



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

GUILHERME MENDES CALAND

OTIMIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE UM PROJÉTIL
EM UM MEIO COM RESISTÊNCIA DO AR

Teresina
2025

GUILHERME MENDES CALAND

OTIMIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE UM PROJÉTIL EM UM MEIO COM RESISTÊNCIA DO AR

Trabalho de conclusão de curso de graduação
apresentado ao Departamento de Matemática
da Universidade Estadual do Piauí como
parte dos requisitos para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática.

Orientador: **Prof. Me. Lenilson Torres Brito**

Co-orientador: **Prof. Dr. Gladstone Alves de Alencar**

Teresina

2025

C142o Caland, Guilherme Mendes.

Otimização da trajetória de um projétil em um meio com
resistência do ar / Guilherme Mendes Caland. - Teresina, 2025.
59 f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Estadual do Piauí-UESPI,
Licenciatura Plena em Matemática, Campus Poeta Torquato Neto,
Teresina-PI, 2025.

"Orientador: Prof. Me. Lenílson Torres Brito".

"Coorientador: Prof. Dr. Gladstone Alves de Alencar".

1. Cálculo variacional. 2. Otimização. 3. Lançamento oblíquo.
4. Resistência do ar. I. Brito, Lenílson Torres . II. Alencar,
Gladstone Alves de . III. Título.

CDD 510.07

GUILHERME MENDES CALAND

OTIMIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE UM PROJÉTIL EM UM MEIO COM RESISTÊNCIA DO AR

¹Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Piauí como parte dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Alterar a data ou preencher à mão Aprovado em ____ de _____ de

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Me. Lenílson Torres Brito
Universidade Estadual do Piauí (UESPI)

Prof. Dr. Gladstone Alves de Alencar
Universidade Estadual do Piauí (UESPI)

Prof. Dr. Pedro Paulo Alves Oliveira
Universidade Estadual do Piauí (UESPI)

Prof. Dr. Jefferson de Brito Sousa
Universidade Estadual do Piauí (UESPI)

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho marca o fim de uma etapa significativa da minha trajetória acadêmica. Esse percurso só foi possível graças ao apoio, incentivo e colaboração de muitas pessoas, às quais expresso minha profunda gratidão. Quero agradecer, primeiramente, à Deus, por ter me dado forças, saúde e resiliência ao longo dessa trajetória. À minha família, especialmente meus pais, irmãos e avós, pelo apoio e incentivo, que foi essencial para que eu não desistisse. Aos meus orientadores, Lenilson Torres Brito e Gladstone Alves de Alencar, por toda a ajuda, orientação e disponibilidade que foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho. E aos meus amigos, que estiveram ao meu lado ao longo da caminhada, dividindo não só as dificuldades do curso, mas também os aprendizados. A presença e o apoio de vocês foram fundamentais nessa jornada.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é determinar a trajetória que minimiza uma determinada função objetivo, como o tempo de voo, a distância percorrida ou a altura máxima atingida, que estarão sujeitas às restrições impostas pela física do problema e pelas condições iniciais e finais. Neste problema, serão utilizadas técnicas avançadas de otimização e cálculo variacional. A metodologia inclui a formulação do problema de otimização, a derivação da equação de Euler-Lagrange associada ao problema e o desenvolvimento de métodos analíticos e numéricos. Por fim, os resultados obtidos serão analisados em termos da trajetória ótima do projétil, considerando diferentes cenários de lançamento.

Palavras-chave: Trajetória, Euler-Lagrange, cálculo variacional, otimização.

ABSTRACT

The main objective of this work is to determine the trajectory that minimizes a specific objective function, such as the flight time, the distance traveled, or the maximum height reached, subject to the constraints imposed by the physics of the problem and the initial and final conditions. Advanced optimization techniques and variational calculus will be used in this problem. The methodology includes the formulation of the optimization problem, the derivation of the Euler-Lagrange equation associated with the problem, and the development of analytical and numerical methods. Finally, the results obtained will be analyzed in terms of the optimal trajectory of the projectile, considering different launch scenarios.

Keywords: Trajectory, variational calculus, Euler-Lagrange, optimization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Projétil na origem	17
Figura 2 – Projétil após o lançamento	18
Figura 3 – Projétil na altura máxima	18
Figura 4 – Projétil em queda	18
Figura 5 – Projétil no alcance máximo	19
Figura 6 – Lançamento da Partícula	23
Figura 7 – Trajetória da Partícula	29
Figura 8 – Curvas vizinhas à função ótima representada por y	34
Figura 9 – Trajetória da partícula variando o parâmetro β	44
Figura 10 – Velocidade da partícula na componente x em relação ao tempo	44
Figura 11 – Velocidade da partícula na componente y em relação ao tempo	45
Figura 12 – Altura da partícula em relação ao tempo	45
Figura 13 – Energia Cinética em relação ao tempo	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	JUSTIFICATIVA	10
1.2	OBJETIVO GERAL	10
1.3	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	10
1.4	METODOLOGIA	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1	DINÂMICA DE PARTÍCULAS	12
2.1.1	LEIS DE NEWTON	12
2.1.1.1	Primeira Lei de Newton	12
2.1.1.2	Segunda Lei de Newton	12
2.1.1.3	Terceira Lei de Newton	13
2.1.2	CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS	13
2.1.2.1	Posição e Deslocamento	13
2.1.2.2	Velocidade Média e Velocidade Escalar Média	14
2.1.2.3	Velocidade Instantânea e Aceleração	14
2.1.2.4	Um caso especial de Aceleração Constante	15
2.1.3	MOVIMENTO EM DUAS DIMENSÕES	16
2.1.3.1	Posição e Deslocamento	16
2.1.3.2	Movimento Balístico	17
2.1.3.3	Análise do Movimento Balístico	19
2.1.4	ENERGIA CINÉTICA	20
2.1.5	TRABALHO	20
2.1.6	ENERGIA POTENCIAL	21
2.1.7	FORÇAS RESISTIVAS	22
2.2	CÁLCULO VARIACIONAL	29
2.2.1	UM POUCO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO VARIACIONAL	29
2.2.2	FUNCIONAIS	31
2.2.3	LEMA DE DU BOIS-REYMOND	32
2.2.4	EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE	33
3	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O LANÇAMENTO OBLÍQUO SUJEITO A RESISTÊNCIA DO AR	37
3.1	FORÇA DE RESISTÊNCIA DO AR	37
3.1.1	Forças de arrasto	37

3.2	FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE RAYLEIGH	37
3.2.1	Coordenadas Generalizadas	38
3.2.2	Potenciais Generalizados	38
3.2.3	Função de Dissipação de Rayleigh para o caso em que a Força de Arrasto é proporcional a velocidade	40
3.2.4	Solução das Equações de Movimento	41
3.3	ANÁLISE NUMÉRICA	43
4	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A – CÓDIGOS EM PHYTON UTILIZADOS PARA EXIBIR OS GRÁFICOS APRESENTADOS NA SEÇÃO DE ANÁLISE NUMÉRICA.	51

1 INTRODUÇÃO

A escolha do tema "Otimização da trajetória de um Projétil em um Meio com Resistência do Ar" para este trabalho surge da necessidade de compreender e otimizar o comportamento de projéteis em um ambiente realista, onde a presença da resistência do ar tem um papel significativo na dinâmica do movimento. Este problema apresenta desafios teóricos e práticos interessantes, exigindo a aplicação de conceitos avançados de otimização e cálculo variacional.

A resistência do ar é uma força oposta ao movimento de um projétil e depende de vários fatores, incluindo a velocidade do projétil, a densidade do ar, a área de seção transversal e o coeficiente de arrasto, sendo que para este trabalho, não serão abordados os fatores de densidade do ar e área da seção transversal. Diferentemente de um movimento parabólico idealizado, onde a única força atuante é a gravidade, a presença da resistência do ar resulta em trajetórias mais complexas e realistas. A força de arrasto geralmente aumenta com o quadrado da velocidade, tornando essencial o uso de equações diferenciais para modelar com precisão o movimento do projétil. No entanto, neste trabalho irá ser abordado o caso em que a força de arrasto é linear, ou seja, é proporcional à velocidade.

Para otimizar a trajetória de um projétil, é necessário primeiro desenvolver um modelo matemático que descreva seu movimento. Este modelo inclui a formulação das equações de movimento, que são equações diferenciais que incorporam a resistência do ar.

A otimização da trajetória envolve a determinação das condições de lançamento que minimizam ou maximizam uma função objetivo específica, como o tempo de voo, a distância percorrida ou a altura máxima atingida. As variáveis de controle podem incluir o ângulo de lançamento, a velocidade inicial e as características físicas do projétil, como massa e forma. Técnicas de otimização, como algoritmos genéticos, programação matemática e métodos baseados em gradiente, são empregadas para encontrar a combinação ideal dessas variáveis.

Dessa forma, a compreensão e otimização da trajetória de um projétil em um meio com resistência do ar não apenas têm aplicações práticas em áreas como a engenharia aeroespacial e o design de armamentos, mas também contribuem para o avanço do conhecimento na área de mecânica aplicada e cálculo de variações. Assim, através do uso de técnicas avançadas de otimização e cálculo variacional, é possível melhorar significativamente o desempenho de projéteis em várias aplicações. Logo, este trabalho visa contribuir para o avanço deste campo, oferecendo uma análise detalhada e metodologias robustas para a determinação de trajetórias ótimas.

1.1 JUSTIFICATIVA

A escolha do tema "Otimização da trajetória de um projétil em um meio com resistência do ar" é justificada pela sua relevância tanto na prática da engenharia e da física quanto no avanço do conhecimento na área de otimização e cálculo variacional. Sendo assim, a otimização da trajetória de um projétil em um meio com resistência do ar é de extrema importância na engenharia aeroespacial, no design de projéteis militares, no desenvolvimento de foguetes e em diversas outras aplicações onde o desempenho de um projétil é crítico. O comportamento de um projétil lançado em um meio com resistência do ar é governado por equações diferenciais não lineares que descrevem a interação complexa entre as forças de impulso e arrasto, tornando o problema de otimização desafiador.

Além disso, a pesquisa sobre a otimização da trajetória de um projétil em um meio com resistência do ar contribui para o avanço do conhecimento na área de otimização e cálculo variacional, oferecendo insights valiosos sobre métodos de resolução de problemas complexos de dinâmica de partículas. Ao investigar este problema, os alunos terão a oportunidade de aplicar e aprimorar técnicas avançadas de otimização, cálculo variacional e modelagem computacional, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais para futuros profissionais da área.

Portanto, a realização deste trabalho de conclusão de curso não apenas proporcionará uma experiência de aprendizado enriquecedora para os alunos, mas também contribuirá para o avanço do conhecimento científico e tecnológico na área de otimização, física aplicada e cálculo de variações.

1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho de conclusão de curso é investigar e determinar a trajetória ótima de um projétil em um meio com resistência do ar, utilizando técnicas avançadas de otimização e cálculo variacional. Busca-se encontrar os parâmetros de lançamento que maximizam ou minimizam uma determinada função objetivo, como a distância percorrida, o tempo de voo ou a altura máxima alcançada, sujeita às restrições impostas pela física do problema.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Formular o problema de otimização.
- Derivar a equação de Euler-Lagrange associada ao problema de otimização.
- Desenvolver métodos analíticos.
- Implementar métodos numéricos.

- Analisar e interpretar os resultados obtidos.

A realização desses objetivos permitirá uma análise detalhada e rigorosa da trajetória ótima de um projétil em um meio com resistência do ar, integrando conceitos de física, matemática e computação.

1.4 METODOLOGIA

Para a execução deste projeto e realização dos objetivos propostos, será adotada uma metodologia que integra abordagens analíticas e numéricas, utilizando técnicas avançadas de cálculo variacional, otimização e modelagem computacional. Veja a seguir, cada etapa da metodologia:

- Inicialmente, o problema de otimização será formulado de maneira precisa, considerando as equações de movimento do projétil sujeitas às forças de impulso e arrasto.
- Será derivada a equação de Euler-Lagrange associada ao problema de otimização, levando em consideração as condições iniciais e finais do movimento.
- Serão desenvolvidos métodos analíticos para resolver a equação de Euler-lagrange e obter soluções aproximadas para a trajetória ótima do projétil.
- Serão implementados métodos numéricos utilizando **Phyton**.
- Os resultados obtidos serão analisados e interpretados em termos da trajetória ótima do projétil, considerando diferentes cenários de lançamento e condições ambientais.

Essa metodologia integrada permitirá uma abordagem abrangente e rigorosa do problema de otimização da trajetória de um projétil em um meio com resistência do ar, combinando técnicas analíticas e numéricas avançadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 DINÂMICA DE PARTÍCULAS

A dinâmica de partículas é um ramo da mecânica clássica que estuda o movimento de partículas, ou seja, corpos que possuem massa, mas cujas dimensões são desprezadas neste problema em específico. A ideia de partícula simplifica o estudo de objetos físicos e permite aplicar conceitos fundamentais de forma mais direta. Sendo assim, a dinâmica de partículas busca compreender como funciona o movimento de uma partícula, quando esta se encontra sob forças que atuam sobre ela. Neste capítulo, será abordado o estudo das leis de movimento, cinemática de partículas e forças resistivas. Tudo isso servirá de base para os conceitos mais avançados que serão abordados posteriormente. Para esta seção, vamos utilizar (NUSSENZVEIG, 2002) e (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012).

2.1.1 LEIS DE NEWTON

2.1.1.1 Primeira Lei de Newton

Antes de Newton formular sua mecânica, conhecida como *Mecânica Newtoniana*, pensava-se que uma força era necessária para manter um corpo em movimento com velocidade constante e que um corpo se encontrava em repouso, apenas quando estivesse em seu "estado natural". Para que um corpo se movesse com velocidade constante, era preciso que ele fosse impulsionado de alguma maneira, caso contrário, iria parar naturalmente. A partir disso, a *Primeira Lei de Newton* nos diz que, "se nenhuma força atua sobre um corpo, sua velocidade não pode mudar, ou seja, o corpo não pode sofrer aceleração", dessa forma, se um corpo está em repouso, continuará em repouso, se está em movimento, continuará em movimento. Esta lei ficou conhecida como Lei da Inércia.

