Universidade Estadual do Piauí

Pró-Reitoria de Ensino e Graduação - PREG

Campus Clóvis Moura - CCM

Análise do Teorema da Função Inversa no Espaço $\mathbb{R}^n$

Anderson Luís Moreira Cardoso

Teresina

2024

Anderson Luís Moreira Cardoso

O estudo do teorema da função inversa e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Comissão Acadêmica Institucional da Coordenação de Matemática - CCM como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática.

Orientador: Natã Firmino Santana Rocha

Teresina
2024

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os professores de Matemática da Uespi CCM, por todos os conselhos e apoio.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar essa longa jornada.

A Universidade Estadual do Piauí - UESPI e o Campus Clóvis Moura pelo fornecimento da estrutura física e o corpo de funcionários que mantém a Universidade em funcionamento.

Ao Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha, por toda orientação no Pibic e neste trabalho. Além, de toda paciência no desenvolvimento do meu caminho como matemático.

Ao Prof. Ms. Anderson Fabian de Sousa Meneses por todas as boas conversas em sala de aula e fora dela, que contribuíram no meu desenvolvimento.

Ao Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito pela dedicação, educação e paciência ao ouvir as necessidades dos alunos.

Ao Prof. Ms. Gildo Jesus Sousa pela coordenação do nosso curso no começo da minha jornada: toda compreensão e paciência em tentar ajudar.

Ao Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima pela coordenação do nosso curso do meio para o fim da minha jornada: passando muita serenidade e alegria; apesar de todas as dificuldades.

Aos meus pais, Valter Luís Cardoso e Irisdalva Moreira da Silva Cardoso, por todo apoio, paciência e cuidado ao longo da minha vida.

Às funcionárias da Biblioteca pelo carinho, apoio e cuidado.

Meus agradecimento ao amigo e ajudante indispensável nesta jornada: Antonio Mateus Mota Silva.

RESUMO

Neste trabalho vamos estudar o Teorema da função inversa e consequentemente uma aplicação, no qual podemos citar, a raiz quadrada de uma matriz. Para apoio do trabalho será abordado ideias sobre: produto interno, espaço euclidiano, norma, topologia, continuidade, sequencias, limite, derivada e aplicações diferenciais.

Palavras-chave: Limite, Derivada, Função Inversa.

ABSTRACT

In this work we will study the inverse function theorem and consequently one application, in which we can mention the square of matrix. To support the work is necessary ideas about: inner product, Euclidean space, norm, topology, continuity, sequences, limit, derivative and differential applications.

Keywords: Limit, Derivative, Inverse Function.

Sumário

1 Introdução

No presente trabalho vamos estudar sobre o Teorema da Função Inversa e uma aplicação; utilizando as ferramentas fornecidas pela Análise no $\mathbb{R}^n$ e Álgebra linear. O trabalho está dividido da seguinte forma: no segundo capítulo, será feito uma abordagem de assuntos já visto na graduação, como espaço euclidiano, produto interno e norma; o que dará base para a construção desse trabalho. Depois da segunda parte começará a generalização referente a Análise real, pois agora a abordagem será em n dimensões. A partir do terceiro capítulo, será discutido assuntos de sequências, continuidade, e consequente, é possível tratar sobre limites. No quarto capítulo, é retomada as ideia de derivada e definições de derivadas parciais. No quinto capítulo é feita a definição de aplicações diferenciáveis utilizando as ideias de transformações lineares. Finalmente, no sexto capítulo é chegada a hora sobre a exposição do Teorema principal deste trabalho e seu uso na Matemática.

2 Espaço euclidiano e Topologia

2.1 Espaços com produto interno

Definição 2.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Entende-se por produto interno sobre V uma aplicação que transforma cada par ordenado $(u, v) \in V \times V$ em um número real, que indicaremos por $\langle u, v\rangle$, obedecendo às seguintes condições:*

(a) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \ \forall u, v, w \in V$;

(b) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \ \forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall u, v \in V$;

(d) $\forall u \neq o$, então $\langle u, u\rangle$ é um número real e maior que zero .

Definição 2.2. *Um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com produto interno ou espaço euclidiano é um espaço sobre $\mathbb{R}^n$ munido de produto interno.*

2.2 Propriedades do produto interno

1. $\langle o, u\rangle = \langle u, o\rangle = 0, \forall u \in V$

   $0u = o.$

   Daí,

   $\langle o, u\rangle = \langle 0u, u\rangle = 0\langle u, u\rangle = 0$

   Logo,

   $\langle o, u\rangle = \langle u, o\rangle.$

2. $\langle u, \alpha v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$

   Prova:

   $\langle u, \alpha v\rangle = \langle \alpha v, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle = \alpha\langle u, v\rangle.$

3. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle, \forall u, v, w \in V$

   Prova:

   $\langle u, v + w\rangle = \langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$

4. Dado um número inteiro $m \geqslant 1$,
   $\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, v\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\langle u_i, v\rangle$

   Prova por indução:

   Para $m = 1$

$$\langle \alpha_1 u_1, v\rangle = \alpha_1\langle\ u_1, v\rangle.$$

Para $m = k$ (hipótese de indução)

$$\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\langle\ u_i, v\rangle$$

Utilizando a hipótese para provar $m = k+1$

$$\begin{aligned}\langle \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i, v\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \alpha_{k+1}u_{k+1}, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, v\rangle + \langle \alpha_{k+1}u_{k+1}, v\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\langle\ u_i, v\rangle + \alpha_{k+1}\langle u_{k+1}, v\rangle = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i\langle u_i, v\rangle.\end{aligned}$$

5. $\langle u, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\langle u, v_j\rangle$

   Prova por indução:

   Para $n = 1$

$$\langle u, \beta_1 v_1\rangle = \beta_1\langle\ u, v_1\rangle$$

   Para $n = k$ (hipótese de indução)

$$\langle u, \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j\rangle = \sum_{j=1}^{k} \beta_j\langle\ u, v_j\rangle$$

   Utilizando a hipótese para provar $n = k+1$

$$\begin{aligned}\langle u, \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j v_j\rangle &= \langle u, \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j + \beta_{k+1}v_{k+1}\rangle = \langle u, \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j\rangle + \langle u, \beta_{k+1}v_{k+1}\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{k} \beta_j\langle u, v_j\rangle + \beta_{k+1}\langle u, v_{k+1}\rangle = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j\langle u, v_j\rangle.\end{aligned}$$

