



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CAMPUS CLÓVIS MOURA
CURSO LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**



ARNALDO FÉLIX DA SILVA NETO

APLICAÇÕES DO LOGARITMO NA QUÍMICA

**TERESINA, PI
2025**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CAMPUS CLÓVIS MOURA
CURSO LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**



ARNALDO FÉLIX DA SILVA NETO

APLICAÇÕES DO LOGARITMO NA QUÍMICA

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciatura Plena
em Matemática na Universidade
Estadual do Piauí Campus Clóvis
Moura.

Orientador: Prof. Natã Firmino S.
Rocha.

**TERESINA, PI
2025**

DEDICATÓRIA

Chegar ao fim de uma etapa maravilhosa vem uma grande pergunta: dedicar a quem? No meu caso, a Deus, minha esposa Leonária, sem o apoio de todas as horas não teria conseguido. A minha mãe aos 96 anos e me dizendo que sempre fui bom de matemática, aos meus irmãos, Ozório (meu primeiro professor de matemática), a Roraima (minha professora de todas as disciplinas) Ildemar (inseparáveis), Roberto (sempre uma boa conversa), Jane (nunca deixou de me ajudar em tudo), Erivelto (sempre um conselho amigo), Mario (meu companheiro dos churrascos), Fernando(meu compadre) e Ricardo (nosso caçula). Aos meus filhos, Augusto César, Wandemon, Demétrio, Camila, Bárbara, Arnaldo jr, Lucas, Tarsila, Manoel Neto e Isadora, suficiente para preencher uma vida, por acreditarem que aos 71 anos eu chegaria lá. Ao meu sogro, Cruz Chaves e minha sogra, Carla. Quero agradecer aos professores, Alexandre, Anderson, Arnaldo, Gildo, Natã, Elenita e todos os outros pela dedicação extrema ao magistério. Aos funcionários pelo zelo ao campus. Não poderia deixar de homenagear os colegas da nossa turma, Anderson, Matheus, Marcelo, Stanley e outros que estão terminando ainda no curso. Acredito que sem vocês tudo seria mais difícil.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso aborda algumas aplicações dos logaritmos na Química, destacando sua importância em cálculos essenciais como pH de soluções, a cinética química e o equilíbrio químico. Inicialmente, abordaremos a equação de Nernst, equação de Arrhenius, radioatividade, pH e pOH . O seu desenvolvimento e conceitos fundamentais, demonstrando como essa função matemática facilita a expressão da concentração de íons hidrogênio em soluções aquosas. O estudo também analisa o uso de logaritmos na determinação de constantes de velocidade em reações químicas e no cálculo de constantes de equilíbrio, evidenciando a relevância da Matemática em contextos científicos. Por fim, o trabalho reforça a interconexão entre Matemática e Química, destacando a aplicabilidade dos logaritmos como ferramenta indispensável para a compreensão e resolução de problemas químicos complexos.

Palavras-chave: Logaritmo; Química; pH ; Cinética Química; Equilíbrio Químico.

ABSTRACT

This final paper addresses the application of logarithms in Chemistry, highlighting their importance in essential calculations such as the pH of solutions, chemical kinetics, and chemical equilibrium. Initially, a brief historical review of logarithms, their development, and fundamental concepts is presented. Next, the use of logarithms in the calculation of pH is explored, demonstrating how this mathematical function facilitates the expression of the concentration of hydrogen ions in aqueous solutions. The study also analyzes the use of logarithms in determining rate constants in chemical reactions and in the calculation of equilibrium constants, highlighting the relevance of Mathematics in scientific contexts. Finally, the paper reinforces the interconnection between Mathematics and Chemistry, highlighting the applicability of logarithms as an indispensable tool for understanding and solving complex chemical problems.

Keywords: Logarithm; Chemistry; pH ; Chemical Kinetics; Chemical Equilibrium.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	7
2. LOGARITMO	9
2.1. PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS	10
3. APLICAÇÕES NA QUÍMICA.	13
3.1. A EQUAÇÃO DE NERNST	13
3.1.1 CÁLCULO DO POTENCIAL DE UMA CÉLULA ELETROQUÍMICA:	14
3.2. A EQUAÇÃO DE ARRHENIUS	15
3.3. APLICAÇÃO DO LOGARITMO NA RADIOATIVIDADE	17
3.3.1. PERÍODO DE SEMIDESINTEGRAÇÃO OU MEIA VIDA (P)	19
3.3.2. RELAÇÃO ENTRE VIDA MÉDIA V_m E PERÍODO DE SEMIDESINTEGRAÇÃO P	22
3.4. CÁLCULO DE pH e pOH	24
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	29
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	30

1. INTRODUÇÃO

A matemática é uma ferramenta essencial nas ciências naturais, especialmente na química, onde os logaritmos desempenham um papel fundamental em diversas equações e fenômenos. O uso do logaritmo na química se faz presente em várias áreas, como no cálculo do *pH* de soluções, em constantes de equilíbrio químico, radioatividade, equação de Nernst e equação de Arrhenius. Este trabalho tem como objetivo investigar as principais aplicações do logaritmo na química, destacando sua importância no tratamento de dados e na simplificação de cálculos químicos.

O logaritmo é utilizado em diversas áreas do conhecimento para representar fenômenos que envolvem escalas exponenciais ou relações não lineares. Na química, sua aplicação se destaca em contextos como a determinação do *pH*, o estudo das reações químicas e o decaimento radioativo, entre outros. Por meio do uso do logaritmo, é possível simplificar cálculos, modelar processos e interpretar dados experimentais de maneira eficiente, o que reforça sua importância no entendimento e na aplicação de conceitos científicos.