2.1.1.2 Segunda Lei de Newton

A segunda lei de Newton, também conhecida como **Lei Fundamental da Dinâmica**, estabelece uma relação entre a força aplicada sobre um corpo, sua massa e a aceleração resultante. Matematicamente, temos:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.1)$$

onde:

- \vec{F} é a força resultante atuando sobre o corpo(em Newtons,N),
- m é a massa do corpo(em quilogramas, Kg),
- \vec{a} é a aceleração do corpo(em metros por segundo, m/s).

A força resultante é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre um corpo, se a força resultante for igual a zero, a aceleração será nula, ou seja, o corpo estará em equilíbrio.

2.1.1.3 Terceira Lei de Newton

Dizemos que dois corpos interagem, quando empurram ou puxam um ao outro, ou seja, quando cada corpo exerce uma força sobre o outro. Dessa forma, a terceira lei de Newton, também conhecida como **lei da ação e reação**, afirma que, "quando dois corpos interagem, as forças que cada corpo exerce sobre o outro são iguais em módulo e têm sentidos opostos".

2.1.2 CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS

A cinemática de partículas é a área da mecânica que tem como foco principal, a análise de como as partículas se movem no espaço ao longo do tempo, levando em consideração grandezas como posição, velocidade e aceleração. O estudo da cinemática de partículas é essencial para entender as trajetórias e características do movimento de corpos, e é aplicável tanto em situações cotidianas, como o movimento de carros e bolas, quanto em fenômenos mais complexos, como a órbita de planetas ou o comportamento de projéteis.

Através da cinemática, é possível explorar diferentes padrões de movimento, como o movimento uniforme, onde a velocidade é constante, ou o movimento acelerado, onde a velocidade varia ao longo do tempo. Dessa forma, a cinemática fornece a base para a compreensão dos princípios fundamentais do movimento, que serão aprofundados na dinâmica ao incluir as forças que atuam sobre a partícula.

2.1.2.1 Posição e Deslocamento

Localizar um objeto significa determinar a posição do objeto em relação a um ponto de referência, frequentemente a origem (ou ponto zero) de um eixo como o eixo x . O sentido positivo do eixo é o sentido em que os números (coordenadas) que indicam a posição dos objetos aumentam de valor. O sentido oposto é o sentido negativo. Assim, por exemplo, uma partícula pode estar localizada em $x = 8m$, o que significa que está a 8 metros da origem no sentido positivo. Se estivesse localizada em $x = -8m$, estaria também a 8 metros da origem, mas no sentido oposto.

A uma mudança de uma posição x_1 para uma posição x_2 é associado um deslocamento Δx , dado por

$$\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2.2)$$

O deslocamento possui duas características: o **módulo** é a distância entre as posições inicial e final; e a **orientação**, de uma posição inicial para uma posição final, que pode ser representada por um sinal positivo ou um sinal negativo se o movimento for retilíneo.

2.1.2.2 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média

A **velocidade média** (V_m) é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo Δt durante o qual esse deslocamento ocorre,

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.3)$$

Em um gráfico de x em função de t , V_m é a inclinação da reta que liga dois pontos particulares da curva $x(t)$: um dos pontos corresponde a x_2 e t_2 e o outro a x_1 e t_1 . Da mesma forma que o deslocamento, V_m também possui um módulo, uma direção e um sentido. O módulo é o valor absoluto da inclinação da reta. Um valor positivo de V_m (e da inclinação) significa que a reta está inclinada para cima da esquerda para a direita e um valor negativo de V_m (e da inclinação) significa que a reta está inclinada para baixo da esquerda para a direita.

A **velocidade escalar média** (S_m) é uma forma diferente de descrever a velocidade de uma partícula. Enquanto a **velocidade média** envolve o deslocamento da partícula, dx , a **velocidade escalar média** é definida em termos da distância total percorrida, independentemente da direção. Assim,

$$S_m = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

2.1.2.3 Velocidade Instantânea e Aceleração

Velocidade instantânea é a velocidade de um corpo em um instante específico de tempo. Ela indica quão rápido e em que direção um objeto está se movendo naquele exato momento. Diferentemente da velocidade média, que considera um intervalo de tempo, a velocidade instantânea foca em um momento pontual.

Seja $x(t)$ a função que descreve a posição de um corpo em função do tempo, a velocidade instantânea é dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.5)$$

Quando a velocidade de uma partícula varia, diz-se que a partícula sofreu uma **aceleração** (ou foi acelerada). Para movimentos ao longo de um eixo, a **aceleração média** a_m em um intervalo de tempo Δt é

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (2.6)$$

onde a partícula tem uma velocidade v_1 no instante t_1 e uma velocidade v_2 no instante t_2 . A **aceleração instantânea** é a taxa de variação da velocidade em um instante específico de tempo. Assim como a velocidade instantânea mede o quão rapidamente a posição muda, a aceleração instantânea mede o quão rapidamente a velocidade está mudando naquele momento. Assim, se a velocidade de um corpo é dada por uma função $v(t)$, podemos definir a aceleração instantânea como

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (2.7)$$

Agora, substituindo a (2.5) na (2.7), obtemos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.8)$$

com esta equação da segunda derivada, podemos obter a aceleração de um objeto a partir de sua posição.

2.1.2.4 Um caso especial de Aceleração Constante

Em muitos tipos de movimento, a aceleração é constante ou aproximadamente constante. Por exemplo, você pode acelerar um carro a uma taxa aproximadamente constante quando a luz de um sinal de trânsito muda de vermelho para verde. Mais tarde, quando você freia o carro até parar, a aceleração (ou desaceleração, na linguagem comum) pode também ser aproximadamente constante. Assim, para esses casos, foi formulado um conjunto especial de equações para lidar com eles. Quando a aceleração é constante, a aceleração média e instantânea são iguais e podemos escrever a Eq.(2.6), na forma

$$a = a_m = \frac{v - v_0}{t - 0}, \quad (2.9)$$

onde v_0 é a velocidade no instante $t = 0$ e v é a velocidade em um instante de tempo posterior t . Isolando v , temos:

$$v = v_0 + at. \quad (2.10)$$

Analogicamente, podemos escrever a Eq.(2.3), na forma

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - 0}, \quad (2.11)$$

isolando x , temos:

$$x = x_0 + v_m t, \quad (2.12)$$

onde x_0 é a posição da partícula em $t = 0$ e v_m é a velocidade média entre $t = 0$ e um instante de tempo posterior t .

Para a função velocidade linear da Eq.(2.11), a velocidade média em qualquer intervalo de tempo (de $t = 0$ a um instante posterior t) é a média aritmética da velocidade no início do intervalo (v_0), com a velocidade no final do intervalo (v). Dessa forma, temos

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v). \quad (2.13)$$

Daí, substituindo v da Eq.(2.11), temos

$$v_m = v_0 + \frac{1}{2}at. \quad (2.14)$$

Substituindo a Eq.(2.14) na Eq.(2.12), obtemos

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2. \quad (2.15)$$

Agora, isolando t na Eq.(2.10) e substituindo na Eq.(2.15), obtemos

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2.16)$$

Sendo esta uma equação útil para resolver casos em que não conhecemos o tempo t .

2.1.3 MOVIMENTO EM DUAS DIMENSÕES

Nesta subseção, continuamos a estudar a parte da física que analisa o movimento, mas agora os movimentos serão em duas dimensões, considerando que o problema deste trabalho terá um movimento em duas dimensões.

2.1.3.1 Posição e Deslocamento

A localização de uma partícula (ou de um objeto que se comporte como uma partícula) pode ser especificada, de forma geral, através do vetor posição \vec{r} , um vetor que liga um ponto de referência à partícula. Podemos escrever o vetor \vec{r} na forma

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}, \quad (2.17)$$

onde $x\hat{i}$ e $y\hat{j}$ são as componentes vetoriais de \vec{r} e x e y são as componentes escalares.

Quando uma partícula se move, o vetor posição varia de tal forma que sempre liga o ponto de referência (origem) à partícula. Se o vetor posição varia de \vec{r}_1 para \vec{r}_2 , durante um certo intervalo de tempo, o deslocamento da partícula, $\Delta\vec{r}$, durante esse intervalo de tempo é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.18)$$

Usando a notação de vetores unitários da Eq. (2.17), temos

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}, \quad (2.19)$$

onde as coordenadas (x_1, y_1) correspondem ao vetor posição \vec{r}_1 e as coordenadas (x_2, y_2) correspondem ao vetor posição \vec{r}_2 . Daí, substituindo $(x_2 - x_1)$ por Δx e $(y_2 - y_1)$ por Δy , obtemos

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}. \quad (2.20)$$

2.1.3.2 Movimento Balístico

Vamos considerar um caso específico de movimento bidimensional que será importante para este trabalho: uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial v_0 e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre \vec{g} , dirigida para baixo, é chamada de **projétil** (ou seja, uma partícula lançada) e seu movimento é descrito como **movimento balístico**. Agora, vamos analisar o movimento balístico para o movimento bidimensional, sem a resistência do ar. O projétil é lançado com uma velocidade inicial \vec{v}_0 que pode ser escrita na forma

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}. \quad (2.21)$$

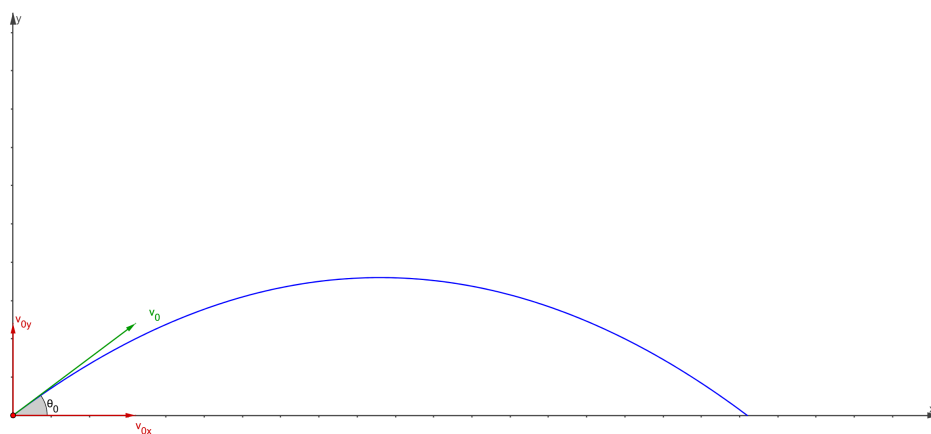
As componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser calculadas se conhecermos o ângulo θ_0 entre \vec{v}_0 e o semieixo x positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad e \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0. \quad (2.22)$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor posição \vec{r} e a velocidade \vec{v} do projétil mudam continuamente, mas o vetor aceleração \vec{a} é constante e está sempre dirigido verticalmente para baixo.

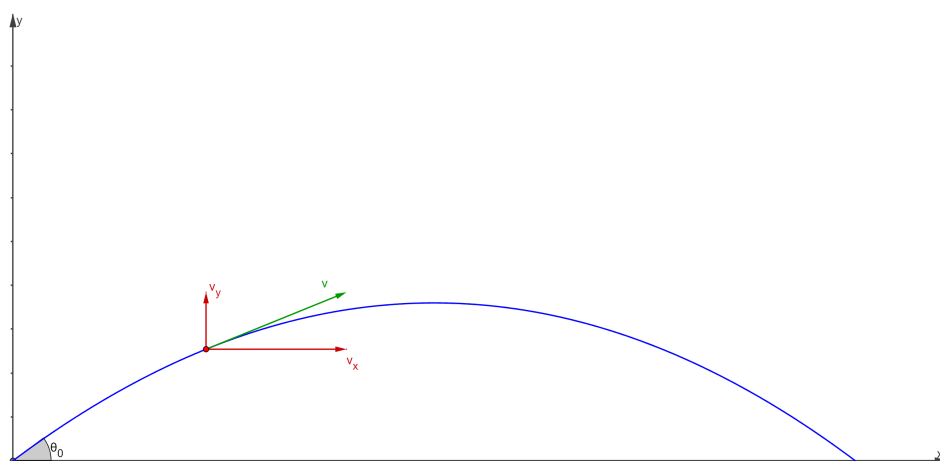
Veja a seguir, as figuras que representam o movimento balístico de um projétil lançado da origem de um sistema de coordenadas com velocidade inicial v_0 e ângulo θ_0 :