6. $\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\langle u_i, v_j\rangle$

Demonstração (consequência da **4** e **5**):

$$\begin{aligned}
\langle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\langle u_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\beta_j\langle u_i, v_j\rangle \\
&= (\alpha_1 + ... + \alpha_m)(\beta_1 + ... + \beta_n)\langle u_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\langle u_i, v_j\rangle.
\end{aligned}$$

2.3 Norma e distância

Definição 2.3. *Seja V um espaço euclidiano com produto interno $(u, v) \to \langle u, v\rangle$. Dado um vetor $u \in V$ indica-se por $||u||$ e chama-se norma de u o número real positivo dado por*

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Exemplo: Se no $\mathbb{R}^n$ consideramos o produto interno usual, dado $u = (x_1, ..., x_n)$ nesse espaço, temos:

$$||u|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Proposição 2.4. *Em todo espaço euclidiano V, temos:*

(a) $||\alpha u|| = |\alpha|||u||, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$

Demonstração:

$||\alpha u|| = \sqrt{\langle\alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle u, u\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle u, u\rangle} = |\alpha|||u||.$

(b) $||u|| \geqslant 0\ \forall u \in V$ e $||u|| = 0 \iff u = o$

Demonstração:

$(\Longrightarrow)$

$||u|| = 0 \Longrightarrow \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Longrightarrow \langle u, u\rangle = 0 \Longrightarrow u = o.$

A última implicação acontece pela contra positiva do item (d) da **definição 2.1**.

contra positiva de (d): $\langle u, u\rangle$ é um número real, menor ou igual a zero, então $\exists u = o$.

Como em um conjunto não existem elemento iguais, então $u = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Fazendo $u = o$ e colocando em $\langle u, u\rangle$ obtemos que o resultado é igual a 0, por causa da **propriedade 1**.

Além da norma euclidiana existe outros tipos de normas que podem ser citadas como

(a) Norma do máximo

$$||x||_M = max\{||x_1||, ..., ||x_n||\}$$

(b) Norma da soma

$$||x||_S = ||x_1|| + ... + ||x_n||$$

Podemos verificar com certa facilidade que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$||x|| \leqslant ||x||_M \leqslant ||x||_S \leqslant n \cdot ||x||_M.$$

Proposição 2.5 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**). *Se V um espaço vetorial euclidiano, então:*

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||, \forall u, v \in V.$$

Demonstração:
Se u ou v igual a zero.

No caso de $v = o$, então $\langle u, v\rangle = 0$ e $||u||||v|| = 0$, logo tém se a igualdade neste caso

$$0 \leqslant 0 \iff 0 = 0.$$

Suponhamos $u, v \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade $||u + \alpha v||^2 \geqslant 0$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant ||u + \alpha v||^2 &= \langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle \alpha v, \alpha v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \alpha^2||v||^2 \\ &= ||v||^2\alpha^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + ||u||^2 \end{aligned}$$

Obtivemos, assim, um trinômio do segundo grau em α, pois $||v||^2 \neq 0$. Logo seu descriminante (Δ) é menor ou igual a zero, pois o trinômio é maior ou igual a zero.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant ax^2 + bx + c \\ \Delta &\leqslant 0 \\ b^2 - 4ac &\leqslant 0 \\ 4\langle u, v\rangle^2 - 4||v||^2||u||^2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle^2 &\leqslant ||u||^2||v||^2\\ \sqrt{\langle u, v\rangle^2} &\leqslant \sqrt{||u||^2||v||^2}\\ |\langle u, v\rangle| &\leqslant ||u||||v||.\end{aligned}$$

Corolário 2.6 (Desigualdade triangular). *Num espaço euclidiano vale a seguinte desigualdade*

$$||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle\\ &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v\rangle \leqslant ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||||v|| = (||u|| + ||v||)^2.\end{aligned}$$

Então $||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2$, daí, obtemos

$$||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V.$$

2.4 Bolas e conjuntos limitados

Definição 2.7 (Bola aberta). *Dados o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor que r*

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x-a|| < r\}.$$

Consequentemente, pode ser definido também a bola fechada

$$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x-a|| \leqslant r\}$$

Por sua vez, a esfera de centro a e raio r é o conjunto

$$S[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x-a|| = r\}$$

Evidentemente, $B[a;r] = B(a;r) \cup S[a;r]$.

Definição 2.8 (Conjunto Limitado). *Dizer que o conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado equivale a entender que existe $k > 0$ tal que $||x|| \leqslant k$ para todo $x \in X$.*

Definição 2.9 (**Conjunto convexo**). *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se convexo quando o segmento de reta que une dois quaisquer de seus pontos está inteiramente contido em X.*

$$a, b \in X, 0 \leqslant t \leqslant 1 \implies (1-t)a + tb \in X.$$

Proposição 2.10. *Toda bola (aberta ou fechada) é um conjunto convexo.*

Demonstração:
Consideremos primeiramente a bola fechada $B = B[x_0; r]$. Dela é possível compreender que Dadas $a, b \in B$, temos

$$||a - x_0|| \leqslant r \text{ e } ||b - x_0|| \leqslant r.$$

Então, para qualquer $t \in [0, 1]$ vale

$$x_0 = (1-t)x_0 + tx_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||(1-t)a + tb - x_0|| &= ||(1-t)a + tb - (1-t)x_0 - tx_0|| \\ &= ||(1-t)(a - x_0) + t(b - x_0)|| \\ &\leqslant (1-t)||a - x_0|| + t||b - x_0|| \\ &\leqslant (1-t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Definição 2.11 (**Ponto interior**). *Seja $a \in X \subseteq \mathbb{R}^n$. Diz-se que o ponto a é interior ao conjunto X quando, para algum $r > 0$, tem-se $B(a; r) \subseteq X$.*

Com isso em mente, o conjunto $intX$ corresponde aos pontos que são interiores ao conjunto X. Diretamente da definição de ponto interior concluímos que $intX \subset X$. Assim, podemos definir o seguinte:

Definição 2.12 (**Vizinhança de um ponto**). *Sendo $a \in intX$, então X é vizinhança do ponto a.*

Proposição 2.13. *Toda bola aberta é conjunto aberto.*

Demonstração:
Tendo em mente a bola aberta $B = B(a; r)$, podemos compreender que $x \in B$, então $||x - a|| < r$, logo

$$s = r - ||x - a|| > 0$$

Afirmamos que, $B(x;s) \subset B$. Com efeito,

$$y \in B(x;s) \implies ||y-x|| < r - ||x-a||.$$

Logo,

$$y \in B(x;s) \implies ||y-a|| \leqslant ||y-x|| + ||x-a|| < r - ||x-a|| + ||x-a|| = r.$$

Daí concluímos que $y \in B(x;r)$.

