



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**MARCUS AURÉLIO SAMPAIO OLIVEIRA**

**DETERMINAÇÃO DA CURVA CATENÁRIA  
IDEAL PARA UMA PONTE SUSPENSA**

**Aplicação do Método Variacional**

Teresina  
2025

MARCUS AURÉLIO SAMPAIO OLIVEIRA

**DETERMINAÇÃO DA CURVA CATENÁRIA  
IDEAL PARA UMA PONTE SUSPENSA**

Aplicação do Método Variacional

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Piauí como parte dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Lenilson Torres Brito  
Co-orientador: Prof. Dr. Gladstone Alves de Alencar

Teresina

2025



048d Oliveira, Marcus Aurelio Sampaio.

Determinação da curva catenária ideal para uma ponte suspensa:  
aplicação do método variacional / Marcus Aurelio Sampaio  
Oliveira. - 2025.

49f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Estadual do Piauí -  
UESPI, Curso de Licenciatura em Matemática, Campus Poeta Torquato  
Neto, Teresina - PI, 2025.

"Orientador: Prof. Me. Lenilson Torres Brito".

"Coorientador: Prof. Dr. Gladstone Alves de Alencar".

1. Catenária. 2. Cálculo Variacional. 3. Euler - Lagrange. I.  
Brito, Lenilson Torres . II. Alencar, Gladstone Alves de . III.  
Título.

CDD 510

*“Sendo a construção do universo perfeita e obra de um Criador sábio,  
tudo o que nele surge revela o sentido de um máximo ou mínimo.”*

**Leonhard Euler**

## **RESUMO**

O presente trabalho tem como objetivo determinar a curva catenária ideal para uma ponte suspensa, utilizando o método variacional. A análise envolve a aplicação de conceitos avançados de cálculo variacional para encontrar a curva que minimiza a energia potencial total do sistema. A metodologia adotada inclui a formulação do problema variacional, a obtenção das equações de Euler-Lagrange correspondentes e a comparação entre soluções analíticas e numéricas. Os resultados obtidos mostram que a curva catenária ideal pode ser determinada de forma precisa e eficiente através do método variacional, contribuindo para o aprimoramento de projetos de pontes suspensas.

**Palavras-chave:** Catenária, método variacional, energia, pontes suspensas, Euler-Lagrange

## ABSTRACT

The present study aims to determine the ideal catenary curve for a suspension bridge using the variational method. The analysis involves applying advanced concepts of variational calculus to find the curve that minimizes the total potential energy of the system. The methodology includes formulating the variational problem, deriving the corresponding Euler-Lagrange equations, and comparing analytical and numerical solutions. The results demonstrate that the ideal catenary curve can be accurately and efficiently determined using the variational method, thereby enhancing the development of suspension bridge projects.

**Keywords:** Catenary, variational method, energy, suspension bridges, Euler-Lagrange.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Equação e forma geométrica da catenária . . . . .	14
Figura 2 – CATENÁRIA X PARÁBOLA . . . . .	15
Figura 3 – Derivada Segunda - CATENÁRIA X PARÁBOLA . . . . .	16
Figura 4 – Curvatura de uma curva . . . . .	17
Figura 5 – Comprimento de Arco . . . . .	18
Figura 6 – Função curvatura : PARÁBOLA X CATENÁRIA . . . . .	20
Figura 7 – Curva $\alpha_{AB}$ . . . . .	21
Figura 8 – Curva $\alpha_{AB}$ e suspensão do peso $D$ . . . . .	22
Figura 9 – Curvas $\alpha_{AB}$ e $\alpha_{FB}$ . . . . .	22
Figura 10 – Curva $\alpha_{AC}$ . . . . .	22
Figura 11 – Sistema de forças de sustentação do peso $P$ . . . . .	23
Figura 12 – Construção da Catenária . . . . .	24
Figura 13 – Caminhos possíveis para $J$ . A linha vermelha é a curva ao longo da qual $J$ é assumido estacionário, os caminhos tracejados são variações da curva estacionária . . . . .	31
Figura 14 – Construção da função $\eta$ . . . . .	33
Figura 15 – Catenárias com diferentes comprimentos $L$ . . . . .	41

## LISTA DE CÓDIGOS

Código 1	Cálculo do Parâmetro $a$ para Diferentes Comprimentos $L$ via Método de Newton-Raphson . . . . .	47
Código 2	Cálculo dos Parâmetros $k$ e $y_0$ a partir de Valores de $a$ para Diferentes Comprimentos $L$ . . . . .	48
Código 3	Plotagem das Catenárias para Diferentes Comprimentos $L$ . . . . .	49

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de $k$ e $y_0$ para o comprimento $L$ . . . . .	41
--	----

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
1.1	MOTIVAÇÃO E PROBLEMATIZAÇÃO . . . . .	12
1.2	OBJETIVOS . . . . .	12
1.3	METODOLOGIA . . . . .	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	14
2.1	A CATENÁRIA . . . . .	14
2.1.1	Definição e Equação Matemática . . . . .	14
2.1.2	Propriedades Geométricas : (CATENÁRIA X PARÁBOLA) . . . . .	15
2.1.2.1	Variação da Inclinação ao longo de uma Curva . . . . .	15
2.1.2.2	Curvatura de uma curva . . . . .	17
2.1.2.3	Formulando a curvatura . . . . .	17
2.1.2.4	Curvatura : CATENÁRIA X PARÁBOLA . . . . .	19
2.1.3	Interpretação Física . . . . .	21
2.1.3.1	Dedução da equação diferencial da catenária . . . . .	24
2.1.3.2	Solução da Equação Diferencial da Catenária . . . . .	26
2.2	CÁLCULO VARIACIONAL . . . . .	27
2.2.1	Condições de Optimalidade em Dimensões Finitas . . . . .	27
2.2.1.1	Primeira Condição Necessária para Optimalidade . . . . .	27
2.2.1.2	Segunda Condição Necessária para a Optimalidade . . . . .	28
2.2.2	Condições de Optimalidade em Dimensões infinitas . . . . .	30
2.2.2.1	Primeira Condição Necessária para a Optimalidade . . . . .	30
2.2.3	Verificação de Mínimos Locais em Funcionais (Abordagem Teórica com Possível Extensão Numérica) . . . . .	33
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	35
3.1	DESCRIÇÃO FÍSICA E CONDIÇÕES DO PROBLEMA . . . . .	35
3.1.1	Descrição Física do Sistema . . . . .	35
3.1.2	Condições de Contorno . . . . .	36
3.1.3	A Energia Potencial do Sistema . . . . .	36
3.1.4	Condições de Contorno . . . . .	39
3.1.5	Considerações finais sobre a formulação . . . . .	41
3.2	VERIFICAÇÃO FÍSICA E CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A MINIMIZAÇÃO . . . . .	42
4	RESULTADOS ANALÍTICOS E CONCLUSÃO . . . . .	43

**REFERÊNCIAS** . . . . . 45

**APÊNDICE A – CÓDIGOS DE PYTHON** . . . . . 47

## 1 INTRODUÇÃO

O presente projeto, intitulado "**Determinação da Curva Catenária Ideal para uma Ponte Suspensa – Aplicação do método variacional**", é motivado por sua importância teórica e prática nas interfaces entre a Matemática e a Engenharia. Essa curva, conhecida como catenária, é fundamental no projeto de pontes suspensas, pois permite a distribuição uniforme da força gravitacional total da estrutura sobre o material e os cabos, garantindo que as tensões produzidas não sejam apenas minimizadas, mas mantidas em um patamar ótimo.

Neste trabalho, a catenária utilizada em pontes suspensas será o foco principal. É de particular interesse a modelagem de catenárias ótimas, considerando parâmetros adequados e transformações geométricas. O tratamento desse problema, reconhecido como uma das questões desafiadoras na história do cálculo, servirá para demonstrar que as técnicas e princípios da época, embora sofisticados, continham algumas especificidades de seu tempo [1].

A catenária é definida como o caminho percorrido por uma corda ou corrente flexível suspensa livremente entre dois pontos fixos [1].

Três soluções para o desafio foram enviadas e publicadas na *Acta Eruditorum*, em junho de 1691: uma por Huygens, uma por Leibniz e uma por Jakob Bernoulli. Foi a solução de Jakob Bernoulli que, aos vinte e quatro anos, estabeleceu como um dos primeiros matemáticos de seu tempo. As publicações consistiam em uma descrição geométrica da curva (ou seja, sua equação) e listas de suas principais propriedades, mas sem mostrar como os resultados foram derivados [1].

Hoje, as estratégias utilizadas pelos três matemáticos estão disponíveis em manuscritos e cartas. Alguns, como Johann Bernoulli, descreveram sua própria abordagem, como em suas palestras sobre cálculo integral para o Marquês de l'Hôpital. A relação entre esses métodos reflete o caráter de "pedra de toque" do problema da catenária para dois métodos rivais na matemática da época: a teoria clássica da curva geométrica que Arquimedes aplicou e o método moderno do cálculo diferencial [1].

Nesse sentido, a determinação da catenária ótima para uma ponte suspensa é introduzida como um exemplo de aplicação do cálculo variacional, ou, em outras palavras, como um problema concreto de engenharia que cria ressonância com uma teoria abstrata para sua solução.

## 1.1 MOTIVAÇÃO E PROBLEMATIZAÇÃO

### INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

O problema da catenária ótima para pontes suspensas é um desafio clássico que integra a engenharia com a matemática aplicada. A relevância desta questão se estende além do campo teórico, oferecendo insights valiosos para a prática da engenharia estrutural.

As pontes suspensas são notáveis não apenas por sua eficiência estrutural, mas também por sua estética. A curva catenária, que representa a forma do cabo sob seu próprio peso, é fundamental para a concepção dessas estruturas.

Essa forma específica, conhecida como catenária, é caracterizada pela tensão que os cabos exercem. A determinação dessa curva não é um processo aleatório; ela emerge como uma solução de um problema de cálculo variacional: qual é a curva que minimiza a força de tração nos cabos? [2, 3].

A escolha da catenária ótima representa um problema complexo, pois envolve não apenas a identificação da curva ideal, mas também a derivação das tensões nos cabos e a análise da estabilidade da estrutura. O cálculo variacional se mostra um instrumento poderoso para abordar esse desafio [2, 3].

Para aplicar o cálculo variacional na otimização da catenária, é imperativo minimizar a energia potencial total do sistema [2, 3]. Portanto, uma compreensão sólida dos princípios variacionais é essencial. Esses fundamentos matemáticos são empregados para determinar a forma exata da curva que suporta o peso da ponte, assegurando simultaneamente a estabilidade e a segurança da estrutura.

Este estudo é significativo não apenas por suas implicações matemáticas, mas também por suas repercussões práticas. A identificação precisa da curva catenária ótima certamente contribui para a eficiência na construção e manutenção de pontes suspensas, promovendo uma abordagem mais segura e inovadora.