Figura 1 – Projétil na origem



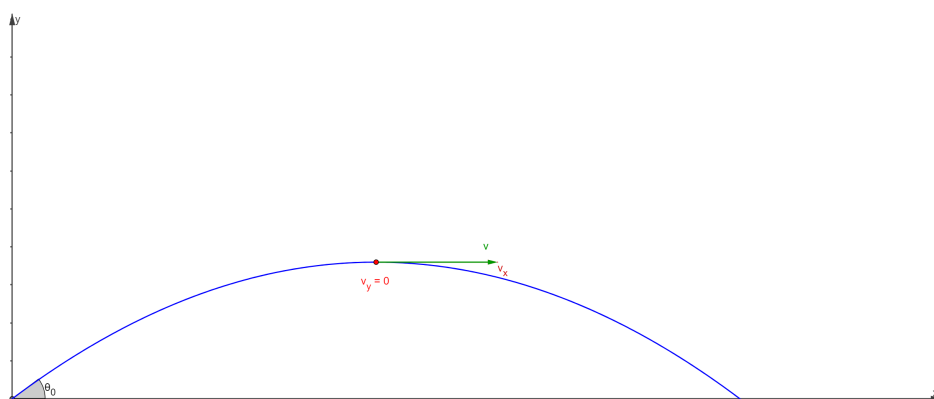
Fonte : Autor

Figura 2 – Projétil após o lançamento



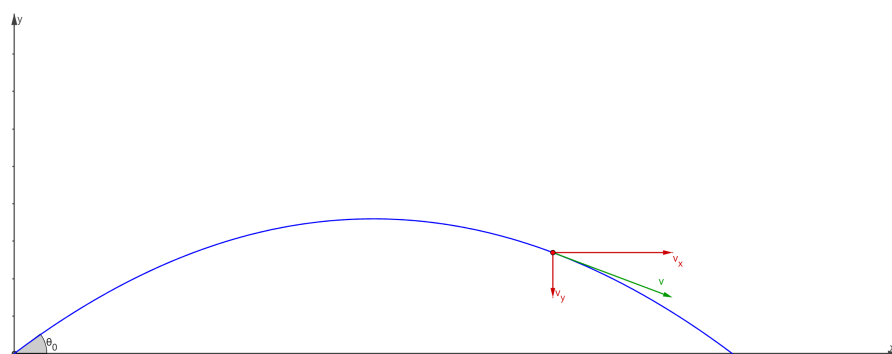
Fonte : Autor

Figura 3 – Projétil na altura máxima



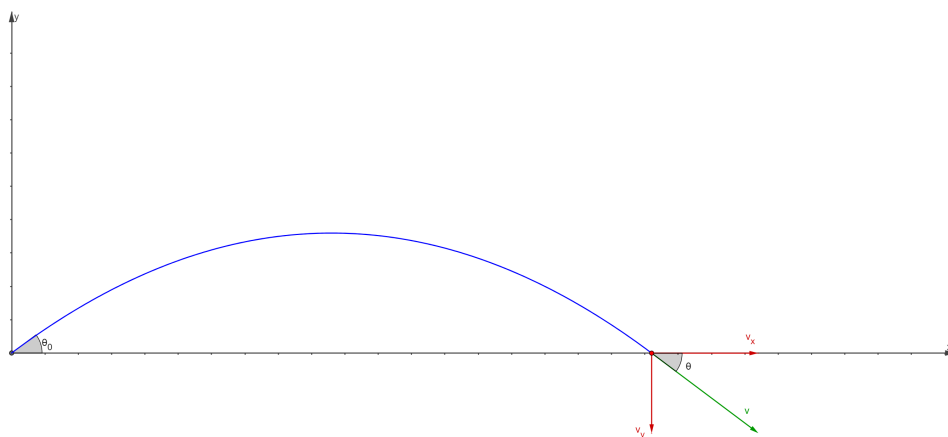
Fonte : Autor

Figura 4 – Projétil em queda



Fonte : Autor

Figura 5 – Projétil no alcance máximo



Fonte : Autor

2.1.3.3 Análise do Movimento Balístico

Agora, vamos analisar o movimento horizontal e vertical do projétil.

• Movimento Horizontal

Como não existe aceleração na direção horizontal, a componente horizontal v_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao valor inicial v_{0x} durante toda a trajetória. Em qualquer instante t , podemos escrever o deslocamento horizontal do projétil em relação a posição inicial do projétil, $x - x_0$, como sendo

$$x - x_0 = v_{0x}t \quad (2.23)$$

como $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (2.24)$$

• Movimento Vertical

O movimento vertical de uma partícula sofre uma aceleração constante para baixo, representado pela letra g . E como a aceleração é constante, podemos utilizar a Eq.(2.15), substituindo a por $-g$ e o eixo x por y . Assim, temos

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.25)$$

como $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$, temos

$$y - y_0 = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.26)$$

• Equação da Trajetória

Podemos obter a equação da trajetória do projétil, eliminando o tempo t nas Eqs.(2.24 e 2.26). Assim, isolando t na Eq.(2.24), temos

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}. \quad (2.27)$$

Agora, substituindo t na Eq.(2.26), temos

$$y = \frac{v_0 \sin \theta_0 x}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2 \quad (2.28)$$

$$y = tg\theta_0 x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}. \quad (2.29)$$

Daí, temos a expressão

$$\frac{-g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 + tg\theta_0 x - y = 0. \quad (2.30)$$

Em fim, esta é a equação da trajetória do projétil. Para deduzi-la, fizemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ para simplificar. Como g , θ_0 e v_0 são constantes, a Eq.(2.30) é da forma $-ax^2 + bx - c = 0$. Logo, essa é a equação de uma parábola e, portanto, o projétil possui uma trajetória parabólica.

2.1.4 ENERGIA CINÉTICA

A energia cinética T é a energia associada ao estado de movimento de um objeto. Quanto mais depressa o objeto se move, maior é a energia cinética, quando um objeto está em repouso, a energia cinética é nula.

Para um objeto de massa m cuja velocidade v é muito menor que a velocidade da luz, temos

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.31)$$

2.1.5 TRABALHO

Quando aumentamos a velocidade de um objeto aplicando uma força, a energia cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ do objeto aumenta. Da mesma forma, quando diminuimos a velocidade do objeto aplicando uma força, a energia cinética do objeto diminui. Explicamos essas variações da energia cinética dizendo que a força aplicada transferiu energia para o objeto ou do objeto. Nas transferências de energia através de forças, dizemos que um trabalho W é realizado pela força sobre o objeto. Dessa forma, podemos definir o trabalho da seguinte forma:

Trabalho (W) é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando a energia é transferida para o objeto, o trabalho é positivo; quando a energia é transferida do objeto, o trabalho é negativo.

Para encontrar uma expressão para o trabalho, considere uma esfera que pode deslizar ao longo de um fio sem atrito ao longo de um eixo x horizontal. Uma força constante F , fazendo um ângulo ϕ com o fio, é usada para acelerar a esfera. Podemos relacionar

a força à aceleração através da segunda lei de Newton, escrita para as componentes em relação ao eixo x :

$$F_x = ma_x \quad (2.32)$$

onde m é a massa da esfera. Enquanto a esfera sofre um deslocamento \vec{d} , a força muda a velocidade da esfera de um valor inicial \vec{v}_0 para um outro valor, \vec{v} . Como a força é constante, sabemos que a aceleração também é constante. Assim, podemos usar a Eq.(2.16) para escrever, para as componentes em relação ao eixo x ,

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d, \quad (2.33)$$

sendo $d = (x - x_0)$. Daí, isolando a_x e substituindo na Eq.(2.32), obtemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \quad (2.34)$$

Analisando o primeiro membro desta equação, temos que, o primeiro termo é a energia cinética T_f da esfera no final do deslocamento d e o segundo termo é a energia cinética T_i da esfera no início do deslocamento d . Assim, o primeiro membro da equação nos diz que a energia cinética foi alterada pela força. Daí, por definição, o trabalho W realizado pela força sobre a esfera é igual ao primeiro membro e, dessa forma, temos

$$W = F_x d. \quad (2.35)$$

Agora, para determinar o trabalho total W realizado pela força quando uma partícula se desloca de um ponto x_i para x_f , precisamos calcular a área sob a curva que representa a trajetória da partícula que vai de x_i para x_f . Para isso, vamos utilizar a definição de integral, dessa forma, temos que, o trabalho W realizado é

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx. \quad (2.36)$$

Daí, se a função $F(x)$ for conhecida, podemos substituí-la na Eq.(2.36), introduzir os limites de integração apropriados, efetuar a integração e assim calcular o trabalho.

2.1.6 ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial é uma forma de energia armazenada em um sistema devido à sua posição ou configuração. Ela está associada à capacidade de um objeto realizar trabalho em função de sua posição em um campo de forças, como a gravidade, a elasticidade ou o eletromagnetismo. Em outras palavras, é a energia que um corpo possui por estar em uma condição específica, que pode ser convertida em outra forma de energia, como a cinética, dependendo da movimentação do objeto.

Existem diferentes tipos de energia potencial, dependendo da força que atua sobre o objeto, como a **Energia Potencial Gravitacional**, que está relacionada à posição de um

objeto em um campo gravitacional, ou seja, quanto mais alto um objeto está em relação à superfície da Terra (ou outro corpo massivo), maior é sua energia potencial gravitacional. Existe também a energia potencial elástica, eletrostática, entre outros.

Agora, considere que, um objeto é arremessado para cima. Enquanto sobe, a força gravitacional realiza um trabalho negativo sobre o objeto, diminuindo sua energia cinética, pois a força gravitacional extrai energia da energia cinética do objeto. Quando desce, a força gravitacional realiza um trabalho positivo, aumentando a energia cinética do objeto, pois a força gravitacional do objeto passa a transferir energia para a energia cinética do objeto. Dessa forma, a variação ΔU da energia potencial gravitacional é definida como o negativo do trabalho realizado sobre o objeto pela força gravitacional. Daí, podemos expressar essa definição da seguinte forma:

$$\Delta U = -W. \quad (2.37)$$

Nesse sentido, substituindo a Eq.(2.36) na Eq.(2.37), descobrimos que a variação de energia potencial associada à mudança de configuração é dada pela seguinte equação:

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx. \quad (2.38)$$

• Energia Potencial Gravitacional

Considere inicialmente que, uma partícula de massa m se move verticalmente ao longo de um eixo y (com o sentido positivo para cima). Quando a partícula se move do ponto y_i para o ponto y_f , a força gravitacional realiza trabalho sobre ela. Para determinar a variação correspondente da energia potencial gravitacional, usamos a Eq.(2.38) com duas mudanças: i) Integramos ao longo do eixo y em vez do eixo x , já que a força gravitacional age na direção vertical. ii) Substituímos a força F por $-mg$, pois a força gravitacional possui módulo mg e está orientada no sentido negativo do y . Assim, temos

$$\Delta U = - \int_{y_i}^{y_f} (-mg)dy = mg \int_{y_i}^{y_f} dy = mg(y) \Big|_{y_i}^{y_f} = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y, \quad (2.39)$$

daí,

$$\Delta U = mg\Delta y \Rightarrow U - U_i = mg(y - y_i). \quad (2.40)$$

Dessa forma, tomando $U_i = 0$ e $y_i = 0$, temos que

$$U = mgy. \quad (2.41)$$

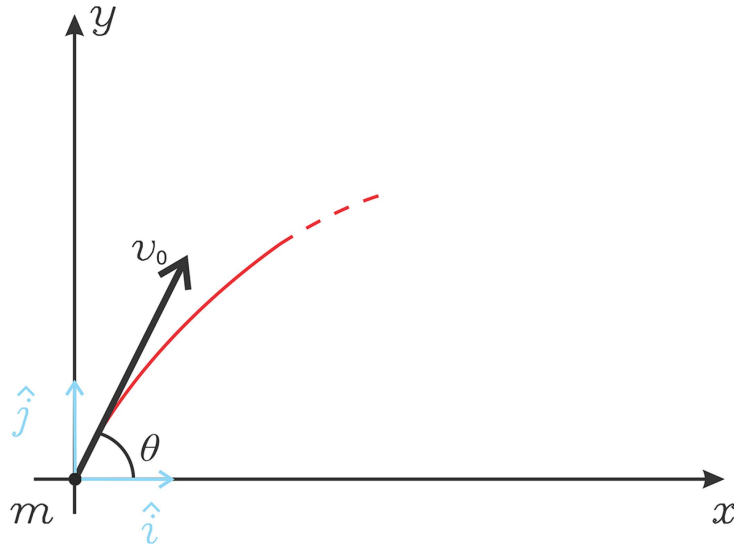
2.1.7 FORÇAS RESISTIVAS

As forças resistivas são forças que atuam em oposição ao movimento de um corpo, reduzindo sua velocidade ou dificultando seu deslocamento. Elas são especialmente importantes em problemas de dinâmica e otimização de trajetórias, pois afetam diretamente

a evolução do sistema e os resultados das análises, como em problemas balísticos, por exemplo, onde as forças resistivas alteram a distância percorrida, o tempo de voo e a altura máxima, sendo indispensáveis para prever trajetórias reais. Existem alguns tipos de forças resistivas, no entanto, para este trabalho, vamos utilizar uma força de atrito do ar como sendo proporcional à velocidade. Para o problema a seguir, vamos utilizar as referências (K.R.SYMON, 1988), (MARION; THORNTON, 2003), (NETO, 2004), (ÁVILA, 2003), (LIMA, 2004a) e (FREIRE et al., 2016).

Vamos considerar o problema de uma partícula de massa m lançada obliquamente com velocidade inicial v_0 , formando um ângulo $\theta \in (0; \pi/2)$ em relação ao solo, como na figura abaixo:

Figura 6 – Lançamento da Partícula



Fonte: Silva Junior "Nanonet"

Vamos considerar que a partícula, uma vez lançada, estará sob ação da força peso

$$F = -mg \quad (g = \text{constante}) \quad (2.42)$$

e de uma força de atrito do ar, que vamos considerar como sendo proporcional à velocidade

$$f = -bv, \quad (2.43)$$

onde $b > 0$ é constante.