Definição 2.14 (Conjunto Fronteira). *Sendo $X \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto fronteira(frX) é formado pelos pontos y, no qual toda bola de centro y, contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}^n - X$.*

Teorema 2.15 (Manipulações entre conjuntos abertos). *a) Se A_1, A_2 são abertos em $\mathbb{R}^m$ então $A_1 \cap A_2$ é aberto*

b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ então a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração:

a) Sejam $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Seja $x \in A_1 \cap A_2$, então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Portanto, existem $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que

$$B(x;\epsilon_1) \subseteq A_1, \ B(x;\epsilon_2) \subseteq A_2.$$

Seja $\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Dessa forma,

$$B(x;\epsilon) \subseteq B(x;\epsilon_1), B(x;\epsilon_2).$$

Consequentemente,

$$B(x;\epsilon) \subseteq A_1, A_2.$$

Assim,

$$B(x;\epsilon) \subseteq A_1 \cap A_2.$$

Isto nos diz que $x \in int(A_1 \cap A_2)$. Ou seja, $A_1 \cap A_2$ é aberto. .

b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família qualquer de abertos. Seja $x \in A$. Portanto, existe $\lambda_0 \in \Lambda$

tal que $x \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x;\epsilon) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq A.$$

Assim, $x \in intA$. Ou seja, A é aberto.

3 Sequências, Continuidade e limites

3.1 Sequências

Definição 3.1 (Sequência). *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, que associa a cada número natural k um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$. As notações para uma seqüência são $(x_1, ..., x_k, ...)$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_k).*

Definição 3.2 (Sequência Limitada). *Diz-se que a sequencia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada quando existe uma bola em $\mathbb{R}^n$ que contém todos os termos x_k. Isto equivale a dizer que existe $c > 0$ tal que $|x_k| \leqslant c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Proposição 3.3. *Se a seqüência (x_k) é limitada então, para todo $i = 1, ..., n$, a sequência $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$ das i-ésimas coordenadas de x_k é também limitada.*

Demonstração:
Para prová-la, adotaremos em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo. Então, se $||x_{k_1}|| \leqslant c_1$, $||x_{k_2}|| \leqslant c_2, ..., ||x_{k_n}|| \leqslant c_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, chamando de c o maior dos números $c_1, c_2, ..., c_n$ teremos $||x_k|| = max\{||x_{k_1}||, ..., ||x_{k_n}||\} \leqslant c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, se cada $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}(i = 1, ..., n)$ é limitada, a sequencia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Definição 3.4 (Subsequência). *Uma subsequencia de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é a restrição desta sequencia a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = k_1 < ... < k_m < ... \subset \mathbb{N}$.*

Definição 3.5 (Limite de uma sequencia). *Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência (x_k) quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \implies ||x_k - a|| < \epsilon$.*

$$k > k_0 \implies x_k \in B(a;\epsilon).$$

Escreve-se então $\lim_{k\to\infty} x_k = a$,$\lim x_k = a$

Diretamente da definição podemos extrair que

$$\lim x_k = a \iff \lim ||x_k - a|| = 0$$

Teorema 3.6. *A sequencia (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, ..., a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, ..., n$, tem-se $\lim_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$, isto é, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de a.*

Demonstração:
Para cada $i = 1, ..., n$, tem-se $||x_{k_i} - a_i|| \leqslant ||x_k - a||$, portanto

$$\lim x_k = a \implies \lim_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i.$$

Reciprocamente, se vale esta última igualdade então, dado $\epsilon > 0$, existem $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$k > k_i \implies ||x_{k_i} - a_i|| < \epsilon (i = 1, ..., n).$$

Tomando $k_0 = max\{k_1, ..., k_n\}$ e adotando em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo, vemos que

$$k > k_0 \implies ||x_k - a|| < \epsilon.$$

Logo $\lim x_k = a$.

Corolário 3.7. *Se* $\lim x_k = a$, $\lim y_k = b$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\lim \alpha_k = \alpha$ *em* $\mathbb{R}$ *então* $\lim(x_k + y_k) = a + b$ $lim \alpha_k x_k = \alpha a$.

Tomando cada sequencia de coordenadas, o corolário resulta da propriedade correspondente em $\mathbb{R}$

Teorema 3.8 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequencia limitada em* $\mathbb{R}^n$ *possui uma subsequencia convergente.*

Demonstração:
Seja (x_k) uma sequencia limitada em $\mathbb{R}^n$. As primeiras coordenadas dos seus termos formam uma sequencia limitada $(x_{k_1})_{k\in\mathbb{N}}$ de números reais, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass na reta, possui uma subsequencia convergente. Isto é, existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ e um número real a_1 tais que $\lim_{k\in\mathbb{N}_1} x_{k_1} = a_1$. Por sua vez, a sequencia limitada $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ em $\mathbb{R}$ possui uma subsequencia convergente: existem um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ e um número real a_2 tais que $\lim_{k\in\mathbb{N}_2} x_{k_2} = a_2$. E assim por diante, até obtermos n conjuntos infinitos $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset ... \supset \mathbb{N}_n$ e números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que $\lim_{k\in\mathbb{N}_i} x_{k_i} = a_i$ para $i = 1, 2, ..., n$. Então pomos $a = (a_1, ..., a_n)$ e, pelo **Teorema 3.6**, temos $\lim_{k\in\mathbb{N}_n} x_k = a$, o que prova o teorema.