A motivação por trás deste trabalho reside na possibilidade de inovação no design de pontes e na necessidade de estabelecer conexões mais robustas entre a teoria matemática e a prática da engenharia. Assim, ao contribuir para o avanço da pesquisa no campo da engenharia estrutural, esta investigação não apenas busca aprimorar o desempenho e a segurança das pontes, mas também ilustra um exemplo concreto da aplicação de métodos matemáticos avançados em contextos de engenharia contemporâneos.

### 1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho de conclusão de curso é investigar e determinar a curva catenária ideal para uma ponte suspensa, utilizando técnicas avançadas do cálculo variacional. Busca-se compreender os princípios físicos e matemáticos subjacentes à forma da curva catenária, bem como desenvolver métodos analíticos para otimizar sua geometria

em função de parâmetros específicos da ponte, visando a máxima eficiência estrutural e a minimização das tensões nos cabos.

Os objetivos específicos incluem:

- Formular o problema de otimização para determinar a curva catenária ideal.
- Derivar a equação de Euler-Lagrange correspondente ao problema de minimização da energia potencial total do sistema.
- Resolver as equações de Euler-Lagrange para obter a solução analítica da curva catenária ideal de uma ponte suspensa, aplicando técnicas de cálculo variacional para encontrar uma expressão matemática que descreva a forma precisa da curva, considerando condições de contorno.
- Relacionar os argumentos físicos com os resultados obtidos para fundamentar a aceitação da curva catenária como minimizadora da energia potencial do sistema.
- Contribuir para o avanço do conhecimento na área de matemática aplicada, fornecendo insights e ferramentas para o projeto e a construção de estruturas suspensas mais eficientes e seguras.

### 1.3 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho envolve a aplicação do cálculo variacional para formular e resolver o problema da catenária ideal. As etapas incluem:

- Revisão bibliográfica sobre catenárias e cálculo variacional.
- Formulação do problema variacional.
- Derivação das equações de Euler-Lagrange.
- Implementação de métodos analíticos para a solução das equações.
- Implementação de métodos numéricos para encontrar os parâmetros de contorno da solução analítica e para a plotagem das curvas da catenária para diferentes comprimentos da corda.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão discutidas as ferramentas matemáticas essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, abordaremos a curva catenária, explorando sua forma matemática, suas propriedades e aplicações. Em seguida, apresentaremos um respaldo teórico sobre o cálculo variacional, destacando suas diferenças em relação ao cálculo diferencial. Essa fundamentação é crucial para a compreensão dos métodos e conceitos que serão utilizados nas análises subsequentes.

### 2.1 A CATENÁRIA

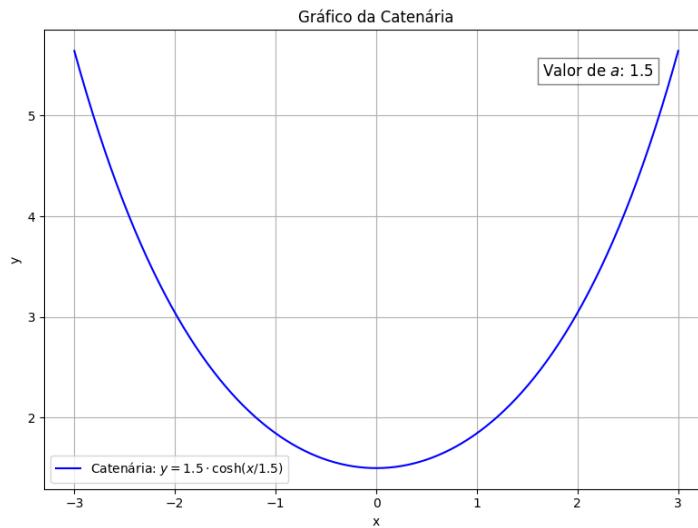
#### 2.1.1 Definição e Equação Matemática

A catenária é a curva que um fio flexível, suspenso por suas extremidades e sujeito apenas à força da gravidade, assume. Matematicamente, a equação da catenária é dada por:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Aqui,  $a$  é um parâmetro que determina a escala e a forma da curva, e  $\cosh$  é a função cosseno hiperbólico, essencial para descrever a natureza da catenária.

Figura 1 – Equação e forma geométrica da catenária



Fonte: Autor

---

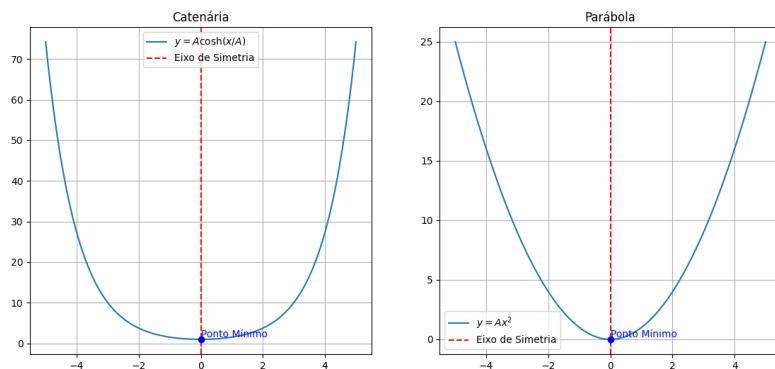
<sup>1</sup>Nos capítulos posteriores, derivaremos essa equação utilizando o cálculo variacional, demonstrando que a catenária é a curva que minimiza a energia potencial gravitacional de um fio suspenso.

## 2.1.2 Propriedades Geométricas : (Catenária x Parábola)

Historicamente, a catenária foi estudada por vários matemáticos notáveis. Galileu Galilei inicialmente pensou que a forma de um fio suspenso seria uma parábola. No entanto, Christiaan Huygens corrigiu essa suposição, demonstrando que a curva é uma catenária.

A catenária possui várias propriedades geométricas notáveis. Embora sua forma se assemelhe à da parábola, há diferenças sutis que distinguem as duas curvas.

Figura 2 – Catenária x Parábola



Fonte: Autor

Ao observar o gráfico, nota-se que a parábola apresenta uma curvatura mais acentuada perto de seu ponto mínimo em comparação com a catenária, que exibe uma curvatura menos íngreme nessa região. No entanto, à medida que nos afastamos do ponto mínimo, as duas curvas mostram uma similaridade crescente. Essa observação visual destaca a necessidade de uma análise quantitativa mais rigorosa para validar essa semelhança.

Para uma análise precisa das curvaturas, é essencial considerar as derivadas de cada curva, elucidando a diferença entre a variação da inclinação em um ponto e a curvatura nesse ponto. A variação da inclinação é representada pela segunda derivada da função que descreve a curva, enquanto a curvatura, que mede como a direção da curva muda em relação ao seu comprimento de arco, demanda um estudo mais detalhado.

### 2.1.2.1 Variação da Inclinação ao longo de uma Curva

Na matemática, a inclinação em um ponto da curva é o coeficiente angular da reta tangente à curva naquele ponto, equivalente à primeira derivada da função. A variação da inclinação ao longo da curva é determinada pela taxa de mudança dessa inclinação, que é a segunda derivada da função nesse ponto.

A seguir, apresentaremos os cálculos das derivadas para as curvas catenária e parábola, discutindo suas implicações geométricas.

Considere as funções  $f$  e  $g$ , tais que, descrevem as curvas da parábola e a catenária respectivamente, ou seja,

$$f(x) = ax^2$$

e

$$g(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

calculemos daí, a primeira derivada de  $f$  e  $g$ :

$$f'(x) = 2ax$$

e

$$g'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

busquemos então, os valores de  $x$  para estacionar  $f'$  e  $g'$ , ou seja,

$$f'(x) = 2ax = 0 \iff x = 0$$

e

$$g'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \iff \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = 0 \iff e^{\frac{x}{a}} = e^{-\frac{x}{a}} \iff x = -x \iff x = 0.$$

Verificaremos agora, o sinal da segunda derivada de  $f$  e  $g$  quando  $x = 0$ :

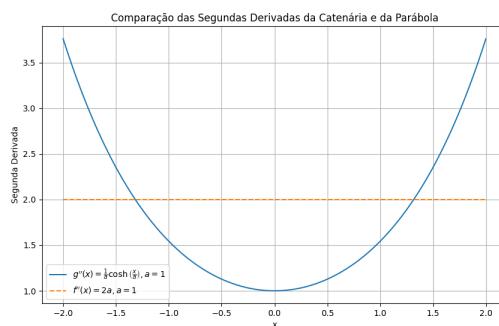
$$f''(0) = 2a > 0 \iff a > 0$$

e

$$g''(0) = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{2a} \left( e^{\frac{0}{a}} + e^{-\frac{0}{a}} \right) = \frac{1}{a} \frac{1+1}{2} = \frac{1}{a} > 0 \iff a > 0.$$

Ambas  $f$  e  $g$  minimizam em  $x = 0$ . Contudo,  $f''$  é constante e positiva (se  $a > 0$ ), indicando que a inclinação de  $f$  aumenta uniformemente com  $|x|$ . Já  $g''$  não é constante, e a inclinação de  $g$  aumenta mais acentuadamente com  $|x|$ , o que é visível na (Figura 3).

Figura 3 – Derivada Segunda - CATENÁRIA X PARÁBOLA



Fonte: Autor

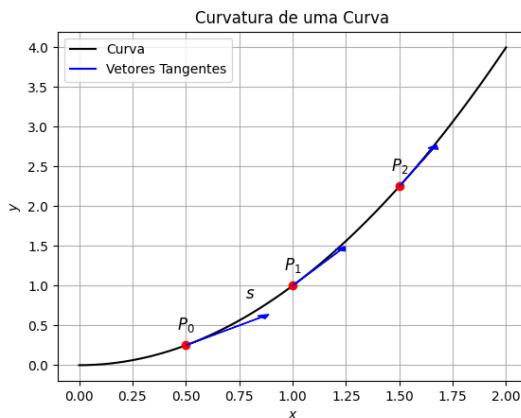
### 2.1.2.2 Curvatura de uma curva

Conforme apresentado por Thomas [4], a curvatura de uma curva suave em um ponto é uma medida de quanto e em que sentido a curva está se dobrando naquele ponto. Seja  $\vec{T}(s)$  o vetor tangente unitário à curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . A curvatura  $\kappa$  nesse ponto é definida por:

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|.$$

Essa expressão fornece a taxa com que o vetor tangente gira por unidade de comprimento de arco. Quando  $\left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$  é grande, a curva dobra acentuadamente e a curvatura é alta. Quando esse valor se aproxima de zero, a direção do vetor tangente muda lentamente, indicando menor curvatura.

