os fundamentos da estrutura multiplicativa, pois eliminam (cancelam, riscam) os fatores comuns às decomposições em primos dos dois números em questão. A16 decide que aqueles que não foram eliminados formam o quociente. No entanto, despreza um dos fatores que não foi cancelado chegando a um outro quociente, diferente daquele que esperávamos. Já A7, depois de cancelar os fatores comuns, não prossegue na busca pelo quociente relatando ter esquecido o que deve ser feito com os fatores que restaram.

Partindo para a análise dos dois últimos registros direcionados à questão 9 (Q9), os alunos A6 e A8, por exemplo, também optaram pela simplificação e precisaram operar com a decomposição do número 180 em fatores primos. Embora tenham feito esta decomposição de forma correta, ambos cometeram o mesmo erro conceitual na conclusão da questão. Associaram o conceito de ´´cubo perfeito" ao conceito de "quadrado perfeito", encontrando, ambos, respostas diferentes para aquela a qual pedia o enunciado da questão. Isto é, ao decomporem o número 180 e o representarem como produto de primos $(2^2 \times 3^2 \times 5)$, ambos observaram que o número 180 tinha que ser multiplicado por 5, para que todos os fatores na sua decomposição ficassem com expoente igual a 2 caracterizando, assim, um quadrado perfeito. Quando que, na realidade, o número em questão tinha que ser multiplicado por $150 = 2 \times 3 \times 5^2$, para que, dessa forma, todos o fatores ficassem com expoente igual a 3 caracterizando um cubo perfeito.

No que diz respeito a essa questão, inferimos que essa falsa associação entre esses conceitos (quadrado perfeito e cubo perfeito) está ligada à escrita do número 180 em produto de fatores primos $(2^2 \times 3^2 \times 5)$. Em outras palavras, o que queremos dizer é que o conceito de cubo perfeito foi "desprezado" a partir da escrita do número 180 em fatores primos visto que, em sua decomposição, os alunos observaram de imediato que faltava apenas um fator igual a 5 para que todos os fatores da decomposição ficassem com o mesmo expoente favorecendo, dessa forma, a conclusão incorreta da questão.

Quando falamos anteriormente que o crescimento desses registros de respostas, na reaplicação do teste inicial, foi relevante, estávamos ali nos referindo à apropriação de conceitos e esquemas que ocorreram a partir das situações em que os alunos, durante o teste inicial e no decorrer das atividades da proposta de ensino, foram submetidos e, também, àquelas situações as quais já dominavam e que estavam restritas aos seus esquemas que foram, durante aquelas atividades, notavelmente ampliados. É o que Vergnaud (1993, p. 20) argumenta "...essa construção não é imediata a partir de uma explicação, mas um processo lento no qual novas situações devem ser constantemente introduzidas, cada vez mais complexas, ampliando o repertório de esquemas".

Chegamos à questão 8 (Q8), última questão desse grupo e do teste diagnóstico a ser analisada. Diferente de Q7 e Q9, esse tipo de questão é frequentemente abordada na maioria dos livros didáticos. Apenas tomamos o cuidado de colocarmos o que estava sendo pedido por extenso (raiz quadrada de 196 e raiz quarta de 625) no lugar das tradicionais representações $\sqrt{196}$ e $\sqrt[4]{625}$. Aqui enfatizamos um erro conceitual frequente cometido não somente pelos participantes de nossa pesquisa, mas também pela a maioria dos alunos do 6º ano quando têm seus iniciais contatos com o conceito de radiciação.

