UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

APLICAÇÃO DOS TEOREMAS DE MENELAUS E DE CEVA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DO 9°ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

MICHAEL HENRIQUE COSTA ALVES
EDSON HENRIQUE LIMA DE SOUSA

Teresina-PI
2023

MICHAEL HENRIQUE COSTA ALVES
EDSON HENRIQUE LIMA DE SOUSA

APLICAÇÃO DOS TEOREMAS DE MENELAUS E DE CEVA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DO 9°ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de conclusão do curso apresentado à Universidade Estadual do Piauí como parte das exigências para a obtenção do diploma do curso de licenciatura em matemática

Orientador:
Prof.Dr. Pedro Antônio Soares Junior

Teresina-PI

2023

MICHAEL HENRIQUE COSTA ALVES
EDSON HENRIQUE LIMA DE SOUSA

APLICAÇÃO DOS TEOREMAS DE MENELAUS E DE CEVA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DO 9°ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de conclusão do curso apresentado à Universidade Estadual do Piauí como parte das exigências para a obtenção do diploma do curso de licenciatura em matemática

---

Prof. Dr. PEDRO ANTÓNIO SOARES JÚNIOR
Presidente da banca
Universidade Estadual do Piauí

Prof. Dra. LILANE DE ARAÚJO MENDES BRANDÃO
Membro
Universidade Estadual do Piauí

Prof. Esp. RAIMUNDO NONATO RODRIGUES
Membro
Universidade Estadual do Piauí

TERESINA
2023

Dedicatória

MICHAEL HENRIQUE COSTA ALVES

Dedico aos meus familiares, minha mãe, Conceição de Maria, ao meu pai, Antônio da Silva Alves Junior e ao meu filho, Pedro Henrique.

EDSON HENRIQUE LIMA DE SOUSA

Dedico a minha mãe
Francisca Lima de Sousa,
meu pai
Francisco Alves de Sousa,
e meu irmão
Erick Raimundo de Sousa (in memoria).

Agradecimentos

MICHAEL HENRIQUE COSTA ALVES

Quero aqui agradecer a todos que me apoiaram nessa empreitada. Agradeço ao meu professor e orientador Pedro Antônio Soares Junior. Agradeço aos meus amigos que conheci na universidade, todos com o mesmo sonho, mudar e melhorar de vida, dividíamos não só alegrias, mas, medos, angustias e incertezas, na maioria das vezes eu achava que não ia conseguir, mas eles nunca deixaram de me apoiar, nunca deixamos de nos apoiar uns aos outros, sempre nos ajudávamos a levantar e a seguir em frente. Agradeço também a minha família que nunca desistiu de mim e sempre me ajudou no que pôde para eu poder realizar meu objetivo e traçar um divisor de águas na minha vida, sempre fomos unidos e sempre apoiamos as caminhadas uns dos outros mesmo que mais difíceis possam ser. Sempre tive apoio para estudar, sempre fui incentivado a estudar, mesmo em uma época em que eu mesmo não enxergava um futuro para mim e não tinha expectativas, eu tinha apoio, sou grato por nunca desistirem de mim. Em especial eu agradeço a “dona Conceição” e a “seu Junior”, meus pais, meus alicerces, com toda certeza se não fossem eles eu não conseguiria, pois, fizeram até o que não podiam para me ajudar, sempre e incondicionalmente estavam do meu lado, sofreram junto comigo, nunca tiveram dúvidas se eu ia conseguir, como eu mesmo tinha, estavam lá para qualquer coisa. Eu amo vocês.

EDSON HENRIQUE LIMA DE SOUSA

Quero aqui agradecer meus pais, irmãos, primos e tios que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização desse momento. A meus familiares, a minha tia Toinha que me acolheu na vinda para Teresina como um filho seu, a também minha companheira que esteve todo esse caminho até aqui comigo Isadora Marques, aos amigos antigos que me apoiaram no meu crescimento e aos que que aqui fiz entre eles os que se tornaram também da família como irmãos estes são Mateus Andrey com seu humor incrível mente imbatível, e Vitoria Rodrigues com seu carisma e presença sem igual. Michael Henrique outro amigo que se tornou um irmão que me deu a oportunidade de fazer este trabalho a seu lado uma pessoa de grande coração e determinação, que muito contribuiu para a realização deste trabalho. Ao professor Dr. Pedro Antônio Soares Junior, por ter dado a honra de tê-lo como orientador. Aos professores, que estiveram nesta jornada que desempenharam um grande papel no meu processo de formação profissional ao longo do curso. A todos que participaram, direta ou indiretamente que conviveram comigo no decorrer do curso. A tia Cruz com seu coração de mãe e um café perfeito e seu Tião com seu jeito de alegrar o dia de todos. A todas as pessoas que aqui citei e pessoas que não conseguir agradecer, que me acompanharam e ajudaram aqui mostro a vocês meus agradecimentos e obrigado do fundo do coração.

"Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes"

Isaac Newton

Resumo

Novas metodologias de ensino são sempre necessárias para suprir o déficit de educação. Com o intuito de contribuir para a exposição de mais um instrumento de ensino, especificamente na área da geometria euclidiana plana, este trabalho apresenta os teoremas de Menelaus e o de Ceva, como ferramentas no auxílio de resoluções de problemas geométricos e no ensino aprendizagem da matemática. O trabalho é estruturado por meio de breves históricos sobre os matemáticos por traz dos teoremas e da geometria. É abordada as propriedades necessárias para as demonstrações dos teoremas e para resoluções de alguns problemas geométricos, além de um ponto de vista sobre o ensino da geometria no ensino básico. Por fim, uma sequência didática é sugerida para a ensinar a aplicação dos teoremas para alunos do ensino fundamental II.

Palavras chave: Geometria, Geometria plana, Teoremas de Menelaus e de Ceva

Abstract

New teaching methodologies are always necessary to fill the education deficit. In order to contribute to the exposure of yet another teaching instrument, specifically in the area of flat Euclidean geometry, this work presents the theorems of Menelaus and Ceva, as tools to help solve geometric problems and teach mathematics learning. . The work is structured through brief histories of the mathematicians behind theorems and geometry. The properties necessary for demonstrating theorems and solving some geometric problems are addressed, as well as a point of view on the teaching of geometry in basic education. Finally, a didactic sequence is suggested to teach the application of the theorems to elementary school II students.

Keywords: Geometry, Plane geometry, Theorems of Menelaus and Ceva

Sumário

1 Introdução

O presente trabalho tem a finalidade de divulgar os teoremas de Ceva e de Menelaus e trazer mais uma ferramenta para os alunos que desejam ingressar em escolas militares ou ir mais longe nas Olímpiadas Brasileira de matemática (OBM) e Olimpíadas regionais, exames que são aplicados normalmente em alunos do 9º ano do ensino fundamental de escolas públicas e particulares.

A geometria em particular é fascinante devido a sua facilidade de trabalhar, e ás demonstrações tem uma beleza diferenciada, em particular a geometria euclidiana. Por isso a vontade de fazer um trabalho voltado para a geometria euclidiana, especificamente sobre os teoremas de Ceva e de Menelaus, que são desconhecidos se levarmos outros teoremas como referência, por exemplo o teorema de Pitágoras e porque os teoremas são facilitadores de vários exercícios de provas que são usadas como ingresso para escolas militares e para aqueles que avançam nas provas da Olimpíadas Brasileira de Matemática(OBM) e Olimpiadas internacionais.