Figura 4 – Curvatura de uma curva



Fonte: Autor

No gráfico, destacamos três pontos em uma curva, juntamente com os vetores tangentes unitários nesses pontos. A mudança na direção dos vetores tangentes unitários ao longo da curva ilustra a variação da curvatura. Se  $\left\| \frac{d\vec{T}(x)}{ds} \right\|$  é grande,  $\vec{T}$  vira repetidamente quando uma partícula passa pelo ponto  $P$  e a curvatura em  $P$  é grande. Se  $\left\| \frac{d\vec{T}(x)}{ds} \right\|$  está próximo de 0,  $\vec{T}$  vira mais lentamente e a curvatura em  $P$  é menor.

### 2.1.2.3 Formulando a curvatura

Seja  $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . O vetor tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto  $(x, y)$  é um vetor que aponta na direção da derivada de  $f$  naquele ponto.

Tome os pontos  $(x, f(x))$  e  $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ . Se  $\Delta x$  for suficientemente pequeno, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \iff f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

O vetor  $\vec{T}_x(x)$  que aponta da posição  $(x, f(x))$  para  $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$  será:

$$(\Delta x, f(x + \Delta x) - f(x)) \approx (\Delta x, f'(x)\Delta x).$$

Se  $\Delta x \rightarrow 0$ , podemos simplificar e calcular o vetor direcional de  $f$  em um ponto  $(x, f(x))$  com a seguinte expressão:

$$\vec{T}_x(x) = (1, f'(x)).$$

Para obter o vetor tangente unitário  $\vec{T}(x)$ , normalizamos  $\vec{T}_x(x)$ :

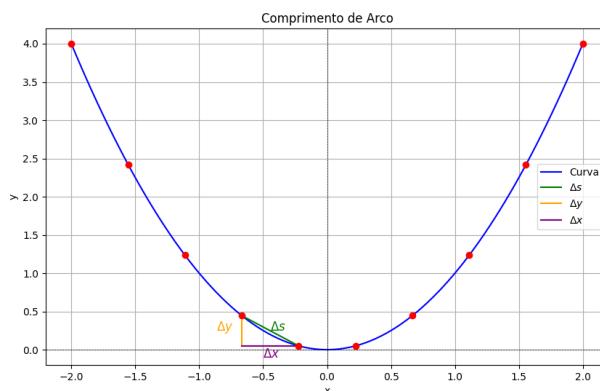
$$\vec{T}(x) = \frac{\vec{T}_x(x)}{\|\vec{T}_x(x)\|} = \frac{(1, f'(x))}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}.$$

Calculemos então  $\frac{d\vec{T}(x)}{ds}$ :

$$\frac{d\vec{T}(x)}{ds} = \frac{d\vec{T}(x)}{dx} \frac{dx}{ds} = \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right), \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \right) \frac{dx}{ds}.$$

Para encontrar a relação entre  $dx$  e  $ds$ , vamos considerar os mesmos dois pontos tomados inicialmente,  $(x, f(x))$  e  $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$  e considere  $\Delta s$  como o segmento entre os dois pontos,  $\Delta x$  como a variação no eixo  $0X$  e  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , considere sem perda de generalidade que  $f(x + \Delta x) > f(x)$  observe a Figura [5] na próxima página:

Figura 5 – Comprimento de Arco



Fonte: Autor

Note que o triângulo retângulo formado pela hipotenusa  $\Delta s$  e catetos  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , cabe uma aplicação do teorema de Pitágoras, daí;

$$\begin{aligned}
\Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.
\end{aligned}$$

Aplicando o limite em ambos os membros, temos que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x,$$

ou seja,

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \iff \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}(x)}{ds} &= \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right), \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \\
&= \left( -\frac{f'(x)f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{f''(x)(1 + (f'(x))^2) - (f'(x))^2 f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \\
&= \left( -\frac{f'(x)}{(1 + (f'(x))^2)^2}, \frac{1 + (f'(x))^2 - (f'(x))^2}{(1 + (f'(x))^2)^2} \right) f''(x) \\
&= \left( -\frac{f'(x)}{(1 + (f'(x))^2)^2}, \frac{1}{(1 + (f'(x))^2)^2} \right) f''(x).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\kappa(x) &= \left\| \frac{d\vec{T}(x)}{ds} \right\| = |f''(x)| \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{(1 + (f'(x))^2)^4}} \\
&= \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

#### 2.1.2.4 Curvatura : CATENÁRIA X PARÁBOLA

Formulada a função curvatura generalizada  $k(x)$  para uma curva  $y = f(x)$ , agora aplicaremos esta fórmula para as curvas  $f(x) = ax^2$  e  $g(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ . Analisaremos as funções de curvaturas resultantes e compará-las visualmente.

Seja as curvas,  $f(x) = ax^2$  e  $g(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ , temos que;

$$f'(x) = 2ax \text{ e } g'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

e ainda;

$$f''(x) = 2 \text{ e } g''(x) = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Calculemos então  $\kappa_f(x)$  a função curvatura para a parábola e  $\kappa_g(x)$  a função curvatura para a catenária:

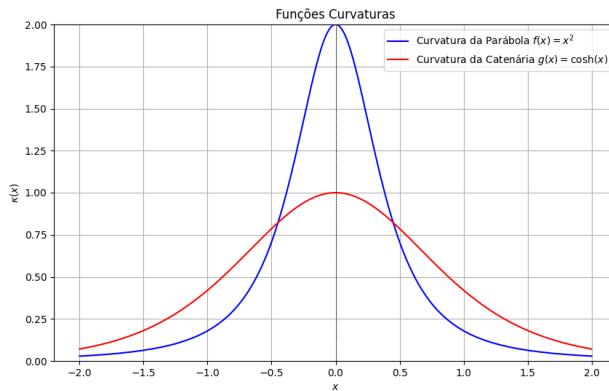
$$\kappa_f(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|2a|}{(1 + (2ax)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2|a|}{(1 + 4(ax)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_g(x) &= \frac{|g''(x)|}{(1 + (g'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|\frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right|}{\left(1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{|a| \left(\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{|a| \cosh^3\left(\frac{x}{a}\right)} \\ &= \frac{1}{|a| \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}. \end{aligned}$$

Utilizamos a identidade hiperbólica fundamental  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  para substituir  $\sinh^2(x) + 1$  por  $\cosh^2(x)$ . Essa substituição é essencial para simplificar a análise da curvatura. Observe o gráfico das duas funções curvaturas correspondentes a parábola e catenária:

Figura 6 – Função curvatura : PARÁBOLA X CATENÁRIA



Fonte: Autor

Ao analisar o gráfico das funções de curvatura da parábola  $f(x) = x^2$  e da catenária  $g(x) = \cosh(x)$  com  $a = 1$ , observamos algumas diferenças notáveis entre as duas curvas, principalmente na região próxima ao vértice. A curvatura da parábola, representada pela função  $\kappa_f(x) = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$ , atinge seu valor máximo de 2 no vértice, que ocorre em  $x = 0$ . À medida que nos afastamos do vértice, a curvatura da parábola diminui rapidamente, tendendo a zero para valores maiores de  $|x|$ . Isso indica que a parábola se torna rapidamente mais plana conforme nos afastamos do vértice. A maior curvatura no vértice reflete a forma mais "pontiaguda" e fechada da parábola em comparação com a catenária.

A curvatura da catenária, dada por  $\kappa_g(x) = \frac{1}{\cosh(x)^2}$  com  $a = 1$ , atinge seu valor máximo de 1 no ponto mais baixo da curva (em  $x = 0$ ). À medida que  $|x|$  aumenta, a curvatura da catenária diminui de forma mais gradual em comparação com a parábola, tendendo a zero à medida que  $x$  se aproxima de  $\pm\infty$ . A transição mais suave na curvatura da catenária reflete a forma mais "esticada" e menos pronunciada da curva ao longo de sua extensão.

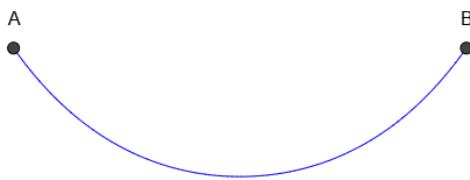
A principal diferença observada no gráfico é a curvatura significativamente maior da parábola no vértice em comparação com a catenária. Enquanto a parábola possui uma curvatura de 2 no vértice, a catenária tem uma curvatura de 1 no ponto mais baixo. Além disso, a curvatura da parábola diminui mais rapidamente à medida que nos afastamos do vértice, tornando-se mais plana mais rapidamente do que a catenária. Essas características destacam como a parábola possui uma forma mais fechada no vértice, enquanto a catenária mantém uma curvatura mais uniforme ao longo de sua extensão.

### 2.1.3 Interpretação Física

A abordagem de Johan Bernoulli revela aspectos fascinantes sobre a interpretação física da catenária. Entre as soluções clássicas de Bernoulli, Leibniz e Huygens, a de Bernoulli destaca-se pela clareza didática. Ele usou construções geométricas e hipóteses que enfatizam os aspectos físicos da corda suspensa. Nesta seção, vamos explorar essas hipóteses em detalhes [1].

Seja uma corda provida de massa, representada pela curva  $\alpha$ , suspensa em dois pontos,  $A$  e  $B$ . Chamamos a curva entre os pontos  $A$  e  $B$  de  $\alpha_{AB}$ :

Figura 7 – Curva  $\alpha_{AB}$



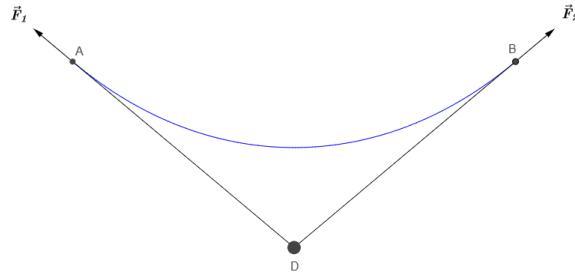
Fonte: Autor

Se a corda está em equilíbrio sob ação apenas da gravidade, segundo Bernoulli  $\alpha_{AB}$  deve satisfazer estas 5 hipóteses:

- **hipótese 1:** A corda deve possuir alguma flexibilidade;

- **hipótese 2:** As forças necessárias para sustentar a corda nos pontos  $A$  e  $B$ , devem ser iguais às forças para sustentar um peso  $D$  de igual massa à corda, suspenso por cordas sem massa  $AD$  e  $BD$ ;

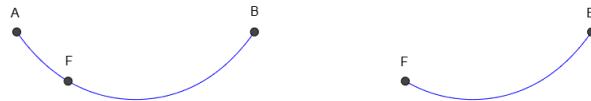
Figura 8 – Curva  $\alpha_{AB}$  e suspensão do peso  $D$



Fonte: Autor

- **hipótese 3:** A curva  $\alpha_{AB}$  deve ser inextensível, ou seja, ao tomar um ponto fixo  $F$  em  $\alpha_{AB}$  e remover o trecho  $\alpha_{AF}$ , a parte restante  $\alpha_{FB}$  não deve sofrer nenhum alongamento ou deformação.