A escolha do tema se justifica pela necessidade de demonstrar como os conceitos matemáticos, em especial os logarítmicos, se integram de forma indispensável em áreas práticas, como a química. Além disso, a abordagem desse tema permite destacar a relevância da interdisciplinaridade no ensino, evidenciando como o aprendizado pode ser enriquecido ao conectar teoria e prática entre diferentes disciplinas. Para estudantes e educadores, compreender essa relação é essencial para um aprendizado mais contextualizado e aplicável às necessidades da vida acadêmica e profissional.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar como o logaritmo é aplicado em algumas situações, na química, destacando sua importância como ferramenta para a resolução de problemas e para a compreensão de fenômenos naturais. Para alcançar esse propósito, serão trabalhados os seguintes objetivos específicos: explicar os conceitos matemáticos fundamentais relacionados ao logaritmo; relacionar esses conceitos com situações químicas práticas, como o cálculo do *pH*, o estudo de reações de decaimento e os modelos de cinética

química; e propor atividades interdisciplinares que conectem os conceitos matemáticos e químicos no contexto do ensino, promovendo uma abordagem mais integrada e significativa. A partir dessa análise, pretende-se evidenciar não apenas a utilidade prática do logaritmo em questões químicas, mas também o potencial de sua aplicação como um recurso pedagógico que une teoria matemática.

2. LOGARITMO

O conceito de logaritmo é uma operação matemática inversa à exponenciação. Dados dois números reais positivos, $a \neq 1$ e b , e um número x , a equação $a^x = b$ pode ser reescrita como $x = \log_a b$. O logaritmo base 10, conhecido como logaritmo comum, e o logaritmo natural, base e (onde $e \approx 2.718$), são os mais utilizados.

Dizemos que o logaritmo de um número positivo b , na base a , positiva e diferente de 1, é o expoente x ao qual se deve elevar a para se obter b .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x,$$

com $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Se a base do logaritmo for 10, costuma-se omiti-la na sua representação.

$$\log_{10} b = \log b,$$

ou seja, a notação \log representa o logaritmo decimal. O conjunto dos logaritmos na base 10 de todos os números reais positivos é chamado de sistema de logaritmos decimais ou Briggs. (GIOVANNI & BONJORNO).

As propriedades dos logaritmos, como a multiplicação e divisão de potências, são extremamente úteis em muitos cálculos químicos, principalmente na simplificação de equações. Entre tantos números fascinantes temos o número e , base dos logaritmos neperianos, também chamados de logaritmos naturais denotados por $\ln = \log_e$. Quem o designou foi o matemático suíço Leonhard Euler

(1707-1783), que provou ser esse número o limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce infinitamente. O valor aproximado de $e = 2,718$

2.1. PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Essas propriedades são amplamente aplicadas na resolução de equações químicas que envolvem grandezas variando exponencialmente, como concentrações e taxas de reação.

1^a Propriedade: Logaritmo de um produto:

O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c, \text{ com } a > 0, c > 0 \text{ e } 1 \neq b > 0$$

Demonstração:

Considere os logaritmos

$$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x \quad (\text{I})$$

$$\log_b c = y \Rightarrow c = b^y \quad (\text{II})$$

$$\log_b(ac) = z \Rightarrow ac = b^z \quad (\text{III})$$

Substituindo-se (I) e (II) em (III):

$$b^z = a \cdot c \Rightarrow b^z = b^x \cdot b^y,$$

ou seja,

$$b^z = b^{x+y} \Rightarrow z = x + y.$$

Dessa última igualdade, obtemos $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$.

2^a Propriedade: Logaritmo de um quociente:

O logaritmo de um quociente é igual logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c, \text{ com } a > 0, c > 0 \text{ e } 1 \neq b > 0.$$

Demonstração:

Considere o logaritmo

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right)=z \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)=b^z. \quad (\text{IV})$$

Substituindo-se (I) e (II) em (IV), temos

$$b^z = \left(\frac{a}{c}\right) = \frac{b^x}{b^y},$$

isto é,

$$b^z = b^{x-y}.$$

Dessa última igualdade, obtemos $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$.

3^a Propriedade: Logaritmo de uma potência:

O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é:

$$\log_b a^n = n \log_b a, \text{ com } a > 0, 1 \neq b > 0 \text{ e } n \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

Considere o logaritmos $\log_b a = x$. Usando a definição, obtemos $a = b^x$. Elevando os dois membros ao expoente n , temos:

$$a^n = (b^x)^n \Rightarrow a^n = b^{nx}$$

Portanto, nx é o logaritmo de a^n na base b , isto é,

$$\log_b a^n = nx.$$

Substituindo-se x por $\log_b a$, obtemos

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a.$$

Mudança de base:

Para simplificar expressões ou resolver equações logarítmicas, necessariamente aplicar as propriedades operativas, e os logaritmos devem ser da mesma base.

Para mostrar como isso pode ser feito, vamos apresentar uma fórmula conhecida como mudança de base. Ela nos mostra que o logaritmo de um número

$b > 0$, em uma base $a \neq 1$ e $x > 0$ pode ser escrito em uma nova base $c > 0$, $c \neq 1$

Assim conhecendo os logaritmos numa base a , vamos escrevê-los numa outra base c .