Como sendo uma área tão fértil e geradora de desenvolvimento cognitivo e social, a geometria, seja tão rejeitada (como toda a matemática) pela maioria dos alunos e até professores? Segundo (LORENZATO, 1995) a geometria exige um tipo diferente de raciocínio das outras áreas, sendo que sua compreensão, não dependa necessariamente do domínio de tópicos básicos da matemática. Por isso deve-se buscar novos atrativos para os alunos mudarem essa visão equivocada da geometria, e os teoremas de ceva e de menelaus podem ser alguns desses atrativos.

O teorema de menelaus refere-se a problemas de colinearidade, criado por menelau de Alexandria. O teorema de ceva refere-se a problemas de interseção de cevianas (segmentos) criado por Giovanni Ceva. Os teoremas são aplicados em problemas envolvendo colinearidade de pontos e interseção de cevianas respectivamente, além de cálculo de áreas de um triângulo qualquer. Os teoremas já sõa vistos mais frequentementes em resoluções de problemas geométricos."Apesar de não serem tão abordados no currículo de Matemática do Ensino Básico e até mesmo nos cursos de nível de graduação em Matemática, os Teoremas de Menelaus e de Ceva têm tido um destaque relevante nas Olimpíadas de Matemática"(SANTOS, FREITAS, JR, TANAKA, 2021, p 465).

As demonstrações dos teoremas de ceva e de o de menelaus são relativamente fáceis e compreensíveis, pois, apenas precisa se ter noção de algumas propriedades geométricas, por exemplo, proporção de áreas, semelhança de triângulos, retas paralelas, assuntos que no 9 ano do ensino fundamental, já são de conhecimento do aluno. Para ensinar a aplicação dos teoremas é sugerido uma sequência didática, em que todas as atividades propostas estão interligadas e com objetivos claros de ensino, que são feitas separadamente, tudo isso para que a possível aula sobre os teoremas não seja pragmática e assim não se perca a oportunidade de entregar aos alunos um ótimo instrumento de resolução de problemas.

2 Contexto histórico: Geometria, Menelaus e Ceva

2.1 Geometria

É notório que ainda nômades, a humanidade pouco desenvolveu a geometria, mas ao passar a ser sedentário criou-se a necessidade de novas tecnologias e da medição de terras, o que contribuiu com a evolução matemática e da geometria. Até certo ponto nos estudos sobre o desenvolvimento da geometria tínhamos que somente que os babilônios, egípcios, chineses e uma parte da Europa obtiveram estudos suficientes para serem considerados o berço da civilização, mas com novos estudos na história e visto que a américa também e um berço da civilização onde tem-se as construções feitas pelos maias e os incas. A narrativa que se dá e que no ínicio do desenvolvimento de cada civilização se tinha apenas as noções básicas de área (triangulo, quadrilátero e círculo) ou seja apenas noções empíricas sem demonstração.

O aparecimento da trigonometria como quase todo estudo e descoberta que aqui vai ser mostrado, tem seu histórico um pouco abstido pela falta de registros escritos, tendo em muitos casos passado somente pelo oratório ou traduções feitas por outras nações, contudo se perderam muitas obras no caminho em que a geometria percorreu até os dias atuais. Foi se construindo com o tempo durante os babilônios e a transição para os gregos algo que era parecido com a trigonometria, que era reconhecida pela nomeclatura de trilaterametria onde se refere a mediada dos polígonos de três lados. Durante o tempo dos gregos veio os estudos no círculo e estudo de cordas onde se deu a consolidação da trigonometria.

No ano de 306 a.c. durante o governo de Ptolomeu I, onde este, um reconhecedor de que o conhecimento era a via do progresso, e que por esse fascínio criou uma instituição chamada Museu onde chamou sábios, estudiosos e pensadores da época para compor seu projeto, onde um desses era o Euclides que como já comentado, poucas das suas obras viveram até os dias atuais, e sobre sua vida sabe-se tão pouco que “Tão obscura ficou sua vida que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome” (boyer, 2019, pag.74).

Muitos se enganam pensando que ele nasceu em Alexandria pelo fato de o chamarem de Euclides de Alexandria, mas esse nome é somente porque ele ministrou na escola fundada por Ptolomeu I. Em sua vida produziu vários trabalhos deles o famoso “Os Elementos”, mas muitas de suas obras como as maiorias das obras de antigamente se perdeu, uma que é referenciado em alguns documentos de comentadores que de dizia uma grande obra que falava sobre cônicas. Os trabalhos que sobreviveram ao longo prazo são, Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica. Observemos o que mais nos interessa para a nossa construção para frente:

1. Divisão de figuras – Neste tratado onde se propôs uma reta que corta alguns polígonos para que se chegasse a alguns resultados como na “Proposição I pede a construção de uma reta que seja paralela a base de um triangulo e que divida o triangulo em duas áreas iguais. ” (boyer, 2019, pag.75).

2. Os dados – Este tratado serviu como um apoio para a o ensinamento do tratado de Os Elementos.

3. Os Elementos – Grande obra que foi constituída para o ensino, dividida em 13 capítulos onde os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, três de teoria dos números, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço.

"É bem provável que o mais eminente dos astrónomos da Antiguidade tenha sido Hiparco, que viveu em torno de 140 a.C."(eves, 1995, p.202), com o conhecimento adquirido com base nos estudos dos babilônios e dos gregos construiu a primeira tabela trigonométrica lê rendendo o posto de pai da trigonometria. Criada para uso na astronomia, mas que foi de grande uso posteriormente em outras áreas, mas muitas de suas aplicações não existe pela perda no tempo, onde nelas estava possivelmente a sua contribuição na divisão do círculo em 360°.

Mencionado posteriormente por Teon temos, Menelaus onde se acredita ter dado continuidade aos trabalhos de Hiparco, construindo seus próprios tratados que por inconveniência como a maioria se perdeu no tempo onde apenas um sobreviveu que foi sua Sphaerica um tratado sobre mecânica.

Dito por Suidas (Sec. X) um escritor que Ptolomeu de Alexandria viveu por volta dos anos 150 d.C. onde “O almejo de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos ao ..cordas num círculo..(colocar destacado) de Hiparco”(boyer,pag 120). Um grande trabalho desenvolvido por ele foi a tabela de cordas de grande importância no cálculo de cordas de Ptolomeu conhecido como teorema de Ptolomeu. Teon ao falar sobre as obras de Ptolomeu fez uma referência a Hiparco ter criado um tratado com 12 livros sobre cordas num círculo, o que leva em mente que ambos usaram métodos parecidos. Alguns séculos depois Menelaus é redescoberto por Giovanni Ceva onde em sua publicação mostra o teorema de Menelaus e posteriormente o seu teorema apresentando uma dualidade nos dois trabalhos ”portanto o Teorema de Ceva trata-se de um “parceiro” do teorema de Menelaus.(macedo, 2014, p.30)

2.2 Menelaus

Menelaus de Alexandria nasceu provavelmente No seculo X d.c., astrônomo e matemático, compôs várias obras deu continuidade a alguns trabalhos de Hiparco, mais tarde foi mencionado por Teon de Alexandria sobre seu tratado de cordas e “Segundo historiadores gregos e árabes sabe-se que ele escreveu uma coleção de seis livros sobre cordas no círculo, um livro de intitulado Elementos da Geometria e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos(Macedo,2014,p.26).

Como já mencionada muitas obras de vários autores sr perderam no tempo e com Menelaus ocorreu o mesmo, onde sua obra que aguentou até os dias atuais a sphaerica que graças a tradução que teve para o árabe, que está escrito em três livros. A importância desse tradato se dar por ser o trabalho mais antigo sobre trigonometria esférica que no primeiro livro tem a primeira definição de triângulos esféricos, mas com um pequeno erro em uma situação na qual ele não fez a distinção de congruência e simétrico dos triângulos esféricos, fazendo com que ele provasse que a soma dos ângulos internos e maior que 180°. O segundo livro se dá para uso na astronomia mas já o terceiro livro trata sobre trigonometria esférica que o teorema que leva seu nome “O trabalho de Menelaus marcou um ponto importante na trigonometria esférica, tendo o seu trabalho sido aplicado em Astronomia(Silva, 2015, p.3).”