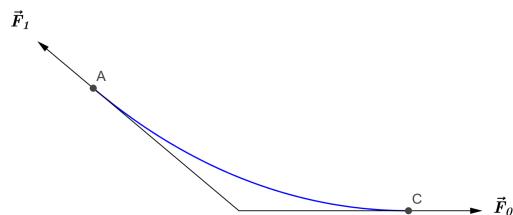
Figura 9 – Curvas  $\alpha_{AB}$  e  $\alpha_{FB}$



fonte: Autor

- **hipótese 4:** fixando  $C$ , o ponto mais baixo da curva  $\alpha$ , a **hipótese 3** sugere que, a força  $\vec{F}_0$ , exercida pelo ponto  $C$  é independente da posição da curva do outro ponto de suspensão A.

Figura 10 – Curva  $\alpha_{AC}$

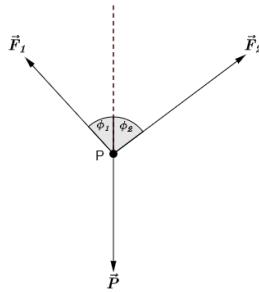


Fonte: Autor

- **hipótese 5:** Se  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  sustentam um peso  $P$  com cordas sem massa formando ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  com a vertical, então:

$$\begin{aligned}\frac{\|\vec{F}_1\|}{\|\vec{F}_2\|} &= \frac{\sin(\phi_2)}{\sin(\phi_1)} \\ \frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_2\|} &= \frac{\sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sin(\phi_1)} \\ \frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_1\|} &= \frac{\sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sin(\phi_2)}\end{aligned}$$

Figura 11 – Sistema de forças de sustentação do peso  $P$



Fonte: Autor

Demonstraremos agora a hipótese 5. Note que, o sistema está em equilíbrio, logo a soma de todas as forças devem ser nula. Neste caso, as componentes horizontais de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  que são respectivamente,  $\vec{F}_1 \sin(\phi_1)$  e  $\vec{F}_2 \sin(\phi_2)$ , se anulam, e ainda, a soma das componentes verticais devem ser igual a  $\vec{P}$ ; ou seja;

$$\begin{cases} \|\vec{F}_1\| \sin(\phi_1) = \|\vec{F}_2\| \sin(\phi_2) \\ \|\vec{F}_1\| \cos(\phi_1) + \|\vec{F}_2\| \cos(\phi_2) = \|\vec{P}\| \end{cases}$$

perceba que da primeira equação, temos que;

$$\frac{\|\vec{F}_1\|}{\|\vec{F}_2\|} = \frac{\sin(\phi_2)}{\sin(\phi_1)}$$

tomemos então  $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| \frac{\sin(\phi_2)}{\sin(\phi_1)}$ , logo;

$$\begin{aligned}\|\vec{P}\| &= \|\vec{F}_2\| \frac{\sin(\phi_2)}{\sin(\phi_1)} \cos(\phi_1) + \|\vec{F}_2\| \cos(\phi_2) \\ &= \|\vec{F}_2\| \left( \frac{\sin(\phi_2) \cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) \sin(\phi_1)}{\sin(\phi_1)} \right) \\ &= \|\vec{F}_2\| \frac{\sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sin(\phi_1)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_2\|} = \frac{\sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sin(\phi_1)}.$$

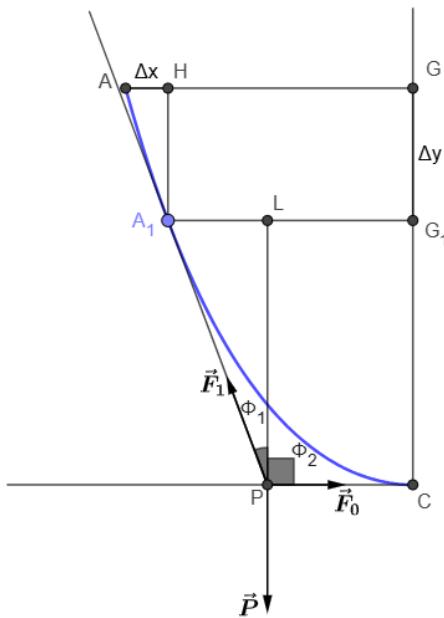
Claro que de forma semelhante, vale a razão de  $\|\vec{P}\|$  e  $\|\vec{F}_1\|$ .

### 2.1.3.1 Dedução da equação diferencial da catenária

As construções geométricas expostas por Bernoulli, para a determinação da curva catenária, foi de grande elegância e didática, a sua abordagem usa ideias de proporcionalidades dos sistemas de forças da corda e utilizando os conhecimentos do cálculo diferencial, encontrou a equação diferencial da catenária. Segue agora as construções idealizadas por Bernoulli.

Seja a curva  $\alpha_{AC}$  pedida, com o ponto mais baixo fixado em  $C$ , tome a linha vertical passando por  $C$  e  $G$  e a tangente a curva no ponto mais baixo é a linha horizontal passando por  $C$  e  $P$ . Seja a reta  $A_1P$  tangente a curva no ponto  $A_1$ . Traçamos  $\overline{A_1G_1}$ ,  $\overline{LP}$ ,  $\overline{HA_1}$  e definimos então  $\Delta x = \overline{AH}$  e  $\Delta y = \overline{GG_1}$ , como está no esboço a seguir na (Figura 12):

Figura 12 – Construção da Catenária



fonte: Autor

Uma vez que, o peso da curva está uniformemente distribuído por todo o comprimento da curva podemos assumir que, comprimento igual ao peso, ou seja, se  $s$  é o comprimento da curva  $\alpha_{A_1C}$ , então  $s = \|\vec{P}\|$ . Segundo as hipóteses 3 e 4, existe uma força  $\vec{F}_0$  exercida no ponto  $C$  mais baixo da curva, tal que é independente da posição do outro ponto  $A_1$  de suspensão da curva, ou seja, esta força é constante, tomemos então,  $\vec{F}_0 = a$ . Suponha agora que, o peso da curva está totalmente concentrado no ponto  $P$ , onde as tangentes  $PA_1$

e  $PC$  da curva se encontram, logo, segundo a hipótese 2, a mesma força será necessária em  $C$  para sustentar o peso  $P$ , como anteriormente foi necessário para sustentar a curva  $\alpha_{A_1C}$ . Pela hipótese 5, temos que, a razão entre o peso em  $P$  e a força em  $B$  é igual a razão do seno do ângulo  $A_1\hat{P}C$  e do seno de  $A_1\hat{P}L$ , ou seja,

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_0\|} = \frac{s}{a} = \frac{\sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sin(\phi_1)} = \frac{\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) + \sin(\phi_2)\cos(\phi_1)}{\sin(\phi_1)}$$

como  $\phi_2 = 90^\circ$ , temos que;

$$\frac{s}{a} = \frac{\sin(\phi_1)\cos(90^\circ) + \sin(90^\circ)\cos(\phi_1)}{\sin(\phi_1)} = \frac{\cos(\phi_1)}{\sin(\phi_1)} = \frac{1}{\tan(\phi_1)}$$

note que,  $\tan(\phi_1) = \frac{A_1L}{LP}$  e ainda, os triângulos  $A_1LP$  e  $AHA_1$  são semelhantes, logo;

$$\frac{s}{a} = \frac{1}{\tan(\phi_1)} = \frac{1}{\frac{A_1L}{LP}} = \frac{LP}{A_1L} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

portanto;

$$\frac{s}{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

O comprimento  $s$  está definido do ponto  $C$  ao ponto  $A_1$ , se quisermos o comprimento da curva toda do ponto  $C$  ao ponto  $A$ , fazemos  $A_1 \rightarrow A$ , ou seja,  $\Delta x \rightarrow 0$ , e ainda, já estudamos neste capítulo a relação entre  $dx$  e  $ds$  e tomemos afins de simplicidade dos cálculos  $C = (0, 0)$  e  $A = (x_0, f(x_0))$ , tal que,  $f(x_0) = y$  e  $(x, y)$  são os pontos da curva  $\alpha_{AC}$  buscada, então:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} &\iff \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = ds \iff \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{x_0} ds \\ &\iff \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = s(x_0), \end{aligned}$$

perceba que para  $\Delta x \rightarrow 0 \iff x \rightarrow x_0$ , logo vale a seguinte igualdade:

$$\frac{s(x_0)}{a} = \frac{dy}{dx} \iff \frac{1}{a} \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{dy}{dx}.$$

Portanto, a equação diferencial da catenária é uma EDO de 2ª ordem da seguinte forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

### 2.1.3.2 Solução da Equação Diferencial da Catenária

Iremos nesta seção solucionar a equação diferencial encontrada na seção anterior. Note que é possível usar uma substituição de variáveis. Tome  $\frac{dy}{dx} = u$ , daí,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ , ou seja:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + u^2}.$$

Perceba que podemos usar a separação de variáveis, logo:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{1}{a} dx.$$

Agora, fazemos a substituição  $u = \sinh(v)$ , o que implica  $du = \cosh(v) dv$ . Assim, temos:

$$\int \frac{\cosh(v)}{\sqrt{1+\sinh^2(v)}} dv = \int \frac{1}{a} dx.$$

Sabemos que  $1 + \sinh^2(v) = \cosh^2(v)$ , portanto a integral se simplifica para:

$$\int dv = \int \frac{1}{a} dx,$$

ou seja,

$$v = \frac{x}{a} + C,$$

logo,  $\sinh(v) = \sinh\left(\frac{x}{a} + C\right)$ , ou seja:

$$u = \sinh\left(\frac{x}{a} + C\right).$$

E como  $\frac{dy}{dx} = u$ , temos:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a} + C\right),$$

agora, integramos ambos os lados para encontrar  $y$ :

$$y = \int \sinh\left(\frac{x}{a} + C\right) dx,$$

a integral de  $\sinh\left(\frac{x}{a} + C\right)$  é:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C\right) + K,$$

onde  $K$  é a constante de integração.

## 2.2 CÁLCULO VARIACIONAL

O cálculo das variações é uma área da matemática que estuda como encontrar extremos (mínimos ou máximos) de funcionais, ou seja, de funções cujo domínio é composto por outras funções. Esse campo, que tem profundas conexões com a física, a engenharia e outras ciências, possui suas raízes no problema clássico de determinar a forma de uma curva ou superfície que minimize uma determinada quantidade, como a energia potencial ou o tempo de percurso.

Historicamente, o cálculo das variações surgiu da necessidade de resolver problemas práticos, como o problema da braquistócrona, formulado por Johann Bernoulli, que pergunta qual a curva de menor tempo de descida sob a ação da gravidade. Esse e outros problemas motivaram o desenvolvimento das ferramentas matemáticas que usamos até hoje para encontrar soluções em problemas de otimização.