Para demonstrar a fórmula, faremos $\log_a b = x$. portanto,

$$a^x = b$$

Aplicando o logaritmo na base c em ambos os membros, obtemos:

$$\log_c a^x = \log_c b$$

Usando a propriedade III dos logaritmos , temos:

$$x \cdot \log_c a = \log_c b,$$

isto é,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

3. APLICAÇÕES NA QUÍMICA.

Veremos a utilização destas propriedades em tópicos importantes de química como a equação de Nernst, Equação de Arrhenius, radioatividade, pH e pOH

3.1. A EQUAÇÃO DE NERNST

A equação de Nernst é uma equação fundamental na eletroquímica que relaciona o potencial eletroquímico de uma célula eletroquímica com a concentração dos íons envolvidos na reação. Ela é nomeada em homenagem ao químico alemão Walther Nernst, que a desenvolveu no final do século XIX.

A equação de Nernst foi deduzida por Walther Nernst em 1889, com base em suas pesquisas sobre a relação entre o potencial eletroquímico e a concentração dos íons em uma solução.

Nernst começou estudando a relação entre o potencial eletroquímico e a concentração dos íons em uma solução de eletrólitos. Ele observou que o potencial eletroquímico de uma célula eletroquímica dependia da concentração dos íons envolvidos na reação. (TITO&CANTO)

Nernst propôs que o potencial eletroquímico de uma célula eletroquímica era determinado pela energia livre de Gibbs (ΔG) da reação, que é relacionada à concentração dos íons envolvidos na reação. Ele também propôs que a energia livre de Gibbs era relacionada à entropia (S) e à temperatura (T) da solução.

Com base nessas ideias, Nernst deduziu a seguinte equação:

$$\Delta G = -nFE \text{ (I)}$$

onde ΔG é a energia livre de Gibbs (energia utilizada para realização de trabalho útil), n é o número de elétrons transferidos na reação, F é a constante de Faraday (96.500 C aproximadamente) e E é o potencial eletroquímico. Nernst também propôs que a energia livre de Gibbs era relacionada à concentração dos íons envolvidos na reação, de acordo com a seguinte equação (ΔG^0 é a energia inicial de Gibbs)

$$\Delta G = \Delta G^0 + RT \ln Q \text{ (II)}$$

onde ΔG° é a energia livre de Gibbs padrão, R é a constante dos gases ideais, T é a temperatura e Q é a razão das concentrações dos produtos e reagentes.

Combinando as duas equações, Nernst obteve a equação de Nernst de maneira empírica. Substituindo (I) em (II) obtemos

– $nFE = -nFE^{\circ} + RT \ln Q$, dividindo tudo por $-nF$, obtemos

$$E = E^{\circ} - \left(\frac{RT}{nF} \right) \ln Q$$

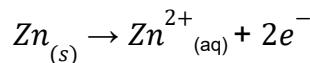
Essa equação relaciona o potencial eletroquímico (E) com a concentração dos íons envolvidos na reação (Q), a temperatura (T) e a constante de Faraday (F). E° é o potencial eletroquímico inicial

A equação de Nernst foi um grande avanço na compreensão da eletroquímica e teve um impacto significativo no desenvolvimento de células eletroquímicas, baterias e outros dispositivos eletroquímicos.

A equação de Nernst é usada para calcular o potencial eletroquímico de uma célula eletroquímica em função da concentração dos íons envolvidos na reação. Ela é fundamental para entender o comportamento de células eletroquímicas, incluindo baterias, células de combustível e eletrodos.

3.1.1 CÁLCULO DO POTENCIAL DE UMA CÉLULA ELETROQUÍMICA:

Suponha que temos uma célula eletroquímica com uma reação de oxidação de zinco (Zn) em ácido sulfúrico (H_2SO_4). A reação é:



Aqui temos o zinco no estado sólido perdendo 2 elétrons ($2e^-$) transformando-se em um cátion zinco em solução aquosa $Zn^{2+}_{(aq)}$

O potencial eletroquímico padrão (E°) para essa reação é $-0,76V$ (volts). Se a concentração de $[Zn^{2+}_{(aq)}] = 0,1$ mol/L e a temperatura $25^{\circ}C$ ($298K$), podemos calcular o potencial eletroquímico (E) usando a equação de Nernst, sabendo que $R = 8,314J/mol.k$, o número de eletro transferido, $n = 2$ e $1F = 96.485C$. Então teremos

$$\begin{aligned}
E &= E^o - \left(\frac{RT}{nF} \right) \ln Q \\
&= -0,76 \text{ V} - [(8,314 \text{ J/molK} 298 \text{ K} / 2 \times 96485 \text{ C/mol})] \times \ln(0,1) \\
&= -0,76 \text{ V} - 0,029 \text{ V} \\
&= -0,789 \text{ V}
\end{aligned}$$

3.2. A EQUAÇÃO DE ARRHENIUS

A equação de Arrhenius é uma equação matemática que descreve a relação entre a taxa de reação química e a temperatura. Ela foi proposta pelo químico sueco Svante Arrhenius em 1889.