Além de seus trabalhos seu nome teve uma ascendente ao ser da escola de Alexandria e mais tarde em 1678 por Giovanni Ceva ser mostrado ao mundo novamente com a apresentação de Menelaus junto ao seu próprio teorema mas que"hoje, não é comum ver este teorema, que seria tão importante em livros didáticos do ensino médio.(nogueira, 2016, p.9)"

2.3 Ceva

Giovanni Benedetto Ceva ou Giovanni Ceva, nasceu no ano de 1647 em Milão, não se sabe muito sua vida antes da vida acadêmica pelo fato da família ser mais reservada, só sabe-se quando criança tinha talento para a área das ciências.

Formado em engenharia hidráulica, física e matemática onde após sair da universidade seguiu trabalhando no ramo político, mas continuou com suas pesquisas em que tentou resolver alguns problemas durante alguns anos, mas só em 1678 ao trazer a tona novamente o teorema de Menelaus na obra De lineis retos se invicem secantibus Statica constructio, junto com o teorema que leva seu nome o teorema de Ceva ou também teorema das cevianas, que pode ser descrito como sendo, "ceviana é qualquer segmento de reta num triângulo com extremidades no vértice do triângulo e no lado oposto ou na reta suporte do lado oposto(Alves, 2015, p.7)" onde o termo cevianas também vem do nome de Giovanni Ceva.

Por ter uma gama de aplicações em problemas do cotidiano para que sejam resolvidos de forma rápida e por não ser uma solução complicada mas sim direta e dado que "demonstrando com argumentos relativos a centros de gravidade, considerado dos mais importantes resultados da geometria sintética do triângulo, no período compreendido entre a Matemática da antiga Grécia e o século XIX(Silva, 2015, p.5)".

Não devemos confudir os teoremas pelo fato de serem parecidos, onde temos que Menelaus se referiu a três pontos onde dois estão sobre dois lados do triângulo e o terceiro na reta que contem a base e são colineares, já Ceva disse que as três cevianas de um triângulo são concorrentes e seguem o princípio da dualidade ou seja "Em última análise, o principio da dualidade diz que qualquer afirmação verdadeira na geometria deve permanecer fiel quando as palavras ponto e reta são trocadas; assim como dois pontos estão em exatamente uma reta, duas retas se intersectam em exatamente um ponto, ou ainda, como três pontos podem ser colineares, três retas podem ser concorrentes.(Paiva, 2015, p.31)

3 Geometria na educação básica

A importância da geometria não é tratada como deveria ser pelas pessoas, essa não valorização, é claro, chega na educação, onde a mesma não é priorizada da forma correta, muitas vezes nem prioridade ela ganha. Essa área da matemática desempenha um importante papel na vida social e acadêmica do aluno.

> Ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno, desenvolver um tipo de pensamento particular, para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso é um campo fértil de situações-problemas que favorece o desenvolvimento da capacidade de argumentar e construir demonstrações PCN (brasil, 1998).

Além disso a geometria é umas das áreas da matemática mais interessantes e "fáceis" de trabalhar, devido ao poder de inseri-la em mais de uma dimensão, facilitando uma visão mais geral do objeto de estudo e sua inter-relação com o cotidiano, principalmente a geometria euclidiana, aspecto que é um grande incentivador para o estudo da matemática, especificamente da geometria por parte dos alunos,

> A geometria é extremamente rica em exemplos e aplicações tangíveis ao dia-a-dia dos alunos, o seu estudo é previsto tanto no ensino fundamental como no ensino médio. Atualmente é vista nas escolas a geometria euclidiana, a qual reproduz quase na totalidade os problemas simples do cotidiano (SILVA, 2014, p. 2).

Essa parte da matemática está em tudo o que fazemos e vemos, na medição de um terreno triangular ou poligonal, quando enchemos uma garrafa com água de outro recipiente, nos perguntamos inconscientemente, ou não se a garrafa vai suportar o volume desejável, ali temos uma noção de volume, se em um teatro vazio sem cadeiras pode abrigar certo número de pessoas, estes são alguns exemplos de muitos que existem, em que precisamos e usamos sem saber, nossa noção de espaço.

A geometria plana não é tão estudada quanto deveria ser em salas de aulas, mesmo com sua importância no âmbito educacional comprovada. Essa parte da matemática propicia muitas vantagens aos alunos. Resoluções de problemas relacionados com a geometria dá início à uma nova percepção do aluno com a matemática vista até então, " os problemas de geometria vão fazer que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo" PNC (BRASIL, 1998, p. 86).

O estudo da matemática é acumulativo, ou seja, para se ter uma melhor compreensão do que se já está estudando, é preciso o mínimo de domínio de assuntos anteriores relacionados a ele. Com a geometria não é diferente, inclusive, por meio de suas ferramentas, é possível auxiliar em outros tópicos.

> Estudos esclarecem que a geometria promove o entendimento de diferentes conteúdos matemáticos, é por isso que precisa ser trabalhada em conjunto com cada conteúdo, pois dessa forma os alunos entenderão melhor até mesmo o cálculo algébrico, que, muitas vezes, parece ser abstrato. (ROGENSKI, PEDROSO, 2007, P. 6).

A matemática é como uma casa, tem-se que ter uma base forte para que o resto funcione bem, a geometria com parte dela, também funciona assim. Como uma ferramenta importante para as outras áreas, ela deve ser estudada com bastante cuidado e interesse para que o aluno tenha uma base sólida de seus conceitos, servindo de ajuda nos futuros tópicos estudados, o ensino fundamental é importante para tal construção (ROGENSKI, PEDROSO, 2007). Justamente essa base, que muitas vezes não é construída, que vem do fundamental é um dos fatores que dificultam o ensino da geometria no ensino fundamental ll(5 a 8 séries) (CRUZ, 2022) além do intervalo de tempo curto disponibilizado para os professores ministrarem a disciplina de geometria, fazendo com que muitas vezes ela não seja passada para os alunos.

4 Propiedades geométricas

Para melhor compreensão das demonstrações e das resoluções de problemas temos algumas propriedades geométricas básicas que serão apresentadas a seguir como um guia do que se é necessário ou no mínimo do que se tem que ter de conhecimentos prévios para trabalhar com os teoremas.

4.1 Noções e proposições primitivas

4.1.1 Assumiremos as seguintes noções sem definir

Ponto: Indicado por letras latinas maiúsculas; $A, B, C, ...$
Reta:Indicada por letras minúsculas latinas; $a, b, c, ...$
Plano:Indicado por letras grgas miniscula $\alpha, \beta, \gamma, ...$

4.1.2 Proposições primitivas

Aqui enuciaremos alguns postulados

- Ponto;

  1. Em uma reta a infinitos pontos, como também fora dela a infinitos pontos.
  2. Num plano a infinitos pontos

  Obs:Dado um plano α, reta s e os pontos A, B, C, D, E e F.

  $$\text{Onde, } (A, B, C, D, E, F) \in \alpha, (A, C, D) \in s \text{ e } (B, E, F) \notin s.$$

- Pontos colineares: Pontos que pertencem a mesma reta, são colineares.
- Reta: Ao tomarmos dois pontos distintos determinamos uma unica reta que passa por ambos os pontos.