As equações de movimento para essa partícula são:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x, \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -\beta \left(v_y + \frac{g}{\beta} \right), \quad (2.45)$$

onde $\beta = \frac{b}{m}$ que, pela relação com b e m (fixo), vamos nos referir como parâmetro de atrito do ar. E as condições iniciais são dadas por:

$$v_x(0) = v_0 \cos \theta, \quad v_y(0) = v_0 \sin \theta \quad (2.46)$$

$$x(0) = y(0) = 0. \quad (2.47)$$

As componentes da velocidade podem ser obtidas por uma primeira integração das Eqs.(2.44) e (2.45) com as condições iniciais (2.46), assim, para obtermos $v_x(t)$, temos que:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\beta dt. \quad (2.48)$$

Integrando ambos lados, temos

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = \int -\beta dt \Rightarrow \ln|v_x| = -\beta t + C. \quad (2.49)$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados, temos

$$v_x = e^{-\beta t + C} \Rightarrow v_x = e^C e^{-\beta t}. \quad (2.50)$$

Redefinimos a constante e^C como $v_x(0)$, daí

$$v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-\beta t}. \quad (2.51)$$

Agora, para obtermos $v_y(t)$, temos que:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\beta \left(v_y + \frac{g}{\beta} \right) \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} + \beta v_y = -g. \quad (2.52)$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem, que tem a forma $\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$, onde $P(t)y = \beta$ e $Q(t) = -g$. Para resolver essa equação, vamos usar o fator integrante, que é dado por:

$$\mu(t) = e^{\int \beta dt} = e^{\beta t}. \quad (2.53)$$

Agora, multiplicamos ambos os lados da equação diferencial por $e^{\beta t}$:

$$\frac{dv_y}{dt} e^{\beta t} + e^{\beta t} \beta v_y = -g e^{\beta t}. \quad (2.54)$$

Veja que,

$$\frac{d}{dt}(e^{\beta t} v_y) = \frac{dv_y}{dt} e^{\beta t} + e^{\beta t} \beta v_y. \quad (2.55)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(e^{\beta t} v_y) = -g e^{\beta t}. \quad (2.56)$$

Integrando ambos os lados da equação, temos

$$\int \frac{d}{dt}(e^{\beta t} v_y) dt = \int -g e^{\beta t} dt \Rightarrow e^{\beta t} v_y = -\frac{g}{\beta} e^{\beta t} + C. \quad (2.57)$$

Isolando v_y , temos

$$v_y = -\frac{g}{\beta} + C e^{-\beta t}. \quad (2.58)$$

Agora, para determinar a constante de integração C , vamos considerar $v_y = v_y(0)$ e $t = 0$, daí

$$C = v_y(0) + \frac{g}{\beta} = v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta}. \quad (2.59)$$

Substituindo a constante C de volta em v_y , obtemos

$$v_y(t) = -\frac{g}{\beta} + \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t}. \quad (2.60)$$

Agora, vamos integrar as Eqs.(2.51) e (2.60) com as condições iniciais (2.47). Integrando a Eq.(2.51), temos que

$$\int v_x(t) dt = \int (v_0 \cos\theta) e^{-\beta t} dt. \quad (2.61)$$

Note que, $v_0 \cos\theta$ é uma constante em relação ao tempo t , assim

$$x(t) = v_0 \cos\theta \int e^{-\beta t} dt \Rightarrow x(t) = v_0 \cos\theta \left(\frac{e^{-\beta t}}{-\beta} \right) \Rightarrow x(t) = -\frac{v_0 \cos\theta}{\beta} (e^{-\beta t}) + C. \quad (2.62)$$

Sabendo que $x(0) = 0$ e isolando a constante C , temos

$$C = \frac{v_0 \cos\theta}{\beta}. \quad (2.63)$$

Substituindo C de volta em $x(t)$, obtemos

$$x(t) = -\frac{v_0 \cos\theta}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{v_0 \cos\theta}{\beta} \Rightarrow x(t) = v_0 \cos\theta \left(\frac{-e^{-\beta t} + 1}{\beta} \right). \quad (2.64)$$

Integrando a Eq.(2.60), temos que

$$\int v_y(t) dt = \int -\frac{g}{\beta} + \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} dt. \quad (2.65)$$

Vamos separar essa integral em duas partes para facilitar o cálculo:

$$\int v_y(t) dt = \int -\frac{g}{\beta} dt + \int \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} dt. \quad (2.66)$$

Note que, $-\frac{g}{\beta}$ e $v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta}$ são constantes que não dependem do tempo t , assim

$$y(t) = -\frac{g}{\beta} \int dt + v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta} \int e^{-\beta t} dt. \quad (2.67)$$

Daí,

$$y(t) = -\frac{g}{\beta} t + \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) \frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + C. \quad (2.68)$$

Sabendo que $y(0) = 0$ e isolando a constante C , temos

$$C = \left(v_0 \text{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) \frac{1}{\beta}. \quad (2.69)$$

Substituindo C de volta em $y(t)$, obtemos

$$y(t) = -\frac{g}{\beta}t - \left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) \frac{e^{-\beta t}}{\beta} + \left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) \frac{1}{\beta}. \quad (2.70)$$

Assim,

$$y(t) = \left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{g}{\beta}\right) \left(\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}\right) - \frac{g}{\beta}t. \quad (2.71)$$

Agora, vamos isolar t na Eq.(2.64), assim, multiplicando por β em ambos os lados da equação, temos

$$\beta x(t) = \beta \frac{v_0 \cos\theta}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \Rightarrow \beta x(t) = v_0 \cos\theta (1 - e^{-\beta t}). \quad (2.72)$$

Dividimos ambos os lados por $v_0 \cos\theta$:

$$\frac{\beta x(t)}{v_0 \cos\theta} = 1 - e^{-\beta t}. \quad (2.73)$$

Subtraímos 1 em ambos os lados:

$$\frac{\beta x(t)}{v_0 \cos\theta} - 1 = -e^{-\beta t}. \quad (2.74)$$

Multiplicamos a equação por -1:

$$-\frac{\beta x(t)}{v_0 \cos\theta} + 1 = e^{-\beta t}. \quad (2.75)$$

Tomamos o logaritmo natural (\ln) de ambos os lados para eliminar a exponencial:

$$\ln \left(-\frac{\beta x(t)}{v_0 \cos\theta} + 1 \right) = -\beta t. \quad (2.76)$$

Dividimos ambos os lados por $-\beta$ para isolar t :

$$t = -\frac{1}{\beta} \ln \left(-\frac{\beta x(t)}{v_0 \cos\theta} + 1 \right). \quad (2.77)$$

Agora, vamos substituir t na Eq.(2.71). Para isso, vamos primeiro substituir t no termo $e^{-\beta t}$:

$$e^{-\beta t} = e^{-\beta \left(-\frac{1}{\beta} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos\theta} + 1 \right) \right)} = -\frac{\beta x}{v_0 \cos\theta} + 1. \quad (2.78)$$

Substituindo agora, t no termo $-\frac{g}{\beta}t$, temos

$$-\frac{g}{\beta}t = -\frac{g}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos\theta} + 1 \right) \right) \Rightarrow -\frac{g}{\beta}t = \frac{g}{\beta^2} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos\theta} + 1 \right). \quad (2.79)$$

Substituindo esses termos encontrados na Eq.(2.71), obtemos

$$y(x) = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{g}{\beta}}{\beta} \left(1 - \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos\theta} + 1 \right) \right) + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos\theta} + 1 \right). \quad (2.80)$$

Daí,

$$y(x) = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta + \frac{g}{\beta}}{\beta} \left(\frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} \right) + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} + 1 \right). \quad (2.81)$$

Logo,

$$y(x) = \frac{\left(v_0 \operatorname{sen} \theta + \frac{g}{\beta} \right) x}{v_0 \cos \theta} + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} + 1 \right). \quad (2.82)$$

Portanto, a **equação da trajetória** da partícula é dada por:

$$y(x) = \left(\tan \theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} + 1 \right). \quad (2.83)$$

Note que, pela Eq.(2.51),

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t) = (v_0 \cos \theta) e^{-\beta t} > 0, \quad (2.84)$$

logo, $x(t)$ é estritamente crescente, além disso

$$x(0) = 0 \quad e \quad (2.85)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_0 \cos \theta \left(\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \right), \quad (2.86)$$

veja que, o termo $e^{-\beta t}$ tende a 0, quando t tende a $+\infty$, daí

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta}. \quad (2.87)$$

Assim, os valores da coordenada x crescem no intervalo $0 \leq x < \xi = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta}$. Além disso, tomando o $\lim_{x \rightarrow \xi^-} y(x)$ na Eq.(2.83), temos

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \left(\tan \theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} + 1 \right), \quad (2.88)$$

veja que, o termo $\left(-\frac{\beta x}{v_0 \cos \theta} + 1 \right)$ tende a 0^+ , quando x tende a ξ^- , e o $\ln(0^+)$ tende a $-\infty$, além disso, quando x tende a ξ^- , o termo $\left(\tan \theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos \theta} \right) x$ é finito. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} y(x) = -\infty. \quad (2.89)$$

Dessa forma, a trajetória da partícula tende a uma assíntota vertical dada por

$$\xi = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta}. \quad (2.90)$$

Agora, derivando a equação da trajetória(2.83) com relação a x , obtemos

$$y'(x) = \left(\tan \theta + \frac{g}{\beta v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g}{\beta} \frac{1}{v_0 \cos \theta - \beta x}, \quad (2.91)$$

sendo $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$. Os intervalos de subida e de queda da partícula correspondem aos intervalos de crescimento e decrescimento da função $y(x)$, os quais correspondem respectivamente as condições $y'(x) > 0$ e $y'(x) < 0$. Considerando a Eq.(2.91), a condição $y'(x) > 0$ implica em

$$\frac{\beta v_0 \sin \theta + g}{v_0 \cos \theta} > \frac{g}{v_0 \cos \theta - \beta x} \quad (2.92)$$

e, como $v_0 \cos \theta - \beta x > 0$ (pois, pela Eq.(2.64), $v_0 \cos \theta - \beta x = v_0 \cos \theta e^{-\beta x} > 0$), então

$$(\beta v_0 \sin \theta + g)(v_0 \cos \theta - \beta x) > g v_0 \cos \theta, \quad (2.93)$$

ou seja,

$$\beta x (\beta v_0 \sin \theta + g) < \beta v_0^2 \cos \theta \sin \theta \quad (2.94)$$

de modo que

$$x < \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta}. \quad (2.95)$$

Assim, a função $y(x)$ que descreve a trajetória da partícula é crescente para

$$0 < x < \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta}. \quad (2.96)$$

Analogamente, obtemos que $y(x)$ é decrescente para

$$\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta} < x < \xi = \frac{v_0 \cos \theta}{\beta}. \quad (2.97)$$

Temos também que o ponto

$$x_c = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g + \beta v_0 \sin \theta} \quad (2.98)$$

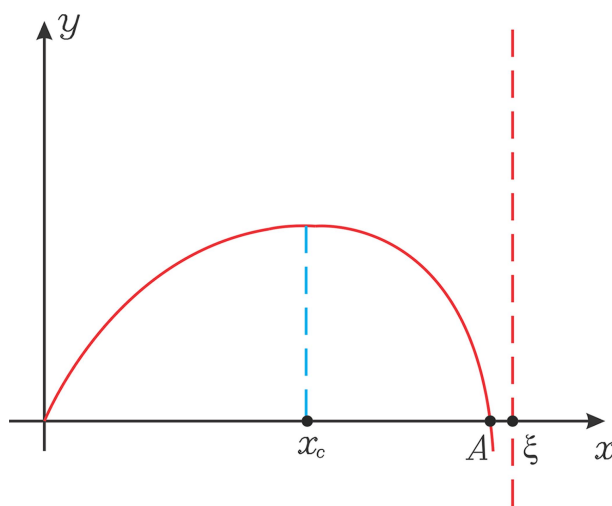
anula a derivada $y'(x)$, ou seja, $y'(x_c) = 0$. Logo, x_c corresponde ao ponto crítico de máximo (global) da trajetória da partícula, visto que ela sobe até este ponto e depois segue caindo. A concavidade da trajetória pode ser determinada pela segunda derivada de $y(x)$. Da Eq.(2.91), obtemos

$$y''(x) = -\frac{g}{(v_0 \cos \theta - \beta x)^2} < 0, \quad (2.99)$$

que, nos diz que a trajetória é côncava para baixo.

Portanto, a partir desses resultados, podemos concluir que a trajetória da partícula pode ser representada como sendo:

Figura 7 – Trajetória da Partícula



Fonte: Silva Junior "Nanonet"

2.2 CÁLCULO VARIACIONAL

O cálculo variacional é uma área da matemática que se dedica ao estudo de problemas em que é necessário determinar a função ou as funções que minimizam (ou maximizam) uma determinada quantidade, conhecida como funcional. Diferentemente dos problemas tradicionais de otimização, que buscam o mínimo ou o máximo de uma função de várias variáveis, o cálculo variacional trata da otimização de funções que dependem de outras funções.

Esse campo encontra suas raízes históricas no século XVII, com contribuições de matemáticos como Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Joseph-Louis Lagrange e Leonhard Euler. O cálculo variacional tornou-se uma ferramenta fundamental em diversas áreas da ciência e engenharia, sendo amplamente utilizado na física, mecânica, teoria de controle, economia e até em aprendizado de máquina, para resolver problemas que envolvem trajetórias, superfícies e distribuições ótimas.

2.2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO VARIACIONAL

Desde a Antigüidade foram formulados problemas envolvendo otimização. Foram encontrados vestígios na Grécia e no Egito. A obra que dá uma idéia disso é Eneida, de Virgílio, que viveu em 70 a.C., estudou Filosofia, Medicina e Física. Em sua obra encontra-se a seguinte citação: “Dido, uma fenícia, persuadiu um chefe africano a dar lhe tanta terra quanto ela pudesse cercar com o couro de um touro”. Primeiro ela cortou o couro em centenas de tiras bem finas. Depois uniu-as, e traçou um semi - círculo no chão, a beira do mar Mediterrâneo. Era a máxima área costeira que ela poderia envolver. Neste lugar ela construiu a cidade de Cartago. Mesmo sendo literário, o relato demonstra que os povos da antigüidade possuíam conhecimentos a respeito de áreas e comprimentos

otimizados. Sabiam que, dentre as figuras de igual perímetro, o círculo é aquela com maior área. Acredita-se que chegaram a estas conclusões a partir de cálculos de tentativa e erro. E assim foi até o século XVII.

Fermat também resolveu um problema que acabou levando o seu nome, ficando conhecido como “Princípio de Fermat”. Snel e Descartes, em 1630, concluíram experimentalmente que quando a luz reflete em um espelho, o ângulo de reflexão é igual ao de incidência. Muitos matemáticos daquela época queriam saber o que levava a essas leis, então, Fermat sugeriu se não seria, essas manifestações da natureza, resultados de uma busca de mínimos e máximos.

Isaac Newton, também se ocupava com problemas envolvendo princípios de otimização. Ele queria saber qual era a forma de um túnel que liga dois pontos na superfície da Terra, de modo que permita a um corpo de massa m deslocar-se entre os dois pontos no menor tempo. Obteve como resposta a hipociclóide, que é a trajetória descrita por um ponto fixo P pertencente a um círculo de raio r , que rola no interior de outro círculo de raio R .

