



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT



O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a
abordagem dada à prova de Matemática e suas
Tecnologias.

Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia

Teresina – PI

2019

Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia

Dissertação de Mestrado:

**O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a abordagem
dada à prova de Matemática e suas Tecnologias.**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof^o. Dr. Afonso Noberto da Silva

Teresina – PI

2019

T216e Tataia, Paulo Érison Cavalcante de Oliveira.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a abordagem dada à prova de Matemática e suas Tecnologias / Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia. - 2019.

62f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.

“Orientador(a): Prof. Dr. Afonso Noberto da Silva.”

1. ENEM. 2. Teoria de Resposta ao Item. 3. Matemática e suas Tecnologias. I. Título.

CDD: 510.07

PAULO ÉRISON CAVALCANTE DE OLIVEIRA TATAIA

**O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM) E A
ABORDAGEM DADA À PROVA DE MATEMÁTICA E SUAS
TECNOLOGIAS**

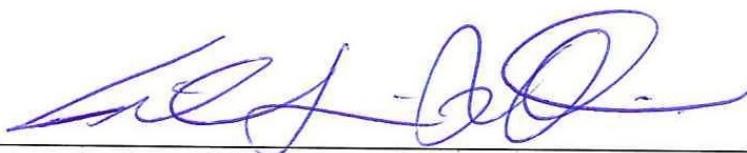
Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática
do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de
MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA

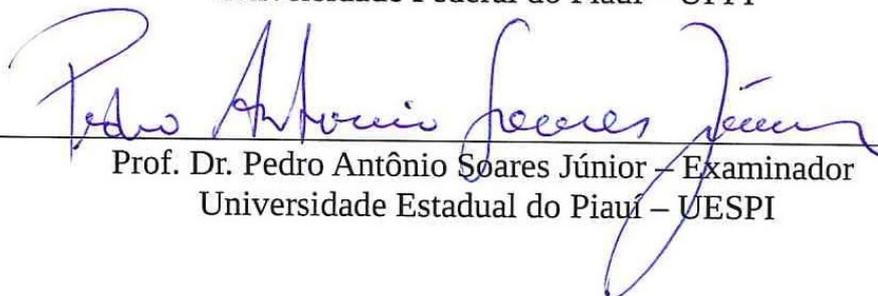
Aprovado por:



Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI



Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira – Examinador
Universidade Federal do Piauí – UFPI



Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior – Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia graduou-se em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI). Durante a graduação foi professor substituto na SEDUC-PI. Especializou-se em Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Atualmente é professor do Instituto Dom Barreto e do Colégio Objetivo.

Dedico este trabalho a Deus, a minha família e aos amigos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela oportunidade a mim concedida, e por me guiar durante todo o curso.

A minha querida esposa Áurea Carvalho Rocha Tataia, por me apoiar na decisão de fazer um mestrado, pelo carinho e pela compreensão, principalmente nas noites e nos finais de semana que passei ausente da sua companhia estudando para as provas e participando dos eventos do PROFMAT.

A minha mãe, Liduína Tânia Cavalcante de Paula Soares, que sempre me encorajou a estudar e me qualificar profissionalmente. Além de estar me estimulando com palavras de incentivos nos momentos de dificuldades.

Ao meu pai, Paulo de Tarso de Oliveira Soares, pelo incentivo, dedicação e apoio dado à minha decisão de investir nos meus estudos.

Ao meu irmão Rômulo, pela compreensão e pela amizade.

Aos meus amigos de curso, pela amizade e pelos momentos que passamos juntos.

Aos meus professores, que me orientaram de forma impecável durante o PROFMAT.

A UESPI pela oportunidade a mim concedida.

A meu professor e orientador, Dr. Afonso Noberto da Silva, pela proposta de desenvolver esse trabalho numa área que está diretamente relacionada a minha área de atuação como docente e por todas as orientações dadas ao longo desse trabalho.

Resumo

Neste trabalho, no primeiro capítulo destacamos como o ENEM ganhou importância na vida dos brasileiros, a utilização da TRI no cálculo da nota do exame e a Matemática como uma das únicas áreas do conhecimento do ENEM que tem uma prova única de 45 questões de múltipla escolha que abordam seus conteúdos. No segundo capítulo, procuramos fazer um levantamento geral da evolução do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) desde a sua criação em 1998, destacando-se as novas funcionalidades que foram agregadas ao exame e o conteúdo exigido na prova, de acordo com a matriz de referência divulgada pelo Ministério da Educação, com ênfase nas competências, habilidades e objetos de conhecimentos da área de Matemática e suas Tecnologias. No terceiro capítulo, apresentamos uma comparação entre a Teoria de Resposta ao Item (TRI) e a Teoria Clássica dos Testes (TCT); além disso, destacamos como a utilização da TRI no ENEM, a partir de 2009, foi fundamental para tirar conclusões interessantes e bem fundamentadas sobre o desempenho dos estudantes e egressos do Ensino Médio brasileiro ao longo do tempo. No quarto capítulo, destacamos a importância da Matemática na nossa vida e a abordagem feita da Matemática no Enem. No quinto capítulo, foram apresentados dados estatísticos dos conteúdos cobrados na prova de Matemática e suas Tecnologias no exame de 2009 a 2018. No sexto capítulo, procurou-se destacar ainda mais a TRI e apresentou-se tabelas que reforçam o argumento da importância da Matemática no ENEM na nota do candidato. No sétimo capítulo fizemos as considerações finais deste trabalho e no oitavo capítulo apresentamos as referências bibliográficas que nos auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho.

Palavras-chave: ENEM, Teoria de Resposta ao Item, importância da Matemática, Matemática e suas Tecnologias

Abstract

In this paper, in the first chapter we highlight how ENEM gained importance in the lives of Brazilians, the use of IRT in calculating the exam grade and Mathematics as one of the only areas of knowledge of ENEM that has a unique proof of 45 questions. multiple choice that address their content. In the second chapter, we seek to make a general survey of the evolution of the National High School Exam (ENEM) since its creation in 1998, highlighting the new features that were added to the exam and the content required in the proof, of agreement reference matrix disclosed by the Ministry of Education, with emphasis on competences, skills and knowledge objects in the area of Mathematics and its Technologies. In the third chapter, we present a comparison between the Item Response Theory (TRI) and the Classical Test Theory (TCT); In addition, we highlight how the use of TRI in ENEM, since 2009, it has been crucial to draw interesting and well-founded conclusions about the performance of Brazilian high school students and graduates over time. In the fourth chapter, we highlight the importance of mathematics in our life and the approach taken by mathematics in Enem. In the fifth chapter, statistical data were presented on the contents charged in the Mathematics and its Technologies exam in the exam from 2009 to 2018. In the sixth chapter, we tried to further highlight the IRT and presented tables that reinforce the argument of the importance of Mathematics. ENEM in the candidate's note. In the seventh chapter we made the final considerations of this work and in the eighth chapter we presented the bibliographical references that helped us in the development of this work.

Keywords: ENEM, Item Response Theory, importance of Mathematics, Mathematics and its Technologies

Lista de Figuras

1	Escala de proficiência	26
2	Curva característica do item (CCI)	29
3	Questão 63 ENEM 2007 Prova Azul	31
4	Curva característica de um item	32
5	Exemplo de uma escala de proficiência dos candidatos A e B	33
6	Níveis de uma escala de proficiência na área de Matemática e suas Tecnologias	34
7	Exemplo da proficiência de dois participantes A e B	35
8	Questão 149 ENEM 2017 - Prova amarela	38
9	Questão 137 ENEM 2017 - Prova amarela	39
10	Questão 155 ENEM 2009 - Prova amarela	40
11	Questão 136 ENEM 2017 - Prova amarela	43
12	Questão 170 ENEM 2017 - Prova amarela	44
13	Questão 174 ENEM 2017 - Prova amarela	45
14	Sistema de eixos ortogonais	46
15	Resolução do problema proposto	47
16	Levantamento feito nas provas do Enem no período de 2009 a 2018	50
17	Distribuição dos acertos e erros de dois candidatos	51
18	Ciências da Natureza e suas Tecnologias	53
19	Ciências Humanas e suas Tecnologias	54
20	Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	54
21	Matemática e suas Tecnologias	55

Lista de Tabelas

1	Relação entre competências, habilidades e eixos cognitivos - Matemática e suas Tecnologias	22
2	Comparação entre a TCT e TRI.	24
3	Comparação de desempenho via TCT e TRI.	25
4	Notas mínimas e máximas obtidas pelos candidatos que fizeram o Enem por área de conhecimento de 2009 a 2013	55
5	Notas mínimas e máximas obtidas pelos candidatos que fizeram o Enem por área de conhecimento de 2014 a 2018	56

Sumário

1	Introdução	11
2	O ENEM	14
3	Teoria de resposta ao item (TRI)	23
4	A matemática do ENEM	36
5	Dados estatísticos das questões de matemática no ENEM	48
6	A importância da prova de matemática no ENEM	51
7	Considerações Finais	57
8	Referências	59
	Anexos 1: Estatística	61

1 Introdução

Desde 2009, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) ganhou uma grande importância na vida dos brasileiros. Instituído em 1998 pelo Ministério da Educação (MEC) e realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o Enem tratava apenas de um teste para avaliar as competências desenvolvidas ao longo da educação básica.

Criado para avaliar o desempenho dos estudantes no final da educação básica, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi reformulado com o passar do tempo e hoje é uma importante ferramenta de seleção usada em boa parte das universidades públicas em substituição aos tradicionais vestibulares que ainda continuam a existir em algumas instituições de ensino. Para isso, foi instituído o Sistema de Seleção Unificado (SISU), que funciona com as notas do ENEM. Com o resultado do exame, o candidato encontra a relação de instituições, cursos e nota de corte em cada um deles no sistema, devendo escolher dois cursos e sinalizando um deles como primeira opção de escolha.

Vale destacar que em alguns casos, podem ser adotados pesos diferentes para cada área avaliada pelo ENEM, conforme o curso, e algumas universidades usam sistemas de bônus para os candidatos que residem na região onde está localizada a instituição de ensino.

A adesão das universidades públicas ao novo processo é feita de forma voluntária, sendo que o MEC incentiva a adesão, mas respeita a recusa. A vocação do ENEM como vestibular é, com o tempo, ser utilizado por todas as instituições de Ensino Superior.

Além disso, com a criação em 2004 do Programa Universidade para Todos (PROUNI), a nota obtida no Enem passou a ser utilizada para a obtenção de bolsas de estudos integrais e parciais em cursos de graduação de faculdades particulares.

Já em 2010, a participação do ENEM passou a ser obrigatória também para a solicitação do Fundo de Financiamento ao Estudante de Ensino Superior (FIES). Assim, os alunos de baixa renda que desejam pedir financiamento pelo fundo terão de fazer o Exame Nacional do Ensino Médio.

Um das grandes mudanças no ENEM aconteceu na estrutura da prova. Até 2008, o exame tinha apenas 63 questões, além da redação. A partir de 2009, passou a ser composto de uma redação e mais 180 questões objetivas de múltipla escolha, divididas em quatro partes. São 45 questões para cada área do conhecimento:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias: em que são cobrados conhecimentos de Língua Portuguesa, Literatura e Língua Estrangeira moderna (inglês ou espanhol);
- Ciências Humanas e suas Tecnologias: que aborda Geografia, História, Filosofia e Sociologia;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias: que traz perguntas sobre Biologia, Química e Física;
- Matemática e suas Tecnologias: que exige conhecimentos sobre Matemática e a relação dessa matéria com problemas cotidianos.

Para que tais alterações acontecessem foi necessário que a composição do cálculo da nota do ENEM levasse em consideração a Teoria de Resposta ao Item (TRI), um conjunto de modelos estatísticos que leva em conta, antes de tudo, a coerência dos acertos.

O professor Dalton Francisco de Andrade, do Departamento de Informática e Estatística da Universidade Federal de Santa Catarina, explica que pela TRI, os alunos que acertam o mesmo número de questões podem ter notas diferentes em razão da coerência das respostas: espera-se que um candidato que acerte questões difíceis também acerte as fáceis. Caso o estudante acerte muitas questões difíceis, mas erre outras fáceis, haverá redução na pontuação, pois a TRI vai considerar que há alta probabilidade de os acertos terem sido casuais.

A TRI ainda permite “calibrar” as provas para que elas tenham um grau de dificuldade adequado às necessidades do exame. E, como as provas medem o conhecimento dos alunos sempre na mesma escala, sua grande vantagem é possibilitar a comparação dos resultados de exames diferentes. Isso permite não só acompanhar a evolução dos estudantes no decorrer dos anos como também fazer duas ou mais provas por ano e usar os resultados de qualquer uma delas para a disputa das vagas.