A equação de Arrhenius é escrita da seguinte forma:

$$K = Ae^{-\frac{Ea}{RT}}$$

onde K é a constante de taxa de reação, A é a constante de frequência (ou fator de frequência), Ea é a energia de ativação da reação, R é a constante dos gases ideais e T é a temperatura em Kelvin. Aplicando a propriedade III dos logaritmos, na equação, temos:

$$\ln K = \ln A - \frac{Ea}{RT}$$

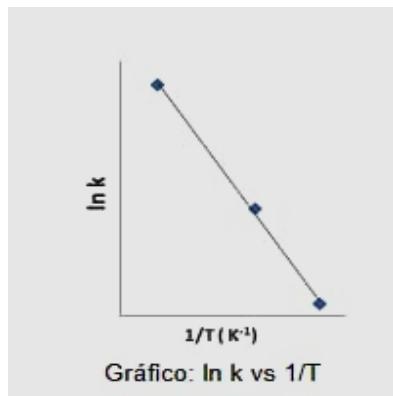
Rearranjando a equação acima, ela torna-se a equação de uma reta que relaciona $\ln K$ a $(1/T)$, da seguinte forma:

$$\ln K = \ln A - \frac{1}{T} \frac{Ea}{R} \quad \text{Equação de Arrhenius}$$

$$y = a + b x \quad \text{Equação de uma reta}$$

$$\text{onde } Y = \ln K, a = \ln A \text{ e } b = \frac{-Ea}{R}$$

Desta forma, podemos calcular a Energia de Ativação (Ea) a partir dos valores experimentais da constante de velocidade (K) em diversas temperaturas. Ao desenhar o gráfico utilizando a equação descrita acima e os dados experimentais, obteríamos um gráfico como o abaixo:



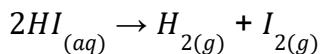
Todavia, além do método gráfico, também se pode determinar a energia de ativação (Ea) de forma matemática. Se conhecermos os valores de K para duas diferentes temperaturas e aplicando a propriedade (iii) dos logaritmos, podemos escrever uma equação para cada uma delas:

$$\ln K_1 = \ln A - \left(\frac{Ea}{RT_1} \right) \quad \text{e} \quad \ln K_2 = \ln A - \left(\frac{Ea}{RT_2} \right)$$

Se subtrairmos as duas equações, teremos

$$\ln \left(\frac{K_2}{K_1} \right) = - \left(\frac{Ea}{R} \right) \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Vamos examinar um exemplo: considere a reação de decomposição do ácido iodídrico (HI em solução aquosa)



Aqui temos a decomposição, em diferentes temperaturas, do ácido iodídrico em solução aquosa, produzindo gás hidrogênio gasoso e iodo gasoso. O exemplo nos mostra a aplicação da equação de Arrhenius na determinação da energia de ativação (Ea) em diferentes temperaturas.

O valor da energia de ativação, Ea , usando os valores de K determinados em duas temperaturas diferentes.

$$K_1 = 2,15 \times 10^{-8} \text{ L/(mol.s)} \text{ em } T_1 = 650 \text{ K}$$

$$K_2 = 2,39 \times 10^{-7} \text{ L/(mol.s)} \text{ em } T_2 = 700 \text{ K}$$

$$R = 8,314 \text{ J/mol.K}$$

Como temos os valores de K_1 , T_1 , K_2 e T_2 , podemos usar a equação abaixo para calcular a Energia de ativação, Ea

$$\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = -\left(\frac{Ea}{R}\right) \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

Substituindo os valores, teremos:

$$\ln(2,39 \times 10^{-7} / 2,15 \times 10^{-8}) = -\left(\frac{Ea}{8,314}\right) \times \left(\frac{1}{700} - \frac{1}{650}\right)$$

Portanto:

$$\ln(11,11) = -Ea[-0,0001098K^{-1}] \text{, ou seja}$$

$$2,408 = Ea (1,32 \times 10^{-5} J \cdot \text{mol} \cdot K \cdot K^{-1})$$

logo,

$$Ea = \left(\frac{2,408}{1,32 \times 10^{-5}}\right)$$

$$= 182424,24 = 182,4 \times 10^3 J/mol$$

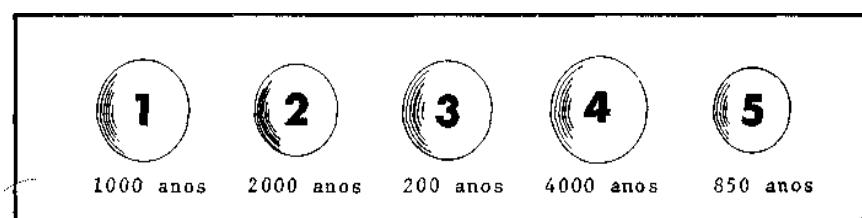
Assim a energia de ativação, Ea , é igual a $182,4 KJ/mol$

A equação de Arrhenius mostra que a taxa de reação química (k) aumenta exponencialmente com a temperatura (T), desde que a energia de ativação (Ea) seja constante. Isso significa que, à medida que a temperatura aumenta, a taxa de reação também aumenta.

3.3. APLICAÇÃO DO LOGARITMO NA RADIOATIVIDADE

Vamos estudar a aplicação do logaritmo na radioatividade. Conceito Básico: Vida Média (Vm). É a média da vida de uma amostra radioativa. É um dado estatístico. A vida média da população do nosso país é 74 anos. Isto não quer dizer que todo brasileiro tem que morrer com apenas 74 anos. Para esse cálculo, foi computado o tempo de vida de todos os indivíduos. De modo análogo, calcula-se a vida média de um elemento radiativo. Sejam 5 átomos de rádio que para emitir partículas (α) levaram: levaram: (Fig.1)

Figura 1 - Átomos de rádio



Fonte: Ricardo Feltre

Para esses cinco átomos a vida média é:

$$Vm = \frac{1000+2000+200+4000+850}{5}$$

ou seja, $Vm = 1610$ anos

Na verdade, uma amostra radioativa, por menor que seja, tem um enorme número de átomos. Na prática, a vida média é calculada a partir da constante radiativa, baseando-se num dos axiomas da probabilidade.