Figura 39: Resposta dada pelo o aluno $A5$ no teste inicial

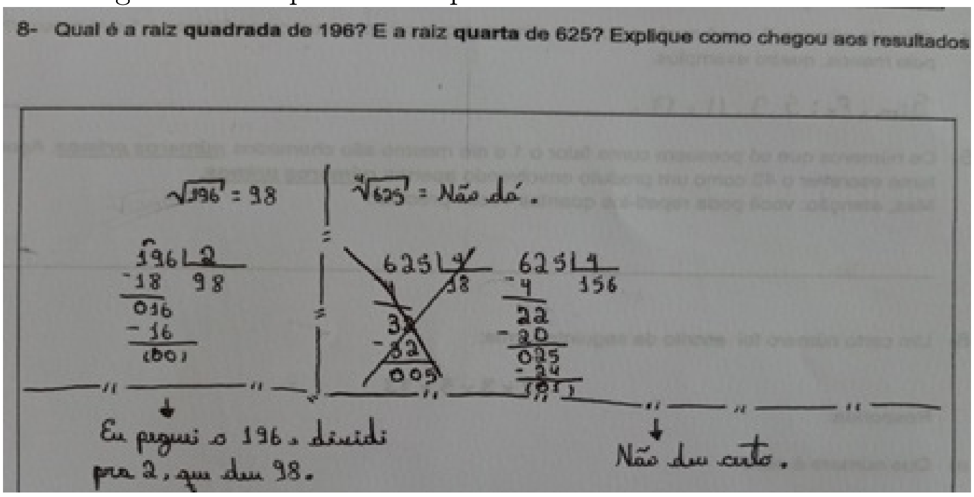


Figura 40: Resposta dada pelo o aluno $A10$ no teste inicial

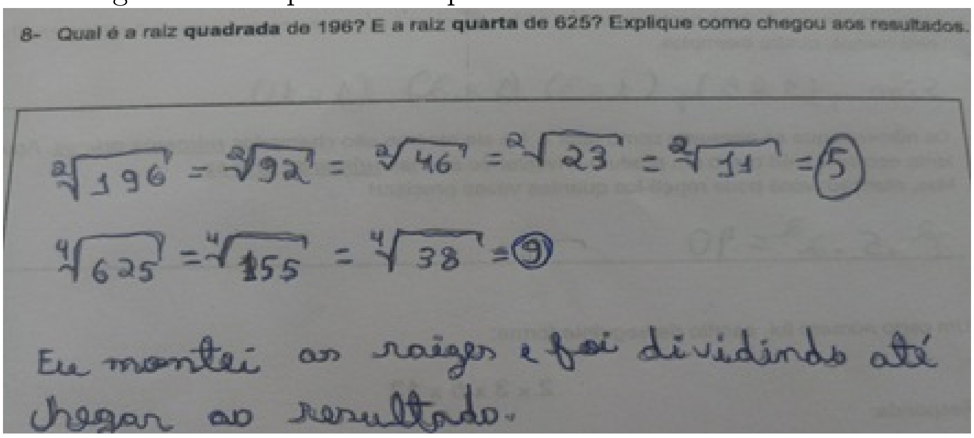
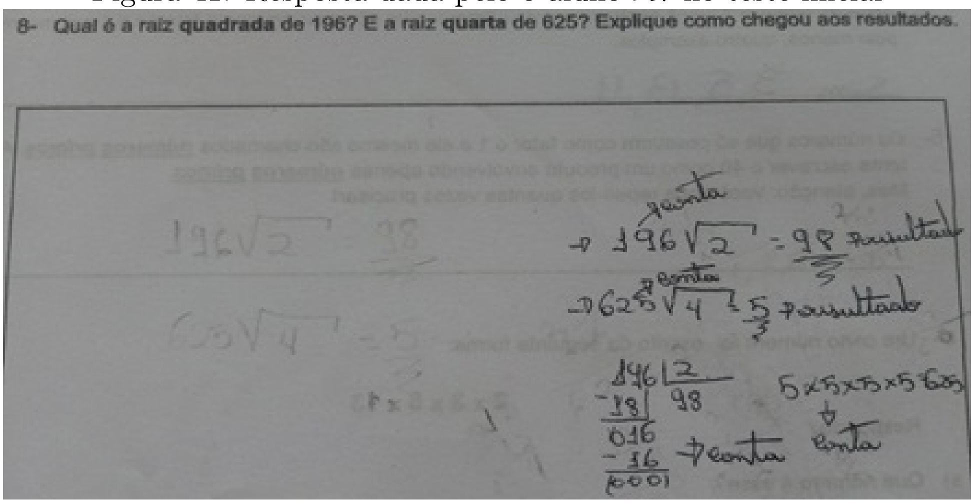
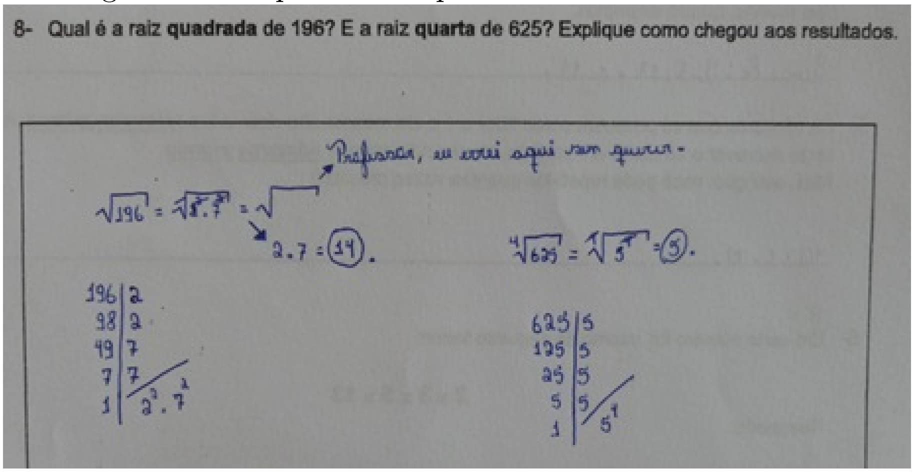