Nesta seção, abordaremos primeiramente as condições de otimalidade em funções de dimensões finitas, baseando-nos em conceitos bem estabelecidos de cálculo diferencial. Em seguida, estenderemos esses princípios para funcionais em dimensões infinitas, usando a equação de Euler-Lagrange como um exemplo central de condição de otimalidade em sistemas contínuos [3, 2].

### 2.2.1 Condições de Otimalidade em Dimensões Finitas

Considere a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e denotaremos por  $|\cdot|$  como a norma padrão em  $\mathbb{R}^n$ . Um ponto  $x^* \in D$  é mínimo local de  $f$  sobre  $D$ , se  $\exists \varepsilon > 0; \forall x \in D$  satisfazendo  $|x - x^*| < \varepsilon$  implica que:

$$f(x^*) \leq f(x)$$

se a desigualdade é válida para todo  $x \in D$  então  $x^*$  será um mínimo global. Observe que o máximo de  $f$  será o mínimo de  $-f$  então não há necessidades de trabalhar com esses pontos de maneira separadas, faremos a análise para os pontos mínimos e servirá de maneira análoga para os pontos máximos.

#### 2.2.1.1 Primeira Condição Necessária para Otimalidade

Suponha que  $f$  de classe  $C^1$  e  $x^*$  seu mínimo local, tome um vetor arbitrário  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x^* + \alpha d) \subseteq D$ . Ou seja,  $(x^* + \alpha d) \subseteq D$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  suficientemente próximo de 0. fixando  $d$  podemos trabalhar com função  $f(x^* + \alpha d)$  sob os parâmetros de  $\alpha$  cujo o domínio é algum intervalo real contendo 0. Chamemos a nova função de:

$$g(\alpha) = f(x^* + \alpha d).$$

Como  $x^*$  é o mínimo de  $f$ , então  $\alpha = 0$  será mínimo de  $g$ . A grande vantagem disso é que podemos trabalhar com  $g$  com conhecimentos de cálculo 1 e de forma geral a expansão

de Taylor de primeira ordem de  $g$  centrada em  $\alpha = 0$  será:

$$g(\alpha) = g(0) + g'(0)\alpha + o(0)$$

onde  $o(0)$  são os termos de ordem superiores, de tal forma que;

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(0)}{\alpha} = 0.$$

Queremos mostrar que;

$$g'(0) = 0$$

suponha que  $g'(0) \neq 0$ , como  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(0)}{\alpha} = 0$ , existe  $\varepsilon > 0$ ;

$$|\alpha| < \varepsilon \Rightarrow |o(0)| < |g'(0)\alpha|$$

para esse valores de  $\alpha$ , temos que

$$g(\alpha) - g(0) < g'(0)\alpha + |g'(0)\alpha|$$

restrinindo  $\alpha$  de tal forma a ter sinal oposto de  $g'(0)$  temos que  $(g'(0)\alpha + |g'(0)\alpha|) \rightarrow 0$ , ou seja,

$$g(\alpha) - g(0) < 0$$

contradizendo 0 como ponto mínimo de  $g$ . Portanto  $g'(0) = 0$ .

Agora perceba que, aplicando a regra da cadeia para calcular  $g'(0)$  obtemos:

$$g'(0) = \nabla f(x^* + \alpha d)d$$

onde,

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

é o gradiente de  $f$  e como  $g'(0) = 0$  e  $d$  foi tomado de maneira arbitrária, temos que;

$$\nabla f = 0$$

. Esta portanto, é a **primeira condição necessária para otimalidade**, neste caso chamamos  $x^*$  de um ponto estacionário de  $f$ .

### 2.2.1.2 Segunda Condição Necessária para a Otimalidade

Agora suponha que  $f$  seja de classe  $C^2$  e  $x^*$  seu mínimo local, tomemos o mesmo vetor arbitrário  $d \in \mathbb{R}^n$  e vamos determinar a segunda condição necessária e suficiente para o mínimo global. Considere a expansão de Taylor da função  $g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$  mas agora escrevemos até os termos de segunda ordem:

$$g(\alpha) = g(0) + g'(0)\alpha + \frac{1}{2}g''(0)\alpha^2 + o(\alpha^2),$$

onde,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} = 0.$$

Afirmamos que,

$$g''(0) \geq 0.$$

Para mostrar isso, suponha que  $g''(0) < 0$ , como  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} = 0$ , existe  $\varepsilon > 0$ ;

$$|\alpha| > \epsilon \Rightarrow |o(\alpha^2)| < \frac{1}{2} |g''(0)| \alpha^2.$$

Para esses valores de  $\alpha$  podemos concluir que  $g(\alpha) - g(0) < 0$ , contradizendo o fato de que  $g(0)$  é mínimo de  $g$ . Portanto  $g''(0) \geq 0$ .

Agora perceba que podemos levar estas consequências para função  $f$ . Note que;

$$g'(\alpha) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x^* + \alpha d) d_i$$

onde,  $f_{x_i}$  são as derivadas parciais com  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  e  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , diferenciando novamente:

$$g''(\alpha) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x^* + \alpha d) d_i d_j$$

avaliando agora para  $\alpha = 0$ ,

$$g''(0) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x^*) d_i d_j,$$

ou ainda, na forma matricial:

$$g''(0) = d^T \nabla^2 f(x^*) d,$$

onde,

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix},$$

como  $g''(0) \geq 0$  com  $d$  arbitrários, concluímos que,

$$\nabla^2 f \geq 0$$

esta portanto, é a **segunda condição necessária para a otimalidade**.

A segunda condição, serve principalmente para diferenciar pontos de mínimos, máximos e sela, importante para os casos irrestritos de otimalidade, somando a primeira e segunda condição necessária, obtemos a seguinte condição suficiente para a solução ótima. Se  $f$  é de classe  $C^2$  satisfaz

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(x^*) > 0$$

em um ponto interior  $x^*$  de seu domínio, então  $x^*$  é mínimo local estrito de  $f$ . Podemos provar isso sem muitas complicações, novamente vamos fazer a expansão de segunda ordem de  $g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$ , sabemos que  $g'(0) = \nabla f(x^*) = 0$  e  $g''(0) = d^T \nabla^2 f(x^*)d$ , logo

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \frac{1}{2}d^T \nabla^2 f(x^*)d\alpha^2 + o(\alpha^2)$$

pelo fato de  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} = 0$ , para algum  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno temos que:

$$|\alpha| < \varepsilon, \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |o(\alpha^2)| < \frac{1}{2}d^T \nabla^2 f(x^*)d\alpha^2$$

daí, podemos concluir que  $f(x^* + \alpha d) > f(x^*)$  para  $\alpha$  próximo de 0. Ou seja, uma pequena perturbação na função próximo ao ponto estacionário gera um aumento no valor de  $f$ , quando isso acontece, este ponto será mínimo localmente.

### 2.2.2 Condições de Otimalidade em Dimensões infinitas

Agora sim, podemos introduzir os funcionais como principal ferramenta do cálculo das variações, onde a forma mais comumente aplicável é por meio de uma integral, vamos nos atentar aos funcionais deste tipo e buscar funções  $y(x)$  que minimizam a integral dada ao problema. Novamente as condições de mínimo servirão de maneira análoga para o máximo. Então, seja o funcional  $J : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que,

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx.$$

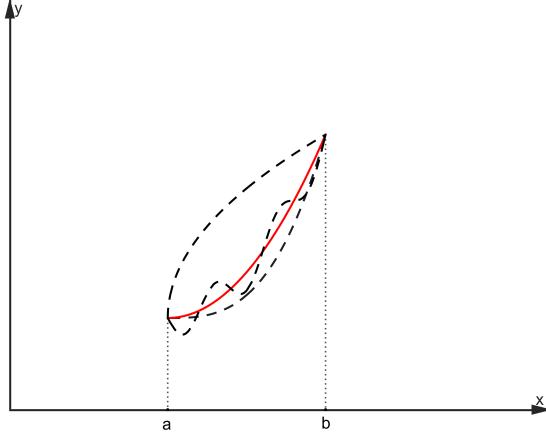
O domínio de  $J$  é um espaço das funções, onde para cada função  $y(x)$ , irá corresponder à um escalar. O cálculo variacional tenta do conjunto de funções admissíveis do domínio e encontrar aquela que satisfaz o caminho ótimo do problema. Já conhecidas as condições de otimalidade em funções em dimensões finitas, os passos para resolver problemas de máximos e mínimos dessas novas funções, segue de maneira bastante similar, as semelhanças vão aparecer, então busquemos as condições de otimalidade de funcionais desta forma.

#### 2.2.2.1 Primeira Condição Necessária para a Otimalidade

Como já foi apresentado o funcional, note que o domínio é o espaço das funções continuamente deriváveis até primeira ordem no intervalo  $[a, b]$ , então de maneira semelhante nas funções em dimensões finitas, precisamos ter uma ideia de variação neste domínio, pois devemos buscar  $y(x)$  que leve  $J$  ao extremo. Veja o gráfico abaixo:

Perceba que, por mais que a integral seja definida em  $[a, b]$ , o caminho de integração exato é desconhecido. Vamos encontrar a função que passa pelos pontos  $(a, y_a)$  e  $(b, y_b)$  que extremiza o nosso funcional. Então supondo que exista  $y(x)$  como extremo de  $J$ ,

Figura 13 – Caminhos possíveis para  $J$ . A linha vermelha é a curva ao longo da qual  $J$  é assumido estacionário, os caminhos tracejados são variações da curva estacionária



Fonte: Autor

devemos avaliar as perturbações ao seu redor e a variação do funcional deve ser nula. Ou seja, tome  $\eta(x)$  de classe  $C^1$ , onde

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

e definiremos uma nova função perturbada para algum  $\alpha$  próximo de 0:

$$Y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$$

$$\delta Y = Y(x, \alpha) - Y(x, 0) = \alpha\eta(x).$$

Note que; para  $\alpha = 0$ , temos que;

$$Y(a) = y(a) \quad \text{e} \quad Y(b) = y(b).$$

Se  $Y(x, \alpha = 0)$  é a solução do nosso problema, então  $Y(x, \alpha \neq 0)$  é a função que descreve um caminho vizinho, daí  $J$  estará sendo avaliado sob o parâmetro  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_a^b f(x, Y(x, \alpha), Y'(x, \alpha)) dx \\ &= \int_a^b f(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx \end{aligned}$$

note que, para que  $J$  seja extremo é necessário que:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Calculemos esta derivada de agora em diante, perceba que,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{dY}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\alpha} \right] dx$$

é óbvio que,

$$\frac{dY}{d\alpha} = \eta$$

$$\frac{dY'}{d\alpha} = \eta'$$

então,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right] dx = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial Y} \eta \right] dx + \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right] dx.$$

Sabemos que,

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

tome  $u = \frac{\partial f}{\partial Y'}$  e  $dv = \eta' dx$ , daí :

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right] dx = \left. \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx$$

como  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , temos que,

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right] dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx$$

logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) \right|_{\alpha=0} &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial Y} \eta dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial Y} \eta - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \right) \eta dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Queremos que a integral seja nula para toda função  $\eta(x)$  satisfazendo as condições já citadas, é comum que isso seja verdade se, e somente se, a expressão em parêntese deve ser nula e será verdade pelo seguinte lema fundamental do cálculo das variações.