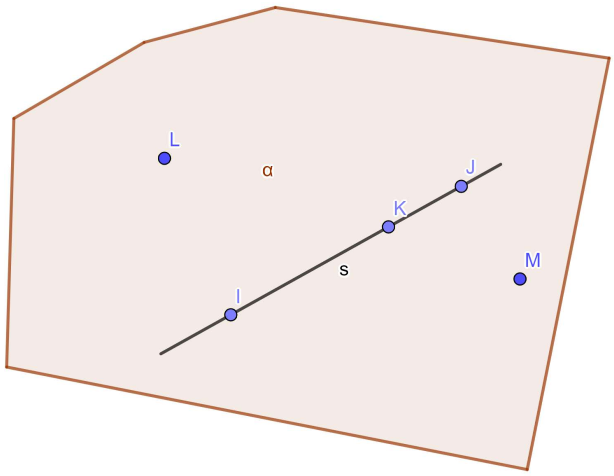
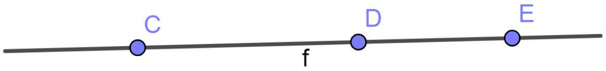
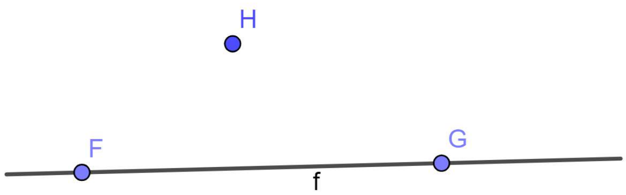


Figura 1: Autores



(a) A, B e C são colineares



(b) A, B e C não são colineares

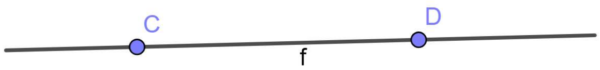


Figura 2: Autores

- Plano: Ao tomarmos três pontos nao colinears é determinado um unico plano que passa por eles.

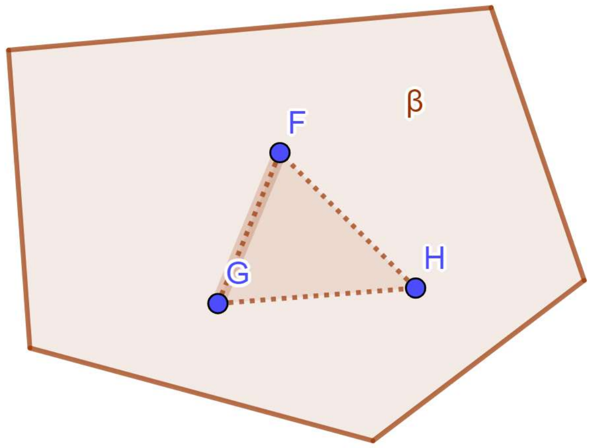


Figura 3: Autores

4.2 Segmento de reta

4.2.1 Definição

É parte de uma reta determinado por dois pontos diferentes de si e todos os pontos colineares entre os pontos dados.(simbologia: $\overline{AB}$)

Figura 4: Autores

4.2.2 Segmentos consecutivos

São segmentos onde o ponto que delimita um segmento também delimita outro segmento.

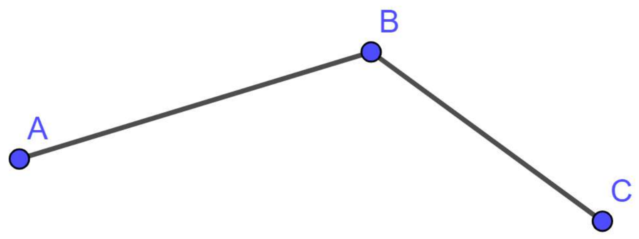


Figura 5: Autores

4.2.3 Congruência de segmentos

Usaremos a notação (simbolo: $\equiv$) para se referir a congruência que é conceituada pelos seguintes postulados;

- Reflexiva: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$
- Simétrico: $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AB}$
- Transitivo: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{EF}$

4.2.4 Ponto médio de um segmento

Seja um segmento $\overline{AB}$ tomemos um ponto M onde $M \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$

4.2.5 Semirreta

Dados dois pontos que definem uma única reta, onde um dos pontos delimita esta onde sera a origem,o ponto seguinte esta contido na trajetória da reta (simbologia:$\overrightarrow{AB}$).

4.3 Ângulos

4.3.1 Definição

É a medida dada por dois segmentos ou semirreta distintos e consecutivos, onde o ponto em comum e a origem(simbologia: $\hat{rs}$ ou $A\hat{O}B$ ou $\angle$AOB).

- Interior do plano formado po um ângulo: O interior de um plano formado por um ângulo contém os infinitos pontos internos do ângulo.

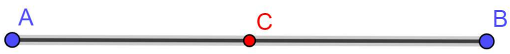
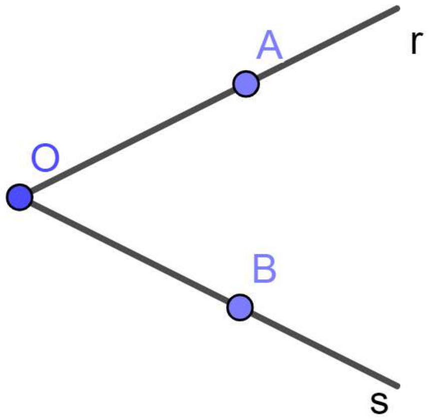
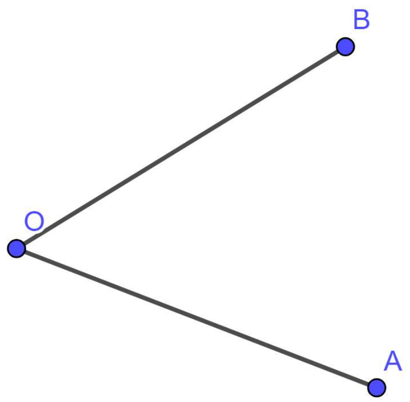


Figura 6: Autores



(a) $r \cup s = \hat{rs}$

Figura 7: Autores



(a) $\overline{AO} \cup \overline{BO} = A\hat{O}B$

Figura 8: Autores

4.3.2 Ângulos consecutivos

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se um dos segmentos que formam um ângulo for o mesmo que forma outro ângulo.

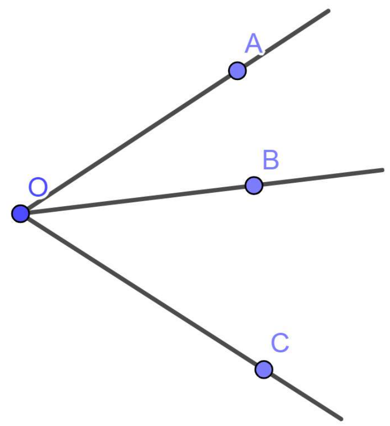


Figura 9: Autores

4.3.3 Ângulos adjacentes

Dois ângulos são adjacentes se nenhum ponto interno de um ângulo também é um ponto interno do outro ângulo, e quando ambos são consecutivos.

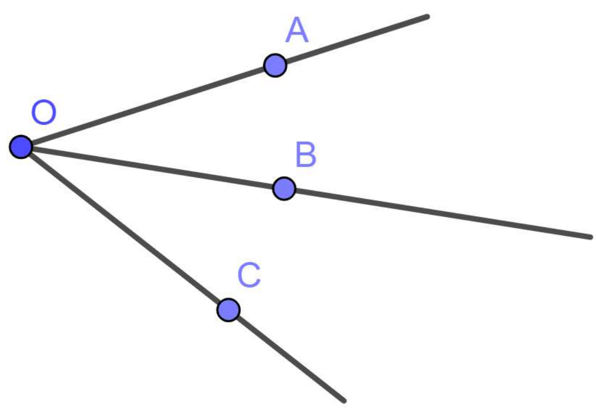


Figura 10: Autores

4.3.4 Ângulo oposto pelo vértice

São ângulos opostos pelos vértices angulares onde suas semirretas ou segmentos e oposto de ambos os lados de suas respectivas e mesma origem.