Figura 41: Resposta dada pelo o aluno $A7$ no teste inicial



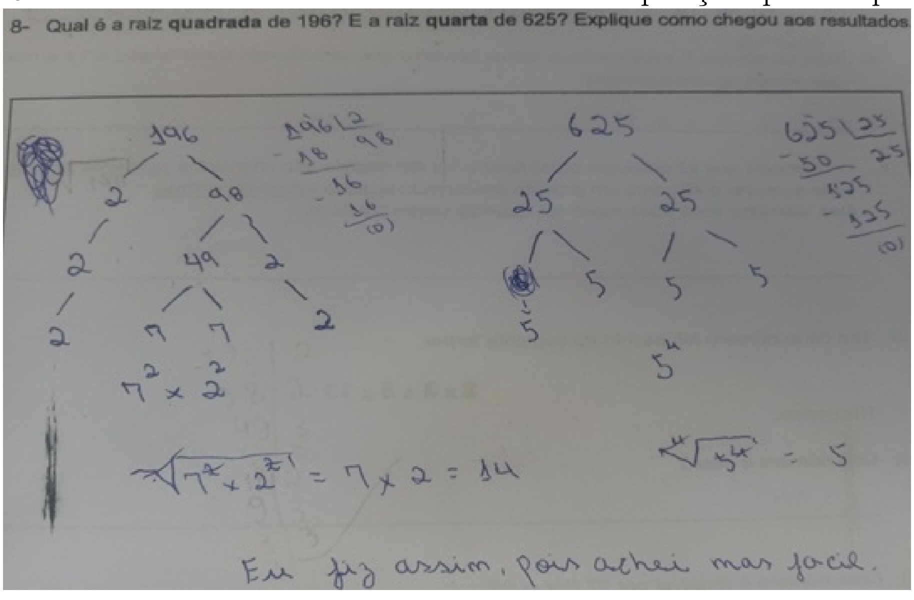
Conforme os registros acima, os alunos $A5$, $A7$ e $A10$ comentem o mesmo equívoco conceitual: dividem o radicando pelo o índice interpretando, desta forma, um falso conceito de radiciação. Vale destacar que este falso conceito foi desfeito pelos três alunos ($A5$, $A7$ e $A10$) no teste final como podemos observar, por exemplo, no registro de $A5$ a seguir, onde, ambos, optaram pela decomposição em fatores primos para simplificar seus cálculos e encontrar as raízes solicitadas no enunciado da questão.