Definição 3.9 (Sequência de Cauchy). *Uma sequencia de pontos* $x_k \in \mathbb{R}^n$ *chama-se uma sequencia de Cauchy quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$k, r > k_0 \implies ||x_k - x_r|| < \epsilon.$$

Proposição 3.10. *Toda sequencia de Cauchy* (x_k) *é limitada.*

Com efeito, tomando $\epsilon = 1$ na definição acima, vemos que existe um índice k_0 tal que, salvo possivelmente os pontos $x_1, ..., x_{k_0}$ todos os demais termos x_k pertencem à bola $B(x_{k_0+1}; 1)$. Portanto o conjunto dos termos da sequencia é limitado.

A condição para que a sequencia (x_k) seja de Cauchy pode ser reformulada dizendo-se que $\lim_{k,r\to\infty} ||x_k - x_r|| = 0$, isto é, que $\lim_{k,r\in\mathbb{N}} ||x_k - x_r|| = 0$. Daí resulta que se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito, ou seja, se $(x_r)_{r\in\mathbb{N}'}$ é uma subsequencia de (x_k) então $\lim_{k\in\mathbb{N},r\in\mathbb{N}'} ||x_k - x_r|| = 0$.

Teorema 3.11. *Uma sequencia em $\mathbb{R}^n$ converge se, e somente se, é uma sequencia de Cauchy.*

Demonstração:
($\Leftarrow$) Seja (x_k) uma sequencia de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Sendo limitada, ela possui uma subsequencia convergente $(x_r)_{r\in\mathbb{N}'}$. Seja $a = \lim_{r\in\mathbb{N}'} x_r$. Temos $\lim_{r\in\mathbb{N}'} ||x_r - a|| = 0$ e $\lim_{k\in\mathbb{N},r\in\mathbb{N}'} ||x_k - x_r|| = 0$, como observamos acima. Então, aplicando o limite em $||x_k - a|| \leqslant ||x_k - x_r|| + ||x_r - a||$ resulta que $\lim_{k\in\mathbb{N}} ||x_k - a|| = 0$, ou seja, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

($\Rightarrow$) Se (x_k) é convergente, com $\lim x_k = a$, então, aplicando o limite em $||x_k - x_r|| \leqslant ||x_k - a|| + ||x_r - a||$, concluímos que $\lim_{k,r\to\infty} ||x_k - x_r|| = 0$, ou seja, (x_k) é de Cauchy.

3.2 Continuidade

Definição 3.12 (funções- coordenada). *Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, associa a cada ponto $x \in X$ sua imagem $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. As funções reais $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$*

Definição 3.13 (função contínua em um ponto). *Diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para cada $\epsilon > 0$ arbitrariamente dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \epsilon$$

Noutros termos: para cada bola $B(f(a); \epsilon)$ dada, existe uma bola $B(a; \delta)$ tal que $f(B(a; \delta) \cap X) \subset B(f(a); \epsilon)$. Diremos que $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Teorema 3.14. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ com $f(X) \subset Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^p$. Se f é contínua no ponto $a \in X$ e g é contínua no ponto $f(a)$ então $g \circ f : X \to \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a. Ou seja: a composta de duas aplicações contínuas é contínua.*

Demonstração:
Seja dado $\epsilon > 0$. A continuidade de g no ponto $f(a)$ assegura a existência de $\lambda > 0$ tal que $y \in Y$, $||y - f(a)|| < \lambda \implies ||g(y) - g(f(a))|| < \epsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto a fornece $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \lambda \implies ||g(f(x)) - g(f(a))|| < \epsilon$, logo $g \circ f$ é contínua no ponto a.

Teorema 3.15. *(a) A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim x_k = a$, tem-se $\lim f(x_k) = f(a)$*

(b) A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, suas funções-coordenada $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}^n$ são contínuas nesse ponto.

Demonstração:

(a) Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ contínua no ponto a. Dada a sequencia de pontos $x_k \in X$ com $\lim x_k = a$, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a); \implies$. Correspondente a δ, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \implies x_k \in B(a;\delta)$, logo $k > k_0 \implies f(x_k) \in B(f(a);\epsilon)$. Isto mostra que $\lim f(x_k) = f(a)$. Reciprocamente, suponhamos por absurdo, que $\lim x_k = a$ implique $\lim f(x_k) = f(a)$, porém f seja descontínua no ponto a. Então existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $k \in \mathbb{R}^n$, podemos encontrar $x_k \in X$ com $||x_k - a|| < \frac{1}{k}$ e $||f(x_k) - f(a)|| \geqslant \epsilon$. Assim, temos $\lim x_k = a$ mas não temos $\lim f(x_k) = f(a)$, uma contradição.

(b) Isto decorre imediatamente do Teorema 3.6 junto com a parte (a), que acabamos de provar

Teorema 3.16. *Seja $X \subset\to \mathbb{R}^m$. Se as aplicações $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são também contínuas nesse ponto as aplicações*

- $f + g : X \to \mathbb{R}^n$
- $\langle f, g\rangle : X \to \mathbb{R}^n$
- $|f| : X \to \mathbb{R}$ *e* $\alpha f : X \to \mathbb{R}^n$

Demonstração:

Isto resulta do Teorema 3.15(a) juntamente com o Corolário do Teorema 3.6.

Teorema 3.17. *A aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa por f de todo subconjunto aberto em Y é um subconjunto aberto em X.*

Demonstração:

Dada $f : X \to \mathbb{R}^n$, se $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ podemos considerar f como uma aplicação de X em Y e escrever $f : X \to Y$. Se A e F são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ então $f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cup Y)$ e $f^{-1}(F) = f^{-1}(F \cup Y)$.

Proposição 3.18. *Toda transformação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua*

Demonstração:

Para cada $i = 1, 2, ..., n$, a i-ésima função-coordenada de A é a função contínua $(x_1, ..., x_n) \mapsto a_{i_1}x_1 + ... + a_{i_n}x_n$, onde $[a_{ij}]$ é a matriz de A.

3.3 Limites

Definição 3.19. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}^n$ definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de X. Diz-se que $b \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *quando a seguinte condição é válida:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in X, 0 < ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Quando o ponto de acumulação a pertence a X, a aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 3.20. *Seja a um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Se as funções coordenada da aplicação $f : X \to \mathbb{R}^m$ são $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ então tem-se* $\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, ..., b_n)$ *se, e somente se,* $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$ *para cada $i = 1, ..., n$.*

Demonstração. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ então, para cada $i = 1, ..., n$, tem-se $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$ porque $||fi(x) - bi|| \leqslant ||f(x) - b||$. Reciprocamente, se $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$ para cada $i = 1, ..., n$ então $\lim_{x \to a} f(x) = b$ porque $||f(x) - b|| \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||f_i(x) - b_i||$.