Huygens ao estudar o movimento pendular, formulou o problema de Tautochrone (Tauto = mesmo e Chrono = tempo), ou seja, mesmo tempo: “qual é a curva que permite a um corpo, independente da sua posição inicial A , deslizar sob a ação da gravidade g e chegar a certo ponto B , fixo, sempre no mesmo intervalo de tempo T ?”. Huygens descobriu que tal curva era a cicloide, que é a curva descrita por um ponto fixo em uma circunferência ao deslizar em uma reta.

Bernoulli também obteve como resposta a cicloide, para um problema clássico do Cálculo Variacional. O problema era o seguinte: “... Um corpo, sob ação da gravidade, desliza ao longo de uma curva lisa. Qual deverá ser sua forma para que o tempo de deslocamento entre os dois pontos fixos, A e B , ligados pela curva seja mínimo?”. Este problema é conhecido por Braquistócrona (menor tempo) esse resultado também foi obtido por outros matemáticos.

Outro problema que também preocupava os matemáticos era encontrar sólidos de revolução com área lateral mínima, o qual poderia resolver problemas relacionados à transferência de calor, resistência à deformação e economia de materiais. O catenóide é a resposta desse problema, que é obtido graficamente quando se gira um segmento da catenária em torno do eixo x . O catenóide é a resposta desse problema, que é obtido graficamente quando se gira um segmento da catenária em torno do eixo x . O nome catenária foi dado por Leibniz, que o extraiu da palavra latina catena, que significa corrente.

Sophie Germain, enunciou o seguinte problema: “... qual é a curva que liga dois pontos fixos A e B pertencentes à superfície de um cilindro na menor distância?”. A solução desse problema é dada naturalmente pelo cipó.

Bernoulli chamou a atenção dos matemáticos para os problemas cuja solução são curvas. Euler faz citações do Cálculo Variacional em alguns artigos, especificamente nos seus estudos sobre Equações Diferenciais. Lagrange criou o operador variacional (d).

Legendre criou critérios para distinguir as funções que maximizam das que minimizam. Jacobi reformulou os resultados de Legendre. E, por volta de 1900, Volterra e Hilbert introduziram a definição rigorosa de funcional.

No século XX, o cálculo variacional se expandiu para abranger problemas mais gerais e abstratos, envolvendo espaços funcionais infinito-dimensionais, como os espaços de Banach e de Hilbert, e funcionais não-lineares e não-locais. Alguns dos nomes relevantes desse período foram Riesz, Fréchet, Sobolev, Tonelli, Courant, Lax, Morse, Nash e De Giorgi.

Atualmente, o cálculo variacional continua sendo uma área ativa e frutífera da matemática, com aplicações em diversos campos da ciência e da tecnologia, como a teoria da relatividade, a mecânica quântica, a teoria dos jogos, a teoria do controle, a teoria da elasticidade, a teoria das imagens, entre outras. Foram utilizadas as referências (RICIERI, 1993), (BOYER, 1996) e (BRECHTEKEN-MANDERSCH, 1991).

2.2.2 FUNCIONAIS

No campo da matemática e da análise funcional, os funcionais desempenham um papel essencial. Eles estendem o conceito de funções comuns ao introduzir uma relação entre um conjunto de funções e números reais. Em termos simples, enquanto uma função mapeia números em números, um funcional mapeia funções em números. Nesse sentido, toda função contínua, com domínio no conjunto dos números reais, possui, para cada elemento do seu domínio, um elemento correspondente que pertence ao seu conjunto imagem. Por exemplo, a função quadrática $y(x) = x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, possui um elemento em seu conjunto imagem correspondente a cada elemento de seu domínio, ou seja, para cada valor de x , a função retornara apenas um determinado valor da função $y(x)$. Há uma semelhança entre os conceitos de função e funcional, no entanto, o domínio de um funcional não é formado por números reais, mas sim por funções, e para cada função substituída no funcional dado o resultado será um número real. Essa ideia abstrata tem aplicações práticas importantes, particularmente em problemas de otimização, cálculo variacional, física teórica e engenharia. As referências utilizadas para essa e as próximas duas subseções são (KRASNOV; MAKARENKO; KISLIOV, 1973), (BASSALO; CATTANI, 2011), (ELSGOLTZ, 1975), (WEINSTOCK, 1974), (BARROS et al., 2017) e (LIMA, 2004b).

Vejamos agora, algumas definições:

Definição 2.2.2.1. Seja S um espaço de funções de uma classe dada, por exemplo, de funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Um funcional é uma regra que associa a cada função $y(x)$ do espaço S a um único número real.

$$J : S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(x) \mapsto J[y(x)] \in \mathbb{R}$$

Pode-se dizer que S é campo de definições do funcional $J[y(x)]$.

Exemplo:

Seja $S =$ conjunto de funções contínuas no intervalo $I = [0, 1] \equiv C^0[0, 1]$, logo

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx,$$

é um funcional, com $x \in I \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.2.2.2. Um funcional linear J definido em S (espaço de definições de $y(x)$) é dito linear se satisfaz as seguintes condições:

- $J[ay] = aJ[y]$, com $a \in \mathbb{R}$;
- $J[y_1 + y_2] = J[y_1] + J[y_2]$.

Exemplo: Seja $S =$ conjunto de funções contínuas no intervalo $I = [c, d] \subset \mathbb{R} \equiv C^0[c, d]$, logo

$$J[y] = \int_c^d xydx,$$

é um funcional linear, com $x \in I$.

2.2.3 LEMA DE DU BOIS-REYMOND

Nesta seção, vamos abordar um lema fundamental para o desenvolvimento do Calculo Variacional. Sendo este, o lema de du Bois-Reymond, que foi um material de investigação de matemáticos como Euler e Lagrange, o qual foi apresentado por P. du Bois-reymond no ano de 1879. No entanto, a pessoa responsável por apresentar pela primeira vez uma demonstração clara e completa deste lema, foi o matemático alemão K. Weierstrass em seus seminários(1875-1882)(BAUMEISTER; LEITÃO, 2014). Veja o lema a seguir:

Lema(du Bois-Reymond). Seja $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que

$$\int_a^b h(x)G(x)dx = 0 \quad (2.100)$$

para toda função diferenciável $h(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, então $G(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $G(c) \neq 0$ para algum $c \in (a, b)$, e, sem perda de generalidade, que $G(c) > 0$. Pela continuidade de G , existe uma vizinhança de c , digamos, $x_1 \leq c \leq x_2$ na qual $G(x) > 0$, $\forall x \in [x_1, x_2]$. Mas com isso a igualdade (2.100) não se verifica para toda função diferenciável $h(x)$. Por exemplo, considere a função $h(x)$ abaixo:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \leq x \leq x_1 \\ (x - x_1)^2(x - x_2)^2 & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{se } x_2 \leq x \leq d \end{cases} \quad (2.101)$$

daí,

$$\int_c^d h(x)G(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} [(x - x_1)^2(x - x_2)^2]G(x)dx \quad (2.102)$$

e como $G(x) > 0$ para $x_1 \leq x \leq x_2$ tem-se que:

$$\int_c^d h(x)G(x)dx \neq 0 \quad (2.103)$$

o que contradiz a hipótese. O caso $G(c) < 0$ é análogo e assim o lema está demonstrado.

2.2.4 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Nesta seção vamos obter um resultado extremamente importante do cálculo variacional, conhecida como a equação de Euler-Lagrange. Ela será uma ferramenta crucial para o problema abordado neste trabalho, sendo tratado no capítulo 3.

O Cálculo Variacional tem como objetivo básico determinar a função diferenciável, $y(x)$, com $y : [x_1; x_2] \rightarrow \mathbb{R}$, a qual tenha a sua primeira derivada $y'(x)$ contínua no intervalo dado, satisfazendo as condições de fronteira: $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$, e que minimize ou maximize o funcional $I(y)$, representado pela expressão

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \quad (2.104)$$

sendo $y = y(x)$ e $y' = y'(x)$.

A ideia inicial do Cálculo Variacional é admitir que haja uma função $y(x)$ que extremiza o funcional dado, e, a partir desta função $y(x)$, cria-se uma nova função parametrizada que chamaremos de $\bar{y}(x, \alpha)$, representando as funções vizinhas à função $y(x)$ que estarão sujeitas às mesmas condições de fronteira de $y(x)$.

Agora, vamos representar uma família de funções que possui os mesmos extremos da função ótima $y(x)$, definindo uma nova função $\bar{y}(x, \alpha)$ como sendo:

$$\bar{y}(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad (2.105)$$

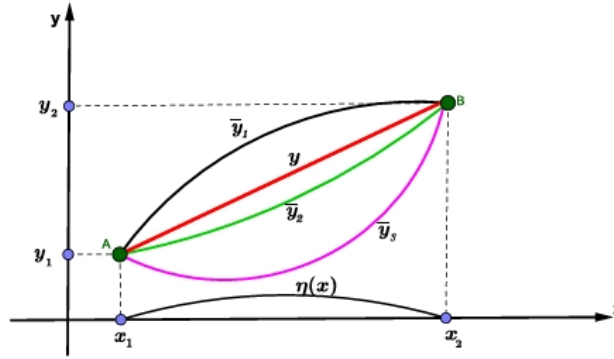
tal que a função $\bar{y}(x, \alpha)$ seja parametrizada pelo fator $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\eta(x)$ seja uma função arbitrária derivável, tal que $\eta(x) : [x_1; x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ obedeça às seguintes condições de fronteira:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (2.106)$$

Daí, é garantido que a família de funções representadas por $\bar{y}(x, \alpha)$ obedeça, para qualquer valor de α , as condições de fronteira:

$$\bar{y}(x_1, \alpha) = y(x_1) \quad e \quad \bar{y}(x_2, \alpha) = y(x_2), \quad (2.107)$$

Figura 8 – Curvas vizinhas à função ótima representada por y



Fonte: Fernando Antônio Barros

ou seja, as funções $\bar{y}(x, \alpha)$ e $y(x)$ são iguais nos extremos do intervalo definido pelos limites de integração x_1 e x_2 apresentados.

Tomando o funcional (2.104) e substituindo $y(x)$ por $\bar{y}(x, \alpha)$, definida em (2.105), temos que:

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}(x, \alpha), \bar{y}'(x, \alpha)) dx \quad (2.108)$$

assim, veja que $I(\alpha)$ é uma função, cujo domínio é definido pelos possíveis valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, pois para cada função contínua e diferenciável $\eta(x)$ dada, apenas o valor de α deverá variar, gerando os valores correspondentes de $\bar{y}(x, \alpha)$.

Agora, se tomarmos $\alpha = 0$ em (2.105), teremos que $\bar{y}(x, 0) = y(x) + 0 \Rightarrow \bar{y}(x, 0) = y(x)$, e, como $y(x)$ extremiza o funcional (2.104) por hipótese, temos que, para $\alpha = 0$, $\bar{y}(x, 0)$ representará a função que extremiza (2.108).

Daí, considerando $\alpha = 0$, podemos concluir que o valor correspondente da função $I(\alpha)$ será um extremo, logo, pode-se afirmar que para $\alpha = 0$, a derivada da função $I(\alpha)$, em relação a α , deverá ser nula, sabendo que no ponto extremo de uma função a derivada é nula. Portanto, temos que:

$$\left. \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (2.109)$$

substituindo (2.108) em (2.109), temos

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}(x, \alpha), \bar{y}'(x, \alpha)) dx \right) \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (2.110)$$

Note que, vamos calcular a derivada de uma integral definida de uma função composta, assim, vamos precisar de um resultado importante conhecido como Regra de Leibniz, conforme (HAIRER; WANNER, 1995).

Teorema (Regra de Leibniz). Considere uma função $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ existe e é contínua em $[a, b] \times [c, d]$. Se a integral:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx \quad (2.111)$$

existe para todo $\alpha \in [c, d]$, então $F(\alpha)$ é diferenciável e

$$F'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx. \quad (2.112)$$

Demonstração:

Seja

$$\frac{F(\alpha) - F(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \int_a^b \left(\frac{f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \right) dx. \quad (2.113)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio no segundo membro da equação anterior, encontramos $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \epsilon)$ com ϵ dependendo de x . Daí, subtraindo $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) dx$ de ambos os lados e usando o fato de que para funções integráveis $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ temos

$$\left| \frac{F(\alpha) - F(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \epsilon) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) \right| dx. \quad (2.114)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ é contínua no intervalo compacto $[a, b] \times [c, d]$, ela é uniformemente contínua, ou seja, para $\alpha - \alpha_0$ suficientemente pequeno, a diferença do segundo membro de (2.114) pode ser majorada para todo x por um δ arbitrariamente pequeno. Isso mostra que (2.114) está próximo de zero e que F é diferenciável, sendo (2.112) sua derivada, e o teorema está demonstrado.

Agora, de acordo com o teorema anterior, temos que

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}(x, \alpha), \bar{y}'(x, \alpha)) dx \right) \Big|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, \bar{y}(x, \alpha), \bar{y}'(x, \alpha))}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} dx = 0. \quad (2.115)$$

Daí, utilizando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}(x, \alpha)} \frac{\partial \bar{y}(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'(x, \alpha)} \frac{\partial \bar{y}'(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} dx = 0. \quad (2.116)$$

Agora, a partir de (2.105), determinamos:

$$\frac{\partial \bar{y}(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial \bar{y}'(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta'(x). \quad (2.118)$$

E tomando $\alpha = 0$ na eq.(2.105), tem-se que $\bar{y}(x, \alpha) = y(x)$, assim, substituindo $\bar{y}(x, \alpha)$ por $y(x)$ em (2.117) e (2.118), obtemos:

$$\frac{\partial \bar{y}(x, 0)}{\partial \alpha} = \frac{\partial y(x)}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial \bar{y}'(x, 0)}{\partial \alpha} = \frac{\partial y'(x)}{\partial \alpha} = \eta'(x). \quad (2.120)$$

Substituindo as equações (2.117) e (2.118) em (2.116) e, sabendo que, $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$, obtemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y(x)} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'(x)} \eta'(x) \right) dx = 0. \quad (2.121)$$

Fazendo a integração por partes da segunda parcela de (2.121), temos que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'(x)} \eta'(x) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'(x)} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'(x)} \right) \eta(x) dx \quad (2.122)$$

e, veja que, $\left[\frac{\partial F}{\partial y'(x)} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0$, pois $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Portanto, a equação (2.121),

pode ser expressa como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y(x)} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'(x)} \right) \eta(x) \right) dx = 0 \quad (2.123)$$

daí, colocando $\eta(x)$ em evidência, temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'(x)} \right) \right) \eta(x) dx = 0. \quad (2.124)$$

Logo, sendo $\eta(x)$ uma função arbitrária derivável, com as condições de fronteira definidas em (2.106), temos que, de acordo com o Lema(du Bois-Reymond), chegamos à seguinte equação:

$$\frac{\partial F}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'(x)} \right) = 0 \quad (2.125)$$

sendo esta a equação conhecida como **Equação de Euler-Lagrange**.