Uma das únicas áreas do conhecimento do ENEM que tem uma prova única de 45 questões de múltipla escolha que abordam seus conteúdos é a Matemática. O destaque para essa área do conhecimento pode ser justificado uma vez que a história da Matemática é a história da capacidade de abstração da humanidade. Os números são anteriores às letras. Ainda na Pré-História o homem já contava objetos, dias e meses. Mais tarde, na Antiguidade, babilônios, egípcios e gregos desenvolveram a Álgebra, a Geometria e a Trigonometria e as utilizaram no cálculo de impostos, na arquitetura e na astronomia. Ao longo do tempo, os números ganharam aplicações cada vez mais sofisticadas. Hoje, aju-

dam a desvendar mistérios do Cosmo, levam a novas tecnologias e resolvem uma variedade cada vez maior de problemas cotidianos.

Dessa forma, com o presente trabalho temos como objetivos fazer um levantamento geral da evolução do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) desde a sua criação em 1998, auxiliar nos esclarecimentos sobre a Teoria de Resposta ao Item (TRI) e como a utilização da TRI no ENEM a partir de 2009 foi fundamental para tirar conclusões interessantes e bem fundamentadas sobre o desempenho dos estudantes e egressos do Ensino Médio brasileiro ao longo do tempo e destacar a importância da prova de Matemática e suas Tecnologias para a nota do candidato no exame.

2 O ENEM

Implantado em 1998, por meio da Portaria do Ministério da Educação (MEC) Nº 438, de 28 de maio de 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) centra-se na avaliação individual de desempenho por competências ao final da Educação Básica. Tem como eixos estruturadores a interdisciplinaridade e a contextualização dos conhecimentos expressos na forma de situações-problema.

Além de ser um instrumento de aferição das competências e habilidades do aluno, ele também confere a cada participante parâmetro para a autoavaliação e orientação de seu processo de formação continuada. O exame permite que o estudante faça análise daquilo que considera ter aprendido durante sua escolarização básica, das suas expectativas em relação à continuidade de seus estudos e à sua inserção no mercado de trabalho, além de outras informações valiosas para a formulação de políticas públicas no setor educacional.

A partir de 2009, foram agregadas novas funcionalidades ao exame, ampliando-se o caráter do processo seletivo para acesso às instituições de ensino superior, além de incorporar funções anteriormente atribuídas ao Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA) do Ensino Médio. Para implantar essas mudanças, foi necessário recorrer às técnicas oriundas da TRI (Teoria de Resposta ao Item).

A utilização dessa teoria no Enem possibilitou a construção de uma série histórica do desempenho dos estudantes e dos egressos do Ensino Médio brasileiro, como é feito com os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e da Prova Brasil. Isso permitiu o acompanhamento longitudinal do desempenho nas quatro áreas avaliadas, constituindo excelente indicador para implantação de políticas públicas de melhoria da qualidade de ensino na Educação Básica.

Para subsidiar a reestruturação metodológica do ENEM, foi elaborada uma nova Matriz de Referência, tomando como base as matrizes de competências e habilidades que compõem o ENCCEJA do Ensino Médio e a matriz do próprio exame do período 1998-2008. A nova matriz é dividida nas quatro áreas de conhecimento que compõem o exame:

- (i) Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (incluindo Redação);
- (ii) Ciências Humanas e suas Tecnologias;
- (iii) Ciências da Natureza e suas Tecnologias,

(iv) Matemática e suas Tecnologias.

As cinco competências do antigo ENEM foram ampliadas para incluírem, no domínio de linguagens, o uso das línguas espanhola e inglesa, que não eram objeto de avaliação até 2009. Nessa proposta, assume-se o pressuposto de que os conhecimentos adquiridos ao longo da escolarização deveriam possibilitar ao jovem o domínio de linguagens, a compreensão de fenômenos, o enfrentamento de situações-problema, a construção de argumentações e elaboração de propostas. Na matriz do novo exame, essas competências correspondem aos eixos cognitivos básicos, às ações e às operações mentais que todos os jovens e adultos devem desenvolver como recursos mínimos que os habilitam a enfrentar melhor o mundo que os cercam, com todas as suas responsabilidades e desafios.

Para cada uma das quatro áreas, organizou-se um conjunto de competências amplas a serem avaliadas, que, por sua vez, foram desdobradas em habilidades mais específicas, resultantes da associação dos conteúdos gerais aos cinco eixos cognitivos, totalizando 30 habilidades para cada uma das áreas. As competências da área foram submetidas ao tratamento cognitivo das competências do sujeito do conhecimento e permitiram a definição de habilidades específicas, que estabelecem as ações ou operações que descrevem desempenhos a serem avaliados na prova.

Nessa concepção, as referências de cada área descrevem as interações mais abrangentes ou complexas (nas competências) e as mais específicas (nas habilidades) entre as ações dos participantes, que são os sujeitos do conhecimento, com os objetos de conhecimento, selecionados e organizados a partir das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM). Essa estrutura aproxima o novo ENEM dessas Orientações, sem abandonar o modelo de avaliação centrado no desenvolvimento de competências.

O foco da avaliação proposta é a análise de situações-problema, para a qual o participante deve mobilizar saberes cognitivos e conceituais (competências). A aprendizagem é destacada como referência à autonomia intelectual do sujeito ao final da Educação Básica, mediada pelos princípios da cidadania e do trabalho. As competências para a participação social incluem a criatividade, a capacidade de solucionar problemas, o senso crítico, o domínio de conhecimentos.

Segundo autores como Le Boterf (2003) e Zarifan (2003), competência é a capacidade do sujeito de agir diante de situações-problemas inusitadas, a partir da mobilização dos recursos (cognitivos, sociais e afetivos) necessários à sua resolução. Desse modo, a

competência não reside apenas nos recursos a serem acionados, mas também na sua mobilização e articulação para que seja possível tomar decisões e fazer encaminhamentos adequados e úteis ao enfrentamento de situações, como a resolução de um problema ou a tomada de uma decisão. Assim, o desenvolvimento de competências pressupõe que o indivíduo não somente adquira recursos - como conhecimentos, habilidades, atitudes e valores -, mas construa, a partir deles, combinações apropriadas à ação.

Com o novo modelo do ENEM, iniciou-se em 2009, a construção de um banco de itens para o exame, que é submetido a um pré-teste para calibração. Não há montagem de blocos incompletos balanceados (BIB) para a aplicação no dia do exame, pois todos os participantes são submetidos a mesma prova, que é tornada pública imediatamente após sua aplicação. De fato, são aplicadas quatro provas, mas que diferem umas das outras apenas pela ordenação dos itens. A linha de base da equalização dos resultados são os parâmetros originados no pré-teste.

O impacto do exame na sociedade é grande, pois em média, todos os anos, o número de inscritos supera os 6 milhões de candidatos. A adesão ao exame como forma de substituição ao tradicional vestibular tem crescido ao longo dos anos, e isso é um dos grandes atrativos, já que a escolha do curso e da instituição são feitas após a divulgação dos resultados do desempenho, por meio de um sistema informatizado, gerenciado pelo Ministério da Educação, denominado de Sistema de Seleção Unificada (Sisu), que armazena até duas escolhas de cursos de cada candidato, para, posteriormente, alocar os pretendentes nas instituições e cursos selecionados por eles.

Uma das vantagens desse sistema em relação aos vestibulares tradicionais das IFES é a possibilidade de o candidato escolher o curso depois de obter seu boletim de desempenho ENEM, podendo avaliar suas chances ao comparar sua nota com os "pontos de corte" informados pelo sistema, isto é, conhecendo, a priori, a pontuação mínima necessária para ingressar em determinado curso, gerada em função das escolhas que os demais candidatos vão fazendo no decorrer do período em que o sistema ficar aberto para inscrição.

Desse modo, a "nota de corte" é a menor nota que o candidato precisa para ficar entre os selecionados em um curso, com base no número de vagas e no total de candidatos inscritos. Durante o período de inscrição, o Sisu calcula e divulga, uma vez por dia, a nota de corte para cada curso. Enquanto o sistema estiver aberto, o candidato pode alterar

suas escolhas de curso e instituição. Os pesos das notas de redação e de cada uma das quatro áreas avaliadas no ENEM variam de acordo com o curso e a Instituição escolhida. O processo de seleção via Sisu é realizado duas vezes ao ano, sempre no início de cada semestre letivo.

Muitos acabam identificando o ENEM com o Sisu, mas isso é um equívoco, uma vez que o primeiro é o exame em si, enquanto o segundo é um sistema que operacionaliza o uso das notas obtidas pelos candidatos em um processo seletivo automatizado, de ampla concorrência às vagas das instituições públicas de ensino superior que aderiram ao sistema. Em síntese, o ENEM propicia a avaliação enquanto o Sisu faz apenas a seleção.

A proposta de reestruturação do ENEM em 2009 veio para evidenciar o papel que o exame já vinha cumprindo, que extrapolava sua função inicial de promover a avaliação do Ensino Médio brasileiro: ao longo de onze edições (1998 a 2008), a procura pelo ENEM subiu de 150 mil para mais de 5 milhões de inscritos, sendo que, em um questionário aplicado, mais de 70% dos participantes afirmaram que faziam a prova com o objetivo maior de chegar à universidade.

De acordo com o documento intitulado **Proposta: unificação dos processos seletivos das Instituições Federais de Ensino Superior a partir da reestruturação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**, encaminhado pelo INEP/MEC à Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior (Andifes), em 30 de março de 2009, o que se deseja com a reformulação do exame é democratizar as oportunidades de concorrência às vagas federais de Ensino Superior por meio da unificação da seleção às vagas das IFES, utilizando uma única prova, e racionalizar a disputa por essas vagas, de forma a democratizar a participação nos processos de seleção para vagas em diferentes regiões do país.

De fato, o exame acabou assumindo, cada vez mais, o caráter de ampliar oportunidades para o acesso à educação brasileira, principalmente para aqueles que não detêm poder econômico suficiente para viajarem pelo país com o intuito de fazer vestibulares, em busca de uma vaga em uma instituição pública de Educação Superior.

A Portaria INEP/MEC n.º 109, de 27 de maio de 2009, estabeleceu a sistemática para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio no exercício de 2009 (ENEM/2009) como procedimento de avaliação do desempenho escolar e acadêmico dos participantes, para aferir o desenvolvimento das competências e habilidades fundamentais ao exercício

da cidadania. De acordo com essa portaria são objetivos do exame:

- I. oferecer uma referência para que cada cidadão possa proceder à sua autoavaliação com vistas às suas escolhas futuras, tanto em relação ao mundo do trabalho quanto em relação à continuidade de estudos;
- II. estruturar uma avaliação ao final da Educação Básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos processos de seleção nos diferentes setores do mundo do trabalho;
- III. estruturar uma avaliação ao final da Educação Básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos exames de acesso aos cursos profissionalizantes, pós médios e à Educação Superior;
- IV. possibilitar a participação e criar condições de acesso a programas governamentais;
- V. promover a certificação de jovens e adultos no nível de conclusão do Ensino Médio nos termos dos artigos 38, §§ 1º e 2º da LDB;
- VI. promover avaliação do desempenho acadêmico das escolas de Ensino Médio, de forma que cada unidade escolar receba o resultado global;
- VII. promover avaliação do desempenho acadêmico dos estudantes ingressantes nas Instituições de Educação Superior.

Importante destacar que o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Enceja), passou a conceder, a partir de 2017, periodicamente “certificados de conclusão de Ensino Fundamental” a nível nacional, e “certificados de conclusão de Ensino Médio” para quem não teve oportunidade de concluir os estudos na idade escolar adequada para jovens e adultos residentes em liberdade no Brasil, no Exterior e para detentos. Fazendo com que o exame perdesse essa funcionalidade de certificação a partir do ano de 2017.

Assim, o novo exame promove a avaliação do desempenho dos ingressantes nas Instituições de Educação Superior, cumprindo umas das funções que até então estava reservada para o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), no âmbito dos SINAES. Essa funcionalidade do novo exame passou a vigorar a partir de 2012, quando as notas dos estudantes no ENEM passaram a ser usadas como preditoras de seus desempenhos como concluintes da educação superior, na composição de um índice associado a esse nível de ensino, denominado Indicador de Diferença entre os Desempenhos Observado e Esperado (IDD).

O novo ENEM compreende 4 (quatro) provas, contendo 45 (quarenta e cinco) questões objetivas de múltipla escolha, versando sobre as várias áreas de conhecimento anteriormente mencionadas, e uma proposta de redação. As questões são extraídas de um banco de itens calibrados, elaborados sob a supervisão do próprio INEP, em um ambiente informatizado, mas sob rígidas regras de controle e segurança.