Teorema 3.21. *Seja a um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. A fim de que se tenha* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_k \in X - \{a\}$ com* $\lim x_k = a$*, seja* $\lim f(x_k) = b$

Demonstração:
($\Rightarrow$) Seja $(x_k) \subset X - \{a\}$ tal que $\lim x_k = a$. Assim, dado $\epsilon > 0$ temos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < ||x - a|| < \delta$, chegamos a seguinte desigualdade:

$$||f(x) - b|| < \epsilon,$$

pois $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Como $\lim x_k = a$, então $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant N$, tem-se

$$0 < ||x_k - a|| < \delta, \; com \; N = N(\delta).$$

Com isso, para todo $n \geqslant N$, conclui-se que $||f(x_k) - b|| < \epsilon$. Ou seja,

$$\lim f(x_k) = b.$$

($\Leftarrow$)Suponha, por contraposição, que $\lim_{x \to a} f(x) \neq b$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, encontra-se $x_\delta \in X$ tal que

$$0 < ||x_\delta - b|| < \delta \; e \; ||f(x_\delta) - b|| \geqslant \epsilon.$$

Considere os seguintes valores para δ :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...,$$

com $n \in N$ para obter $x_k \in X$ tal que

$$0 < ||x_k - a|| < \frac{1}{n} \text{ e } ||f(x_k) - b|| \geqslant \epsilon.$$

Portanto, utilizando o Teorema do Sanduíche, $(x_k) \subset X - a$, $\lim x_k = b$ e

$$||f(x_k) - b|| \geqslant \epsilon,$$

Se $\lim f(x_k) = b$, então

$$0 = \lim ||f(x_k) - b|| \geqslant \epsilon,$$

Ou seja, $\epsilon \leqslant 0$. Contradição! Assim sendo, $\lim f(x_k) = b$.

Teorema 3.22. *Sejam: a um ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^n$, $b \in Y$ um ponto de acumulação de $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to Y$ uma aplicação tal que $lim_{x\to a} f(x) = b$ e $g : \mathbb{R}^p$ contínua no ponto b. Então* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.

Teorema 3.23. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \to \mathbb{R}$ definidas no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ e a um ponto de acumulação de X. Se existem $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ e $\lim_{x\to a} \alpha(x) = \alpha_0$, então existem os limites e valem as igualdades abaixo:*

(a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$,

(b) $\lim_{x\to a} \alpha(x) \times f(x) = \alpha_0 \times b$

(c) $\lim_{x\to a}\langle f(x), g(x)\rangle = \langle b, c\rangle$

(d) $\lim_{x\to a} ||f(x)|| = ||b||$

Demonstração:

A aplicação $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $s(x, y) = x + y$, é contínua. Observando que $f(x) + g(x) = s(f(x), g(x))$, resulta do Teorema 3.20 que $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b + c$. Analogamente para as outras três igualdades.

Além disso, é útil saber que se $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$ é limitada na vizinhança de a (isto é, existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que $x \in X$ e $||x - a|| < \delta$ implicam $|f(x)| \leqslant M$ então $\lim_{x\to a} \alpha(x)f(x) = 0$, mesmo que não exista $\lim_{x\to a} f(x)$.

4 Diferenciabilidade

4.1 Derivadas parciais

Definição 4.1 (Derivada parcial). *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $i = 1, ..., n$, a i-ésima derivada parcial de f no ponto $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ é o número*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + t, ..., a_n) - f(a)}{t}$$

caso este limite exista.

4.2 Funções de Classe C^1

Definição 4.2 (Função de classe C^1). *Seja $f : U \to R$ uma função que possui as n derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$; onde, podem ser definidas as seguintes funções contínuas em U:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \to \mathbb{R} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Definição 4.3 (Função Diferenciável). *Uma função $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando cumpre as seguintes condições:*

- *Existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, sendo $i = 1, ...n$.*
- *Para todo $v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tal que $a + v \in U$, tem-se*

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + r(v), \text{ onde } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{||v||} = 0$$

A essência da definição da diferenciabilidade está na condição $\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{||v||} = 0$.

Proposição 4.4. *Toda função diferenciável em um certo ponto a é contínua nesse ponto.*

Demonstração:
De $\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{||v||} = 0$ resulta que $\lim_{v \to a} r(v) = 0$, pois $r(v) = \frac{r(v)}{||v||} \cdot ||v||$. Segue-se que $lim_{v \to a}[f(a + v) - f(a)] = 0$.

Diremos que $f : U \to R$ é diferenciável quando f for diferenciável em todos os pontos de U. Quando $n = 1$, a função $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a se,e somente se, possui derivada neste ponto pois, como podemos agora dividir por $v \in R$, de $f(a + v) - f(a) = \frac{df}{dx} \cdot v + r(v)$ resulta

$$\frac{r(v)}{||v||} = \frac{f(a + v) - f(a)}{v} - \frac{df}{dx}(a),$$

portanto, $\lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{||v||}=0 \iff \lim_{v\to 0}\frac{f(a+v)-f(a)}{v}=\frac{df}{dx}(a)$

Teorema 4.5. *Toda função $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^1 é diferenciável.*

Demonstração

Por simplicidade, suporemos $U\subset\mathbb{R}^2$. O caso geral se trata analogamente, apenas com uma notação mais elaborada. Fixemos $c=(a,b)\in U$ e tomemos $v=(h,k)$ tal que $c+v\in U$. Seja

$$r(v)=r(h,k)=f(a+h,b+k)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k$$

onde as derivadas são calculadas no ponto $c=(a,b)$. Podemos escrever

$$r(v)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k$$

Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável real, existem $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ tais que

$$r(v)=\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h,b+k)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_2 k)\cdot k-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k,$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{r(v)}{||v||}=&[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&+[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\theta_2 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

Quando $v\to 0$ os termos dentro dos colchetes acima tendem a zero, pela continuidade das derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Além disso, os termos fora dos colchetes têm valor absoluto $\leqslant 1$. Portanto $\lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{||v||}=0$ e então f é diferenciável.