Imagine 100 esferas numeradas de 1 a 100, dentro daquele cesto utilizado no jogo de bingo.

Vamos supor que, a cada hora, é sorteado um número. Consideremos que a esfera premiada voltará ao cesto, concorrendo novamente para o novo sorteio.

Então, pode-se dizer que de cada 100 esferas, uma é sorteada, em cada hora. Ou seja: $C = \frac{1}{100} hora^{-1}$ (C é a constante do sorteio para as esferas).

A probabilidade média de determinado número ser sorteado é de 1/100, ou seja, em média, de cada 100 jogadas (100 horas), aquele número escolhido sairá uma só vez. Levará em média 100 horas para um escolhido número sair. Estatisticamente temos:

$$Vm = \frac{1}{c}$$

Em outras palavras, cada esfera terá que esperar em média 100 horas para sair (pode sair antes ou mesmo depois de 100 horas). A relação acima é um "axioma da probabilidade".

Se o leitor não conseguir acertar a relação acima, vamos pensar de outra forma. Você aceita que valor médio num fenômeno estatístico é um valor hipotético, admitindo-se condições de igualdade para qualquer elemento da amostra. Então, vamos supor que todas as esferas vão permanecer exatamente o mesmo tempo dentro do cesto até serem sorteadas. Isto seria possível com certeza, se a retirada não fosse ao acaso. Vamos, então, tirar as esferas na ordem 1, 2, 3, ..., até 100. Lembre-se de que cada esfera retirada voltará logo ao cesto e que, em cada 1 hora, retira-se apenas 1 esfera.

Escolhido certo número, este somente sairá de 100 em 100 horas, e todas as esferas teriam esperado 100 horas dentro do cesto para então saírem novamente. Este é o valor médio, pois todas as esferas teriam o mesmo ritmo de retirada.

Diríamos então, que a vida média de permanência das esferas, para serem sorteadas, é de 100 horas, mesmo para o processo de retirada ocasional.

Se tivéssemos 200 esferas numeradas de 1 a 200, a constante de retirada seria: $C = \frac{1}{200} \text{ hora}^{-1}$ e a vida média seria de 200 horas.

Voltemos agora ao exame de uma amostra radiativa. O elemento rádio tem constante: $C = \frac{1}{2300} \text{ ano}^{-1}$ Isto quer dizer que, de cada 2300 átomos de rádio, em 1 ano, a probabilidade é de ocorrer uma desintegração. Se $V_m = \frac{1}{c}$, então, teremos $V_m = 2300$ anos

Em outras palavras, numa amostra de rádio em exame, já existem átomos em desintegração e daqui a 5.000 anos ainda existirão átomos não desintegrados nessa amostra, mas a média de duração será de 2300 anos. Ou ainda, muitos átomos irão se desintegrar muito antes de 2300 anos, muitos irão durar mais que 2300 anos, mas a média prevista é 2300 anos.

3.3.1. PERÍODO DE SEMIDESINTEGRAÇÃO OU MEIA VIDA (P)

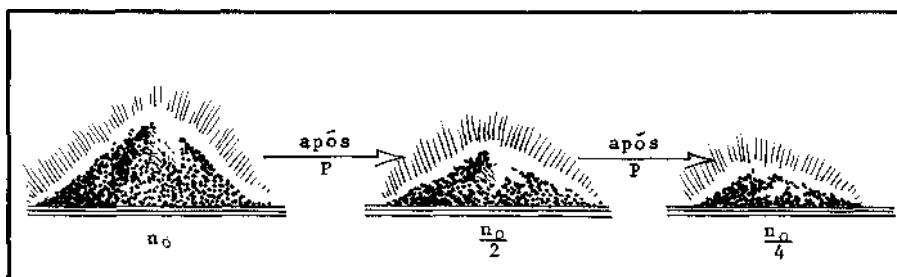
Definição: Seja uma amostra com n_0 átomos radiativos iniciais. Após certo tempo, teremos $\frac{n_0}{2}$ átomos não desintegrados. Definiremos esse tempo de " P ", período de semidesintegração.

Note-se que esse tempo, para que sejam desintegrados 50% dos átomos da amostra, independe do número global de átomos iniciais, desde que sejam amostras do mesmo elemento, pois $v = -Cn$ (quanto mais átomos, maior será a velocidade de desintegração).

Se continuarmos observando a amostra inicial, é de se prever que, após mais um período, teremos uma desintegração de mais 50% dos átomos restantes.

Isto quer dizer que, em relação ao n_0 , teremos como átomos restantes apenas $\frac{n_0}{4}$; após um período, teremos apenas $\frac{n_0}{8}$ átomos e assim sucessivamente. (Fig. 2)

Figura 2 – Após duas meias-vidas



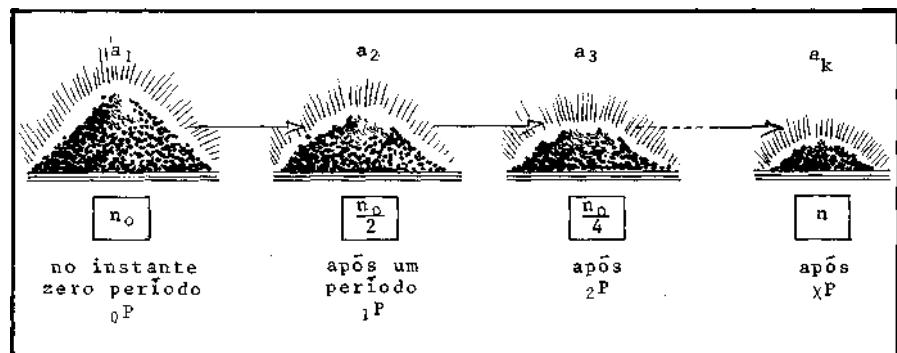
Fonte: Ricardo Feltre

Na prática, um átomo que produziu uma emissão continuará junto aos outros átomos. Por questão de simplificação didática vamos, teoricamente, considerar excluídos da amostra os átomos que já produziram emissões.