3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O LANÇAMENTO OBLÍQUO SUJEITO A RESISTÊNCIA DO AR

Neste capítulo, vamos fazer uma abordagem sobre os formalismos lagrangeano para sistemas dissipativos, para uma aplicação destes no lançamento oblíquo de um objeto (ponto material) sujeita a uma força de resistência do ar proporcional à velocidade, para obtermos as equações de movimento para esses sistemas. Essa aplicação será feita através do uso da função de dissipação de Rayleigh. Nesse sentido, primeiro vamos discutir a respeito da força de resistência do ar, para então chegar na função em questão. Neste capítulo, vamos utilizar as referências (LEMONS, 2007), (SYMOM, 1996), (MINGUZZI, 2017), (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002) e (GOMES et al., 2021).

3.1 FORÇA DE RESISTÊNCIA DO AR

Nesta seção, vamos fazer uma abordagem de forma breve sobre a força de resistência do ar, com intuito de entendermos como funciona essa quantidade e a sua influência no movimento de um objeto (ponto material) no ar.

3.1.1 Forças de arrasto

A força de resistência do ar ou força de arrasto do ar é um tipo de força de resistência dependente da velocidade que surge no movimento de objetos no ar, a mesma ocorre devido a colisão do objeto com as moléculas do ar e tem sentido oposto ao da velocidade do corpo, o que acaba ocasionando com que o objeto desacelere. Essa força possui uma dependência complexa com a velocidade, pelo fato de que a mesma depende das características do objeto e do ar.

3.2 FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE RAYLEIGH

Antes de falarmos da função de dissipação de Rayleigh, vamos fazer um breve comentário sobre sistemas dissipativos, pois são para esses sistemas que vamos utilizar o formalismo lagrangiano com o objetivo de obter as equações de movimento para o lançamento oblíquo de um objeto (ponto material) sujeita a força de resistência do ar. Os sistemas dissipativos ou não conservativos são sistemas nos quais a energia não se conserva, ou seja, parte da energia do sistema se dissipa em outra forma de energia, diferentemente do que acontece com sistemas conservativos, nos quais a energia se conserva.

A mecânica Newtoniana, exposta no capítulo 2, foi feita para sistemas conservativos, em virtude disso, a mesma não é aplicada diretamente para movimentos em que a energia é dissipada. Para a aplicação nesses sistemas utilizando o formalismo lagrangiano, é mais conveniente fazer uso dos potenciais generalizados e da função de dissipação de Rayleigh, em que vamos utilizar essa última ferramenta neste trabalho.

A função de dissipação de Rayleigh, definida sobre o espaço das velocidades generalizadas, permite que as equações de Lagrange sejam utilizadas para resolver sistemas que tenham forças aplicadas dependentes da velocidade. Neste trabalho, vamos utilizar essa função para resolvermos o problema do lançamento oblíquo de um objeto sujeito a força de resistência do ar proporcional a velocidade. Inicialmente, vamos fazer uma breve discussão sobre as coordenadas generalizadas e os potenciais generalizados.

3.2.1 Coordenadas Generalizadas

Coordenadas generalizadas são um conjunto de variáveis independentes q_i , com $i = 1, 2, \dots, n$ que determinam completamente a configuração de um sistema dinâmico, levando em conta suas restrições. Elas não precisam ser necessariamente coordenadas cartesianas, podem ser quaisquer parâmetros, como ângulos, distâncias, etc, que descrevam a posição de cada parte do sistema de modo único. Além disso, o número n de coordenadas generalizadas é igual ao número de graus de liberdade do sistema, onde os graus de liberdade de um sistema são definidos como: o número de coordenadas generalizadas independentes necessárias para especificar completamente a configuração do sistema.

As coordenadas generalizadas são escolhidas com base nas restrições impostas ao sistema, o que permite descrever seu movimento de forma mais simples e eficiente. No entanto, como o problema do trabalho em questão possui um sistema sem restrições, vamos escolher as coordenadas generalizadas que melhor descrevem nosso problema.

3.2.2 Potenciais Generalizados

Os potenciais generalizados são utilizados para descrever sistemas nos quais as forças aplicadas dependem das velocidades e, nos casos em que as forças generalizadas são provenientes de um potencial escalar $V(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ de tal modo que

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

com essa expressão para as forças generalizadas, podemos escrever as equações de Lagrange, com a função de Lagrange sendo

$$L = T - V, \quad (3.2)$$

onde V representa o potencial generalizado ou potencial dependente da velocidade. Caso existam forças que derivam de um potencial $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$, a função U pode ser incluída

em V . Vale destacar que, a função potencial generalizado V pode depender de forma explícita do tempo t . Caso isso não ocorra, a função de Lagrange L não dependerá de forma explícita do tempo, que implica com que a energia mecânica se conserve. Desse modo, afirma-se que as forças aplicadas no sistema são conservativas, ainda que elas dependam da velocidade. Em virtude disso, não é viável escrever as forças dissipativas que dependem linearmente da velocidade, haja vista que a energia mecânica não se conserva quando há forças dissipativas e nem pode-se incluir energia térmica, porque ela não pode ser descrita em termos das coordenadas e velocidades. Nesse contexto, é que se encaixa a função de dissipação de Rayleigh, pois ela é utilizada justamente para descrever o movimento de corpos sujeitos a forças de atrito proporcional a velocidade.

Antes de definirmos a função de dissipação de Rayleigh, precisamos usar uma definição diferente das forças generalizadas, as quais podem ser expressas como sendo

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

em que Q'_k representa as forças generalizadas não conservativas, ou seja, as forças que não provêm de potencial generalizado. Com isso, podemos escrever as equações de Lagrange como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Vamos utilizar um caso relevante que acontece quando a força generalizada Q'_k , representa as forças de arrasto que dependem de forma linear da velocidade, que em coordenadas cartesianas podem ser escritas como:

$$F'_{ix} = -b_{ix}v_{ix}, \quad F'_{iy} = -b_{iy}v_{iy}, \quad F'_{iz} = -b_{iz}v_{iz}, \quad (3.5)$$

em que \vec{F}'_i é a força de arrasto atuando na i -ésima partícula, b_{ix}, b_{iy} e b_{iz} são constantes e v_{ix}, v_{iy} e v_{iz} são as componentes do vetor velocidade. Daí, Rayleigh introduziu a função

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [b_{ix}v_{ix}^2 + b_{iy}v_{iy}^2 + b_{iz}v_{iz}^2]. \quad (3.6)$$

A relação entre essa função e as forças aplicadas no sistema se dá da seguinte forma:

$$F'_{ix} = -\frac{\partial R}{\partial v_{ix}}, \quad F'_{iy} = -\frac{\partial R}{\partial v_{iy}}, \quad F'_{iz} = -\frac{\partial R}{\partial v_{iz}}. \quad (3.7)$$

Agora, a relação entre essa função e a parte dissipativa das forças generalizadas aplicadas no sistema se dá como sendo:

$$Q'_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

onde R é a função de dissipação de Rayleigh. Daí, substituindo essa equação em (3.4), temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

A função de dissipação introduzida por Rayleigh em 1873, foi criada com o objetivo de facilitar o tratamento de sistemas sujeitos a força de atrito proporcional a velocidade. A grande vantagem de se utilizar essa função R é que podemos utilizar as equações de movimento para um certo sistema da mesma maneira, seja qual for o sistema de coordenadas generalizadas utilizado.

Agora, vamos resolver o principal problema deste trabalho, que é o lançamento oblíquo de um objeto (ponto material) sujeito a força de resistência do ar.

3.2.3 Função de Dissipação de Rayleigh para o caso em que a Força de Arrasto é proporcional a velocidade

Primeiramente, vamos encontrar a função lagrangeana $L = T - U$ adequada ao problema, iremos adotar o sentido positivo do eixo x para a direita e o sentido positivo do eixo y para cima. Além disso, vamos adotar o ponto de referência da energia potencial em que $U = 0$ na origem dos sistemas de coordenadas para esse sistema mecânico. As coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas são, respectivamente, $q_1 = x, q_2 = y, \dot{q}_1 = \dot{x}$ e $\dot{q}_2 = \dot{y}$, logo a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (3.10)$$

e a energia potencial se caracteriza como sendo

$$U = mgy, \quad (3.11)$$

dessa forma, a lagrangiana pode ser expressa como sendo

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (3.12)$$

Daí, vamos definir a função de dissipação de Rayleigh para o problema em questão através da expressão (3.6), assim

$$R = \frac{1}{2}(bv_x^2 + bv_y^2) = \frac{1}{2}b(v_x^2 + v_y^2), \quad (3.13)$$

onde v_x e v_y representam a componente da velocidade na direção x e na direção y , respectivamente. Agora, vamos substituir (3.12) e (3.13) na equação (3.9) para a coordenada x , tendo assim

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] + \frac{\partial}{\partial v_x} \left[\frac{1}{2}b(v_x^2 + v_y^2) \right] = 0, \quad (3.14)$$

calculando as derivadas, temos

$$m\ddot{x} + bv_x = 0 \Rightarrow m\dot{v}_x = -bv_x, \quad (3.15)$$

sendo $\ddot{x} = \dot{v}_x$. Temos que, essa é a equação de movimento para a coordenada x . Agora, de forma análoga, calculamos a equação para a coordenada y . Assim, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] + \frac{\partial}{\partial v_y} \left[\frac{1}{2} b (v_x^2 + v_y^2) \right] = 0, \quad (3.16)$$

calculando as derivadas, temos

$$m\ddot{y} + mg + bv_y = 0 \Rightarrow m\dot{v}_y = -mg - bv_y, \quad (3.17)$$

sendo $\ddot{y} = \dot{v}_y$. Essa é a equação de movimento para a coordenada y .

3.2.4 Solução das Equações de Movimento

Encontradas as equações de movimento para as coordenadas x e y , como foi feito na subseção anterior, vamos agora calcular as soluções para essas equações. Visto que, estas são equações diferenciais de primeira ordem, podemos obter suas soluções por meio de alguns métodos como, Separação de variáveis, Fator integrante e Transformada de Laplace. Nesse sentido, vamos utilizar o método da Separação de variáveis afim de encontrar as soluções das equações de movimento.

Daí, a equação de movimento para a coordenada x é

$$m\dot{v}_x = -bv_x, \quad (3.18)$$

essa equação pode ser escrita como

$$\dot{v}_x = -\frac{bv_x}{m}, \quad (3.19)$$

reorganizando os termos, temos

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{bdt}{m}, \quad (3.20)$$

integrando em ambos os lados, temos

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = \int -\frac{bdt}{m} \Rightarrow \ln|v_x| = -\frac{bt}{m} + C, \quad (3.21)$$

agora, aplicando a exponencial em ambos os lados, obtemos

$$v_x = e^C e^{-\frac{bt}{m}}, \quad (3.22)$$

considerando $e^C = C_1$ e a condição inicial quando $t = 0$, $v_x(0) = v_{x0}$, onde $v_{x0} = C_1 e^0 = C_1$, temos

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-\frac{bt}{m}}, \quad (3.23)$$

integrando em ambos os lados para obter $x(t)$

$$\int v_x(t) dt = \int v_{x0} e^{-\frac{bt}{m}} dt \Rightarrow x(t) = v_{x0} \frac{e^{-\frac{bt}{m}}}{-\frac{b}{m}} = -\frac{m}{b} v_{x0} e^{-\frac{bt}{m}} + C, \quad (3.24)$$

considerando a condição inicial $x(0) = 0$, quando $t = 0$, sabendo que v_{x0} é a velocidade inicial no eixo x , temos

$$x(0) = -\frac{m}{b}v_{x0}e^{-\frac{b0}{m}} + C \Rightarrow 0 = -\frac{m}{b}v_{x0} + C \Rightarrow C = \frac{m}{b}v_{x0} \quad (3.25)$$

daí, temos que

$$x(t) = -\frac{m}{b}v_{x0}e^{-\frac{bt}{m}} + \frac{m}{b}v_{x0} \Rightarrow x(t) = \frac{m}{b}v_{x0}(1 - e^{-\frac{bt}{m}}). \quad (3.26)$$

Esta é a solução final da equação de movimento para a coordenada x .