Figura 42: Resposta dada pelo o aluno $A5$ no teste final



Ainda em relação à questão 8 (Q8), encontramos um fato curioso em um dos registros de nossos participantes que vale a pena ser ressaltado. O aluno decompõe corretamente os números 196 e 625 utilizando "o método de decompor por meio da construção da árvore" relatando, por escrito, que achou o método mais fácil. Método, este, utilizado em uma de nossas atividades durante a proposta de ensino (ATIVIDADE III: MÉTODO DA ÁRVORE PARA A DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS).

Figura 43: Aluno utiliza o método da árvore de decomposições para responder Q8



Ao longo dessa atividade, solicitávamos aos alunos que construíssem árvores para os vários números que ditávamos. Pedíamos que desenhassem na folha em branco as árvores que haviam construído. Comparávamos as árvores distintas feitas para um mesmo número e extraíamos coletivamente os fatores e as igualdades matemáticas criando, dessa maneira, condições para desenvolvimento conceitual dos alunos. Como a comutatividade da multiplicação é um conhecimento demonstrado pelos alunos em suas ações ao longo da nossa intervenção, com poucos exemplos, eles enunciavam informalmente o Teorema Fundamental de Aritmética relatando que a ordem em que os fatores primos eram escritos não alterava o valor do produto. Dessa forma, notamos que a maioria deles conhecia e empregava o teorema na situação da árvore e a multiplicação e sua propriedade comutativa correspondiam aos principais conceitos–em–ação.

O comentário acima (*Eu fiz assim, pois achei "mas" facil*) dá indício que houve um progresso do aluno e, consequentemente, um melhor desempenho do mesmo tanto nas habilidades de uso da decomposição de um número em fatores primos quanto nos conceitos ligados a ele.

Certos de que ainda há muito mais a ser estudado, concluímos, aqui, esta análise detalhada das estratégias apresentadas pelos alunos nas questões dos testes diagnósticos identificando os conhecimentos prévios e os conhecimentos adquiridos a respeito do TFA e dos principais conceitos associados a ele. Nesta análise, observamos uma série de conceitos matemáticos implícitos[12] nas ações dos alunos quando se deparavam com situações-problema. Verificamos os erros conceituais cometidos e as estratégias que adotaram para responderem o teste em dois momentos diferentes.

Passaremos, agora, ao próximo capítulo, no qual apresentaremos a conclusão desse nosso estudo.

[12]Equivalência entre um número e sua decomposição em fatores, propriedade comutativa da multiplicação e o produto dos fatores primos de um número também é um fator do mesmo.

6 Considerações Finais

O presente estudo teve por objetivo abordar o Teorema Fundamental da Aritmética e os principais conceitos associados a ele com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Para tentarmos alcançar o objetivo proposto, traçamos um planejamento que envolveu algumas etapas. A primeira delas foi justificarmos o interesse e a importância de realizarmos uma proposta de ensino sobre o tema. Em seguida, estabelecermos a problemática para, então, colocarmos explicitamente as questões específicas da pesquisa.

Fundamentamos teoricamente nosso estudo na Teoria dos Campos Conceituais. Segundo esta teoria, um conceito não pode ser apreendido isoladamente. Todo conceito está associado a muitos outros sendo mobilizado em situações distintas e que possui uma série de representações. Daí a ideia de optarmos por trabalhar pautados nesta teoria a quem o conceito pertence e classificarmos as situações em que ele se apresenta. Nesse sentido, nosso primeiro passo foi o estudo da Teoria dos Números, mais especificamente, da parte dela que se associa aos números inteiros e à divisibilidade. Por meio de tal estudo, identificamos os principais conceitos associados à decomposição em fatores primos: a multiplicação, a divisão e as suas propriedades, as noções de múltiplo e fator, a distinção entre números primos e números compostos, as técnicas de decomposição, o Teorema Fundamental da Aritmética, o uso da decomposição para simplificar cálculos, listagem de múltiplos e fatores e obtenção do M.M.C e M.D.C.