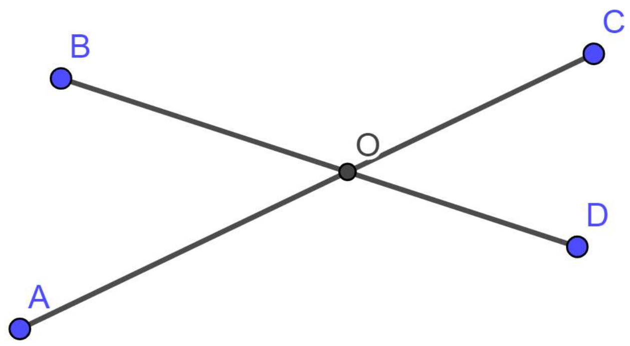


Figura 11: Autores

4.3.5 Congruência

A congruência será conceituada pelos seguintes postulados:

- Reflexiva: $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}B$
- Simétrico: $A\hat{O}B \equiv C\hat{E}D \Rightarrow C\hat{E}D \equiv A\hat{O}B$
- Transitivo: $A\hat{O}B \equiv C\hat{E}D$ e $C\hat{E}D \equiv F\hat{H}G \Rightarrow A\hat{O}B \equiv F\hat{H}G$

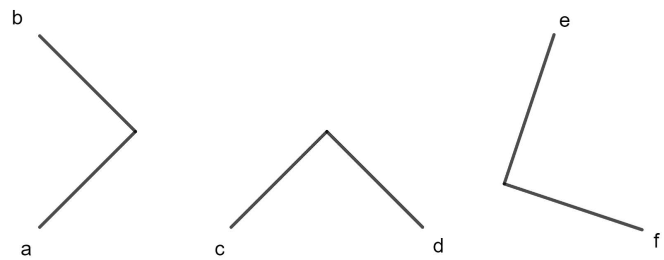


Figura 12: Autores

4.3.6 Bissetriz

Dado um ângulo $A\hat{O}B$ uma semirreta é traçada internamente onde gera $\overrightarrow{OC}$, tal que este segmento sera único e dividirá o ângulo em dois ângulos congruentes.

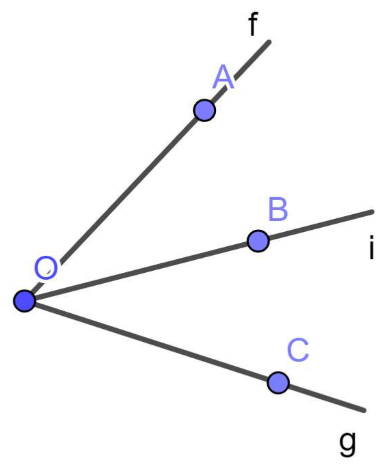


Figura 13: Autores

4.4 Triângulos

4.4.1 Definição

Dados três pontos não colineares A, B e C que formam os seguintes segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$. A união desses três segmentos chama-se triânguloABC.

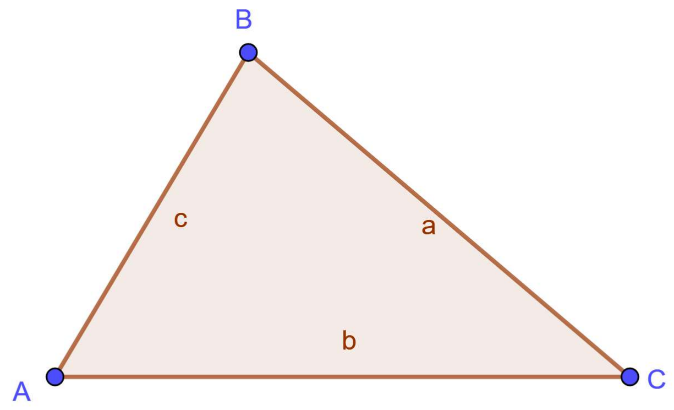


Figura 14: Autores

triangulo$ABC = \triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

4.4.2 Elementos de um triângulo

Vértices: Os pontos A, B e C são os vértices.

Lados: Os segmentos $\overline{AB} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = c$ são os lados do triângulo.

Ângulos: $A\hat{B}C = \hat{b}, A\hat{C}B = \hat{c}$ e $B\hat{A}C = \hat{a}$ são os ângulos internos do triângulo.

4.4.3 Interior e exterior

- Interior de um triângulo é uma região convexa e os pontos do interior são pontos do triângulo, onde a união do triângulo com seus pontos interior é a superfície triangular.

- Exterior de um triângulo é côncavo e todos os pontos exterior do $\triangle ABC$ são pontos externo do triângulo.

4.4.4 Classificação dos triângulos

1. Em relação aos lados

    - Equiláteros: que contém se, e somente se os três lados congruentes.
    - Isóceles: que contém se, e somente se dois lados congruentes.
    - Escaleno: qualquer que seja dois lados do triângulo nenhum é congruente.

2. Em relação aos ângulos

    - Retângulo: que contém se, e somente se um ângulo reto.
    - Acutângulo: que contém se, e somente se os três ângulos internos todos agudos.
    - Obtusângulo: que contém se, e somente se um ângulo obtuso.

4.4.5 Congruência de triângulos

- Definição: Um triângulo é congruente a outro triângulo se, e somente se for possível estabelecer uma relação entre eles, onde os três segmentos e os três ângulos de um triângulo devem ser congruentes aos três lados e três ângulos do outro triângulo.

- Casos de congruência;

    1. caso - LAL Se dois triângulos têm entre si dois lados e im ângulo congruente, então eles são congruentes.

    2. caso - ALA Se dois triângulos têm entre si ordenadamente dois ângulos e um lado congruente então então eles são congruentes entre si.

    3. caso - LLL se dois triângulos têm entre si os três lados congruentes então eles são congruentes entre si.

4. caso - LAA_o Se dois triângulos tem entre si um lado congruente, um ângulo adjacente a este lado também congruente e o ângulo oposto ao lado também congruente os dois triangulos logo são congruentes entre si.

5. caso - Triângulo retângulo Se dois triângulo retângulo tem ordenadamente um cateto e a hipotenusa congruentes então esses triângulos são congruentes.

- Mediana de um triângulo: Dado um segmento com uma extremidade em um dos vértices e a outra extremidade no ponto médio do lado oposto ao vértice é denominado mediana de um triângulo.

- Bissetriz de um triângulo: Dado um segmento com extremidade em um vértice e aoitra extremidade no lado oposto ao vértice, tal que dívida o ângulo do vértice em dois ângulos iguais é denominado bissetriz interna de um triângulo.

- Ângulo externo: Todo ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer ângulo interno quê não seja adjacente a este.

4.5 Paralelismo

4.5.1 Retas paralelas

Dadas duas retas onde estas so são paralelas cada uma contém os mesmos pontos da outra, ou se nenhuma contém nenhum ponto em comum entre elas.

4.5.2 Transversal

Seja duas retas a e b, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com a e b, onde t é uma transversal de a e b.

4.5.3 Existência da paralela

Se duas retas distintas intercepta uma transversal formando ângulos alternos congruentes, então essas retas são paralelas.

4.6 Semelhança de triângulos e potência de ponto

4.6.1 Semelhança de triângulos

- Definição: Dados dois triângulos em quê possuem ordenadamente os ângulos congruentes e os lados homólogos proporcionais, os triângulos são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$).

- Razão de semelhança: É chamando de k a razão entre os lados homólogos dos triângulos.