Corolário 4.6. *Toda função de classe C^1 é contínua.*

5 A Derivada como uma Aplicação Linear

Definição 5.1. *Uma função $f:U\to\mathbb{R}^n$, definida no aberto $U\subset\mathbb{R}^m$, é definida como diferenciável no ponto $a\in U$ quando cada uma das suas funções-coordenada $f_1,...,f_n:U\to R$ é diferenciável nesse ponto.*

$$f_i(a+v)-f_i(a)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\cdot\alpha_j+ri(v)\ com\ \lim_{v\to 0}\frac{r_i(v)}{||v||}$$

Sendo $v = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $a + v \in U$ e $i = 1, ..., m$

Definição 5.2. *A matriz* $Jf(a) = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)]$*chama-se a matriz jacobiana de* f *no ponto* a.

Definição 5.3. *A transformação linear* $Df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*, cuja matriz em relação às bases canônicas de* $\mathbb{R}^m$ *e* $\mathbb{R}^n$ *é* $Jf(a)$*, chama-se a derivada da aplicação* f *no ponto* a.

Neste caso, podemos definir

Definição 5.4. *A função* $Df(x) : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ *corresponde os valores* $x \in U$ *com a transformação linear* $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

De acordo com a definição de matriz de uma transformação linear, para todo $v = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ temos

$$Df(a) \cdot v = (\beta_1, ..., \beta_n) \text{ onde } \beta_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \alpha_j = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a).$$

Definição 5.5. *A derivada direcional da função* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *, no ponto* a*, na direção do vetor* v*, como*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), ..., \frac{\partial f_n}{\partial v}(a)) = Df(a) \cdot v.$$

Quando $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em todos os pontos de U, dizemos que f é diferenciável em U.

Para facilitar a notação, quando as n igualdades numéricas que exprimem a diferenciabilidade das funções coordenadas f_i, será denotado esta condição como

$$f(a + v) - f(a) = Df(a) \cdot v + r(v) \text{ com } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{||v||}$$

Algumas vezes, é mais conveniente escrever esta condição sob a forma

$$f(a + v) - f(a) = Df(a) \cdot v + \rho(v)||v|| \text{ com } \lim_{v \to 0} \rho(v) = 0.$$

Aqui, $p(v) = \frac{r(v)}{||v||}$ para todo $v \neq 0$ tal que $a + v \in U$.

Dizer que a aplicação derivada $Df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, é contínua equivale a afirmar a continuidade de cada uma de suas nm funções coordenada $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$, isto é, a dizer que f é uma aplicação de classe C^1.

Teorema 5.6 (Regra da Cadeia). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ diferenciáveis nos pontos $a \in U$, $b = f(a) \in V$, com $f(U) \subset V$. Então $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

Demonstração
Podemos escrever

$$f(a+v) - f(a) = Df(a) \cdot v + \rho(v)||v|| \; com \; \lim_{v \to 0} \rho(v) = 0 \; e$$
$$f(a+v) - f(a) = Df(a) \cdot v + \sigma(v)||v|| \; com \; \lim_{v \to 0} \sigma(v) = 0$$

Então,

$$(g \circ f)(a+v) = g(f(a) + Df(a) \cdot v + \rho(v) \cdot ||v||$$

Pondo $w = Df(a) \cdot v + \rho(v) \cdot ||v||$, obtemos:

$$(g \circ f)(a+v) = g(b+w) = g(b) + Dg(b) \cdot Df(a) \cdot v + Dg(b) \cdot \rho(v)||v|| +$$
$$+ \sigma(w) \cdot ||w|| = (g \circ f)(a) + [Dg(b) \cdot Df(a)] \cdot v + C(v) \cdot ||v||,$$

onde

$$C(v) = Dg(b) \cdot \rho(v) + \sigma(w) \cdot |Df(a) \cdot \frac{v}{||v||} + \rho(v)|$$

Se $v \to 0$ então $w \to 0$ e $Df(a) \cdot \frac{v}{||v||}$ é limitada. Portanto $\lim_{v \to 0} C(x) = 0$.

Corolário 5.7. *Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : V \to \mathbb{R}^p$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ e $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^n$) são de classe C^k então $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é de classe C^k.*

Demonstração:
Com efeito a Regra da Cadeia, aplicada num ponto genérico $x \in U$, lê-se $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$. Em termos funcionais, temos

$$D(g \circ f) = (Dg \circ f) \cdot Df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^p)$$

onde $\circ$ é a composição de aplicações e $\cdot$ é a multiplicação de transformações lineares, a qual é bilinear, logo C^∞. Se f e g são de classe C^1, esta última igualdade mostra que $D(g \circ f)$ é contínua, logo $g \circ f \in C^1$. Por indução, supondo f e g de classe C^k, a mesma igualdade mostra que $D(g \circ f) \in C^{k-1}$, logo $g \circ f \in C^k$.

Corolário 5.8. *Nas condições do Teorema 1, a matriz jacobiana de* $g \circ f$ *no ponto* a *é o produto da matriz jacobiana de* g *no ponto* $f(a)$ *pela matriz jacobiana de* f *no ponto* $a : J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$.

Em termos de derivadas parciais, a igualdade acima lê-se

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

Corolário 5.9. *Sejam* $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ *diferenciáveis no ponto* $a \in U \subset \mathbb{R}^m$*,* α *um número real e* $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *bilinear. Então*

- $f + g : U \to \mathbb{R}^n$ *é diferenciável no ponto* a*, com* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- $\alpha \cdot f : U \to \mathbb{R}^n$ *é diferenciável no ponto* a*, com* $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$

Demonstração:
Os itens 1) e 2) podem ser provados diretamente a partir da definição de aplicação diferenciável ou então considerando as transformações lineares $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\alpha* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definidas por $S(x, y) = x + y$ e $\alpha * (x) = \alpha \cdot x$. Então é só observar que $f + g = S \circ (f, g)$ e $\alpha \cdot f = \alpha * \circ f$ e usar a Regra da Cadeia, lembrando que $DS = S$ e $D(\alpha*) = \alpha*$, logo

$$D(f + g) = S \circ (Df, Dg) = Df + Dg \text{ e } D(\alpha \cdot f) = D(\alpha * \cdot f) = \alpha * \circ Df = \alpha \cdot Df.$$

6 Teorema da Função Inversa

O Teorema da Função Inversa é um importante resultado que trata da possibilidade de inverter uma função, mesmo que localmente. Antes de enunciarmos este importante Teorema vamos precisar de alguns conceitos e resultados.