Ao refletimos sobre como estes conceitos se associam entre si e os tipos de situação em que estão inseridos, elaboramos uma proposta de ensino que visasse não só ao teorema, mas a estes outros conceitos e propriedades associados a ele. Para tanto, apresentamos uma sugestão metodológica para a abordagem do nosso objeto de estudo baseada na apropriação do conhecimento através do debate científico, do incentivo à criatividade e da busca por um padrão, ainda que limitado, de formalidade matemática. Assim, realizamos dois testes diagnósticos (inicial e final) e uma sequência de atividades que, a nosso ver, posta em prática, criou condições para que os alunos compreendessem e diferenciassem o conceito de número primo e número composto favorecendo a compreensão da decomposição dos números em fatores primos na otimização e simplificação de cálculos.

Entre as características das questões do teste e das atividades da intervenção, podemos citar a intenção de criar condições para que os alunos utilizassem as diversas representações dos conceitos, a ênfase nas situações a que eles estão associados e a tentativa de problematizar utilizando o lúdico e os desafios em tais situações. De acordo com as características conceituais, agrupamos as questões do teste diagnóstico e estabelecemos um critério para medir os conhecimentos dos alunos a respeito dos conceitos evocados nelas, seja na avaliação inicial, seja na final. Na avaliação final, os índices de acerto por questão aumentaram e parte desse crescimento foi considerada significativa. Os grupos com maior número de questões que apresentaram crescimento significativo dos índices de acerto foram aqueles que envolviam a identificação de fatores, o reconhecimento de números primos, a decomposição em fatores primos e os cálculos com os números escritos na forma fatorada. Tivemos, então, uma evidência de que nossos objetivos de ensino e de pesquisa estavam sendo contemplados. Cabe destacar que, no último grupo que mencionamos (cálculos com números escritos na forma fatorada), o aumento dos índices de acerto veio acompanhado de uma mudança de estratégia. Mesmo aqueles que, na avaliação inicial, acertaram tais questões, na avaliação final, mudaram seus procedimentos e, passaram a empregar conhecimentos da decomposição para efetuar cálculos.

Tendo obtido quantitativamente os avanços nos desempenhos depois da proposta de ensino, o próximo passo foi proceder com a análise qualitativa dos dados obtidos. Em toda a intervenção de ensino, tivemos os momentos de reflexão sobre essas atividades. Buscávamos, nesses momentos, favorecer os processos de generalização de padrões aritméticos envolvidos nas situações. Frequentemente, pedíamos aos alunos que justificassem os procedimentos de diferenciação de conceitos e as representações (aritmética, geométrica e lúdica) que empregavam nas situações. Eles gostavam dessas indagações, pois eram momentos que lhes permitiam trocar ideias conosco e com os demais colegas. Além disso, não foram poucas as vezes em que eles reconheciam, durante a reflexão, seus equívocos conceituais sobre a situação discutida. Assim, podemos afirmar que eles também se envolviam nessas reflexões e procuravam dar suas melhores respostas.

Uma vez que as atividades foram realizadas em grupo, observamos, também, que houve proveito na troca de informações entre os participantes, especialmente nas atividades do bingo e da árvore para decomposição, o que deu indício de contribuição para o aprendizado individual. A articulação entre as várias formas de representação e diferenciação de conceitos foi feita de tal maneira que os alunos iam adquirindo mais confiança para expressar seus procedimentos e estratégias tornando esse processo mais eficiente.

Acrescentamos ainda, que o processo de generalização não foi imediato e não ocorreu do mesmo modo com todos os alunos. Quando não dominavam uma situação plenamente, identificavam, dentre aquelas que dominavam, outras que tivessem algum "parentesco" conceitual com a primeira e, fundamentavam-se nelas, o que favorecia, na maioria das vezes, a escrita de equívocos conceituais . É como Vergnaud (1990, p. 137) afirma "há uma série de conhecimentos (conceitos, teoremas, propriedades) implícitos e explícitos nos procedimentos (ações) dos alunos". Assim procuramos identificar essas generalizações de conceitos e os possíveis procedimentos empregados ao final de cada atividade para que esses equívocos fossem sendo desfeitos no decorrer de outras atividades e no teste final.