Os itens são pré-testados e escolhidos para compor as provas a partir de análises psicométricas oriundas da aplicação da teoria clássica dos testes e da teoria de resposta ao item. A função teórica metodológica do exame está fortemente presente na concepção de sua matriz de referência.

Como o nosso foco principal é a avaliação em Matemática, listaremos somente a parte da matriz de referência correspondente a essa área. Contemplaremos também os eixos cognitivos, que são comuns a todas as áreas avaliadas. A matriz inclui as competências de área, as habilidades e os objetos de conhecimentos que são utilizados para a elaboração dos itens.

Eixos Cognitivos (comuns a todas as áreas de conhecimento):

- I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
- II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
- III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
- IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
- V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias (competências e habilidades)

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, in-

teiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/ objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Objetos de conhecimento:

• **Conhecimentos numéricos:** operações de conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcenta-

gem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios da contagem.

- **Conhecimentos geométricos:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

- **Conhecimentos de estatística e probabilidade:** representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

- **Conhecimentos algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

- **Conhecimentos algébricos/geométricos:** plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistema de equações.

As relações entre os eixos cognitivos, as competências de área e as habilidades podem ser compreendidas de forma mais clara no quadro seguinte, revelando a proposta tridimensional da matriz de referência do exame:

Tabela 1: Relação entre competências, habilidades e eixos cognitivos - Matemática e suas Tecnologias

Competências de área	DL	CF	SP	CA	EP
C1	H1	H2	H3	H4	H5
C2	H6	H7	H8	H9	-
C3	H10	H11	H12	H13	H14
C4	-	H15	H16	H17	H18
C5	H19	H20	H21	H22	H23
C6	-	-	H24	H25	H26
C7	-	H27	H28	H29	H30

Fonte: Próprio autor

Finalmente, cabe salientar que, para cumprir as múltiplas funções do novo ENEM, o INEP/MEC precisou recorrer às técnicas oriundas da TRI.

3 Teoria de resposta ao item (TRI)

A Teoria de Resposta ao Item (TRI) surgiu entre os anos 50 e 60 do século XX para responder a indagações relativas aos testes de inteligência, cujos resultados variavam em função dos instrumentos de medidas utilizados. Era natural se questionar qual seria então o resultado correto. Na realidade, o problema era mais profundo já que, segundo Pasquali (2007), o objeto medido, a inteligência no caso, afetava diretamente o instrumento utilizado; aliás, ela era definida pelo próprio instrumento utilizado.

A solução dada pela TRI a esse problema - independência do instrumento de medida em relação ao objeto que se deseja medir - utilizava modelos e algoritmos matemáticos difíceis de serem operacionalizados à época. Por isso, somente após o avanço tecnológico dos anos 80, com o desenvolvimento de softwares para uso prático dos algoritmos complexos que o modelo contém, essa teoria começou a ser difundida.

Apesar de a teoria ter se desenvolvido aos poucos, pode-se afirmar que Frederic Lord foi o responsável direto pela introdução da TRI em 1952, pois, além de propor um modelo teórico, estabeleceu métodos para estimar os parâmetros dos itens, utilizando o modelo da ogiva normal. A proposta de Lord aplicava-se a testes cujos itens de respostas dicotômicas, binárias, do tipo certo ou errado.

Após algumas aplicações desse modelo, o próprio Lord sentiu a necessidade da incorporação de um parâmetro que tratasse do problema do acerto casual. Assim, surgiu o modelo de 3 parâmetros. Por volta de 1970, Samejima generalizou a teoria e elaborou modelos para testes com itens de respostas politômicas e também para dados contínuos. Samejima propôs o modelo de resposta gradual com o objetivo de obter mais informação das respostas dos indivíduos do que simplesmente se eles deram respostas corretas ou incorretas aos itens.

A utilização da TRI para análise de testes de conhecimento veio para sanar algumas limitações da Teoria Clássica dos Testes (TCT), principalmente no que diz respeito a discriminação dos itens, fidedignidade dos testes e compatibilidade de desempenho de indivíduos que se submetem a testes diferentes.

As estatísticas clássicas são restritas a determinado momento, a determinado teste e ao grupo que respondeu à prova, dificultando o acompanhamento pedagógico ao longo dos anos. Além disso, na TCT, os parâmetros dos itens de um teste dependem diretamente da amostra de indivíduos para os quais eles foram calculados. Desse modo, a dificuldade

de um item vai variar de pesquisa para pesquisa, em função da amostra de respondentes, isto é, o parâmetro é dependente dos sujeitos.

A TRI não é uma teoria que busca substituir a Teoria Clássica dos Testes (TCT). Pelo contrário, é importante que se busque utilizar os avanços oferecidos em cada uma delas. A TRI é considerada a forma mais avançada de se mensurar um traço-latente (no caso, conhecimento).

No Enem, o cálculo da proficiência a partir do uso da TRI permite acrescentar outros aspectos além do quantitativo de acertos, tais como os parâmetros dos itens e o padrão de resposta do participante. Assim, duas pessoas com a mesma quantidade de acertos na prova são avaliadas de forma distintas a depender de quais itens estão certos e errados e podem, assim, ter habilidades diferentes.

O quadro a seguir representa, de forma simplificada, a comparação entre as duas teorias, a TCT e a TRI, do ponto de vista das análises, dos resultados e da obtenção das escalas de desempenho.

Tabela 2: Comparação entre a TCT e TRI.

Teoria clássica dos testes (TCT)	Teoria de Resposta ao Item (TRI)
Análise e interpretações estão sempre associadas à prova como um todo.	Elementos centrais são os itens e não a prova como um todo.
Resultado: expresso pelo escore bruto ou padronizado.	Resultado: proficiência estimada pelo método estatístico.
Base numérica da comparação: o escore pode ser comparado com o escore de outro indivíduo submetido à mesma prova.	Base numérica da comparação: indivíduos e itens são colocados em uma escala comum, mesmo se submetidos a provas diferentes.

Fonte: Próprio autor

Diante do exposto analisaremos a seguir um exemplo proposto por Rabelo (2013, p.148) que busca fazer uma comparação de desempenho via TCT e TRI em um teste composto de 5 itens. Nesse intuito, procuramos contextualizar, por meio de um problema, uma situação que permita confrontar a TCT e a TRI.

O quadro a seguir ilustra o resultado do desempenho de 8 estudantes em um teste composto de 5 itens, que foi corrigido tanto pela TCT quanto pela TRI. A nota pela TCT corresponde ao escore bruto, e a escala de proficiência adotada pela TRI é a de média 0 e desvio padrão 1. Analisando essas informações, comente sobre possíveis ordenações dos estudantes de acordo com o desempenho e os motivos que levariam às diferenças na

ordem de acordo com o modelo de cálculo de nota escolhido: TCT ou TRI.

Tabela 3: Comparação de desempenho via TCT e TRI.

Estudante	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Escore bruto (TCT)	Proficiência (TRI)
1	1	1	0	0	0	2	-1,30
2	0	1	1	0	0	2	-1,40
3	0	1	1	1	0	3	-1,05
4	1	1	1	0	0	3	-1,00
5	1	0	1	0	1	3	-0,90
6	1	1	1	1	0	4	0,10
7	1	1	1	0	1	4	-0,10
8	1	1	0	1	1	4	0,20
Acertos	6	7	6	3	3		

Fonte: Próprio autor

Resolução: Pela TCT, estudantes com escores iguais ficariam na mesma posição de ordenação. Fazendo a ordenação pela proficiência obtida via TRI e comparando as diferenças em relação à ordem anterior, verificando a natureza dos itens que um estudante acertou e outro não, se podem ser considerados mais fáceis ou mais difíceis considerando todo o grupo de respondentes.

Com a utilização da TRI no ENEM a partir de 2009, pode-se tirar conclusões interessantes e bem fundamentadas sobre o desempenho dos estudantes e dos egressos do Ensino Médio brasileiro ao longo do tempo e até mesmo aplicar provas diferentes para grupos distintos de estudantes, desde que sejam utilizados itens de ligação, comparando-se o resultado de desempenho dessas populações, isto é, inserindo os desempenhos dos indivíduos em uma mesma escala de medida.

Na prova objetiva do Enem, a nota não é calculada levando-se em conta somente o número de questões corretas, mas também a coerência das respostas do participante diante do conjunto das questões que formam a prova realizada. Essa nota é atribuída em uma métrica (escala) criada especialmente para o Enem pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), com o objetivo de medir o conhecimento (proficiência) do participante em quatro áreas: Matemática e suas Tecnologias; Língua- gens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Na avaliação do conhecimento, a unidade de medida se expressa por meio do conjunto de itens pertencentes a uma escala de proficiência; assim, os parâmetros dos itens são estabelecidos previamente. A proficiência é verificada a partir da análise do perfil das respostas do participante a esse conjunto de itens. No Enem, para medir o conhecimento do participante, a prova é elaborada com 45 questões em cada área do conhecimento, segundo a matriz de referência do Exame, que toma como base os documentos oficiais que subsidiam o Ensino Médio.

O Inep criou uma escala para cada área do conhecimento. Isso quer dizer que quatro notas são calculadas, sendo que cada escala depende de dois valores:

- valor de posição ou de referência, para o qual foi atribuído o valor 500, que representa o desempenho médio dos concluintes do Ensino Médio da rede pública de 2009 que realizaram o exame naquele ano;
- valor de dispersão, para o qual foi atribuído o valor 100, que representa uma medida de variabilidade média das notas desses concluintes em relação ao desempenho médio 500. Esse valor é conhecido como desvio padrão.

A partir desses dois valores, podemos dizer que um participante com nota 600 apresenta proficiência com uma unidade de desvio padrão acima da proficiência média dos concluintes de 2009. Essa escala poderia ser representada graficamente por uma régua, como a apresentada a seguir, na qual as proficiências e os itens podem ser todos posicionados e seus pontos interpretados pedagogicamente.

Figura 1: Escala de proficiência



Fonte: Inep para guia do estudante

A TRI é um conjunto de modelos matemáticos que procuram representar a probabilidade de um indivíduo dar uma resposta a um item como função dos parâmetros do item e da habilidade ou proficiência dos respondentes. Os modelos relacionam variáveis observáveis, ou seja, respostas aos itens de um teste, por exemplo, com aptidões não observáveis e que são responsáveis pelas respostas dadas pelo indivíduo. De acordo com essa

relação, quanto maior a habilidade, maior a probabilidade de acerto no item.

O que se deseja é estimar o nível de aptidão, o traço latente, do indivíduo a partir da análise das respostas dadas por ele a um conjunto de questões ou itens. Para isso, recorre-se a modelos matemáticos que relacionam as variáveis envolvidas nessa situação. O modelo utilizado para análise no ENEM é o modelo logístico de 3 parâmetros (modelo 3LP), que permite avaliar a qualidade do item e, conseqüentemente, a qualidade da medida:

- parâmetro de discriminação: é o poder de discriminação que cada questão possui para diferenciar os participantes que dominam dos participantes que não dominam a habilidade avaliada naquela questão (item);
- parâmetro de dificuldade: associado à dificuldade da habilidade avaliada na questão, quanto maior seu valor, mais difícil é a questão. Ele é expresso na mesma escala da proficiência. Em uma prova de qualidade, devemos ter questões de diferentes níveis de dificuldade para avaliar adequadamente os participantes em todos os níveis de conhecimento;
- parâmetro de acerto casual: em provas de múltipla escolha, um participante que não domina a habilidade avaliada em uma determinada questão da prova pode responder corretamente a esse item por acerto casual. Assim, esse parâmetro representa a probabilidade de um participante acertar a questão não dominando a habilidade exigida.

Quando um indivíduo responde a uma sequência de itens, produz um padrão de respostas, composto de acertos (valor = 1) e erros (valor = 0). Isso pode ser esquematizado em uma tabela cujas linhas são os padrões de respostas dos indivíduos submetidos ao teste e cujas colunas são os itens do teste, numerados, por exemplo, de 1 a 45 (o ENEM é composto de quatro provas de 45 itens cada uma). Essa tabela de “uns” e “zeros” coleciona as respostas dadas por todos os indivíduos a todos os itens de cada prova.