- Propriedades;

  1. Reflexiva: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$
  2. Simétrico: $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$
  3. Transitiva: $\triangle ABC \sim \triangle DEF, \triangle DEF \sim \triangle GHL \Leftarrow \triangle ABC \sim \triangle GHL$

4.6.2 Potência de ponto

A potência de um ponto P em relação a circunferência α é dada em dois casos;

1. P é interior a α em que tomemos um segmento com extremidades ma circunferência de α e que contenha P. Onde $\overline{AB}$ é uma corda e $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ são suas partes.

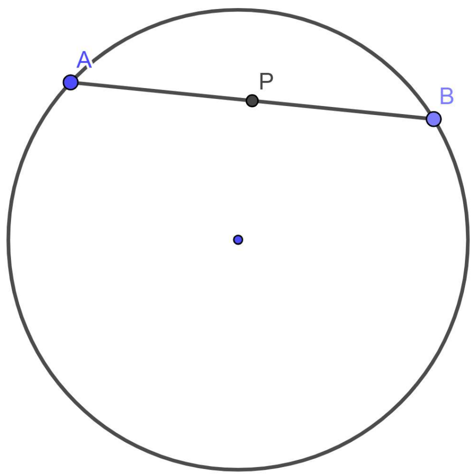


Figura 15: Autores

2. P é externo a α em que tomemos $\overline{PC}$ um segmento secante tal que forme $\overline{XY}$ e $\overline{PY}$ que são partes de $\overline{PC}$ e Y é o ponto que intercepta a circunferência α.

5 Teoremas de Menelaus e de Ceva

5.1 Teorema de Menelaus

Sejam três pontos D, E e F localizados respectivamente nas retas suportes dos lados $\overline{AB}$ $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ de um $\triangle ABC$, e diferentes dos vertices. Se D, E e F são colineares então,

$$\frac{FC}{FA} \times \frac{AD}{BD} \times \frac{EB}{EC} = 1$$

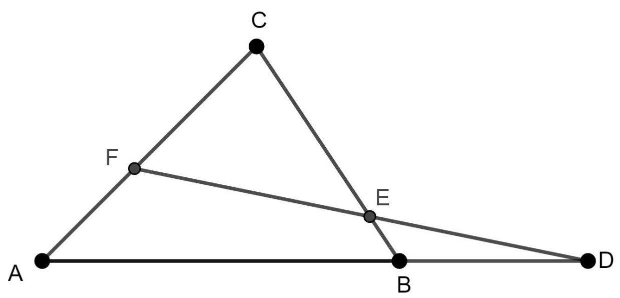


Figura 16: Autores

Demonstração:
Tracemos perpendiculares a $\overleftrightarrow{FD}$, uma de origem em A que intercepta $\overleftrightarrow{FD}$ em G e outra de origem em B que intercepta $\overleftrightarrow{FD}$ em H. Tracemos outra perpendicular de origem em C que intercepta $\overleftrightarrow{FD}$ em I.

Note que $\triangle GAF \sim \triangle CIF$, $\triangle GAD \sim \triangle HBD$. Temos também $\triangle CIE \sim \triangle EBH$ (Teorema das paralelas).

$$\Rightarrow \frac{FC}{FA} = \frac{CI}{GA}, \frac{AD}{BD} = \frac{GA}{HB}, \frac{EB}{EC} = \frac{HB}{CI},$$

Multipliquemos todas as igualdades,

$$\frac{FC}{FA} \times \frac{AD}{BD} \times \frac{EB}{EC} = \frac{CI}{GA} \times \frac{GA}{HB} \times \frac{HB}{CI} \Rightarrow \frac{FC}{FA} \times \frac{AD}{BD} \times \frac{EB}{EC} = 1$$

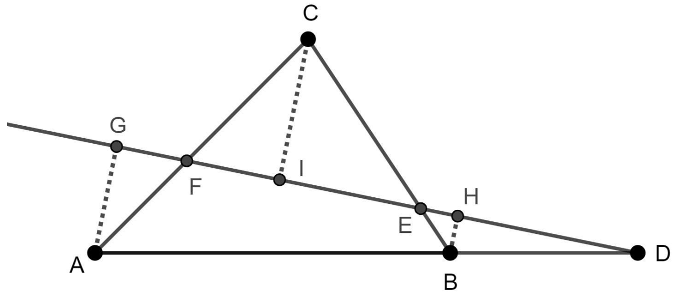


Figura 17: Autores

5.2 Teorema de Ceva

Dadas três cevianas em um triângulo qualquer, as mesmas são concorrentes, se, e somente se;

$$\frac{FA}{FB} \times \frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{CA} = 1$$

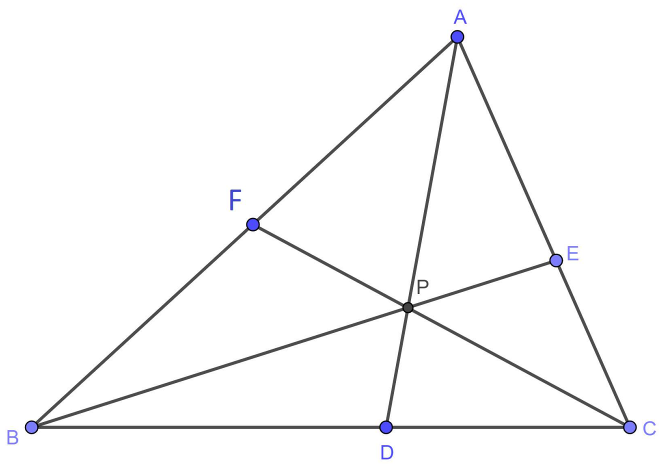


Figura 18: Autores

Demonstração:

Suponha que as cevianas se interceptam em P.

- $\Rightarrow$ Observe que as cevianas determinam os triângulos $\triangle APB$, $\triangle BPC$ e $\triangle CPA$,com aréas a, b e c respectivamente.

Pode-se usar a proporcionalidade das áreas com seus segmentos opostos.

$$\frac{c}{b} = \frac{FA}{FB}, \frac{a}{c} = \frac{DB}{DC}, \frac{b}{a} = \frac{EC}{EA}$$

Multiplicando as igualdades,

$$\frac{c}{b}\frac{a}{c}\frac{b}{a} = \frac{FA}{FB}\frac{DB}{DC}\frac{EC}{EA} \Rightarrow 1 = \frac{FA}{DC}\frac{DB}{DC}\frac{EC}{EA}$$

- $\Leftarrow$ Seja que,

$$\frac{FA}{FB} \times \frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} = 1,$$

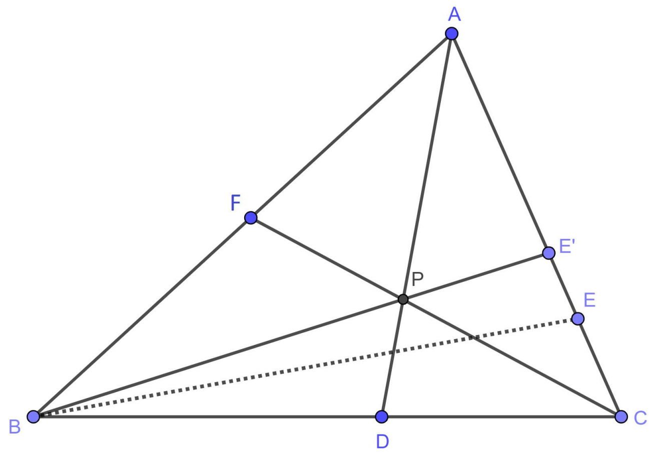


Figura 19: Autores

Suponhamos outra ceviana BE'. Temos as seguintes situações;

$$\frac{FA}{FB} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{E'C}{E'A} = 1, \frac{FA}{FB} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{EC}{EA} = 1$$

Igualando os termos obten-se:

$$\frac{E'C}{E'A} = \frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{E'C}{(E'C + E'A)} = \frac{EC}{(EC + EA)} \Rightarrow \frac{E'C}{AC} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \overline{E'C} = \overline{EC}$$

Ou seja as cevianas se interceptam em um mesmo ponto.