### Lema Fundamental do Cálculo das Variações

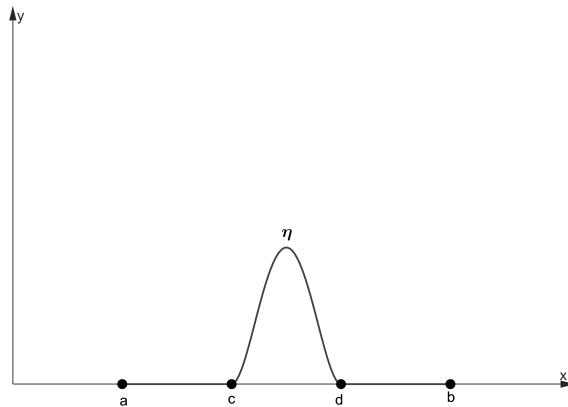
*Seja  $f(x)$  uma função contínua em  $[a, b]$ . A integral*

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0$$

*para toda  $\eta(x)$  de classe  $C^1$ , com  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , se e somente se  $f(x) \equiv 0$  em  $[a, b]$ .*

**Prova:** Suponha que  $f(x) \neq 0$  para algum  $x \in [a, b]$ , pela continuidade de  $f$ , tem-se

Figura 14 – Construção da função  $\eta$



Fonte: Autor

que  $f(x)$  é não nulo em algum subintervalo  $[c, d]$  contendo  $x$ . sem perda de generalidade assumimos que  $f$  seja positivo em  $[c, d]$ .

Construa  $\eta$  de classe  $C^1$  no intervalo  $[a, b]$ , onde  $\eta(x) > 0$  em  $(c, d)$  e  $\eta(x) = 0$  fora deste intervalo; (veja Figura 15). Por exemplo, tome  $\eta(x) = (x-c)^2(x-d)^2$  para  $x \in (c, d)$  e  $\eta(x) = 0$  para  $x \notin (c, d)$ . Isso implica,  $\int_a^b f(x)\eta(x)dx > 0$  em  $[a, b]$ , contradizendo a condição inicial. Portanto  $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$  se, e somente se,  $f(x) = 0$ .

Voltando então para a primeira condição necessária para otimalidade, como:

$$\int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \right) \eta dx = 0,$$

temos que, pelo lema fundamental do cálculo das variações que,

$$\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) = 0,$$

esta, portanto, será a **primeira condição necessária para a otimalidade** ou também chamada de, **equação de Euler-Lagrange**, será assim que vamos chamar a primeira condição necessária de agora em diante. Note ainda que a variação de  $J$  está sendo avaliado para  $\alpha = 0$ , como  $Y(x) \rightarrow y(x)$  quando temos  $\alpha \rightarrow 0$ , para simplicidades de notação podemos reescrever a equação de Euler-Lagrange como:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

### 2.2.3 Verificação de Mínimos Locais em Funcionais (Abordagem Teórica com Possível Extensão Numérica)

A equação de Euler-Lagrange fornece uma condição necessária de primeira ordem para a extremização de funcionais. No entanto, ela não garante, por si só, que a função encontrada realize um mínimo local do funcional. Para isso, é necessário considerar a

*segunda variação*, que fornece uma condição suficiente de otimalidade, análoga ao teste de convexidade em funções reais de uma variável.

A aplicação direta da segunda variação, contudo, envolve dificuldades teóricas e técnicas significativas no contexto funcional. Uma alternativa viável — que não será adotada neste trabalho, mas que merece destaque teórico — é o uso de uma **estratégia numérica baseada em perturbações**.

Considere o funcional  $J[y]$  definido em um conjunto admissível de funções  $A$ . Dizemos que  $y \in A$  é um mínimo local de  $J$  se existir  $\varepsilon > 0$  tal que, para toda função de teste  $\eta(x)$  admissível e para todo  $|\alpha| < \varepsilon$ , temos:

$$J[y] \leq J[y + \alpha\eta(x)].$$

Nesse contexto,  $\eta(x)$  representa uma função suficientemente regular que satisfaz as condições de contorno homogêneas (nulas nas extremidades do intervalo) e é admissível em  $A$ . Para facilitar a implementação numérica, podemos restringir a análise a uma classe específica de funções de teste do tipo:

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - c)^2(x - d)^2, & \text{se } x \in (c, d) \subset [a, b], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Essa escolha permite um controle preciso sobre a região afetada pela perturbação e garante que  $\eta(x)$  seja nula nas bordas do intervalo, respeitando as condições de contorno do problema. Além disso, a classe polinomial escolhida facilita a manipulação simbólica e numérica.

A estratégia consistiria, portanto, em computar numericamente o valor do funcional perturbado  $J[y + \alpha\eta(x)]$  para valores pequenos de  $\alpha$ , e verificar se a desigualdade  $J[y] \leq J[y + \alpha\eta(x)]$  permanece válida. O objetivo seria confirmar, ainda que de forma empírica, que  $y(x)$  representa de fato um mínimo local.

Embora essa abordagem não tenha sido utilizada nos resultados do presente trabalho, ela permanece como uma alternativa teórica relevante e poderá ser empregada em trabalhos futuros, especialmente em contextos mais complexos, como problemas com restrições, ambientes não homogêneos ou presença de forças externas. Além disso, tal análise numérica reforça a intuição física da catenária como configuração de equilíbrio mínimo de energia.

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Uma vez que o contexto teórico do método variacional foi introduzido e algumas propriedades da curva catenária foram brevemente discutidas, a **formulação e solução do problema da catenária** através do suporte do cálculo variacional são apresentadas. A catenária, que é definida como a curva pendurada sobre dois pontos de uma corrente atuada apenas pela gravidade, é uma situação-exemplo que podemos usar para ilustrar esse processo.

Embora a forma da catenária possa ser encontrada usando análise vetorial para as forças envolvidas, o **método variacional fornece um tratamento alternativo e extremamente eficaz**. Em vez de focar nas forças, essa abordagem nos permite discutir a **energia própria do sistema** para encontrar a forma matemática exata da corrente pendurada.

Neste estudo, a atenção será, no entanto, restrita à **energia potencial gravitacional do sistema**. A segunda é intuitiva – sem forças externas, a gravidade puxa a corrente para baixo, ou seja, até que a saída seja **o mais mínima possível**. Portanto, se fosse influenciada apenas pela gravidade, a configuração de equilíbrio da corrente seria a curva que **minimiza essa energia potencial gravitacional**. E é esse caminho que queremos obter do cálculo variacional.

#### 3.1 DESCRIÇÃO FÍSICA E CONDIÇÕES DO PROBLEMA

Para estabelecer a descrição matemática do problema da catenária, é necessário começar com a descrição física do problema e as condições que ele satisfaz.

O sistema em estudo é o de uma corrente uniforme, flexível e inextensível, pendurada entre dois pontos fixos e atuando apenas pela gravidade.

Essa geometria simples, no entanto, produz uma curva de equilíbrio que, pelo menos em sua forma, é ditada pela minimização da energia potencial gravitacional do sistema.

As características gerais do sistema serão exibidas, incluindo os parâmetros e condições de contorno necessárias para descrever adequadamente o problema.

##### 3.1.1 Descrição Física do Sistema

Uma **corrente homogênea e inextensível** com uma **densidade linear de massa constante representada por  $\rho$** . Esta corrente está pendurada e fixada em dois pontos diferentes no plano cartesiano,  $(x_a, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$ .

A **única força externa atuando** no sistema é a **gravidade**, que atua uniformemente ao longo de toda a corrente e com uma amplitude constante  $g$ . Se a rede for

deixada sem qualquer perturbação externa, a rede, em última análise, adotará **uma configuração de equilíbrio estável específica**, matematicamente representada como uma função  $y(x)$ . Esta função que define como a curva é moldada no espaço deve ser **contínua e suavemente diferenciável** para que não haja descontinuidades ou dobras. Estas são **suposições físicas essenciais** para a aplicabilidade das ferramentas de cálculo variacional.

### 3.1.2 Condições de Contorno

A curva da corrente deve satisfazer as condições geométricas do problema. Isso significa que:

- Nos extremos, a curva passa exatamente pelos pontos  $(x_a, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$ .
- A curva deve ser uma solução física viável, respeitando a continuidade e suavidade exigidas para minimização da energia.

Além disso, é necessário considerar que o comprimento total  $L$  da corrente é fixo, sendo um parâmetro que pode influenciar a tensão no sistema e, consequentemente, a forma da curva. Então:

$$G[y] = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2} dx = L$$

é fixado inicialmente.

### 3.1.3 A Energia Potencial do Sistema

A energia potencial gravitacional total do sistema é obtida a partir do princípio físico de que cada elemento infinitesimal de massa contribui para a energia do sistema. Para uma corrente homogênea, a massa total é distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, o que nos permite associar a massa  $dm$  de um elemento infinitesimal da corrente ao comprimento infinitesimal  $ds$  através da densidade linear  $\rho$ :

$$dm = \rho ds,$$

onde  $ds$  é o elemento de comprimento da curva, dado por:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Assim, a contribuição infinitesimal para a energia potencial gravitacional é dada por:

$$dE = gydm = gypds.$$

Integrando ao longo de toda a extensão da corrente, a energia potencial gravitacional total do sistema pode ser expressa como:

$$E[y] = \int_{x_a}^{x_b} \rho gy \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Nesta formulação,  $y(x)$  representa a altura do ponto correspondente na curva, agora, aplicando a restrição do problema para o comprimento  $L$  fixo, na teoria de otimização com restrição, utilizaremos um multiplicador de Lagrange para a restrição, donde o funcional  $E[y]$  sob a restrição será:

$$\begin{aligned} E^*[y] &= E[y] - \lambda(G[y] - L) \\ &= \int_{x_a}^{x_b} \rho gy \sqrt{1+y'^2} - \lambda \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1+y'^2} dx + \lambda L \\ &= \int_{x_a}^{x_b} (\rho gy - \lambda) \sqrt{1+y'^2} dx + \lambda L. \end{aligned}$$

Como a variação é em função de  $y$  e o termo  $\lambda L$  não depende de  $y$  (lembrando que  $L$  é fixado), então o lagrangiano determinante será:

$$f(y, y') = (\rho gy - \lambda) \sqrt{1+y'^2}$$

e a minimização dessa energia determinará a configuração de equilíbrio da corrente. Note que, não havendo dependência direta em  $x$ , podemos concluir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Essa propriedade permite-nos aplicar uma versão modificada da equação de Euler-Lagrange.