As três principais confusões relacionadas à interpretação dos resultados obtidos pela TRI e dos obtidos pela TCT cuja nota está relacionada apenas ao percentual de acertos são:

- Mínimo e Máximo: as proficiências na TRI são estimadas em uma escala métrica que não possui mínimo e máximo pré-estabelecidos. Esses valores variam de acordo com as características dos itens que compõem a prova de cada edição do Exame. Dessa forma, ao acertar todos os itens da prova não significa ter uma proficiência igual a 1000, como é comum imaginar. Para ilustrar este conceito, suponha que um teste de resistência com

várias etapas seja elaborado para um grupo de pessoas e que a etapa mais fácil seja uma corrida de 100 metros e a mais difícil uma corrida de dois quilômetros. A avaliação para uma pessoa que não conseguiu cumprir com a tarefa mais fácil é de que ela não é capaz de correr 100 metros, mas não é possível inferir que ela seja incapaz de correr (nota zero), pois no teste não havia etapas que avaliassem se ela era capaz de correr menos de 100 metros. Da mesma forma, a única afirmação que se pode fazer a respeito de uma pessoa que conseguiu cumprir todas as etapas é que ela é capaz de correr dois quilômetros. No entanto, se existisse nesta mesma avaliação uma corrida de três quilômetros, esta mesma pessoa que correu os dois quilômetros poderia correr ou não, os três quilômetros. Percebe-se, portanto, que a avaliação sofre influência das etapas programadas para o teste. O mesmo ocorre com a avaliação do conhecimento, por isso os valores de mínimo e máximo são diferentes a cada avaliação. Os valores de mínimo e máximo representam o mínimo e o máximo que o teste pode avaliar. Assim, uma pessoa que erra todas as questões recebe o valor mínimo do teste, e não uma nota zero, pois não se pode afirmar, a partir do teste, que ela possui zero conhecimento.

- Comparação do número de acertos com a proficiência. Há uma correspondência entre o número de acertos e a proficiência, mas a proficiência não é o percentual de itens acertados. Outros fatores são considerados nas análises, tais como os parâmetros dos itens acertados e o padrão de resposta. Inclusive, de acordo com a teoria, pessoas com o mesmo percentual de acertos podem obter proficiências diferentes, a depender do padrão de resposta. Voltando à ilustração do teste de resistência anterior, não é coerente uma pessoa que consegue correr 600 metros não concluir uma tarefa de 300 metros; por isso, a performance avaliada será distinta a depender das tarefas concluídas.
- Comparação das proficiências obtidas em cada escala de proficiência. A partir das explicações anteriores é fácil compreender porque cada área do conhecimento possui uma escala própria e não é possível comparar as proficiências entre as escalas. Também não é correto inferir que mais acertos em uma área do conhecimento significam ter uma proficiência mais alta nesta área. Comparar as proficiências obtidas em escalas distintas não é correto, pois seria equivalente a dizer que uma pessoa que consegue correr 100 metros é igual a uma pessoa que consegue nadar 100 metros.

Entre os modelos propostos pela TRI, o modelo logístico unidimensional de 3 parâmetros é o mais utilizado e representa a probabilidade de um indivíduo j responder

corretamente um item i , sendo definida por:

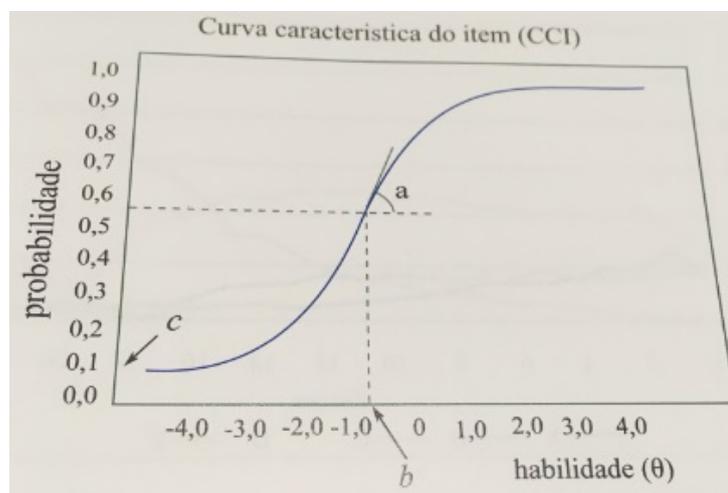
$$P(X_{ji} = 1|\theta_j) = c_i + \frac{(1 - c_i)}{1 + \exp \left[-D_{a_i}(\theta_j - b_i) \right]},$$

em que:

- X_{ji} é a resposta do indivíduo j ao item i (igual a 1, se o indivíduo responde corretamente, e igual a 0, caso contrário);
- $a_i > 0$ é o parâmetro de discriminação do item i ;
- b_i é o parâmetro de dificuldade do item, medido na mesma escala da habilidade;
- $0 < c_i < 1$ é o parâmetro da assíntota inferior do item i , refletindo as chances de um estudante de proficiência muito baixa selecionar a opção de resposta correta;
- θ_j representa a habilidade ou traço latente do j -ésimo indivíduo;
- \exp representa a função exponencial;
- D é um fator da escala, que é igual a 1 na métrica logística e igual a 1,7 na métrica normal.

O número $P(X_{ji} = 1|\theta_j)$, pode ser identificado com a proporção de respostas corretas ao item i no grupo de indivíduos com habilidade θ_j . A relação expressa pela equação acima está descrita pela curva da figura a seguir, chamada de Curva Característica do Item (CCI). Ressalta-se que o gráfico é uma sigmoide, curva em forma de “S”, com duas assíntotas horizontais e que o formato da curva nos fornecerá diversas informações importantes sobre a qualidade do item a que se refere.

Figura 2: Curva característica do item (CCI)



Fonte: RABELO (2013, p. 131)

O modelo proposto baseia-se no fato de que indivíduos com maior habilidade possuem maior probabilidade de acertar o item e que esta relação não é linear. De fato, pode-se perceber a partir do gráfico acima que a CCI tem forma de “S” com inclinação e deslocamento na escala de habilidade definidos pelos parâmetros do item.

A escala da habilidade é uma escala arbitrária onde o importante são as relações de ordem existentes entre seus pontos e não necessariamente sua magnitude. O parâmetro b é medido na mesma unidade da habilidade e o parâmetro c não depende da escala, pois trata-se de uma probabilidade, e como tal, assume sempre valores entre 0 e 1.

Na realidade, o parâmetro b representa a habilidade necessária para uma probabilidade de acerto igual a $\frac{1+c}{2}$. Assim, quanto maior o valor de b , mais difícil é o item, e vice-versa.

O parâmetro c representa a probabilidade de um aluno com baixa habilidade responder corretamente o item e é muitas vezes referido como a probabilidade de acerto ao acaso. Então, quando não é permitido “chutar”, c é igual a 0 e b representa o ponto na escala da habilidade onde a probabilidade de acertar o item é 0,5.

O parâmetro a é proporcional à derivada da tangente da curva no ponto de inflexão. Assim, itens com a negativo não são esperados sob esse modelo, uma vez que indicariam que a probabilidade de responder corretamente o item diminui com o aumento da habilidade. Baixos valores de a indicam que o item tem pouco poder de discriminação (alunos com habilidades bastante diferentes têm aproximadamente a mesma probabilidade de responder corretamente ao item) e valores muito altos indicam itens com curvas características muito “íngremes”, que discriminam os alunos basicamente em dois grupos: os que possuem habilidades abaixo do valor do parâmetro b e os que possuem habilidades acima do valor do parâmetro b .

Na TRI estuda-se o comportamento do indivíduo frente a cada item que ele responde. Por isso, a base desse modelo matemático é a CCI, gráfico da função $P(\theta)$, que fornece a probabilidade de um indivíduo com habilidade θ responder corretamente o item do teste que está sendo analisado. A função $P(\theta)$ assume valores pertencentes ao intervalo $(0,1)$, correspondentes ao intervalo 0% a 100%. Os valores da habilidade (θ), no eixo horizontal, estão na escala de média igual a zero e desvio-padrão 1.

O análogo à CCI na teoria clássica é a denominada análise gráfica do item, ou, simplesmente, AGI. Ordena-se os estudantes em ordem crescente de escore bruto total no

teste e calcula-se, por faixa de notas, a proporção de marcação por opção de resposta em um item fixado do teste. Espera-se na opção correta, correspondente ao gabarito, que o percentual de escolha vá aumentando à medida que o desempenho global no teste também aumenta e que, em relação às opções incorretas, ocorra exatamente o inverso.

Para exemplificar as considerações feitas anteriormente sobre a TRI, vamos observar um item que avalia o desenvolvimento da visão geométrica espacial dos estudantes, aplicado no ENEM de 2007, e fazer a análise do desempenho dos estudantes em base nas estatísticas propiciadas pela teoria de resposta ao item.

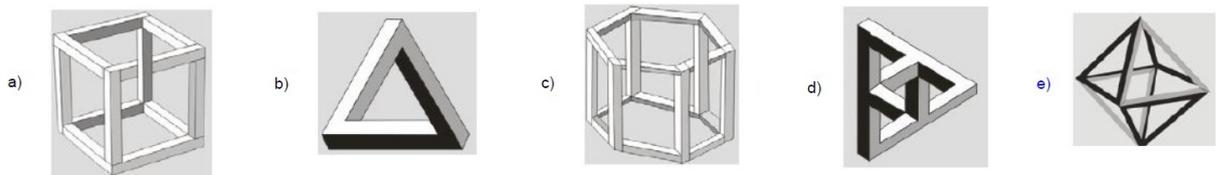
Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida abaixo.

Figura 3: Questão 63 ENEM 2007 Prova Azul



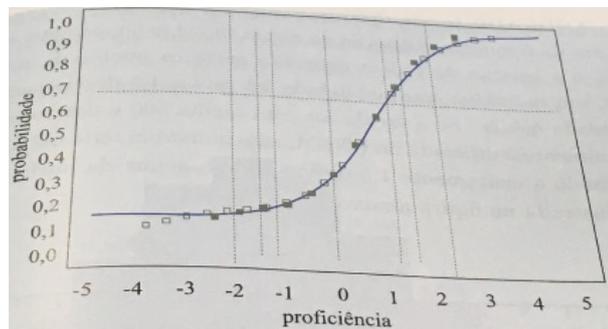
Fonte: Prova ENEM

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?



A curva característica desse item está ilustrada abaixo.

Figura 4: Curva característica de um item



Fonte: RABELO (2013, p. 131)

Os parâmetros do item, obtidos utilizando-se a TRI, são $\alpha = 1,31$, $b = 0,96$ e $c = 0,15$. A forma da curva já diz bastante sobre o comportamento desse item, que apresentou bons parâmetros: discriminou-se bem ($\alpha = 1,31$), está na faixa de média para alta dificuldade ($b = 0,96$) e o parâmetro de acerto ao acaso ficou abaixo do máximo permitido ($c = 0,15$), revelando que não houve atratividade para a resposta correta pelos alunos de baixo desempenho no teste como um todo.

Para responder ao item, o estudante deveria, por meio de uma habilidade de percepção espacial adequada, analisar as figuras tridimensionais dadas e verificar em qual delas as relações de visibilidade e sombreamento entre as peças de madeira correspondiam a um objeto real. O estudante poderia acessar conhecimentos geométricos para a percepção da impossibilidade de se construir um objeto em forma triangular no espaço e que possuía três ângulos retos, já que, na geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

O Inep, a partir de pré-testagens nacionais e de algumas aplicações iniciais do Enem, obteve os valores dos parâmetros α , b e c de milhares de questões, montando assim um banco de itens (questões) para cada uma das quatro áreas. A partir do conhecimento dos valores desses parâmetros, as questões são posicionadas na escala (régua), permitindo, desse modo, sua interpretação pedagógica.

O posicionamento de cada questão nos níveis da escala (régua) se dá a partir de critérios probabilísticos, os quais garantem que somente participantes com proficiência igual ou maior que a daquele nível possuem alta probabilidade de responder corretamente às questões que estão nesse nível e em níveis inferiores. Geralmente, o posicionamento do item está um pouco acima do parâmetro de dificuldade, sendo uma combinação dos três

parâmetros. A questão é sempre posicionada no valor da régua onde a probabilidade de acerto está próxima de 0,65, o qual representa que participantes neste nível possuem alta probabilidade de dominar o conteúdo da questão.

Questões pedagogicamente mais fáceis serão posicionadas na parte inferior da régua e aquelas pedagogicamente mais difíceis serão posicionadas na parte superior da régua. O grande diferencial da TRI é que questões e participantes são posicionados na mesma régua.