Definição 6.1 (Homeomorfismo). *Sejam* $U, V \subset \mathbb{R}^n$*. Um homeomorfismo* $f : U \to U$ *é uma bijeção contínua cuja inversa* $f^{-1} : V \to U$ *também é contínua.*

Definição 6.2 (Difeomorfismo). *Sejam* $U, V \subset \mathbb{R}^n$*. Conjuntos abertos. Um difeomorfismo* $f : U \to V$ *é um bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável.*

Observação 6.3. *Pelas definições acima, temos que todo difeomorfismo é um homeomorfismo, já que toda função diferenciável é contínua. A recíproca não é verdadeira, pois o fato de ser contínua em um ponto não garante ser diferenciável nesse ponto. Por exemplo, a aplicação* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$ *é um homeomorfismo diferenciável mas não é difeomorfismo, pois sua inversa* $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ *não é diferenciável no ponto 0, já o limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

não existe

Definição 6.4 (**Classe C^k**). *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é de classe C^k e escrevemos $f \in C^k$ em que $1 \leqslant K < \infty$, se em cada ponto de U as derivadas parciais de ordem K das funções coordenadas de f existem e são contínuas. Dizemos $f \in C^\infty$ se $f \in C^k, \forall k \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 6.5. *Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x cosy, e^x siny)$, em que são funções coordenadas f_1 e f_2 são respectivamente*

$$f_1(x, y) = e^x cosy \text{ e } f_2(x, y) = e^x seny.$$

Como $e^x, cosy, seny$ possuem todas as derivadas parciais de ordem k, onde $1 \leqslant K < \infty$, e estas são contínuas em $\mathbb{R}^2$, temos que f_1 e f_2 são de classe $C^k, \forall k \in \mathbb{N}$. Isso faz com que $f \in C^k, \forall k \in \mathbb{N}$, e assim $f \in C^\infty$. Porém, f não é um difeomorfismo, pois não é injetiva. De fato, note que

$$f(1, 0) = f(e^1 \cos 0, e^1 \sin 0) = (e, 0) \text{ e } f(1, 2\pi) = (e, 0),$$

ou seja, $f(1, 0) = f(1, 2\pi)$, mas $(1, 0) \neq (1, 2\pi)$

Definição 6.6 (**Difeomorfismo Local**). *Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo local se para cada $x \in U$ se existir um aberto V_x, em que $x \in V_x \subseteq U$ e a restrição de f a V_x é um difeomorfismo sobre um aberto W_x que contém $f(x)$. Quando f é de classe C^k, dizemos que é um difeomorfismo local de classe C^k.*

E importante sabermos que todo difeomorfismo é um difeomorfismo local. Já a recíproca não é válida. Vamos justificar esse fato após enunciarmos e demonstrarmos o Teorema da Função Inversa. Vamos desenvolver sobre alguns resultados que são essenciais para demostrar o Teorema da Função Inversa.

Teorema 6.7 (**Desigualdade do Valor Médio**). *Sejam U aberto e convexo do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferencial tal que $||Df(x)|| \leqslant M, \forall x \in U$, então*

$$||f(b) - f(a)|| \leqslant M||b - a||, \forall a, b \in U.$$

Teorema 6.8. *Se o difeomorfismo $f : U \to V$ é de classe $C^k(k \geqslant 1)$ então seu inverso $g = f^{-1} : V \to U$ também é de classe C^k*

Demonstração(indução em k)
Para todo $y = f(x) \in V$, temos $Dg(y)[Df(x)]^{-1} = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$, portanto a aplicação $Dg : V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m^2}$ se exprime como a composta

$$Dg = (Inv) \circ Df \circ f^{-1}$$

Onde Inv leva todo operador invertível $X : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ no seu inverso $X^{-1}, Df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, Df leva todo ponto $x \in U$ na derivada (invertível) $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $f^{-1}1 : V \to U$ é aplicação inversa de f . Sabemos que $Inv \in C^\infty$. Portanto, se $f \in C^k$ então $Df \in C^{k-1}$ e, pela hipótese de indução, $f^{-1} \in C^{k-1}$, logo $Dg \in C^{k-1}$, como composta de três aplicações de classe C^{k-1}. Por definição, isto significa que $g \in C^k$.

Proposição 6.9. *Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞*

$T'(x) = T$. Com efeito, $T(x + v) - T(v) = T \cdot v + 0$. A aplicação derivada é constante T' é constante, logo $T \in C^\infty$.

Teorema 6.10. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação definida por $f(x) = Tx + \phi(x)$, em que $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear invertível e $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ satisfaz*

$$||\varphi(x) - \varphi(y) \leqslant \lambda||x - y||, \ \forall x, y \in U,$$

com $\lambda||T^{-1}|| < 1$. Então f é homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Se $U = \mathbb{R}^m$, tem-se $f(U) = \mathbb{R}^m$

Teorema 6.11 (**Diferenciabilidade o Isomorfismo Inverso**)**.** *Seja $f : U \to V$ um homeomorfismo entre abertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável num ponto $a \in U$ e a derivada $Df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então o homeomorfismo inverso $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$ e $D(f^{-1}(b)) = Df(a)^{-1}$.*

Agora temos as ferramentas necessárias para demostrar o Teorema da Função Inversa.

Teorema 6.12 (**Teorema da Função Inversa**)**.** *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe classe C^k $(k \geqslant 1)$ tal que $Df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, em que $x_0 \in U$. Então f é difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$.*

Para simplificar a notação, suponhamos que $x_0 = f(x_0) = 0$, o resultado geral se obtém por translação.

Temos que $f \in C^k$ $(k \geqslant 1)$, então

$$f(x) = f(x) - f(0) = Df(0)x + r(x), \ \lim_{x \to \infty} \frac{r(x)}{||x||} = 0.$$

Dessa forma, $r(x) = f(x) - Df(0)x$ é de classe C^k, pois f é de classe C^k e $Df(0)$ é linear. Além disso,

$$Dr(0) = Df(0) - Df(0) = 0.$$

Como $Df(0)$ é um isomorfismo podemos considerar $0 < \lambda < \frac{1}{||Df(0)^{-1}||}$. Vimos que $r \in C^k$, então $Dr : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é contínua e assim,

$$\lim_{x \to 0} Dr(x) = Dr(0) = 0.$$

Como isso, existe $\delta > 0$ tal que $||Dr(x)|| < \lambda$, sempre que $||x|| < \lambda$. Ou seja, $V = B_\delta(0)$ vizinhança de $x_0 = 0$ tal que $||Dr(x)|| < \lambda$, $\forall x \in V$.