Exemplos:

1. (rocha,2016) Em um triângulo ABC, sejam M o ponto medio do lado AC e N o pé da bissetriz interna relativa ao vértice B. Prolongue a semirreta CB até o ponto D, tal que $DB = AB$. Se BN intersecta DN em P, prove que $\angle BAP = \angle ACB$.

SOLUÇÃO

Sejam $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Usando o teorema da bissetriz interna, em relação à bissetriz interna BN, obtemos

$$\frac{c}{AN} = \frac{a}{b - AN} \Rightarrow AN = \frac{bc}{a + c}.$$

Daí,

$$MN = AM - AN = \frac{b}{2} - \frac{bc}{a + c} \Rightarrow MN = \frac{b(a - c)}{2(a + c)}.$$

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo BCN, em relação ao terno de pontos colineares D, P e M, obtemos

$$\frac{CM}{MN} \cdot \frac{PN}{BP} \cdot \frac{BP}{CD} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b(a-c)}{2(a+c)}} \cdot \frac{PN}{BP} \cdot \frac{c}{a + c} = 1 \Rightarrow \frac{BP}{PN} = \frac{c}{a - c} \Rightarrow \frac{BP}{BN - BP} = \frac{c}{a - c}$$

$$\Rightarrow a \cdot BP = c \cdot BN \Rightarrow \frac{BP}{BN} = \frac{AB}{BC}.$$

Como $\angle ABP = \angle NBC$ e $\frac{BP}{AB} = \frac{BN}{BC}$, segue que os triângulos ABP e CBN são semelhantes, pelo caso AA. Logo, $\angle BAP = \angle ACB$ e $\angle APB = \angle BNC$.

2. (Belarus) Seja O o centro do circulo ex-inscrito do $\triangle ABC$ oposto ao vertice A. Seja M o ponto medio de AC e seja P a interseção das retas M, O e BC. Prove que se o $A\hat{B}C = 2A\hat{C}B$, então $AB = AP$.

SOLUÇÃO

Sejam $\{\mathbb{X}\} = \overleftrightarrow{AO} \cap \overleftrightarrow{BC}$, $\{\mathbb{Y}\} = \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{OC}$ e $\angle ACB = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$.

Aplicando o teorema de ceva ao triângulo AOC, em relação ao ponto P, temos,

$$\frac{OX}{XA} \cdot \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CY}{YO} = 1.$$

Uma vez que $AM = MC$, resulta $\frac{OX}{XA} = \frac{YO}{CY}$ e, daí, pela recíproca do teorema de thales, $\overline{XY} \parallel \overline{AC}$. Então, $\angle OXY = \angle XAC = \alpha$ (Correspondentes) e $\angle YXC = \angle XCA = \alpha$(Alternos internos), e, com isso $\overline{XY}$ bisecta $\angle OXY$. Como O é o centro do círculo ex-inscrito do triangulo ABC oposto ao vertice A, consequentemente $\overline{OB}$ e $\overline{CO}$ são bissetrizes externas e $\overline{AO}$ é bissetriz interna do triângulo ABC. Asssim, o ponto Y é o centro do círculo ex-inscrito do triângulo ACX oposto ao vértice A, pois é a intereseção das bissetrizes externas $\overline{XY}$ e $\overline{CY}$ o que nos diz que $\overline{AY}$ é bissetriz interna do triângulo ACX, ou seja, $\angle XAP = \angle CAP = \frac{\alpha}{2}$. Logo, $\angle BPA = \angle PCA + \angle CAP = \angle BAX + \angle PAX = \angle BAP \Rightarrow AB = BP$.

6 Sequência Didática

Sempre surgem novas ideias de metodologias de ensino da matemática, pois, a mesma causa um sentimento de repudio entre os alunos, muitas vezes por conta de como é ensinada ou não ensinada nas escolas.

Uma sequência didática apresenta um conjunto de atividades interligadas umas às outras com o objetivo de ensinar determinado tópico de uma maneira mais produtiva e qualificada (MONTEIRO, CASTILHO, SOUSA, 2019). O professor deve inovar em suas aulas, fazer algo novo, fugir da rotina, portanto, uma sequência didática bem construída, com apresentação de aplicabilidades da matemática no cotidiano, ajuda o aluno a enxergar a matemática como algo palpável, alcançável (LIMA, 2019). A sequência didática é um forte instrumento no ensino aprendizado da matemática, quando for bem estruturada e oferecer didáticas atípicas das que normalmente são vistas em sala de aula.

Para apresentar teoremas não muito conhecidos, como os de Ceva e de Menelaus, uma ferramenta importante é uma sequência didática bem construída em torno de alguns tópicos geométricos e matemáticos, de forma que os alunos absorvam o que se é pretendido, e que realmente entendam para que servem e como aplica-los.

Para isso é necessária uma abordagem diferente, para que as aulas não caiam em uma mesmice e não se possa retirar nenhuma produtividade do aluno "Estudos mostram que o ensino da geometria, quando acontece efetivamente, ainda transcorre de maneira tradicional, onde os professores se restringem ao uso do livro didático como principal ferramenta de ensino"(PEREIRA, 2016, p.11). Se faz necessário uma sequência didática para o ensino destes teoremas levando em conta os problemas já conhecidos de todos, como a falta de interesse do aluno e a má formação da sua base matemática.

As atividades aqui elaboradas, tem embasamentos teóricos e empíricos, que serão apresentados no contexto de cada atividade, cada uma delas pode ser executada em no máximo duas aulas, com exceção da última, levando em consideração que o tempo de aula não são todos iguais em todas as escolas do país, logo a previsão do termino da sequência didática é de no máximo 7 aulas (tempo esse que pode se estender devido a relatividade do tempo em resolver os exemplos propostos). Foram escolhidas metodologias de ensino conhecidas e consolidadas para que da melhor forma possível possa apresentar os teoremas aos alunos, melhor absorção e compreensão.

6.1 Sequências de atividades adotadas

A primeira atividade será um pequeno aprofundamento na história da matemática envolvendo geometria plana e um pouco da história dos matemáticos por trás dos teoremas, com o objetivo de contextualizar sobre o porquê de estarem aprendendo sobre os teoremas e iniciar uma certa curiosidade sobre geometria. Posteriormente será feita uma breve revisão sobre colinearidade de pontos, concorrência de retas, retas paralelas, proporcionalidade e áreas de um triângulo com o intuito de reforçar esses tópicos, sem demonstrações ou aprofundamentos sobre os tópicos, pois, entende-se que os alunos já estudaram os assuntos citados, porém, é sempre bom saber como os alunos estão em relação a tais tópicos. Essa revisão objetiva tornar as demonstrações mais compreensivas para os alunos.

A primeira atividade é muito importante para despertar o interesse dos alunos naquilo que estamos pretendo fazer, por isso, um pouco da história da geometria e da matemática serão apresentados por meio de vídeos, onde são encontrados através da plataforma https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk, canal: educação documentários- Donald no país da matemática, e na mesma plataforma, no canal: Canal educar-Geometria no cotidiano e no canal: Experiência matemática-História da geometria. A apresentação desses vídeos tornará a aula de matemática um pouco atípica e mais atrativa. No final será proposto aos alunos escreverem em uma folha de papel o que eles acharam de mais interessante ou curioso nos vídeos assistidos. Assim fechamos a primeira atividade.