Agora, a equação de movimento para a coordenada y é

$$m\dot{v}_y = -mg - bv_y, \quad (3.27)$$

podemos reescrever essa equação como

$$\dot{v}_y = -g - \frac{bv_y}{m}, \quad (3.28)$$

reorganizando os termos dessa equação, temos que

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{b}{m} \left(v_y + \frac{mg}{b} \right) \Rightarrow \frac{dv_y}{v_y + \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m} dt, \quad (3.29)$$

integrando em ambos os lados

$$\int \frac{dv_y}{v_y + \frac{mg}{b}} = \int -\frac{b}{m} dt \Rightarrow \ln \left| v_y + \frac{mg}{b} \right| = -\frac{b}{m} t + C, \quad (3.30)$$

aplicamos a exponencial em ambos os lados, obtendo

$$e^{\ln|v_y + \frac{mg}{b}|} = e^{-\frac{b}{m}t + C} \Rightarrow v_y + \frac{mg}{b} = e^C e^{-\frac{b}{m}t} \quad (3.31)$$

daí, tomando $e^C = C'$ e isolando v_y , temos

$$v_y = C' e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b} \quad (3.32)$$

agora, considere a condição inicial quando $t = 0$ e $v_y(0) = v_{y0}$,

$$v_{y0} = C' e^{-0} - \frac{mg}{b} \Rightarrow C' = v_{y0} + \frac{mg}{b}, \quad (3.33)$$

substituindo C' na Eq.(3.32), obtemos

$$v_y(t) = \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}, \quad (3.34)$$

integrando em ambos os lados para obter $y(t)$

$$\int v_y(t) dt = \int \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b} dt \Rightarrow \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow y(t) = \int \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}t} dt - \int \frac{mg}{b} dt \Rightarrow \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{m}{b} \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}t + C, \quad (3.37)$$

considerando a condição inicial que $y(0) = y_0$, quando $t = 0$, temos

$$y(0) = -\frac{m}{b} \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}0} - \frac{mg}{b}0 + C \Rightarrow \quad (3.38)$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{m}{b} \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) + C \Rightarrow \quad (3.39)$$

$$\Rightarrow C = y_0 + \frac{m}{b} \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) \quad (3.40)$$

daí,

$$y(t) = -\frac{m}{b} \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}t + y_0 + \frac{m}{b} \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) \quad (3.41)$$

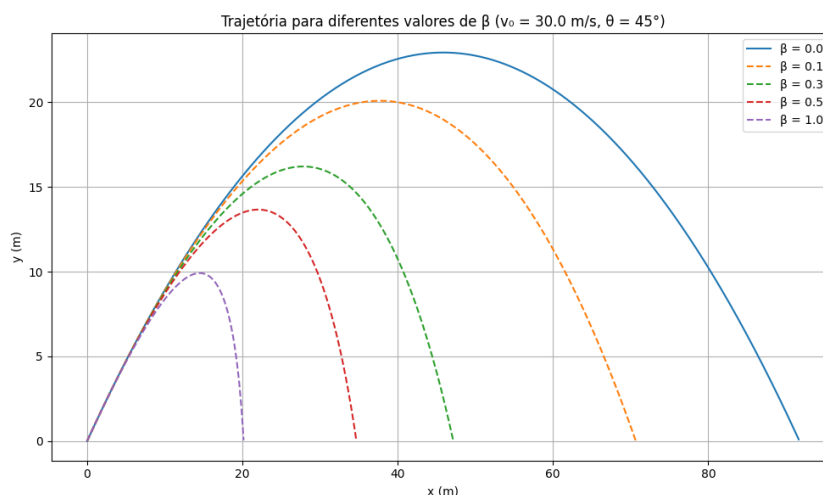
agora, agrupando os termos, temos

$$y(t) = y_0 + \frac{m}{b} \left(v_{y0} + \frac{mg}{b} \right) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) - \frac{mg}{b}t. \quad (3.42)$$

Esta é a solução final da equação de movimento para a coordenada y .

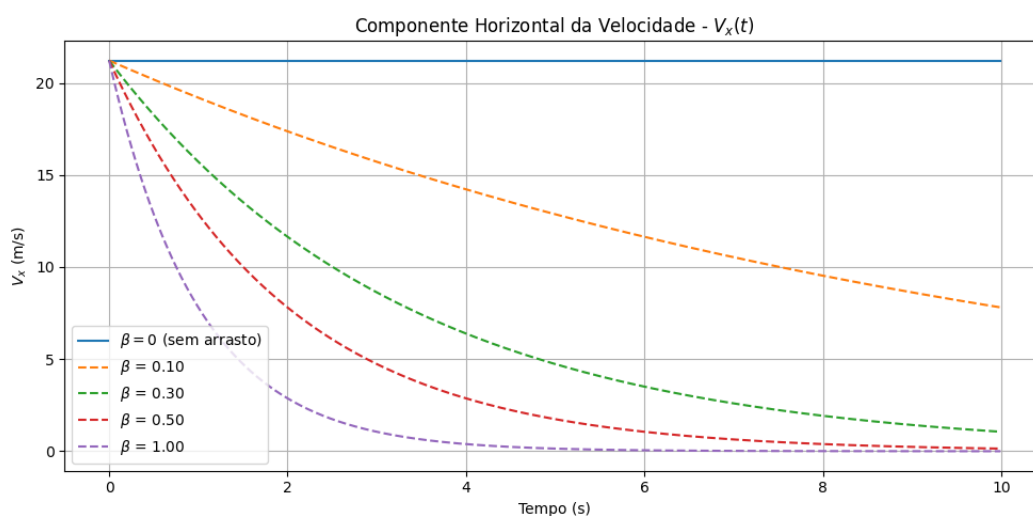
3.3 ANÁLISE NUMÉRICA

Após toda a discussão analítica do problema, vamos fazer um estudo numérico das equações de movimento, análise de energia, tanto para o caso clássico (sem resistência do ar), quanto para o caso com resistência ou dissipação, caracterizada por um parâmetro de arrasto β . Utilizando as bibliotecas numéricas e gráficas da linguagem de programação **PYTHON**: Matplotlib, Numpy e Pandas. Nos gráficos a seguir, o caso clássico (sem resistência do ar), corresponde a linha constante azul e o casos com resistência do ar, para diferentes valores do parâmetro de resistência ou dissipação β , corresponde as linhas pontilhadas.

Figura 9 – Trajetória da partícula variando o parâmetro β 

Fonte: Autor

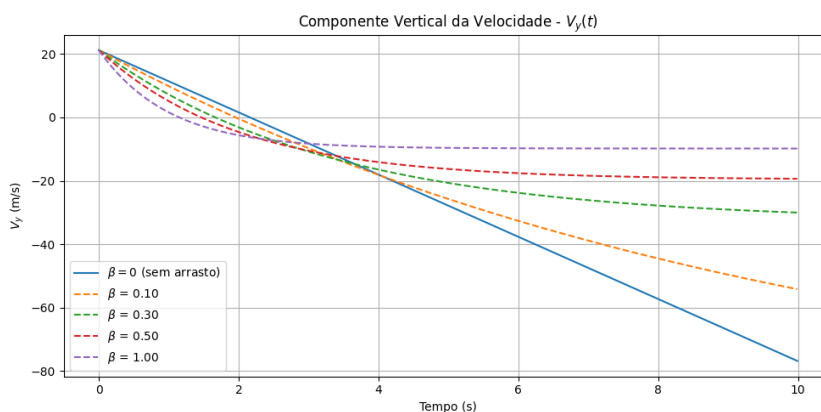
A figura exibe a trajetória da partícula para diferentes valores de β (coeficiente de arrasto), com velocidade inicial $v_0 = 30\text{ m/s}$ e ângulo de lançamento $\theta = 45^\circ$. Veja que, para o caso sem resistência do ar, onde $\beta = 0$, a trajetória da partícula representada pela cor azul, por não sofrer a força de resistência do ar, tem maior alcance horizontal e altura máxima, e a trajetória é uma parábola simétrica. Para os casos com resistência do ar, onde $\beta > 0$, a trajetória se torna assimétrica, com uma subida mais inclinada e uma descida mais rápida. Além disso, quanto maior β , menor será o alcance e a altura máxima da partícula, ou seja, ela chegará ao solo mais rapidamente. Portanto, quanto maior o β , a distância, a altura e o tempo de voo da partícula serão minimizados, caso contrário, serão maximizados.

Figura 10 – Velocidade da partícula na componente x em relação ao tempo

Fonte: Autor

A figura mostra o comportamento da velocidade da partícula na componente horizontal V_x em relação ao tempo, para diferentes valores de β . Para o caso sem resistência do ar, onde $\beta = 0$, a velocidade horizontal permanece constante ao longo do tempo, pois na ausência de forças horizontais (sem arrasto), a velocidade na componente horizontal não se altera. Para os casos com resistência do ar, onde $\beta > 0$, a velocidade V_x decai exponencialmente ao longo do tempo, e quanto maior o valor de β , mais rápido ocorre a desaceleração horizontal.

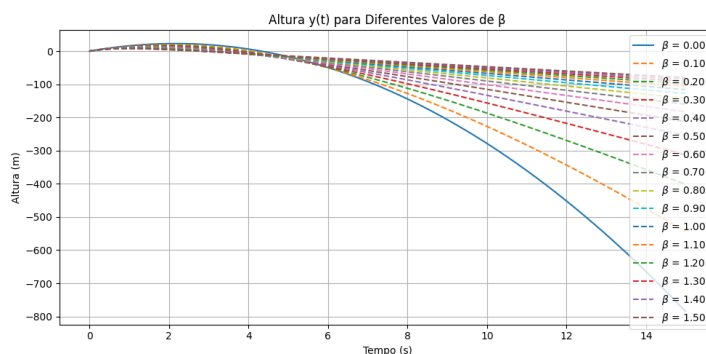
Figura 11 – Velocidade da partícula na componente y em relação ao tempo



Fonte: Autor

A figura mostra o comportamento da velocidade da partícula na componente vertical V_y em relação ao tempo, para diferentes valores de β . Veja que, para o caso sem resistência do ar, onde $\beta = 0$, a velocidade decai de forma constante, pois sofre apenas a ação da gravidade. Para os casos com resistência do ar, onde $\beta > 0$, o arrasto faz com que a velocidade vertical varie mais rapidamente no início, mas depois se estabilize, e ainda, quanto maior o valor de β , mais rápido a curva se aproxima de um valor de velocidade terminal negativa, ou seja, converge para um valor constante.

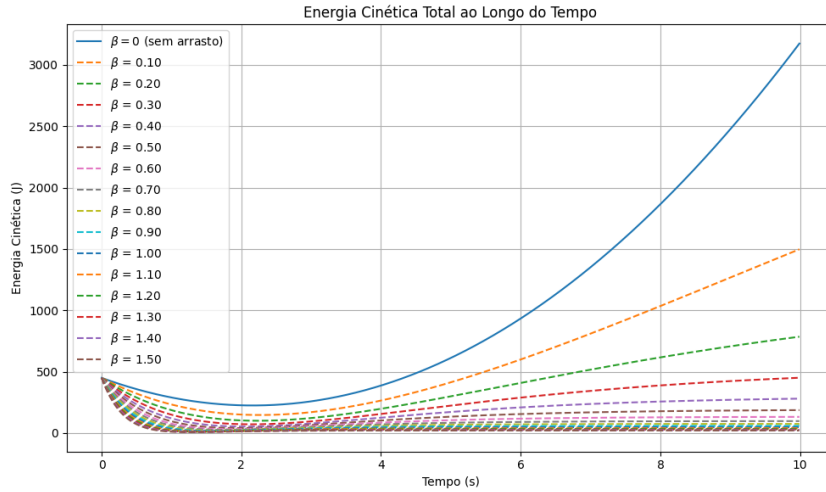
Figura 12 – Altura da partícula em relação ao tempo



Fonte: Autor

A figura mostra o gráfico da altura $y(t)$ da partícula em relação ao tempo, para diferentes valores de β . Veja que, para o caso sem resistência do ar, onde $\beta = 0$, a partícula atinge a altura máxima, permanecendo mais tempo no ar, e, a descida é simétrica à subida, assumindo uma curvatura parabólica. Para os casos com resistência do ar, onde $\beta > 0$, a partícula atinge menores alturas máximas conforme β aumenta, a queda se suaviza devido à força de arrasto, especialmente visível em valores maiores de β e, além disso, o tempo total de voo diminui com o aumento de β .

Figura 13 – Energia Cinética em relação ao tempo



Fonte: Autor

A figura apresenta o gráfico da energia cinética total $E_c(t)$ de uma partícula ao longo do tempo, para diferentes valores de β . A energia cinética E_c em joules (J), é calculada como:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2). \quad (3.43)$$

Para o caso sem resistência do ar, onde $\beta = 0$, a energia cinética diminui inicialmente (na subida), atingindo um mínimo quando a velocidade vertical é zero (na altura máxima da trajetória), em seguida, cresce indefinidamente durante a queda, pois a partícula acelera constantemente pela gravidade, sem dissipação de energia. Para os casos com resistência do ar, onde $\beta > 0$, após a partícula atingir um mínimo na altura máxima da trajetória, ela se estabiliza depois de certo tempo e, veja que, quanto maior o β , menor o valor máximo que a energia cinética atinge e mais cedo ela se estabiliza. Isso se deve ao fato de que, com arrasto, a velocidade atinge um valor terminal e, portanto, a energia cinética também se aproxima de um valor limite.

4 CONCLUSÃO

Após toda a discussão e os resultados analíticos e numéricos obtidos, podemos concluir que, este trabalho se mostrou satisfatório para o que foi proposto, pois conseguimos encontrar as equações de movimento para o lançamento oblíquo de uma partícula (projétil) em um meio com resistência do ar. Utilizamos duas abordagens diferentes para chegar nessas equações, sendo elas a newtoniana e a langrangiana. Pela abordagem Newtoniana, encontramos as equações de movimento através da mecânica clássica. Com a abordagem lagrangiana, conseguimos encontrar as equações de movimento através da função de dissipação de Rayleigh e o Cálculo Variacional, com o uso da Equação de Euler-Lagrange, que foi fundamental para caracterizar trajetórias que extremizam a função objetivo, e os resultados numéricos obtidos permitiram avaliar o impacto do parâmetro físico de coeficiente de arrasto no comportamento da partícula.

Os resultados indicam que a resistência do ar impõe limitações significativas ao movimento balístico, modificando a trajetória ideal quando comparada ao caso sem resistência do ar. Nessa perspectiva, este estudo não apenas aprofunda a compreensão dos efeitos dissipativos em sistemas mecânicos, como também destaca a importância de técnicas de otimização na solução de problemas aplicados em engenharia, balísticas e ciências aeroespaciais.

Para trabalhos futuros, pode-se incluir modelos mais complexos de resistência, como o caso em que a Força de Arrasto é quadrática com a velocidade, assim como a aplicação de algoritmos de otimização mais robustos. Também podem incorporar modelos mais sofisticados, nos quais o coeficiente de arrasto varia com a altitude ou densidade do ar, tornando o problema ainda mais fiel às condições reais.