Quando  $f$  não depende diretamente de  $x$ , a derivada total de  $f$  em relação a  $x$  é dada por:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'',$$

e isolando  $\frac{\partial f}{\partial y} y'$ , obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Agora, considere a equação de Euler-Lagrange na forma usual:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por  $y'$ , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' = 0.$$

Substituímos  $\frac{\partial f}{\partial y} y'$  pela expressão anterior:

$$\frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' = 0.$$

Pela regra do produto, podemos reescrever:

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) = 0.$$

Isso implica:

$$\frac{d}{dx} \left( f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) = 0.$$

Portanto, a forma modificada da equação de Euler-Lagrange é:

$$f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' = C,$$

onde  $C$  é uma constante que deve ser determinada pelas condições de contorno do problema. Se  $f = (\rho gy - \lambda)\sqrt{1 + y'^2}$ , podemos usar a equação modificada da equação de Euler-Lagrange para encontrar a curva extremo da energia potencial. Note que:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = (\rho gy - \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$(\rho gy - \lambda)\sqrt{1 + y'^2} - (\rho gy - \lambda) \frac{y'^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C.$$

Simplificando:

$$(\rho gy - \lambda) \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \iff \frac{\rho gy - \lambda}{C} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

E ainda:

$$\left( \frac{\rho gy - \lambda}{C} \right)^2 = 1 + y'^2 \iff \sqrt{\left( \frac{\rho gy - \lambda}{C} \right)^2 - 1} = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Separando as variáveis:

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\rho gy - \lambda}{C} \right)^2 - 1}} dy.$$

Fazendo a substituição  $u = \left( \frac{\rho gy - \lambda}{C} \right)$ , com  $dy = \frac{C}{\rho g} du$ , a integral torna-se:

$$\frac{\rho g}{C} x = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du.$$

Sabemos que  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ . Fazendo  $u = \cosh(t)$ , temos  $du = \sinh(t)dt$ .

Assim:

$$\frac{\rho g}{C} x = \int \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} dt = t + k \iff \frac{\rho g}{C} x - k = t.$$

Substituindo de volta  $u = \cosh(t)$ , obtemos:

$$u = \cosh \left( \frac{\rho g}{C} x - k \right).$$

Lembrando que  $u = \left(\frac{\rho gy - \lambda}{C}\right)$ , concluímos:

$$\frac{\rho gy - \lambda}{C} = \cosh\left(\frac{\rho g}{C}x - k\right) \iff y = \frac{C}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{C}x - k\right) + \frac{\lambda}{\rho g}.$$

Definamos  $\frac{\rho g}{C} = a$  e  $\frac{\lambda}{\rho g} = y_0$ , vamos ter:

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax - k) + y_0.$$

Essa é a forma final da solução, que descreve a curva extremo da energia potencial total. A constante  $k$  ajusta o deslocamento horizontal da curva,  $y_0$  será o ponto mais baixo da curva e  $a$  são todos determinados pelas condições de contorno do problema.

### 3.1.4 Condições de Contorno

Vamos encontrar catenárias ideais para dois pontos fixos e tipagem de curvas com diferentes comprimentos. Consideraremos dois pontos de suspensão para a corrente:  $(0, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$ .

Para fins de análise, e sem perda de generalidade, definiremos  $(x_b = l)$  e  $(y_a = y_b = h \neq 0)$ . Este é um caso representativo em que os pontos de suspensão estão no **mesmo nível** e separados por uma **distância horizontal  $l$** .

A equação geral que descreve a forma da catenária é dada por:

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax - k) + y_0.$$

Ao substituir as coordenadas dos pontos de suspensão nesta equação, obtemos o seguinte sistema de equações:

1. No ponto de suspensão  $(0, h)$ :

$$h = \frac{1}{a} \cosh(a \cdot 0 - k) + y_0 \implies h = \frac{1}{a} \cosh(k) + y_0.$$

2. No ponto de suspensão  $(l, h)$ :

$$h = \frac{1}{a} \cosh(al - k) + y_0.$$

Comparando as equações nos dois pontos podemos inferir que:

$$\frac{1}{a} \cosh(k) = \frac{1}{a} \cosh(al - k).$$

com  $l = 1$  e  $h = 2$  podemos assumir que:

$$k = a - k \iff k = \frac{a}{2}.$$

reescrevendo a equação no ponto  $(0, 1)$ :

$$2 = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{a}{2}\right) + y_0.$$

Vamos relacionar as condições de contorno com o comprimento do arco  $L$ , ou seja;

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

onde,  $y = \frac{1}{a} \cosh(ax - k)$ ,  $y' = \sinh(ax - k)$  e substituindo no comprimento do arco, temos que:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2(ax - k)} dx,$$

da identidade fundamental da trigonometria hiperbólica temos que,  $1 + \sinh^2(ax - k) = \cosh^2(ax - k)$ , e ainda como  $\cosh(ax - k)$  é sempre positivo então:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \cosh(ax - k) dx = \frac{1}{a} \sinh(ax - k) \Big|_0^1 = \frac{1}{a} (\sinh(a - k) - \sinh(-k)) \\ &= \frac{1}{a} (\sinh(a - k) + \sinh(k)). \end{aligned}$$

Sabemos ainda que,  $k = al/2$  e  $l = 1$  então:

$$L = \frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a}{2}\right) \iff La = 2 \sinh\left(\frac{a}{2}\right).$$

Ou seja, tomado as condições de contorno e o comprimento  $L$ , temos que:

1.  $2a = \cosh\left(\frac{a}{2}\right) + y_0$  (Condições de contorno)
2.  $\frac{La}{2} = \sinh\left(\frac{a}{2}\right)$  (Condições de comprimento  $L$ )

Dividindo a segunda condição pela primeira, temos:

$$L - y_0 = \frac{\sinh\left(\frac{a}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{2}\right)} = \tanh\left(\frac{a}{2}\right),$$

ou seja,

$$a = 2 \tanh^{-1}(L - y_0).$$

Pela definição da função  $\tanh^{-1} x$  [5] temos que  $|x| < 1$ , ou seja,

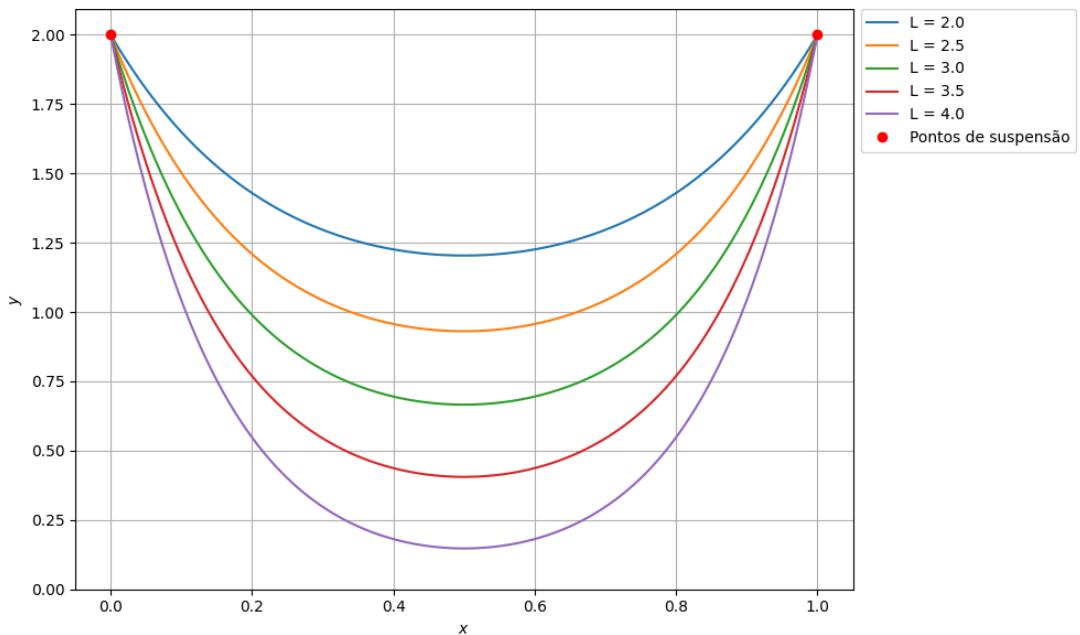
$$|L - y_0| < 1 \iff y_0 - 1 < L < y_0 + 1.$$

Retomando para a condição de comprimento da curva, usaremos um método de Newton-Rapshon [6] para determinar valores de  $a$  para alguns valores de  $L$ , lembrando que  $L > l$ , onde  $l$  é a distância horizontal dos dois pontos de suspensão. Utilizando um código Python e sabendo que,  $k = a/2$  e  $y_0 = 2a - \cosh\left(\frac{a}{2}\right)$ , encontramos os seguintes valores:

Tabela 1 – Valores de  $k$  e  $y_0$  para o comprimento  $L$ 

Comprimento $L$	$a$	$k$	$y_0$
2.0	4.354638	2.177319	4.241293
2.5	5.105309	2.552655	3.751108
3.0	5.676893	2.838446	2.779929
3.5	6.139248	3.069624	1.488374
4.0	6.527592	3.263796	-0.038242

Donde, para estes valores, teremos os seguintes curvas catenárias:

Figura 15 – Catenárias com diferentes comprimentos  $L$ 

### 3.1.5 Considerações finais sobre a formulação

A dedução apresentada fornece a forma exata da curva de equilíbrio que minimiza a energia potencial gravitacional de uma corrente suspensa entre dois pontos com comprimento fixo: a catenária. O problema foi modelado por meio do cálculo variacional, incorporando a restrição de comprimento via multiplicador de Lagrange, e a solução obtida confirma a forma conhecida da catenária como função hiperbólica.

Embora ferramentas numéricas possam ser empregadas para investigar mais diretamente o caráter de mínimo dessa configuração, optou-se neste trabalho por uma abordagem teórica e conceitual. Assim, na seção seguinte, reforçaremos por meio de argumentos físicos observáveis que a catenária não representa apenas um ponto crítico da energia potencial, mas sim o estado de menor energia possível sob as condições impostas.

### 3.2 VERIFICAÇÃO FÍSICA E CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A MINIMIZAÇÃO

Além de se obter a solução variacional para a forma da catenária, é essencial analisar se tal configuração corresponde efetivamente a um *mínimo* da energia potencial gravitacional, e não apenas a uma solução *estacionária* da equação de Euler-Lagrange com restrição de comprimento.

Nesse contexto, observações de ordem física e práticas experimentais desempenham um papel significativo. Quando uma corrente homogênea, lisa e flexível é suspensa entre dois pontos fixos, ela assume espontaneamente a forma de uma catenária, sem necessidade de ajustes externos ou cálculos prévios. Tal comportamento decorre da ação da gravidade e da distribuição uniforme da tensão ao longo do comprimento da corrente.