Para exemplificar essa situação analisemos a figura a seguir:

Figura 5: Exemplo de uma escala de proficiência dos candidatos A e B



Fonte: Inep para guia do estudante

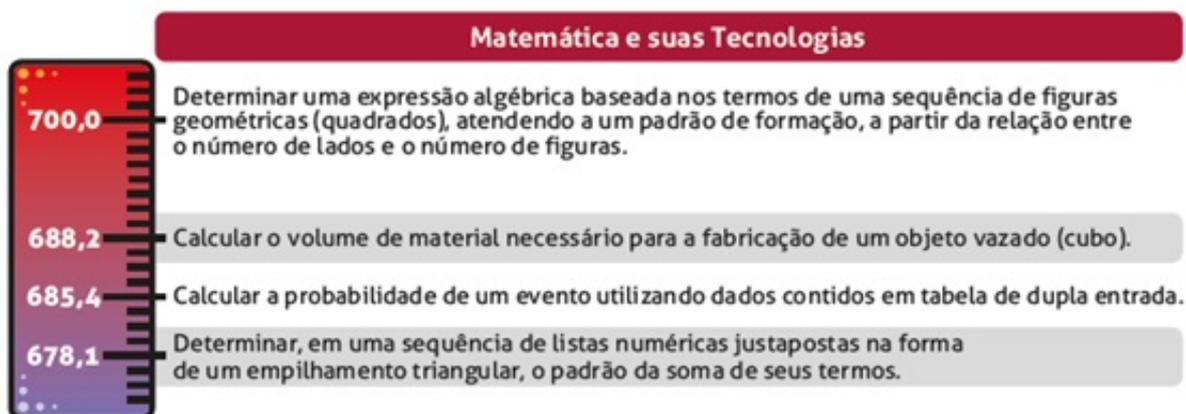
Nela podemos observar que o Participante A deve dominar as habilidades avaliadas nas questões 1, 34, 45, 12 e 16, e não dominar aquelas contempladas nas questões 19 e 35, enquanto o Participante B deve dominar somente as habilidades exigidas nas questões 1 e 34. Com isso, podemos dizer que o Participante A deve dominar, além das habilidades contempladas nas questões 1 e 34, que são de domínio do Participante B, também aquelas das questões 12, 16 e 45, portanto sua nota deverá ser maior.

A escala tem uma interpretação pedagógica, e as questões são posicionadas na régua (escala) de acordo com uma coerência pedagógica. O participante também será posicionado na régua, ou seja, terá sua nota conforme seu conhecimento pedagógico. Isso quer dizer que sua nota não depende das notas dos demais participantes, mas apenas do

posicionamento das questões na régua.

Para ilustrar a posição das questões na régua, o Inep desenvolveu um mapa de itens por área do conhecimento. Nesse mapa são apresentadas descrições de habilidades avaliadas em questões de provas. A seguir temos a descrição entre os níveis 650 e 700 de uma escala de proficiência na área de Matemática e suas Tecnologias.

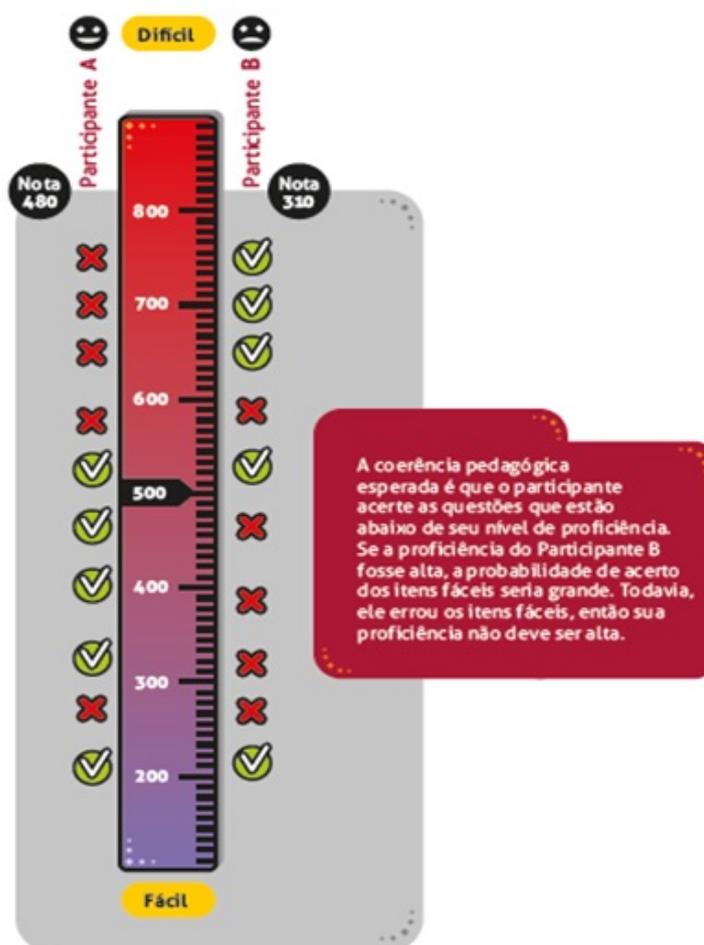
Figura 6: Níveis de uma escala de proficiência na área de Matemática e suas Tecnologias



Fonte: www.inep.gov.br

No cálculo da nota, o modelo matemático da TRI usado no Enem considera a coerência das respostas corretas do participante. Espera-se que participantes que acertaram as questões difíceis devam também acertar as questões fáceis, pois, entende-se que a aquisição do conhecimento ocorre de forma cumulativa, de modo que habilidades mais complexas requerem o domínio de habilidades mais simples. Lembrando que o posicionamento das questões na escala de proficiência é determinado a partir das respostas dos estudantes.

Figura 7: Exemplo da proficiência de dois participantes A e B



Fonte: Inep para guia do estudante

A nota do participante depende somente de seu conhecimento e de seu momento na prova. Ela não depende do desempenho dos outros participantes e nem do desempenho médio dos concluintes regulares de 2009. O valor 500 atribuído a esses participantes de 2009 é utilizado somente como referência para a construção e a interpretação pedagógica da escala na qual sua proficiência (conhecimento) está representada.

4 A matemática do ENEM

Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

A Matemática tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações.

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas

exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

Segundo os PCNS+ Ensino Médio, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas outras transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Nessa perspectiva, a Matemática no Enem tem como principal característica a interdisciplinaridade e contextualização dos conteúdos matemáticos. A prova do Enem de Matemática e suas Tecnologias é constituída de 45 (quarenta e cinco) questões objetivas de múltipla escolha que possui uma matriz de referência onde estão incluídas as competências dessa área, suas habilidades e os seus objetos de conhecimentos.

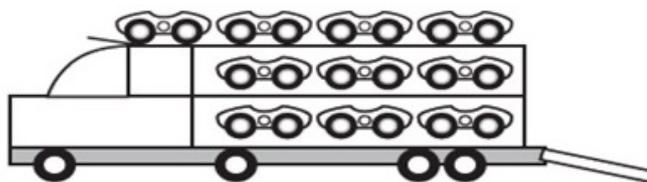
Dentre os conteúdos abordados na prova do Enem de Matemática e suas Tecnologias podemos destacar como mais recorrentes os seguintes assuntos: geometria, escala, razão e proporção, funções, porcentagem, estatística, análise combinatória e probabilidade.

O foco do Enem é o Ensino Médio, entretanto, é muito importante que o estudante tenha uma boa base dos conteúdos do Ensino Fundamental. Sem dominar cálculos básicos é muito difícil o aluno ter sucesso na prova de Matemática. Além disso, verifica-se que um grande número de questões estão relacionadas a assuntos do segundo segmento do Ensino Fundamental, como grandezas proporcionais e porcentagem. Saber analisar gráficos e tabelas também é uma competência fundamental, não só para a prova de Matemática, mas também para outras áreas do Enem.

Diante do exposto analisaremos a seguir algumas questões do Enem destacando a competência e a(s) habilidade(s) a serem trabalhadas nas referidas questões de acordo com a matriz de referência do Enem. Nesse intuito, procuramos mostrar que a abordagem dada aos conteúdos é feita por meio de questões contextualizadas e que buscam, em alguns momentos, fazer a integração com outras áreas do conhecimento.

Problema 1 (ENEM 2017 - Prova Amarela). Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.

Figura 8: Questão 149 ENEM 2017 - Prova amarela



Fonte: Prova ENEM

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

- a) $C_{6,4}$
- b) $C_{9,3}$
- c) $C_{10,4}$
- d) 6^4
- e) 4^6

A questão 149 do ano de 2017 está relacionada à Competência 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais, sendo necessária a utilização da habilidade H2 para sua resolução.

Resolução: Como todo caminhão cegonha deve ter pelo menos 1 carrinho de cada cor, é

necessário colorir os 6 carrinhos restantes com as cores disponíveis. Isso pode ser feito de:

$$\frac{9!}{6! \cdot 3!} = C_{9,3}$$

Problema 2 (ENEM 2017 - Prova Amarela). Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.

Figura 9: Questão 137 ENEM 2017 - Prova amarela



Fonte: Prova ENEM

A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

- a) 192
- b) 300
- c) 304
- d) 320
- e) 400

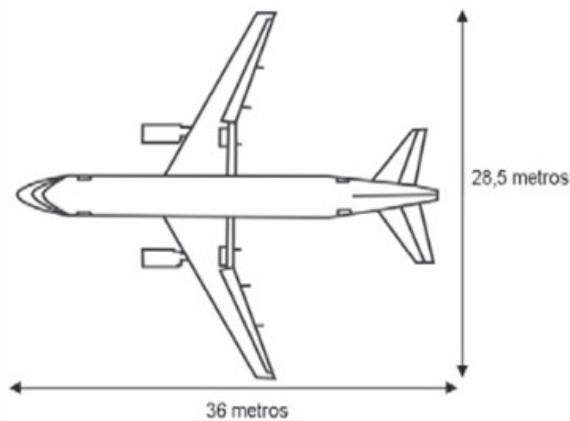
A questão 137 do ano de 2017 está relacionada à Competência 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela -, sendo necessária a utilização das habilidades H8 e H9 para sua resolução.

Resolução: Observando a vista superior das taças organizadas sobre a bandeja, notamos que os diâmetros das bases das quatro (4) taças medem 8 cm. Além disso, temos mais 1 cm de distância entre a borda da taça e a extremidade da base da mesma. Logo, a área (A) é dada por:

$$A = 8 \cdot (8 \cdot 4 + 6) = 304$$

Problema 3 (ENEM 2009 - Prova Amarela). A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150.

Figura 10: Questão 155 ENEM 2009 - Prova amarela



Fonte: Prova ENEM

Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

- a) 2,9 cm \times 3,4 cm.
- b) 3,9 cm \times 4,4cm
- c) 20 cm \times 25 cm.
- d) 21 cm \times 26 cm.
- e) 192 cm \times 242 cm.

A questão 155 do ano de 2009 está relacionada à Competência 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano -, sendo necessária a utilização da habilidade H11 para sua resolução.

Resolução: O papel deverá ter o tamanho do desenho da escala mais 2 centímetros das bordas, ou seja:

Comprimento: $36 \text{ m} \div 150 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$

Largura: $28,5 \text{ m} \div 150 \text{ cm} = 19 \text{ cm}$

Dimensões: 21 cm \times 26 cm

Problema 4 (ENEM 2009 - Prova Amarela). Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12

trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R\$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e R\$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R\$ 25.000,00.

Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria

- a) manter sua proposta.
- b) oferecer 4 máquinas a mais.
- c) oferecer 6 trabalhadores a mais.
- d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.
- e) reduzir em R\$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

A questão 161 do ano de 2009 está relacionada à Competência 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano -, sendo necessária a utilização da habilidade H16 para sua resolução.

Resolução: O gasto diário da proposta (em reais) é de $4 \cdot 1000 = 4000$ com as máquinas, $12 \cdot 10 = 120$ com os trabalhadores trabalhando 6 horas por dia cada, um gasto diário total de 4120.

A produção diária deve ser de $180 \div 6 = 30$ hectares por dia, enquanto que a produção da proposta é de 20 hectares.

O gasto diário permitido com o gasto total máximo pretendido pelo fazendeiro é de $25000 \div 6 = 4166,66$ reais.

Assim, o máximo de aumento permitido no gasto é de $4166,66 - 4120 = 46,66$ reais. Logo não é possível fornecer máquinas a mais e apenas quatro trabalhadores a mais. Aumentando a jornada de 6 para 9 horas diárias (aumento de 3 horas em total de 6 corresponde a 50% de aumento), a produção diária sofreria um aumento de 50%, um aumento de $0,5 \cdot 20 = 10$ hectares por dia, totalizando, os 30 hectares diários necessários.