Pela Desigualdade do Valor Médio, **Teorema 6.7**, temos

$$||r(x) - r(y)|| \leqslant \lambda ||x - y||, \ \forall x, y \in V$$

Com isso, concluímos que a restrição de f a V é uma pertubação do isomorfismo $Df(0)$. Logo, pelo o **Teorema 6.10**, $f|_V$ é um homeomorfismo de V sobre um aberto W que contém $f(x_0)$. Por hipótese, $Df(x_0)$ é um isomorfismo, isto é, um determinante da matriz $[Df(x_0)]$ é diferente de zero. Além disso, $Df(x_0) : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e contínua, já que $f \in C^k$ Então, segue da continuidade do determinante e de Df que $Df(x)$ é um isomorfismo, $\forall x \in V$, diminuindo V se necessário. Pelo Teorema da Diferenciabilidade do Homeomorfismo Inverso (Teorema 6.11), $g \coloneqq f^{-1} : W \to V$ é diferenciável e $Dg(y) = Df(x)^{-1}$, com $y = f(x)$. Por fim, vamos provar que $g \in C^k$. De fato, note que e $Dg = i \circ Df \circ g$, em que $i(x) = x^{-1}$ é de classe C^∞. Como $f \in C^1$ e i, Df, g são contínuas, então Dg é contínua, isto é, $g \in C^1$. Se $f \in C^2$ então $i, Df, g \in C^1$, logo $Dg \in C^1$, ou seja, $g \in C^2$. Portanto, o resultado segue.

Algumas considerações devem ser feitas sobre o Teorema da Função Inversa. A primeira delas é que este não tem caráter global. De fato, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 6.13. *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (e^x cosy, e^x siny)$. *Daí, a matriz Jacobiana de* f *no ponto* (x, y) *é dada por*

$$[Df(x,y)] = \begin{pmatrix} e^x cosy & -e^x siny \\ e^x siny & e^x cosy \end{pmatrix}$$

Portanto, $det[Df(x,y)] = e^{2x} \neq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $Df(x,y)$ é um isomorfismo para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema da Função Inversa, f é um difeomorfismo local. Porém, já tínhamos visto que f não á um difeomorfismo. A segunda consideração á sobre a hipótese de f ser de classe C^1 não poder ser omitida. Com efeito, o exemplo a seguir mostra isso.

Exemplo 6.14. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\begin{cases} x+1=5 \\ x+1=5 \end{cases}$$

Isto implica que f' não é contínua em $x = 0$, o que acarreta que f não é de classe C^1. Seja $\delta > 0$ e $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k\pi} < \delta$. Então, $f'(\frac{1}{k\pi}) < 0$, se k é par e $f'(\frac{1}{k\pi}) > 0$, se k é ímpar. Pela continuidade de f em $(0, \infty)$ segue que existem intervalos $I, J \subset (-\delta, \delta)$ tais que $f'(x) > 0,\ \forall x \in I$ e $f'(x) < 0, \forall x \in J$, isso implica que f é crescente em I e decrescente em J e portanto f não tem inversa em $(-\delta, \delta)$. A última consideração a ser feita sobre o Teorema da Funcão Inversa é que a inversa de f pode existir em algumas vizinhanças de x_0 sem que $Df(x_0)$ seja invertível. De fato, considere o exemplo.

Exemplo 6.15. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tem inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e para $x_0 = 0$ tem-se $Df(x_0) = 0$ é não invertível. Neste caso, vimos que f^{-1} não é diferenciável em $0 = f(0)$.*

A seguir, será apresentadas uma aplicação do Teorema da Função Inversa, no qual mostra que próximo a identidade toda matriz tem uma raiz quadrada.

Aplicação 6.16. *Vamos utilizar o Teorema da Função Inversa para provar que próximo a identidade toda matriz tem uma raiz quadrada. Lembre-se que uma matriz X é uma raiz quadrada de uma matriz Y quando $X^2 = Y$ Seja $f : Mn(\mathbb{R}) \to Mn(\mathbb{R})$ dada por $f(X) = X^2$. Assim,*

$$f(I) = I, f \in C^1 \ e \ Df(X)H = XH + HX.$$

Em particular,

$$Df(I)H = 2H, \forall H \in Mn(\mathbb{R}).$$

Logo, $Df(I) = 2I$ é um isomorfismo. Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança V de I tal que $f : V \to f(V)$ é um difeomorfismo de classe C^1. Logo, para todo $Y \in f(V)$, existe um único $X \in V$ tal que $f(X) = Y$, ou seja, $X^2 = Y$. Portanto, X é uma raiz quadrada de $Y \in F(V)$, com $f(V)$ vizinhança de I, pois $I = f(I)$.

7 Considerações Finais

O trabalho foi divido em partes que se entrelaçam e culminam no Teorema da Função Inversa. Inicialmente, houve uma abordagem de conceitos já visto na Álgebra Linear; juntamente com certa generalização da topologia, já vista na Análise Real. Depois, a intenção foi generalizar conceitos já vistos na reta; A finalização, dessas etapas preliminares acontece no estudo da derivada como uma transformação linear.

O foco, não foi somente de demonstrar o Teorema da Função Inversa; mas também, a discrição da importância desse resultado para Análise no $\mathbb{R}^n$. Para isso, foi descrito uma aplicação que deixa claro a intenção inicial. A tentativa dessa dissertação não paira somente na finalização deste, mas também na ajuda que é prestada a comunidade acadêmica.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages, *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$. 2ª. ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[2] LIMA, Elon Lages, *Curso de análise, vol. 2.* 11ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[3] LOURÊDO, Aldo T.; OLIVEIRA, Alexandro M.; LIMA, Osmundo A. *Cálculo avançado.* 2ª. ed. Livraria da Física, 2012.

[4] RUDIN, Walter. *Princípios de análise matemática.* Rio de Janeiro: IMPA, 1971.