Daí na figura, aparecerem as amostras com uma diminuição de átomos com o decorrer dos períodos, pois estamos englobando apenas os átomos que ainda não produziram emissões.

Para cada período "p" que passa, teremos uma diminuição de 50% da amostra, que continuamente vai diminuindo, até chegar a uma quantidade tão pequena, onde não valem mais as previsões probabilísticas. (Fig. 3)

Átomos de rádio



Fonte: Ricardo Feltre

Passados "x" períodos, teremos genericamente "n" átomos restantes na amostra. Note-se que, se considerarmos os números de átomos na amostra em

intervalos de um período, esses números constituem uma progressão geométrica (P.G.) de razão 1/2.

Uma progressão pode ser representada por: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, quando temos K termos.

Como no instante inicial temos " n_0 " átomos, sendo n_0 já, o a_1 (1º. termo da P.G.) e ainda com zero período, verifica-se que:

ordem do termo da "PG." = (número de períodos transcorridos + 1) ou então: $K = x + 1$ ou $K - 1 = x$

O primeiro termo da "PG." é o " n_0 " e o último termo é o " n " que corresponde ao " a_k ".

$$A_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

$$n = n_0 (1/2)^{k-1} = n_0 (1/2)^x$$

$$n = \frac{n_0}{2^x}$$

Obs.: "n" pode representar também a massa final de uma amostra radiativa. Pode-se relacionar o número de períodos com o tempo observado:

Períodos ----- tempo

1 ----- p

x ----- t

Onde $t = x \cdot p$

"p" é o tempo correspondente a um período, expresso em anos, dias, horas, etc.

"x" é o número de períodos transcorridos.

t o tempo de observação na mesma unidade de p .

As duas fórmulas utilizadas para a resolução de problemas são:

$$n = \frac{n_0}{2^x}$$

$$t = x \cdot p$$

3.3.2. RELAÇÃO ENTRE VIDA MÉDIA V_m E PERÍODO DE SEMIDESINTEGRAÇÃO P

Pode-se deduzir, com recurso da Matemática superior, que:

$$P = 0,7 V_m$$

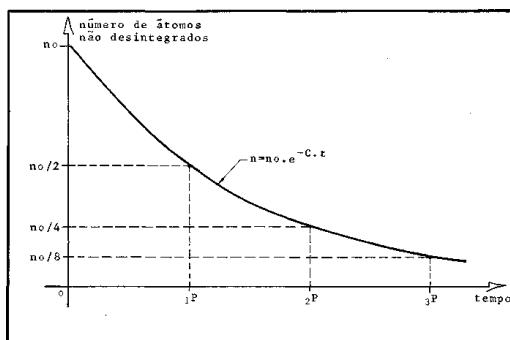
Sabemos que a velocidade de desintegração instantânea é:

$$n = n_0 \cdot e^{-C \cdot t}$$

onde n é o número de átomos, em dado momento, n_0 o número de átomos iniciais, C a constante de desintegração e t a o tempo. Trata-se de uma função exponencial decrescente. Façamos um gráfico para relacionar o n com o tempo, representando alguns pontos importantes como: $1p$, $2p$, $3p$, ..., etc.

(Fig 4)

Figura 4



Fonte: Ricardo Feltre

Vamos analisar um instante, por exemplo "1p", quando temos apenas $\frac{n_0}{2}$ átomos.

Então: quando $t = 1p$ temos $n = \frac{n_0}{2}$

$$\begin{aligned} n &= n_0 \cdot e^{-C \cdot t} \\ n &= \frac{n_0}{e^{C \cdot t}} \end{aligned}$$

substituindo os valores após uma meia vida, teremos

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{2} &= \frac{n_0}{e^{C \cdot P}} \\ 0,5 &= e^{-CP} \end{aligned}$$

aplicando logaritmo natural, temos

$$\ln 0,5 = -CP$$

$$0,693 = -Cp$$

$$P = \left(\frac{1}{C}\right) = 0,7 \text{ como } V_m = 1/C, \text{ teremos (arredondando)}$$

$$P = 0,7 \text{ Vm (USBERCO E SALVADOR)}$$

EXEMPLO 1: Período de semidesintegração de um radioisótopo é de 20h. Em quanto tempo 100mg desse material ficará reduzido a 20mg?

Dados $n_0 = 100\text{mg}$, $n = 20\text{mg}$ e $p = 20\text{h}$, vamos aplicar a fórmula:

$$\begin{aligned} 2^x &= \frac{n_0}{n} \\ &= \frac{100}{20} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Aplicando a terceira propriedade dos logaritmos, teremos:

$$x \log 2 = \log 5$$

$$0,3x = 0,69$$

$$x = 2,3$$

Para calcular o tempo podemos fazer:

$$t = p \cdot x$$

$$t = 20 \cdot 2,3$$

$$t = 46\text{h}$$

Resposta: 46h

EXEMPLO 2: Quantas meias-vidas (período de semidesintegração ou tempo de meia vida)

Serão necessários para que certa amostra radioativa tenha sua massa reduzida

a $\left(\frac{1}{1000000}\right)$ da amostra inicial?