Problema 5. Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R\$ 5000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R\$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função

do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{500 \cdot 1,013^n \cdot 0,013}{(1,013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para $\log 1,013$; 2,602 como aproximação para $\log 400$; 2,525 como aproximação para $\log 335$.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

- a) 12
- b) 14
- c) 15
- d) 16
- e) 17

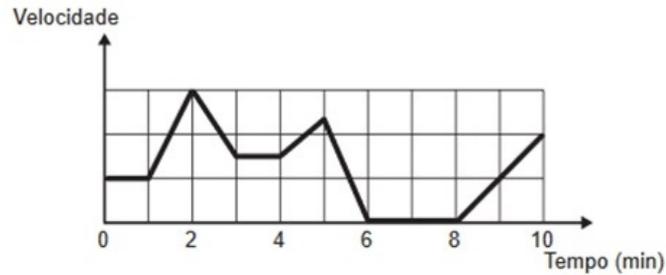
A questão 145 do ano de 2017 está relacionada à Competência 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas -, sendo necessária a utilização das habilidades H19, H20 e H21 para sua resolução.

Resolução:

$$\begin{aligned} P_{\max} &= 400 \\ \frac{500 \cdot 1,013^n \cdot 0,013}{(1,013^n - 1)} &= 400 \\ 400(1,013^n - 1) &= 65 \cdot 1,013^n \\ 400 \cdot 1,013^n - 400 &= 65 \cdot 1,013^n \\ 335 \cdot 1,013^n &= 400 \\ 1,013^n &= \frac{400}{335} \\ \log 1,013^n &= \log \left(\frac{400}{335} \right) \\ n \cdot \log 1,013 &= \log 400 - \log 335 \\ n \cdot 0,005 &= 2,602 - 2,525 \\ n \cdot 0,005 &= 0,077 \\ n &= 15,4 \end{aligned}$$

Problema 6 (ENEM 2017 - Prova Amarela). Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.

Figura 11: Questão 136 ENEM 2017 - Prova amarela



Fonte: Prova ENEM

Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

- a) 4.
- b) 3.
- c) 2.
- d) 1.
- e) 0.

A questão 136 do ano de 2017 está relacionada à Competência 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação -, sendo necessária a utilização das habilidades H24 e H25 para sua resolução.

Resolução: Analisando o gráfico, percebe-se que a velocidade atinge valor igual a zero entre os minutos 6 e 8. Portanto, o carro permaneceu imóvel por 2 minutos.

Problema 7 (ENEM 2017 - Prova Amarela). O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Figura 12: Questão 170 ENEM 2017 - Prova amarela



Fonte: Prova ENEM

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março a abril de 2009, foi de:

- a) 8,1%.
- b) 8,0%.
- c) 7,9%.
- d) 7,7%.
- e) 7,6%.

A questão 170 do ano de 2017 está relacionada à Competência 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. -, sendo necessária a utilização da habilidade H27 para sua resolução.

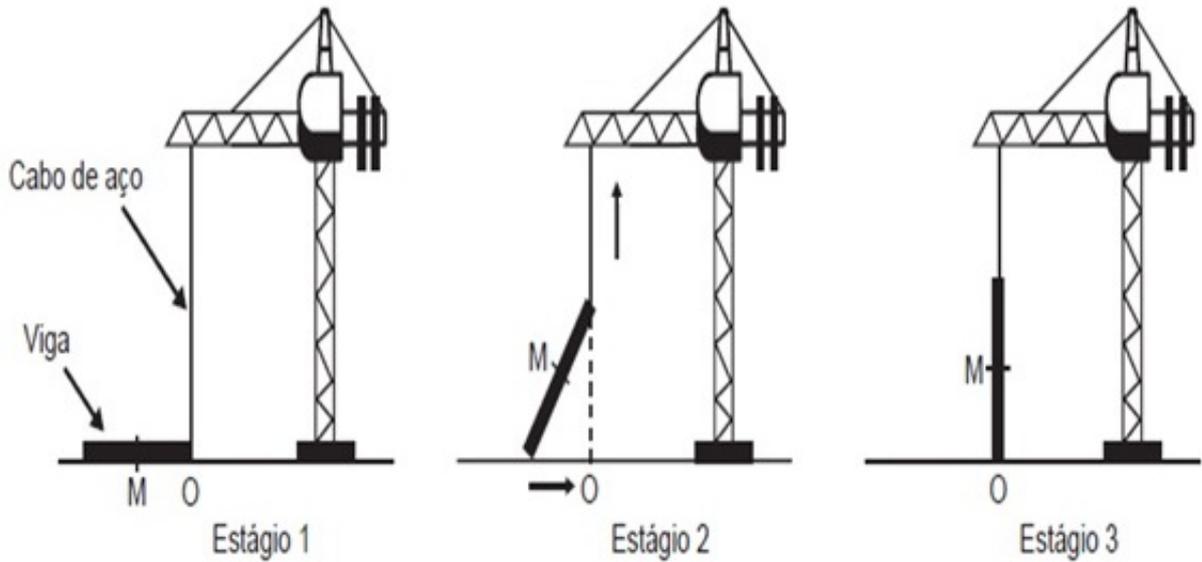
Resolução: Observando que existem 14 taxas de desempregos, a mediana será dada pela média entre a 7ª e 8ª taxa quando colocadas em ordem crescente. A mediana será:

$$\frac{7,9\% + 8,1\%}{2} = 8\%.$$

Ainda nessa perspectiva de promover o encontro entre as áreas do conhecimento na prova do Enem, podemos destacar a análise enviada pelo professor Nelson Achcar (POLI - USP) para a seção Questões com Questões da Revista do Professor de Matemática (RPM 99, segundo quadrimestre, 2019) referente a questão 174 (prova amarela) do Enem 2018 que se desdobrou em cinco novos problemas, incluindo uma análise acerca da plausibilidade dinâmica do contexto proposto pela questão. A seguir colocaremos a referida questão com a sua resolução e um dos cinco problemas originários dela.

Problema 8 (ENEM 2017 - Prova Amarela). Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicialmente no solo.

Figura 13: Questão 174 ENEM 2017 - Prova amarela

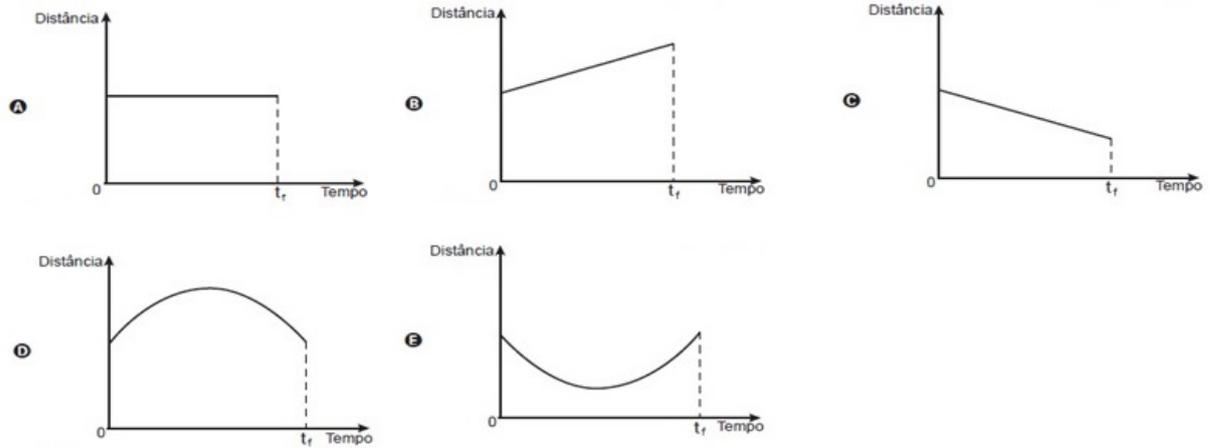


Fonte: Prova ENEM

Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo $t = 0$ (estágio 1) e finaliza no tempo t_1 (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga.

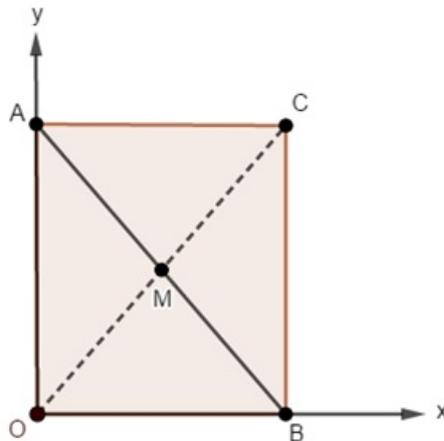
O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre $t = 0$ e t_f , é

O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre $t = 0$ e t_r , é



Resolução: Em um sistema de eixos ortogonais, representamos a direção do cabo de aço no eixo vertical e a direção do chão no eixo horizontal. Seja $AB = l$ o comprimento da barra de ponto médio M .

Figura 14: Sistema de eixos ortogonais

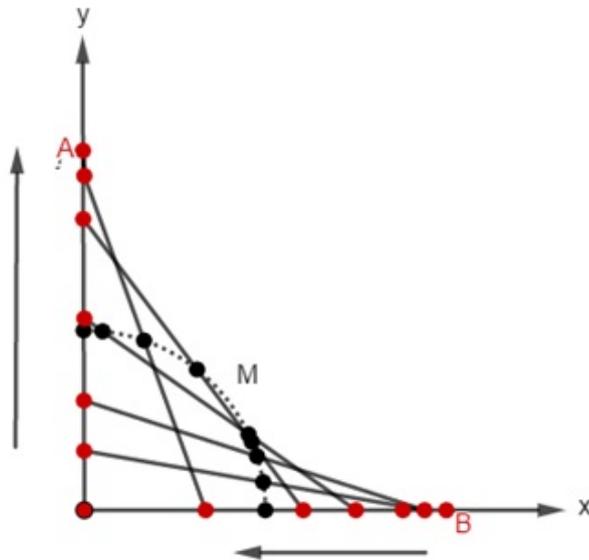


Observando as diagonais do retângulo $OACB$, construído a partir de um estágio intermediário da barra, concluímos que $AM = BM = OM = CM = \frac{l}{2}$. Portanto, a distância entre os pontos O e M é constante e igual à metade do comprimento da barra, o que está representado no gráfico da alternativa (A) da questão.

Problema 9 (Proposto). Qual é trajetória do ponto M quando A vai de $(0, 0)$ no estágio I, até $(0, 1)$, no estágio 3?

Resolução: Uma vez que $OM = \frac{l}{2}$, constante, M percorre um arco de circunferência de centro O e raio $\frac{l}{2}$.

Figura 15: Resolução do problema proposto



5 Dados estatísticos das questões de matemática no ENEM

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) disponibiliza anualmente os microdados referentes ao Enem com o objetivo de desenvolver e disseminar avaliações e informações educacionais, já que os microdados permitem acessar informações específicas, gerando análises mais aprofundadas por parte de pesquisadores, jornalistas e gestores públicos, por exemplo.

Os microdados representam a menor fração de um dado e podem estar relacionados a uma pesquisa ou avaliação. A partir da agregação de microdados é construída a informação. As bases de microdados estão organizadas de forma a serem compreendidas por softwares específicos, o que agiliza o processo de tratamento e cálculos estatísticos. No Brasil, o Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira é o maior produtor de microdados relativos a educação: Censo Escolar, Censo da Educação Superior, Prova Brasil, Saeb e Enem são algumas das principais bases de microdados do INEP.

Segundo esclarecimentos do INEP, as informações são disponibilizadas no formato ".csv", que contém valores separados por delimitador com ponto e vírgula. Elas envolvem, entre outros detalhes, as provas e gabaritos digitalizados, números sobre cada uma das 180 questões, desempenho individual com as notas e questionário respondido por cada um dos participantes inscritos. Além disso, o documento conta também com uma espécie de dicionário cujo arquivo está no formato ".ods" e foi criado para facilitar a compreensão de termos técnicos, de forma a atender a política de dados abertos.

Para entender melhor a importância dessa publicação, podemos citar alguns usos dos microdados do Enem para que se tome conhecimento da amplitude de análises que esses dados permitem, como por exemplo:

- Os microdados do Enem, assim como outros dados abertos, permitem que a administração pública faça avaliações cada vez mais eficientes dos projetos implementados. É justamente a partir da análise desses dados que o governo consegue decidir as áreas em que são necessários mais ou menos investimentos. Em Educação, o grande acervo de dados gerados pelos questionários e pelas respostas dos estudantes em provas como o Enem e outras avaliações externas permitem que, a partir de devolutivas pedagógicas, sejam priorizadas as áreas e assuntos mais urgentes.