É importante, contudo, esclarecermos que, por mais que tenhamos organizado uma intervenção com etapas definidas, a construção dos significados do Teorema Fundamental da Aritmética e dos principais conceitos associados a ele é um processo que não podemos esperar que se dê em dois encontros, em uma semana, ou em um mês. Como bem afirma Vergnaud (1993, p.20) "o desenvolvimento de um campo conceitual se dá ao longo de vários anos" e aqui não seria diferente. Embora tenhamos tratado os dados de forma mista (quantitativa e qualitativa) sabemos que eles não são suficientes para fazermos generalizações para além do nosso estudo. Porém acreditamos, sim, que nossos resultados contribuíram para alcançar o nosso objetivo e para dar pistas sobre a participação dos alunos no processo de apropriação dos conceitos que aqui enfocamos. Do nosso ponto de vista, assuntos associados ao TFA precisam ser retomados em vários momentos da vida escolar do estudante, contribuindo para que ele avance no reconhecimento das propriedades dos números inteiros. Destacamos, ainda, a importância do papel do professor, pois cabe a ele a cuidadosa escolha e a adequação e classificação das situações que dão significado ao conceito.

7 Referências

ALENCAR FILHO, Edgar de. – *Teoria Elementar dos números.* 2ª Ed. São Paulo: Nobel, 1981.

BARBOSA, Gabriela dos Santos. – *O teorema fundamental da aritmética: jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental.* (Tese de Doutorado). São Paulo: PUC/SP/EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2008.

BRASIL. – *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental.* Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

COSTA, R. M. V. – *Números primos e o teorema fundamental da aritmética: conceitos e atividades para o sexto ano do Ensino Fundamental.* 2015. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

CRESWELL, J. W. e CLARK, V. L. P. – *Pesquisa de Métodos Mistos.* Trad. Magda França Lopes. 2ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

GIL, A. C. – *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.* 6 ed. São Paulo: Atlas, 2012.

HEFEZ, Abramo. – *Aritmética.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HEFEZ, Abramo. – *Elementos de Aritmética.* Textos Universitarios. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

K. I. Oliveira, A. J. Corcho – *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, SBM, 2012.

LINS, R. C.Gimenez, J. – *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: Papirus, 1997.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M.C.; COELHO, S. P. – *Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental.* In: Actas do V CIBEM. Porto, julho de 2005, v.1, p. 1-12.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. – *Fundamentos de Metodologia Científica.* São Paulo: Atlas, 2017.

NERY, Chico; POSSANI, Cláudio. – *Os primos esquecidos. Revista do Professor de*

Matemática (RPM), SBM. n.47, p. 1–6, 2001.

OBM. – *Provas e Soluções.* Disponível em <`http://www.obm.org.br/`>. Acesso em 04 dez. 2018.

OBMEP. – *Provas e Soluções.* Disponível em <`http://www.obmep.org.br/`>. Acesso em 04 dez. 2018.

PROFMAT. – *Provas e Soluções.* Disponível em <`http://www.profmat-sbm.org.br/`> Acesso em 14 fev. 2019.

RESENDE, M.R. – *Re–Significando a disciplina Teoria dos Números na formação do Professor de Matemática na Licenciatura.* Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica De São Paulo. São Paulo. 2007

SANTOS, José Plínio de Oliveira. – *Introdução à Teoria dos Números*, 3ª Ed. Rio de Janeiero: IMPA, 2009.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia Silveira Brum dos. – *Dificuldades na Aprendizagem de Matemática.* 2007, 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) – Universidade Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007.

VERGNAUD, G. – *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems.* In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59, 1982.

VERGNAUD, G., *A criança, a Matemática e a Realidade: problemas do ensino da matemática na escolar elementar.* Trad. Moro, M. L. F. Curitiba: UFPR Press, 2009.

VERGNAUD, G. – *La théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. – *Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique.* La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983.

VERGNAUD, G., *Teoria dos campos conceituais.* In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26, 1993.