Resolução:

$$n_0 = m$$

$$n = \left(\frac{m}{1000000}\right)$$

$$2^x = \left(\frac{m}{\frac{m}{10^6}}\right) \text{ cancelando o } m, \text{ teremos}$$

$$2^x = 10^6$$

Aplicando o logaritmo, propriedade iii, teremos

$$x \log 2 = 6 \log 10$$

$$x = \left(\frac{6}{0,3} \right)$$

$$x = 20 \text{ meias vidas.}$$

Observe que o número de meias-vidas independe da massa da amostra

No Brasil após 10 meias vidas dizemos que o material radioativo não nos causa efeitos fisiológicos. Nos Estados Unidos eles utilizam 20

EXEMPLO 3. Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 3% ao ano. Em quantos anos 500g dessa substância se reduzirão a 100g? (DANTE)
resolução:

Sabemos que

$$n = n_0 \cdot e^{-ct}$$

$$n = 500g, n_0 = 100g \quad C = 3\%(0,03), t ? \text{ (em anos) ?}$$

$$100 = 500 \cdot e^{-0,03t}$$

$$\frac{1}{5} = \ln \cdot e^{-0,03}$$

aplicando a segunda propriedade e a terceira propriedade dos logaritmos, teremos:

$$\ln 1 - \ln 5 = -0,03t \cdot \ln e$$

$$-\ln 5 = -0,03t$$

$$t = \frac{\ln 5}{0,03} = \frac{1,6094}{0,03} \simeq 53,6 \text{ anos}$$

3.4. CÁLCULO DE pH e pOH

Durante sua pesquisa, que visava melhorar os métodos de controle de qualidade em indústrias de fermentação, o químico dinamarquês Sorenson criou o conceito de pH . A ideia que ele tinha era a seguinte: por que expressar acidez de

um meio aquoso por meio de $[H^+]$, já que seus valores são, geralmente, potência negativa de 10? Assim, ele definiu:

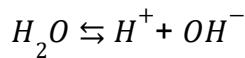
Potencial hidrogeniônico (pH) de uma solução: $pH = -\log[H^+]$

Potencial hidroxiliônico (pOH) de uma solução: $pOH = -\log[OH^-]$

Desse modo, pH é o logaritmo do inverso da concentração hidrogeniônica, enquanto o pOH é o logaritmo do inverso da concentração hidroxiliônica. O logaritmo permite simplificar e calcular essas grandezas.

A relação entre pH , pOH e a constante de ionização da água K_w é fundamental para entender o equilíbrio ácido-base em soluções.(Tito e Canto)

A água é um eletrólito muito fraco(sofre pouca ionização)



A constante de ionização será

$$K_w = \frac{[H^+][OH^-]}{[H_2O]}$$

A concentração da água é igual a $55,55 \text{ mol/L}$ ($1000\text{g}/18$) e o produto $K_w[H_2O]$ é constante e designado por $K_w = 10^{-14}$ nas condições padrão. Então teremos

$$K_w = [H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$$

Aplicando a primeira propriedade dos logaritmos, teremos

$$\begin{aligned} -\log[H^+] -\log[OH^-] &= -14, \text{ assim} \\ pH + pOH &= 14 \end{aligned}$$

(à temperatura ambiente e pressão de 1atm) (Usberco e Salvador)

Podemos concluir que, a 25°C : meio neutro terá $pH = pOH = 7$. Meio ácido terá $pH < 7$ e $pOH > 7$. Meio básico terá $pH > 7$ e $pOH < 7$.

Vamos aplicar os logaritmos para determinação e pH e pOH

EXEMPLO 4: Qual o pH de uma solução de ácido clorídrico (HCl) de concentração 10^{-2} mol/L ?

Resolução: Como HCl é um ácido forte (ioniza praticamente 100% suas moléculas se transformam em H^+ e Cl^-), consideraremos como totalmente ionizado, ou seja, ficou com a mesma concentração da solução inicial, então

$$[H^+] = 10^{-2}$$

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log 10^{-2}$$

$$pH = 2$$

Como o valor é < 7 , a solução é ácida. E claro, quanto menor o pH, mais ácida é a solução, basta observarmos as potências de 10 negativas.

EXEMPLO 5 Qual o pH de uma solução de $NaOH$ de concentração $3 \times 10^{-9} mol/L$?

Resolução: Como a base é forte, consideramos 100% dissociada, então o $[H^+]$ terá a mesma concentração do ácido $[H^+] = 3 \times 10^{-9}$

$$\log[H^+] = -\log 3 \times 10^{-9}$$

$$pH = 9 - \log 3$$

$$pH = 9 - 0,48$$

$$pH = 8,52$$

Como o valor é > 7 , a solução é básica.

Se quiséssemos o pOH , a 25° em 1 atm, basta fazermos: $pH + pOH = 14$, daí

$$pOH = 14 - 8,52$$

$$pOH = 5,42$$

EXEMPLO 6: Determine o pH de uma solução de ácido clorídrico em solução $10^{-7} mol/L$

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log 10^{-7}$$

$$pH = 7$$

Como o pH é 7, a solução é neutra. lembrando que o valor do pH varia com a temperatura. então estamos utilizando condições padrao (298K, 1atm)

Além do cálculo do pH podemos identificar se é uma solução é ácida ou não determinando sua Constante de acidez(Ka).