- Pesquisadores de todo o Brasil podem usar os microdados do Enem para embasar suas pesquisas nas mais diversas áreas. Um exemplo interessante é a pesquisa “Renda familiar e escolaridade dos pais: reflexões a partir dos microdados do ENEM 2012 do Estado de São Paulo.”, realizada pelo Professor André Pires, da PUC Campinas.
- Do ponto de vista pedagógico, as empresas de processamento de dados desenvolvem plataformas que apresentam um acervo das questões e a vinculação com a Matriz de Referência do Enem. Além disso, os professores por meio dessas ferramentas têm acesso às prioridades de estudo, que são as habilidades e competências mais problemáticas. Os gestores conseguem criar grupos de comparação regionais ou nacionais para contextualizar os dados de sua escola. Assim, conseguem entender a relação do desempenho da sua escola no contexto regional e nacional. Com isso, a coordenação e o corpo docente podem planejar atividades e projetos mais eficientes e com maior chance de sucesso.
- Os estudantes, como todos os cidadãos, têm direito aos dados abertos das avaliações como o Enem. Isso garante que não houve qualquer tipo de manipulação das respostas assinaladas. É uma forma de responder à responsabilidade de transparência no atendimento às necessidades dos cidadãos. Os microdados do Enem, liberados e processados de forma que as pessoas tenham acesso, permitem que se faça um acompanhamento e uma avaliação da qualidade das decisões em Educação. Para os estudantes e candidatos que fazem o exame, é uma forma de assumir uma postura politicamente ativa, um papel de agente de transformação social através, justamente, da fiscalização do Ciclo das Políticas Públicas.

A divulgação desses microdados do Enem pelo INEP proporcionou durante um certo período a criação do Enem por Escola. Os Microdados do Enem por Escola contemplavam resultados das 11 edições do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), nas quais foram calculadas as médias das escolas com participação de pelo menos dez estudantes. O Enem por Escola foi divulgado de 2005 a 2015, sendo descontinuado em função da inadequação do uso dos resultados como indicador de qualidade do ensino médio e o uso inapropriado, feito pela mídia e alguns gestores educacionais, que buscavam ranquear as escolas.

Vale salientar que os dados divulgados passaram a serem disponibilizados com ressalvas e filtros que permitem assim diversas comparações mais equilibradas entre diferentes perfis de escolas.

Um levantamento feito nas provas do Enem no período de 2009 a 2018 pelo Sistema Ari de Sá (SAS) permite que destaquemos os conteúdos abordados na prova de Matemática e suas Tecnologias. Tal conhecimento dessa informação pode ser importante tanto para o estudante que está se preparando para o Enem quanto para o professor, já que o aluno pode tornar mais eficaz o direcionamento dos seus estudos e o docente pode ministrar aulas focadas nos assuntos que aparecem com uma maior frequência na prova do Enem.

Figura 16: Levantamento feito nas provas do Enem no período de 2009 a 2018

Matemática e suas Tecnologias			
Matemática			
Assuntos	1 ^ª /2 ^ª aplicações – 2009 a 2018	%	
Geometria	215	23,9%	
Aritmética	120	13,3%	
Escala, razão e proporção	119	13,2%	
Funções	82	9,1%	
Gráficos e tabelas	77	8,6%	
Estatística	70	7,8%	
Porcentagem	65	7,2%	
Probabilidade	52	5,8%	
Equações elementares	26	2,9%	
Sequências	24	2,7%	
Análise combinatória	23	2,6%	
Números inteiros e números reais	13	1,4%	
Trigonometria	10	1,1%	
Notação científica	2	0,2%	
Matriz	2	0,2%	
900 itens			

Fonte: Sistema Ari de Sá (Raio X do ENEM - 2009 a 2018)

6 A importância da prova de matemática no ENEM

O Enem utiliza uma metodologia chamada TRI (Teoria de Resposta ao Item), modelo estatístico que permite que diferentes edições da prova sejam comparáveis. Na TRI, leva-se em conta para o cálculo da nota não apenas o número de acertos do candidato, mas o nível de dificuldade de cada item. Neste modelo, leva-se em conta também a coerência das respostas do participante diante do conjunto das questões que formam a prova. Por isso, o número de acertos não tem correspondência direta com a pontuação final.

Um dos mitos ao citar a TRI é afirmar que as notas máximas e mínimas são sempre de 0 a 1000. Isso não acontece, uma vez que a nota do candidato não está necessariamente atrelada ao número de erros e acertos dele, e sim ao parâmetro de dificuldade da questão e à coerência pedagógica do aluno. Isso significa que a nota é calculada levando-se em conta a distribuição das questões na escala de dificuldade, como esquematizado abaixo:

Figura 17: Distribuição dos acertos e erros de dois candidatos



Fonte: Disponível em: <https://foconoenem.com/numero-de-acertos-e-nota-do-enem/>.
Acesso em: 12 agosto.2019

Segundo a TRI, um candidato que acerta mais questões difíceis do que fáceis é considerado incoerente, porque a probabilidade de isso acontecer é muito baixa. Por isso, conclui-se que ele chutou, o que diminui sua nota. Já uma prova considerada coerente, dentro do esperado, é aquela em que o candidato acerta muitas fáceis, algumas médias e poucas difíceis. Isso explica porque alguns candidatos acertam o mesmo número de questões e têm notas diferentes, ou porque alguns candidatos acertam menos questões do que outros e obtêm notas maiores.

Normalmente, como não há questões que pressupõem proficiência muito baixas ou muito altas para serem acertadas, a avaliação não consegue inferir a partir dos padrões de resposta se um participante tem proficiência muito baixa (próxima de 0) ou muito alta (próxima de 1000).

A partir do momento em que não existem questões muito fáceis ou muito difíceis, não se pode afirmar, mesmo que um aluno erre ou acerte todas as questões, que ele tem nota 0 ou 1000, respectivamente. É mais comum ver notas mínimas mais altas que zero e notas máximas menores que 1000.

Entretanto, caso haja itens que tenham parâmetros de dificuldade muito altos ou muito baixos, as notas obtidas em um Exame com essas questões podem ultrapassar 1000, como foi o caso da área de Matemática em 2015. No referido ano, o estudante do Piauí Vitor Melo obteve 1008,3 na prova de Matemática e suas Tecnologias, sendo a maior nota já registrada na história do Enem.

Dessa forma, as provas não possuem valores de mínimo e máximo fixos: eles variam de acordo com a posição dos itens na escala do Exame, escala esta que tem como referência o ENEM de 2009 (o primeiro a adotar a TRI). A média dos alunos concluintes foi fixada como 500 e o desvio padrão (medida de dispersão) como 100. Dessa maneira, não há máximos e mínimos que podem ser previamente calculados, pois eles dependem do nível de dificuldade das questões que constituem a prova com relação à escala do exame de 2009.

A cada edição, o INEP divulga esses valores referentes a cada uma das áreas do conhecimento (geralmente após a liberação dos resultados individuais). É importante lembrar que as notas do Enem são atribuídas na escala de referência, o que permite a comparabilidade das notas.

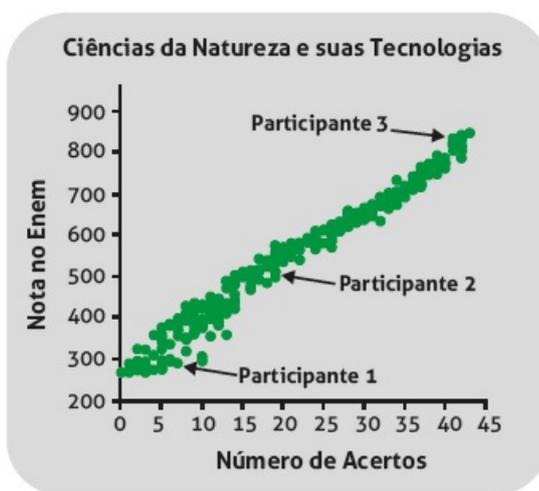
Apesar de a nota do Enem não ser calculada diretamente pelo número de acertos,

existe uma relação entre o número de acertos e a nota calculada pela TRI. Isso quer dizer que um participante que teve um número de acertos alto terá nota alta no Enem, e um participante que teve pouco acerto terá nota baixa, notas essas relacionadas com os valores mínimo e máximo de cada prova.

Os exemplos e os gráficos a seguir mostram a relação entre a nota da TRI e o número de acertos de 300 participantes da prova do Enem 2011. Observe que se a nota da TRI fosse exatamente o número de acertos, os pontos nos gráficos estariam alinhados representando uma reta. As variações desses pontos em relação à reta mostram que participantes com o mesmo número de acertos podem ter notas diferentes no Enem. Note, no entanto, que essa variação não é tão grande. Outra constatação que deve ser observada é a pontuação da nota máxima alcançada em Matemática e suas Tecnologias pelos participantes em comparação com a nota máxima obtida nas outras áreas do conhecimento.

- Ciências da Natureza e suas Tecnologias: o Participante 1 teve 6 acertos e sua nota foi 300,8; o Participante 2 teve 19 acertos e sua nota foi 500,5 (lembrando que a nota 500 representa a nota média dos concluintes regulares do ensino médio de 2009), ou seja, ele acertou menos da metade da prova e seu desempenho foi equivalente ao desempenho médio dos concluintes regulares do ensino médio de 2009; e o Participante 3 teve 41 acertos com nota 825,0 (a nota máxima, ou seja, para quem acertou 45 questões, foi 867,2).

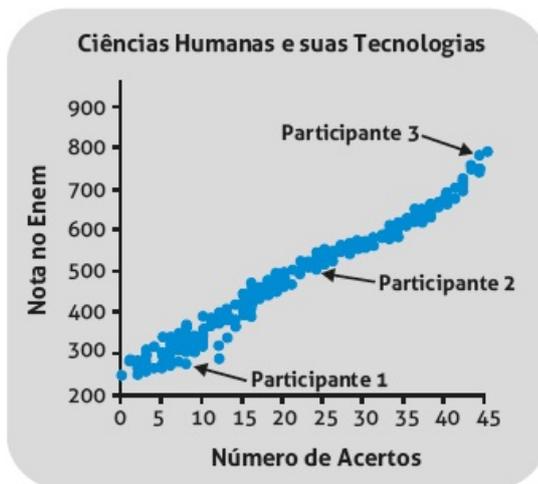
Figura 18: Ciências da Natureza e suas Tecnologias



Fonte: Elaborado pela Daeb / Inep para Guia do Estudante.

- Ciências Humanas e suas Tecnologias: o Participante 1 teve 8 acertos e sua nota foi 279,4; o Participante 2 teve 24 acertos, mais da metade das questões, e sua nota foi 507,0; e o Participante 3 teve 44 acertos e sua nota foi 784,4 (a nota máxima, ou seja, para quem acertou 45 questões foi 793,1).

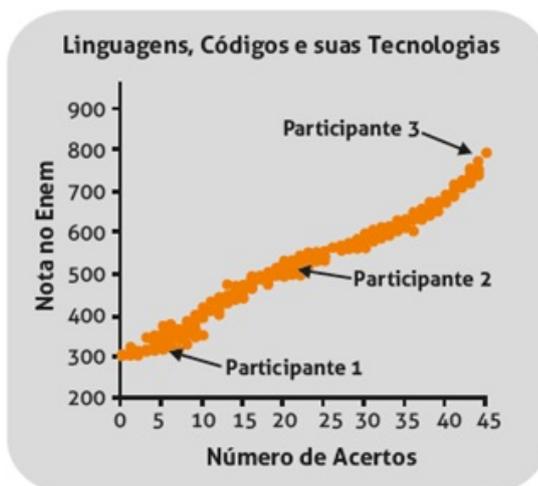
Figura 19: Ciências Humanas e suas Tecnologias



Fonte: Elaborado pela Daeb / Inep para Guia do Estudante.

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias: o Participante 1 teve 5 acertos e sua nota no Enem foi 316,8; o Participante 2 teve 21 acertos e sua nota foi 498,9; e o Participante 3 teve 44 acertos e sua nota foi 756,1 (a nota máxima, ou seja, para quem acertou 45 questões foi de 795,5).

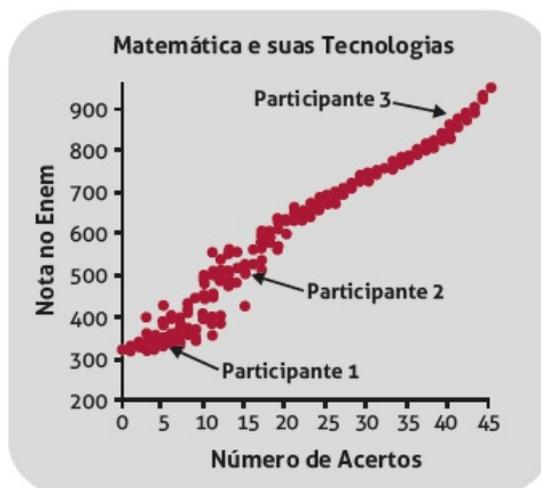
Figura 20: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias



Fonte: Elaborado pela Daeb / Inep para Guia do Estudante.