REFERÊNCIAS

- BARROS, F. A. et al. Introdução ao estudo do cálculo variacional e da curva cicloide. Universidade Federal de Minas Gerais, 2017.
- BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. Elementos de física matemática. **São Paulo: Editora Livraria da Física**, v. 2, 2011.
- BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. **Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- BOYER, C. **História da matemática**. [S.l.]: Edgard Blucher, 1996.
- BRECHTEKEN-MANDERSCH, U. **Introduction to the Calculus of Variations**. [S.l.]: New York: Chapman Hall, 1991.
- ELSGOLTZ, L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**. Moscú: Mir, 1975.
- FREIRE, W. H. C. et al. Lançamento oblíquo com resistência do ar: Uma análise qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, p. 1306, 2016.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002. ISBN 9780201657029.
- GOMES, M. P. P. et al. Formulação lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos: aplicada no lançamento oblíquo sujeito a resistência do ar. 2021.
- HAIRER, E.; WANNER, G. **Analysis by Its History**. New York: Springer, 1995. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 978-0-387-94395-3.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Volume 1 - Mecânica**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. Tradução da 9ª edição norte-americana.
- KRASNOV, M.; MAKARENKO, G.; KISLIOV, A. **Calculo Variacional**, Mir. [S.l.]: Moscovo, 1973.
- K.R.SYMON. **Mecânica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ed.Campus, 1988.
- LEMOES, N. A. Mecânica analítica. 2aed. **Sao Paulo: Livraria da Fisica**, 2007.
- LIMA, E. , **Análise Real, Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- LIMA, G. L. de. **Cálculo Variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos**. Tese (Doutorado) — Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas-Unicamp . . . , 2004.
- MARION, J.; THORNTON, S. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5. ed. [S.l.]: Brooks/Cole Pub. New York, 2003.
- MINGUZZI, E. Rayleigh's dissipation function at work. **European Journal of Physics**, v. 38, n. 4, p. 045004, 2017.

NETO, J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. [S.l.]: Ed. Livraria da Física, 2004.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de física básica–mecânica-vol 1, 4^a edição rev. **São Paulo: Blucher**, 2002.

RICIERI, A. **Cálculo Variacional: Cipós e Bolhas de Sabão**. [S.l.]: São José dos Campos P: Prandiano, 1993.

SYMOM, K. R. **Mecânica**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1996.

WEINSTOCK, R. **Calculus of Variations: With Applications to Physics and Engineering**. [S.l.]: Courier Corporation, 1974.

ÁVILA, G. **Cálculo 1**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC Ed., 2003.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CÓDIGOS EM PHYTON UTILIZADOS PARA EXIBIR OS GRÁFICOS APRESENTADOS NA SEÇÃO DE ANÁLISE NUMÉRICA.

Gráfico da Equação da Trajetória $y(x)$:

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import pandas as pd
4
5  # Constantes fisicas e iniciais
6  g = 9.81          # gravidade (m/s^2)
7  m = 1.0           # massa (kg)
8  v0 = 30.0         # velocidade inicial (m/s)
9  theta_deg = 45    # angulo de lancamento (graus)
10 theta = np.radians(theta_deg)
11
12 # Lista de betas (coeficiente de arrasto linear)
13 betas = [0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0]
14
15 # Tempo maximo de simulacao
16 t_max = 10
17 dt = 0.01
18 t_vals = np.arange(0, t_max, dt)
19
20 # Armazenar dados para cada beta
21 traj_data = []
22 summary = []
23
24 plt.figure(figsize=(10, 6))
25
26 for beta in betas:
27     vx0 = v0 * np.cos(theta)
28     vy0 = v0 * np.sin(theta)
29
30     if beta == 0:
31         # Caso sem arrasto (parabolico classico)
32         x = vx0 * t_vals
33         y = vy0 * t_vals - 0.5 * g * t_vals**2
34         linestyle = '-' # linha continua
35     else:
36         exp_term = np.exp(-beta * t_vals / m)

```

```

37     x = (m / beta) * vx0 * (1 - exp_term)
38     vy_t = (vy0 + (m * g / beta)) * exp_term - (m * g / beta)
39     y = ((vy0 + (m * g / beta)) * (m / beta) * (1 - exp_term))
        - (m * g / beta) * t_vals
40     linestyle = '--' # linha pontilhada
41
42     # Filtrar apenas pontos com y >= 0 (acima do solo)
43     valid = y >= 0
44     x = x[valid]
45     y = y[valid]
46
47     # Salvar os dados para a tabela
48     alcance = x[-1]
49     altura_max = np.max(y)
50     summary.append({
51         'Beta': beta,
52         'Alcance (m)': np.round(alcance, 2),
53         'Altura Maxima (m)': np.round(altura_max, 2)
54     })
55
56     # Plotar a trajetoria
57     plt.plot(x, y, linestyle=linestyle, label=f'      = {beta}')
58
59 # Configuracoes do grafico
60 plt.title(f'Trajectoria para diferentes valores de      ( v      = {v0} m
    /s,      = {theta_deg} )')
61 plt.xlabel('x (m)')
62 plt.ylabel('y (m)')
63 plt.legend()
64 plt.grid(True)
65 plt.tight_layout()
66
67 # Salvar em multiplos formatos
68 plt.savefig("trajectoria_beta.png")
69 plt.savefig("trajectoria_beta.jpg")
70 plt.savefig("trajectoria_beta.pdf")
71 plt.savefig("trajectoria_beta.svg")
72
73 plt.show()
74
75 # Mostrar resumo em forma de tabela

```

```

76 df = pd.DataFrame(summary)
77 print(df)

```

Gráficos de $V_x(t)$ e $V_y(t)$:

```

1     import numpy as np
2     import matplotlib.pyplot as plt
3
4     # Constantes físicas e iniciais
5     g = 9.81                # gravidade (m/s²)
6     m = 1.0                # massa (kg)
7     v0 = 30.0              # velocidade inicial (m/s)
8     theta_deg = 45         # ângulo de lançamento (graus)
9     theta = np.radians(theta_deg)
10
11    # Lista de coeficientes de arrasto b
12    bs = [0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0]
13
14    # Tempo de simulação
15    t_max = 10
16    dt = 0.01
17    t_vals = np.arange(0, t_max, dt)
18
19    # Componentes iniciais da velocidade
20    vx0 = v0 * np.cos(theta)
21    vy0 = v0 * np.sin(theta)
22
23    # --- Gráfico de Vx(t) ---
24    plt.figure(figsize=(10, 5))
25    for b in bs:
26        if b == 0:
27            vx_t = np.full_like(t_vals, vx0)
28            linestyle = '--'
29            label = r'$\beta = 0$ (sem arrasto)'
30        else:
31            beta = b / m
32            vx_t = vx0 * np.exp(-beta * t_vals)
33            linestyle = '--'
34            label = fr'$\beta$ = {beta:.2f}'

```

```

35
36     plt.plot(t_vals, vx_t, linestyle=linestyle, label=label)
37
38 plt.title('Componente Horizontal da Velocidade -  $V_x(t)$ ')
39 plt.xlabel('Tempo (s)')
40 plt.ylabel(' $V_x$  (m/s)')
41 plt.grid(True)
42 plt.legend()
43 plt.tight_layout()
44
45 # Salvar em mltiplos formatos
46 plt.savefig("velocidade_horizontal_vx.png")
47 plt.savefig("velocidade_horizontal_vx.jpg")
48 plt.savefig("velocidade_horizontal_vx.pdf")
49 plt.savefig("velocidade_horizontal_vx.svg")
50
51 plt.show()
52
53 # --- Gráfico de  $V_y(t)$  ---
54 plt.figure(figsize=(10, 5))
55 for b in bs:
56     if b == 0:
57         vy_t = vy0 - g * t_vals
58         linestyle = '--'
59         label = r' $\beta = 0$  (sem arrasto)'
60     else:
61         beta = b / m
62         vy_t = (vy0 + g / beta) * np.exp(-beta * t_vals) - g / beta
63         linestyle = '--'
64         label = fr' $\beta = \{beta:.2f\}$ '
65
66     plt.plot(t_vals, vy_t, linestyle=linestyle, label=label)
67
68 plt.title('Componente Vertical da Velocidade -  $V_y(t)$ ')
69 plt.xlabel('Tempo (s)')
70 plt.ylabel(' $V_y$  (m/s)')
71 plt.grid(True)
72 plt.legend()
73 plt.tight_layout()
74
75 # Salvar em mltiplos formatos

```

```

76 plt.savefig("velocidade_vertical_vy.png")
77 plt.savefig("velocidade_vertical_vy.jpg")
78 plt.savefig("velocidade_vertical_vy.pdf")
79 plt.savefig("velocidade_vertical_vy.svg")
80
81 plt.show()

```

Gráfico da altura $y(t)$:

```

1     import numpy as np
2     import matplotlib.pyplot as plt
3     import pandas as pd
4     from scipy.interpolate import interp1d
5
6     # Constantes físicas
7     g = 9.81                # gravidade (m/s²)
8     m = 1.0                # massa (kg)
9     v0 = 30.0              # velocidade inicial (m/s)
10    theta_deg = 45          # ângulo (graus)
11    theta = np.radians(theta_deg)
12
13    # Lista mais ampla de coeficientes de arrasto b (para mais
      resolu o)
14    bs = np.linspace(0.0, 1.5, 16) # de 0 a 1.5 com 16 valores
15    t_max = 15
16    dt = 0.01
17    t_vals = np.arange(0, t_max, dt)
18
19    # Velocidade inicial em x e y
20    vx0 = v0 * np.cos(theta)
21    vy0 = v0 * np.sin(theta)
22
23    flight_times = []
24
25    plt.figure(figsize=(10, 5))
26
27    for b in bs:
28        if b == 0:
29            # Sem resistência do ar

```

```

30     y = vy0 * t_vals - 0.5 * g * t_vals**2
31     linestyle = '-'
32 else:
33     beta = b / m
34     exp_term = np.exp(-beta * t_vals)
35     y = ((vy0 + g / beta) / beta) * (1 - exp_term) - (g / beta)
36         * t_vals
37     linestyle = '--'
38
39 # Interpola o para encontrar o tempo quando y cruza 0 (
40     exceto no in cio)
41 y_interp = interp1d(t_vals, y, kind='linear', bounds_error=
42     False, fill_value="extrapolate")
43 idx = np.where(y < 0)[0]
44 if len(idx) > 0:
45     t_flight = t_vals[idx[0]]
46 else:
47     t_flight = np.nan
48
49 flight_times.append({'': round(b / m, 2), 'Tempo de Voo (s)':
50     round(t_flight, 3)})
51 plt.plot(t_vals, y, linestyle=linestyle, label=fr'$\beta$ = {b/
52     m:.2f}')
53
54 plt.title('Altura y(t) para Diferentes Valores de ')
55 plt.xlabel('Tempo (s)')
56 plt.ylabel('Altura (m)')
57 plt.grid(True)
58 plt.legend()
59 plt.tight_layout()
60
61 # Salvar em mltiplos formatos
62 plt.savefig("altura_beta_voo.png")
63 plt.savefig("altura_beta_voo.jpg")
64 plt.savefig("altura_beta_voo.pdf")
65 plt.savefig("altura_beta_voo.svg")
66
67 plt.show()
68
69 # Tabela com tempos de voo
70 df_flight = pd.DataFrame(flight_times)

```

```

66 print("Tabela de Tempos de Voo para Diferentes :")
67 print(df_flight)

```

Gráfico da Energia Cinética Total ao longo do tempo: Lembrando que o programa usa os mesmos parâmetros físicos dos códigos anteriores, considera as duas componentes da velocidade para calcular a energia cinética, gráficos com linhas contínuas para $\beta = 0$ e pontilhadas para $\beta > 0$.

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # Constantes físicas
5  g = 9.81                # gravidade (m/s²)
6  m = 1.0                 # massa (kg)
7  v0 = 30.0               # velocidade inicial (m/s)
8  theta_deg = 45          # ângulo de lançamento (graus)
9  theta = np.radians(theta_deg)
10
11 # Lista de coeficientes de arrasto b (mais valores para melhor
    visualização)
12 bs = np.linspace(0.0, 1.5, 16) # de 0 a 1.5 com 16 valores
13
14 # Tempo de simulação
15 t_max = 10
16 dt = 0.01
17 t_vals = np.arange(0, t_max, dt)
18
19 # Velocidade inicial nas direções x e y
20 vx0 = v0 * np.cos(theta)
21 vy0 = v0 * np.sin(theta)
22
23 # --- Gráfico da Energia Cinética Total ---
24 plt.figure(figsize=(10, 6))
25
26 for b in bs:
27     if b == 0:
28         # Sem resistência do ar
29         vx_t = np.full_like(t_vals, vx0)
30         vy_t = vy0 - g * t_vals

```

```

31     linestyle = '-'
32     label = r'$\beta = 0$ (sem arrasto)'
33 else:
34     beta = b / m
35     exp_term = np.exp(-beta * t_vals)
36     vx_t = vx0 * exp_term
37     vy_t = (vy0 + g / beta) * exp_term - g / beta
38     linestyle = '--'
39     label = fr'$\beta$ = {beta:.2f}'
40
41     # Energia cinética total:  $E_c = (1/2) * m * (v_x^2 + v_y^2)$ 
42     Ec_t = 0.5 * m * (vx_t**2 + vy_t**2)
43
44     plt.plot(t_vals, Ec_t, linestyle=linestyle, label=label)
45
46 plt.title('Energia Cinética Total ao Longo do Tempo')
47 plt.xlabel('Tempo (s)')
48 plt.ylabel('Energia Cinética (J)')
49 plt.grid(True)
50 plt.legend()
51 plt.tight_layout()
52
53 # Salvar em múltiplos formatos
54 plt.savefig("energia_cinetica_total.png")
55 plt.savefig("energia_cinetica_total.jpg")
56 plt.savefig("energia_cinetica_total.pdf")
57 plt.savefig("energia_cinetica_total.svg")
58
59 plt.show()

```