A Constante de acidez (Ka) para monoácidos é dada pela expressão $Ka = M\alpha^2$, onde M é a concentração, em mol/L , α é o grau de ionização (relação entre o número de moléculas ionizadas e o número de moléculas iniciais). Quanto maior o valor de Ka , mais ácida é a espécie. O $\alpha > 50\%$ também nos indica meio ácido. O conceito de pKa é o logaritmo do inverso de Ka , então, $pKa = -\log Ka$, por analogia, teremos o $pKb = -\log Kb$. Nas soluções ácidas, o Ka é elevado e o pKa é baixo; nas soluções básicas, o Kb é elevado e o pKb é baixo.

Solução tampão

É aquela em que o pH permanece praticamente constante, mesmo quando adicionamos pequenas quantidades de ácido ou base forte. Podemos determinar o pH e o pOH de um tampão utilizando as fórmulas de Henderson- Hasselbalch:

$$\text{Para soluções ácidas: } pH = pKa + \log \frac{[Sal]}{[Ácido]}$$

$$\text{Para soluções básicas: } pOH = pKb + \log \frac{[Sal]}{[Base]}$$

EXEMPLO 7: Qual pH de uma solução-tampão formada pela mistura de solução $0,1 \text{ mol/L}$ de ácido acético e solução com $0,5 \text{ mol/L}$ de acetato de sódio

Dados: Ka do ácido acético = $1,8 \times 10^{-5}$; $\log 1,8 = 0,25$ e $\log 5 = 0,7$.

Resolução: Utilizando a equação de Henderson-Hasselbalch:

$$\begin{aligned} pH &= pKa + \log \frac{[Sal]}{[Ácido]} \\ pH &= -\log (1,8 \times 10^{-5}) + \log \frac{0,5}{0,1} \\ &= -\log(1,8) - \log(10^{-5}) + \log 5 \\ &= -0,25 -(-5) + 0,7 \\ &= -0,25 + 5 + 0,7 \\ &= 5,45 \end{aligned}$$

EXEMPLO.8.: (UPE) Preparou-se $1,0 \text{ L}$ de um tampão, misturando-se $0,10 \text{ mol}$ de um sal BA com $0,001 \text{ mol}$ de um ácido fraco HA . O pH do tampão é igual

a 5,85. Qual o K_a do ácido utilizado na preparação do tampão? Dado:
 $\log 3,85 = 1,41$

Resolução: Os dados fornecidos pelo exercício foram:

Volume = 1L

$K_a = ?$

Obs.: Lembrando que pK_a é igual a $-\log K_a$.

Número de mol do sal = 0,1 mol

Número de mol do ácido = 0,001 mol

Como a concentração molar (concentração em quantidade de matéria) é a divisão do número de mol do soluto e volume da solução. E o volume da solução é 1L logo as concentrações do sal e do ácido são 0,1 mol/L e 0,001 mol/L .

$$pH = 5,85$$

Para resolver essa questão, basta utilizarmos a expressão para cálculo do pH de uma solução-tampão, envolvendo um ácido fraco e um sal:

$$pH = pK_a + \log \frac{[Sal]}{[Ácido]}$$

$$5,85 = pK_a + \log \frac{0,1}{0,001}$$

$$= pK_a + \log 100$$

mudando o pK_a de lado e o \log de 100 (igual a 2) teremos

$$pK_a = 5,85 - 2$$

$$pK_a = 3,85$$

$$-\log K_a = 3,85$$

retirando a forma logarítmica, teremos

$$K_a = 10^{-3,85}$$

$$K_a = 1,41 \times 10^{-3}$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo do logaritmo e suas aplicações na química mostrou-se fundamental para a compreensão de diversos fenômenos naturais e laboratoriais. Os conceitos matemáticos abordados, como as propriedades dos logaritmos e suas funções inversas, permitiram a resolução de problemas práticos encontrados na química, evidenciando a importância dessa ferramenta para a simplificação e modelagem de fenômenos científicos. Além disso, observou-se que o uso do logaritmo contribui significativamente para tornar cálculos complexos mais acessíveis e interpretáveis, auxiliando na previsão de comportamentos químicos e na análise de dados experimentais.

Dessa forma, este trabalho reforça a relevância da matemática aplicada às ciências naturais e ressalta a necessidade de um ensino interdisciplinar que conecte essas áreas do conhecimento. Espera-se que este estudo possa servir como base para futuras pesquisas, explorando outras aplicações do logaritmo em diferentes campos da ciência e tecnologia.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Livro do Professor. 1 ed. São Paulo: Ática. 2004.
- FELTRE, Ricardo & YOSHINAGA S, Atomística: teoria e exercícios – Volume 2. São Paulo Ed. Moderna, 1983.
- GIOVANNI, José Ruy & BONJORNO, José Roberto. Matemática; uma nova abordagem, Volume 1. Versão Trigonometria. São Paulo: FTD. 2000.
- TITO, Francisco Maragaia Peluzzo & CANTO, Eduardo Leite do. Química na abordagem do Cotidiano. Físico Química Volume 2. São Paulo. Ed. Moderna, 2006.
- USBERCO, João & SALVADOR, Edigar. Química; Volume Único. 9 ed. São Paulo: Saraiva.2013.