Essa resposta natural do sistema sugere fortemente que a catenária não apenas satisfaz a equação de Euler, mas também corresponde a uma configuração de equilíbrio estável, compatível com a minimização da energia potencial gravitacional. Adicionalmente, qualquer perturbação admissível da curva — isto é, qualquer modificação que preserve tanto o comprimento total da corrente quanto as posições dos pontos de fixação — tende a elevar o centro de massa do sistema. Como consequência, a energia potencial total aumenta, reforçando a hipótese de que a catenária ocupa uma posição de energia mínima.

Outro argumento relevante decorre da simetria característica da catenária, cuja forma se organiza em torno de um ponto mais baixo situado ao centro do vão. Essa simetria favorece a concentração de grande parte da massa da corrente próxima à menor altura possível, contribuindo assim para a minimização da energia gravitacional. Qualquer outra configuração admissível, ao romper essa simetria, inevitavelmente redistribuiria parte da massa para regiões de maior altitude, resultando em um aumento da energia potencial.

Dessa forma, mesmo sem recorrer a uma análise rigorosa da segunda variação ou à verificação formal da convexidade do funcional associado, os indícios fornecidos pela física e pelas observações empíricas sustentam que a catenária representa, com elevada probabilidade, não apenas um *mínimo local*, mas possivelmente o *mínimo global* da energia potencial total do sistema.

## 4 RESULTADOS ANALÍTICOS E CONCLUSÃO

Neste trabalho, aplicamos o **Cálculo das Variações** à determinação da forma de equilíbrio de uma corrente homogênea, flexível e inextensível, suspensa entre dois pontos fixos e sujeita exclusivamente à gravidade — o problema clássico da **catenária**.

O funcional de energia potencial gravitacional do sistema é dado por:

$$E[y] = \int_{x_a}^{x_b} \rho g y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

com a restrição de comprimento fixo da corrente:

$$G[y] = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2} dx = L.$$

Para incorporar essa restrição, utilizamos um multiplicador de Lagrange, definindo o funcional:

$$E^*[y] = \int_{x_a}^{x_b} (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx + \lambda L.$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange adaptada para funcionais independentes de  $x$ , obteve-se a equação diferencial cuja solução leva à forma conhecida da catenária:

$$y(x) = \frac{1}{a} \cosh(ax - k) + y_0,$$

onde os parâmetros  $a$ ,  $k$  e  $y_0$  são determinados pelas condições de contorno e pelo comprimento total da corrente. Valores numéricos desses parâmetros foram obtidos por métodos computacionais, a partir da equação:

$$L = \frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a}{2}\right),$$

considerando, por simplicidade, dois pontos de suspensão no mesmo nível e separados horizontalmente por uma unidade.

A análise qualitativa mostra que a catenária não representa apenas uma solução estacionária, mas sim um *mínimo* da energia potencial. Isso se confirma tanto pela simetria da curva quanto pela resposta física observada: uma corrente real, ao ser suspensa, tende espontaneamente à configuração catenária.

## CONCLUSÃO

Nossa análise sobre a catenária buscou equilibrar a elegância das soluções analíticas com o suporte de métodos numéricos. Isso evidenciou não só a precisão das ferramentas do Cálculo das Variações, mas também fortaleceu a base teórica e prática para entender estruturas otimizadas.

A partir de argumentos físicos e simétricos, constatamos que a curva catenária representa um mínimo de energia potencial gravitacional — não simplesmente um ponto crítico — e essa descoberta abre espaço para investigações futuras, incluindo a análise da segunda variação ou outros métodos de otimização com restrições, como por exemplo, penalidades de restrições.

Além do mais, essa abordagem pode ser facilmente adaptada para problemas mais complexos e realistas. Por exemplo, podemos incluir forças externas dinâmicas, como vento, cargas móveis ou tensões variáveis, que são importantes em várias aplicações de engenharia, como no projeto de pontes suspensas ou cabos em estruturas tensionadas. Considerar ambientes heterogêneos ou sistemas não lineares também ajuda a criar modelos mais próximos da realidade, tornando as análises ainda mais úteis.

De uma forma mais geral, estudar o Cálculo das Variações e suas aplicações em problemas clássicos, como a catenária ou a braquistócrona, é fundamental na formação dos estudantes de matemática. Essa área combina teoria rigorosa com aplicação prática, permitindo que os estudantes percebam como a busca pela melhor solução — seja em tempo, forma ou energia — está presente em muitos fenômenos físicos e projetos de engenharia.

Ao integrar aspectos analíticos, geométricos e computacionais, essa disciplina desenvolve habilidades de modelagem, pensamento crítico e compreensão das limitações do mundo real. Assim, ela conecta teoria matemática à prática, preparando profissionais capazes de propor soluções eficientes e otimizadas em suas áreas de atuação.

## REFERÊNCIAS

- 1 BOS, H. J. M. *O cálculo no século XVIII: Técnicas e aplicações*. Brasília, DF: Universidade de Brasília, 1985. v. 5. (Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo, v. 5).
- 2 GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. *Calculus of Variations*. Mineola, New York: Dover Publications, 2000. ISBN 978-0486414488.
- 3 LIBERZON, D. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton: Princeton University Press, 2012.
- 4 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo - Volume 2*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2018. ISBN 9788543027562.
- 5 LEITHOLD, L. *Cálculo com Geometria Analítica*. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Harbra, 1994. ISBN 8529400269.
- 6 RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. ISBN 978-85-7605-181-4.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – CÓDIGOS DE PYTHON

Este apêndice contém os códigos-fonte desenvolvidos em **linguagem Python** e utilizados nas análises e cálculos apresentados neste trabalho. Cada script desempenhou um papel fundamental para:

- A **determinação das constantes da catenária** para satisfazer as condições de contorno.
- O **Plotagem dos gráficos das catenárias**.

Os códigos foram desenvolvidos e executados no ambiente **Google Colab** utilizando **Python**. Para facilitar a consulta e a reprodutibilidade, cada script é acompanhado de um breve cabeçalho explicativo sobre sua funcionalidade específica.

### Determinação das Constantes da Catenária

Definidos os pontos de contorno como:  $(0, 2)$  e  $(1, 2)$ , precisaremos determinar as raízes da função, para alguns variados  $L$ (comprimento da curva no intervalo  $[0, 1]$ ):

$$F(a) = \frac{La}{2} - \sinh\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

pra isso vamos aplicar o método de Newton-Rapshon, usando a seguinte relação interativa:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Vamos estimar um valor inicial para  $a = 10$  e um erro de tolerância de  $10^{-10}$  e obter um máximo de 100 interações. com isso podemos copilar o seguinte código:

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import newton
3 import pandas as pd
4
5 # --- Definições das Funções ---
6
7 def f(a, L):
8     """Função cuja raiz queremos encontrar: (L*a)/2 - sinh(a/2)
9     """
10
11    return (L * a) / 2 - np.sinh(a / 2)
12
13 def df(a, L):
14    """Derivada da função f em relação a a"""
15    return (L / 2) - (1 / 2) * np.cosh(a / 2)

```

```

14
15 # --- Lista de Comprimentos Desejados ---
16
17 L_list = [2, 2.5, 3, 3.5, 4]
18 resultados = []
19
20 # --- Cálculo de a para cada L via Método de Newton-Raphson ---
21
22 for L in L_list:
23     try:
24         chute_inicial = 10.0
25         a_sol = newton(f, x0=chute_inicial, fprime=df, args=(L
26             ,), tol=1e-10, maxiter=100)
27         resultados.append({'L': L, 'a': round(a_sol, 6)})
28     except RuntimeError:
29         resultados.append({'L': L, 'a': 'sem convergência'})
30
31
32 df = pd.DataFrame(resultados)
33 print(df.to_string(index=False))

```

Código 1 – Cálculo do Parâmetro  $a$  para Diferentes Comprimentos  $L$  via Método de Newton-Raphson

Encontrado os parâmetros  $L$  e  $a$ , vamos ser capaz de calcular  $k$  e  $y_0$  e utilizamos o seguinte código:

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3
4 # --- Lista de Dados Fornecidos ---
5
6 L_list = [2, 2.5, 3, 3.5, 4]
7 a_list = [4.354638, 5.105309, 5.676893, 6.139248, 6.527592]
8
9 # --- Cálculo dos Parâmetros k e y0 ---
10
11 resultados = []
12
13 for L, a in zip(L_list, a_list):
14     k = a / 2
15     y0 = 2 * a - np.cosh(a / 2)

```

```

16     resultados.append({
17         'L': L,
18         'a': round(a, 6),
19         'k': round(k, 6),
20         'y0': round(y0, 6)
21     })
22
23 # --- Exibição da Tabela de Resultados ---
24
25 df = pd.DataFrame(resultados)
26 print(df.to_string(index=False))

```

Código 2 – Cálculo dos Parâmetros  $k$  e  $y_0$  a partir de Valores de  $a$  para Diferentes Comprimentos  $L$

Montamos a tabela de parâmetros, e com ele conseguimos fazer a plotagem dos gráficos usando este outro código:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # --- Dados de Entrada ---
5
6 dados = [
7     {'L': 2.0, 'a': 4.354638, 'k': 2.177319, 'y0': 0.973971},
8     {'L': 2.5, 'a': 5.105309, 'k': 2.552655, 'y0': 0.734746},
9     {'L': 3.0, 'a': 5.676893, 'k': 2.838446, 'y0': 0.489692},
10    {'L': 3.5, 'a': 6.139248, 'k': 3.069624, 'y0': 0.242436},
11    {'L': 4.0, 'a': 6.527592, 'k': 3.263796, 'y0': -0.005859}
12 ]
13
14 # --- Geração de Pontos no Eixo x ---
15
16 x = np.linspace(0, 1, 500)
17 h = 2 # altura dos pontos de suspensão
18
19 plt.figure(figsize=(10, 6))
20
21 # --- Plotagem das Catenárias ---
22
23 for d in dados:
24     a = d['a']
25     k = d['k']

```

```
26     y0 = d['y0']
27     y = (1 / a) * np.cosh(a * x - k) + y0
28     plt.plot(x, y, label=f'L={d["L"]}')
29
30 # --- Pontos de Suspensão ---
31
32 plt.plot([0, 1], [h, h], 'ro', label="Pontos de suspensão")
33
34 # --- Configuração do Gráfico ---
35
36 plt.xlabel("$x$")
37 plt.ylabel("$y$")
38 plt.ylim(bottom=0)
39 plt.grid(True)
40 plt.legend(loc='upper_left', bbox_to_anchor=(1.01, 1.0),
            borderaxespad=0.)
41 plt.tight_layout()
42 plt.show()
```

Código 3 – Plotagem das Catenárias para Diferentes Comprimentos  $L$