- Matemática e suas Tecnologias: o Participante 1 teve 5 acertos e sua nota no Enem foi 330,6; o Participante 2 teve 15 acertos e sua nota foi 504,0. Já o Participante 3 teve 41 acertos e sua nota foi 878,7 (a nota máxima, ou seja, para quem acertou 45 questões foi de 953,0).

Figura 21: Matemática e suas Tecnologias



Fonte: Elaborado pela Daeb / Inep para Guia do Estudante.

Considerando o número de acertos e o cálculo baseado na TRI, apresentaremos tabelas com as notas mínimas e máximas obtidas pelos candidatos que fizeram o Enem por área de conhecimento, levando em conta os dados do Enem de 2009 a 2018 fornecidos pelo Inep.

Tabela 4: Notas mínimas e máximas obtidas pelos candidatos que fizeram o Enem por área de conhecimento de 2009 a 2013

Área de conhecimento	2009		2010		2011		2012		2013	
	Menores	Maiores								
Ciências da Natureza e suas tecnologias	263,3	903,2	297,3	844,7	265	867,2	303,1	864,9	311,5	901,3
Ciências Humanas e suas tecnologias	300	887	265,1	883,7	252,6	793,1	295,6	874,9	299,5	888,7
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	224,3	835,6	254	810,1	301,2	795,5	295,2	817,9	261,3	813,3
Matemática e suas Tecnologias	345,9	985,1	313,4	973,2	321,6	953	277,2	955,2	322,4	971,5

Fonte: www.inep.gov.br

Tabela 5: Notas mínimas e máximas obtidas pelos candidatos que fizeram o Enem por área de conhecimento de 2014 a 2018

Área de conhecimento	2014		2015		2016		2017		2018	
	Menores	Maiores								
Ciências da Natureza e suas tecnologias	330,6	876,4	334,3	875,2	316,5	871,3	298	885,6	362,5	869,6
Ciências Humanas e suas tecnologias	324,8	862,1	314,3	850,6	317,4	859,1	307,7	868,3	387,2	850,4
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	306,2	814,2	302,6	825,8	287,5	846,4	299,6	788,8	318,8	816,9
Matemática e suas Tecnologias	318,5	973,6	280,2	1008,3	309,7	991,5	310,4	993,9	360	996,1

Fonte: www.inep.gov.br

A Matemática pode ser considerada uma grande aliada dos estudantes no Enem, já que o bom desempenho nela costuma elevar a nota final dos candidatos. Para ter uma ideia da sua importância, ela é a única das áreas dos conhecimentos abordados que tem 45 questões exclusivas para tratar de seus assuntos e a única área cuja nota máxima já ultrapassou os mil pontos.

7 Considerações Finais

O trabalho sobre o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a abordagem dada à prova de Matemática e suas Tecnologias é muito importante pois faz uma análise da evolução, desde a sua criação até os dias atuais, deste que é hoje o principal método de ingresso nas instituições públicas de nível superior.

O resultado do ENEM serve para acesso ao Ensino Superior em universidades públicas brasileiras por meio do Sistema de Seleção Unificada (SISU), assim como em algumas universidades públicas portuguesas. A prova também é feita por pessoas com interesse em obter bolsa integral ou parcial em cursos de graduação de faculdades particulares que usam o Programa Universidade para Todos (PROUNI) ou para obtenção de financiamento do Fundo de Financiamento ao Estudante de Ensino Superior (FIES).

O Sistema de Seleção Unificada (SISU) foi desenvolvido pelo Ministério da Educação (MEC) para organizar e possibilitar que a maior quantidade possível de alunos usem as suas notas do ENEM para entrar nas universidades públicas. Para tornar o acesso mais amplo, as inscrições para o SISU são realizadas pela internet, assim como no PROUNI e no próprio ENEM. Todos os alunos que tenham feito o exame podem participar do sistema de seleção do SISU que acontece duas vezes ao ano.

Em relação à nota corte do SISU (nota mínima dos alunos para concorrer às vagas), ela é variável e muda de acordo com o curso e universidade. Essa nota é determinada por dois fatores principais: uma nota mínima estipulada pelas universidades e a quantidade de candidatos.

Além de destacar a importância do ENEM e do SISU para a Educação Básica Brasileira, este trabalho possuiu a missão principal de analisar a abordagem dada a prova de Matemática e suas Tecnologias no ENEM.

A apresentação do método da Teoria de Resposta ao Item (TRI) objetivou explicar, usando uma linguagem simples e objetiva, este instrumento poderoso nos processos quantitativos de avaliação educacional, pelo fato de permitir, inclusive, a construção de escalas de habilidade calibradas.

A TRI é um conjunto de modelos estatísticos em que a probabilidade de resposta a um item é modelada como função da proficiência (habilidade) do aluno (variável não observável) e de parâmetros que expressam certas propriedades dos itens, com a propriedade de que quanto maior a proficiência do aluno, maior a probabilidade de ele acertar o

item.

A introdução da TRI na avaliação brasileira trouxe muitas vantagens sobre o método tradicional de avaliação. Colocando os itens em uma mesma escala, a TRI permite estimar e comparar os resultados dos alunos, mesmo que eles respondam a itens diferentes.

As provas são normalmente construídas com a finalidade de avaliar algum traço latente dos avaliados. Uma prova de matemática, por exemplo, costuma ser construída para avaliar a proficiência do avaliado em matemática; uma prova de português é feita para avaliar a proficiência em português; e assim por diante.

Esse processo é usado em grande parte das avaliações com propósito de seleção, sendo que o escore do avaliado é calculado em cada área ou disciplina por meio da soma dos pontos (teoria clássica) ou pela Teoria de Resposta ao Item (TRI). Essa última permite interpretar pedagogicamente a escala, além de possibilitar comparações entre diferentes edições das provas, desde que haja itens comuns entre elas ou um mesmo conjunto de respondentes que tenham participado dessas diferentes edições.

O uso da TRI no cálculo dos resultados não altera a dificuldade da prova do ENEM. A TRI não modifica, significativamente, a classificação dos participantes em relação ao percentual de acertos. Contribui, sim, para detalhar melhor as notas, o que ajuda a evitar grande número de empates. Aplicando ou não a TRI, o candidato mais bem preparado se sairá melhor na prova.

As notas mínimas e máximas variam e dependem das questões da prova do ENEM em cada área do conhecimento. Como as questões das provas não são as mesmas, em cada ano, podemos ter notas mínima e máxima diferentes, sendo o INEP responsável pela disponibilização dessas notas em todas as áreas do conhecimento.

O destaque dado a disciplina de Matemática na prova do ENEM foi um dos grandes motivadores para o desenvolvimento desse trabalho, buscando assim fazer o levantamento de dados estatísticos que justificassem que dentre todas as áreas do conhecimento, a Matemática e suas Tecnologias pode ser considerada umas das que garante a pontuação mais elevada ao candidato.

8 Referências

RABELO, Mauro. *Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro*. COLEÇÃO PROFMAT. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANDRADE, D. F.; TAVARES, H. R.; VALLE, R. C. *Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 2000.

BARBETTA, Pedro. TREVISAN, Lígia. TAVARES, Heliton. AZEVEDO, TÂNIA C. ARANTES DE MACEDO. *Aplicação da teoria da resposta ao item uni e multidimensional*. São Paulo, v. 25, n. 57, p. 280-302, jan./abr. 2014.

PASSOS, Marinez Meneghello. OLIVEIRA, Bruno Kerber. SALVI, Rosana Figueiredo. *As Questões de “Matemática e suas Tecnologias” do “Novo ENEM”: um olhar com base na Análise de Conteúdo*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.13, n.2, pp.313-335, 2011.

Klein, Ruben. *Alguns aspectos da Teoria de Resposta ao Item relativos à estimação das proficiências*. Ensaio: aval. pol. públ. Educ., Rio de Janeiro, v. 21, n. 78, p. 35-56, jan./mar. 2013.

IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel. DEGENSZAJN, David. *Fundamentos de matemática elementar*, 11: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. 1ª edição. São Paulo: Atual, 2004.

Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basicoa/enem/guia_participante/2013/guia_do_participante_notas.pdf>. Acesso em: 20.07.2019

Disponível em: <<https://guiadoestudante.abril.com.br/blog/dicas-estudo/veja-dicas-para-aumentar-sua-nota-de-matematica-no-enem/>>. Acesso em: 20.07.2019

Disponível em: <<https://educacao.uol.com.br/noticias/2016/01/08/enem-candidato-faz-mais-de-mil-pontos-e-tem-maior-nota-da-historia-entenda.htm>>. Acesso em: 21.07.2019

Disponível em: <<https://vestibular.brasilecola.uol.com.br/enem/enem-2018-notas-maximas-minimas-sao-divulgadas/344576.html>>. Acesso em: 21.07.2019

Disponível em: <<https://www.somospar.com.br/e-possivel-tirar-mais-de-1000-no-enem/>>. Acesso em: 21.07.2019

Disponível em: <<https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/veja-as-notas-maximas-e-minimas-do-enem-2017/>>. Acesso em: 24.07.2019

Disponível em: <<https://fisica.net/enem/notas-minimas-e-maximas-do-enem/?pdf=4>>. Acesso em: 24.07.2019

Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article/418-noticias/enem-946573306/72191-microdados-do-enem-por-escola-sao-divulgados-pela-primeira-vez?Itemid=164>>. Acesso em: 27.07.2019

Disponível em: <<https://foconoenem.com/numero-de-acertos-e-nota-do-enem/>>. Acesso em: 27.07.2019

Disponível em: <<https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/como-estudar-matematica-para-o-enem/>>. Acesso em: 02.08.2019

Disponível em: <<https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/raio-x-do-enem-os-conteudos-que-mais-caem-na-prova-desde-2009/>>. Acesso em: 02.08.2019

Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV056_MD1_SA8_ID11067_17082016153340.pdf>. Acesso em: 02.08.2019

Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article/418-noticias/enem-946573306/72191-microdados-do-enem-por-escola-sao-divulgados-pela-primeira-vez?Itemid=164>>. Acesso em: 03.08.2019

Disponível em: <<https://www.tuneduc.com.br/microdados-do-enem-praticas/>>. Acesso em: 03.08.2019

Anexos 1: Estatística

1. Conceito: A Estatística é parte da Matemática Aplicada que fornece métodos de coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados, úteis nas tomadas de decisão.

2. Áreas da Estatística

- Estatística Descritiva

Diz respeito à coleta, organização, classificação, apresentação e descrição dos dados a serem observados.

- Probabilidade

Está fundamentada na Teoria das Probabilidades; É o ramo da matemática que estuda eventos com resultados possíveis, mas incertos.

- Inferência Estatística

Estuda formas de se concluir algo sobre as populações a partir de suas amostras.

3. Estatística Descritiva

- Medidas de Posição ou de Centralidade:

(i) Média Aritmética: Seja x uma variável quantitativa e x_1, x_2, \dots, x_n os valores assumidos por x . Define-se a média aritmética de x - indicada por \bar{x} - como a divisão da soma de todos esses valores pelo número de valores, isto é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(ii) Média Aritmética Ponderada: Seja x uma variável quantitativa que assume os valores x_1, x_2, \dots, x_k com frequências absolutas respectivamente iguais a n_1, n_2, \dots, n_k . A média aritmética ponderada de x - indicada por \bar{x}_p - é definida como a divisão da soma de todos os produtos $x_i \cdot n_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) pela soma das frequências, isto é:

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot n_k}{\sum_{i=1}^k n_k}$$

Lembrando que a frequência relativa (f_i) é definida por $f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$, é possível também

expressar a média por:

$$x = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_k \cdot f_k$$

(iii) Mediana: Sejam $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ os n valores ordenados de uma variável x . A mediana desse conjunto de valores - indicada por **Me** - é definida por:

$$Me = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

(iv) Moda: Seja x uma variável quantitativa que assume os valores x_1, x_2, \dots, x_k , com frequências absolutas iguais a n_1, n_2, \dots, n_k , respectivamente. Se o máximo entre n_1, n_2, \dots, n_k é igual a $n_j, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, dizemos que a moda - indicada por **Mo** - é igual a valor x_j . Ou seja, a moda de um conjunto de valores corresponde ao valor que ocorre mais vezes.

- Medidas de Variabilidade ou de Dispersão

(i) Variância: Seja x uma variável quantitativa que assume os valores x_1, x_2, \dots, x_n e \bar{x} a média aritmética correspondente a esses valores. A variância desses valores - indicada por **Var(x)** ou σ^2 - é definida por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)}{n}$$

(ii) Desvio Padrão: Sejam x_1, x_2, \dots, x_n os valores assumidos por uma variável x . Chamamos de desvio padrão de x - indicado por **DP(X)** ou σ - a raiz quadrada da variância de x .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)}{n}}$$