Na segunda atividade, será apresentado um breve histórico dos matemáticos por traz dos teoremas, para isso pode-se utilizar o material aqui apresentado. Os teoremas serão demonstrados na lousa, para manter uma certa formalidade que a matemática exige, em seguida o software Geogebra é utilizado para mostrar aos alunos os teoremas aplicados em triângulos, mostrar como os triângulos podem ser construídos e os segmentos que caracterizam os teoremas, o objetivo é mostrar uma outra visão que não seja a do quadro sobre os teoremas de Ceva e de Menelau, entrar em outro plano, terminando a segunda atividade.

Na terceira atividade classe será organizada em grupo de 2 ou 3 pessoas no máximo, em que serão entregues uma lista com figuras geométricas, no qual o grupo deverá reconhecer em quais figuras os teoremas podem ser aplicados. Isso abre margem para discursão e troca de conhecimentos, onde os alunos estão inseridos em uma dinâmica participativa. Posteriormente será praticado resolução de problemas na lousa, com o objetivo de aplicar aquilo que foi aprendido até então e ter uma noção de quanto os alunos já absorveram sobre as aulas. Os seguintes exemplos serão apresentados aos alunos, fechando assim a terceira atividade.

Na quarta e última atividade será aplicado um teste individual com situações problema em que se usa um dos dois teoremas para chegar ao resultado. O intuito é avaliar se os alunos aprenderam a usar os teoremas para resolver situações problema. Ao final da sequência didática espere-se que os alunos tenham absorvido tudo o que foi mostrado até então, que tenham uma ideia menos ruim da matemática e que possam se interessar por essa área tão incrível, produtiva e importante como a geometria euclidiana e que tenham conseguido mais uma ferramenta para a resolução de problemas geométricos.

6.2 O porque da primeira atividade

A história da matemática é um instrumento importante no ensino aprendizagem, pois, a partir dela pode-se mostrar que a matemática não é algo acabado, que é uma ciência em construção, e que cresceu e se desenvolveu de acordo com as necessidades humanas no decorrer do tempo e que continuará se desenvolvendo. É através dela que é mostrado a aplicabilidade da matemática no cotidiano, fator que desenvolve nos alunos interesse e algum sentido nela, algo que pode motiva-los. Ela é uma importante ferramenta para despertar a curiosidade dos alunos pela matemática BNCC (2017) e apresenta outro cenário mais rico em situações matemáticas, fator esse importante no aprendizado matemático.

Criar ou representar um contexto em que a matemática seja mais transparente e objetiva auxilia no ensino da mesma, nesse aspecto "a história da matemática junta diversas dimensões da matemática e possibilita aos alunos a motivação e justificativa para construir o saber matemático dentro da sua realidade" (GULIN, ROSÁRIO, 2014, p 4). A história da matemática ainda conecta a matemática com as outras ciências estabelecendo uma ligação como um todo sobre a humanidade e sua evolução como sociedade.

Uma das principais indagações dos alunos é o por que estudar matemática e aonde vão usar o que estão aprendendo em sala de aula, questões quando são respondidas não satisfatoriamente na visão dos alunos, desestimulam a curiosidade e o interesse do aluno em entender e aprender essa ciência, "a história da Matemática no ensino deve ser encarada sobretudo pelo seu valor de motivação para a Matemática. Deve-se dar curiosidades, coisas interessantes e que poderão motivar alguns alunos" (D'AMBROSIO, 1999, p 33).

O fato de os alunos não entenderem de primeira o porquê de tais métodos matemáticos existirem e sua importância, também dificulta o ensino aprendizagem da matemática e afasta os alunos da disciplina, se uma situação ou situações forem apresentadas a eles como origem ou contexto histórico, pode haver um interesse e um entendimento maior sobre os tópicos matemáticos estudados, pois, o ser humano, normalmente não gosta do que não conhece

> O uso da história da matemática pode auxiliar no conhecimento matemático, ajudando o aluno a compreender tais métodos e fórmulas usadas hoje na matemática. Além disso pode motivar o aluno a se aprofundar no assunto, tendo uma visão de como estes tipos de problemas eram resolvidos antes de existir o que hoje é nos familiar (SANTOS, 2077, p. 19).

O uso da história da matemática como ferramenta nessa sequência didática é de suma importância por tudo o que ela pode proporcionar como instrumento pedagógico.

6.3 O porque da segunda atividade

A Tecnologia da informação e comunicação é um instrumento para auxiliar no ensino matemático, devido a sua capacidade de introduzir a matemática em outro plano que seja mais agradável aos olhos dos alunos. “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BNCC, 2017, p 265).

É de suma importância a introdução do geogebra e de outras ferramentas que estão caracterizadas como tecnologia da informação e comunicação, na metodologia de ensino da matemática, pois através delas, os alunos são apresentados a outra visão que envolve o tópico estudado. Usando ferramentas da tecnologia da informação, uma delas o geogebra, é possível ver como certas propriedades matemáticas se comportam, relacionam ou se aplicam, através de imagens, PCN (1998) e com os dias atuais e a evolução desses softwares, a compreensão dessas propriedades são mais evidentes com a visualização em mais de duas dimensões.

Como em todas as áreas de conhecimento e trabalho, é necessário a evolução e qualificação do profissional, para o mesmo não se distanciar da realidade em que ele está inserido, em específico, aqui o professor é o alvo da observação

> A utilização da tecnologia da informação como recurso pedagógico nas aulas de geometria pode realçar a importância que a geometria tem no processo de construção do conhecimento e na formação dos alunos. Para tanto lembramos que o ensino da geometria e a formação dos professores de matemática devem se adequar a realidade, não só educacional, mas também tecnológica nos dias atuais.(FARIAS, 2011, p.10)

O fato de se poder manipular certas imagens com o objetivo de entende-las ou ter a possiblidade de ver algum teorema aplicado de alguma forma mais perto da realidade possível, auxilia na construção da curiosidade e do interesse do aluno na matemática.

O uso dos softwares relacionados a geometria, são essênciais para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno e também do professor, devido a sua variedade de ferramentas, com as quais podemos manipular os espaços geométricos, dentre outras variantes, melhorando a compreensão dos alunos sobre algumas propriedades matemáticas. (FARIAS, 2011).

1. (UFS, aula 09, teorema de Ceva) Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes.

2. (Semana olímpica-janeiro/2003-Goiânia) No $\triangle ABC, AL, BM, CN$ são concorrentes em P. Expresse a razão $AP \setminus PL$ em termos dos segmentos gerados pelas retas concorrentes sobre os lados de ABC.

6.4 O porque da terceira atividade

Imagens são motivadoras da curiosidade, algo bem importante na educação como combustível para o interesse em saber. Por ser uma disciplina que usa muitas imagens para compreensão de teoremas, propriedades e outros, a geometria é um terreno fértil para se usar as imagens. Configurações geométricas, são imagens com determinadas características usadas no auxílio do ensino de um determinado tópico matemático, em que as mesmas são de fácil acesso (PAIS, 2006). Portanto o uso das figuras como suporte de compreensão dos teoremas é bastante relevante.

Quando o aluno é apresentado para uma situação problema, é exigido do mesmo uma certa independência e pró-atividade em busca de possíveis soluções, (GROENWALD, SILVA E MORA, 2004) exercitando seu raciocínio lógico e os melhorando nas estratégias para conseguir solucionar os problemas propostos. A busca por uma solução propicia aos alunos a manipulações dos conhecimentos já existentes e de informações, potencializando seu conhecimento acerca de outras áreas, PCN(BRASIL, 1998) essa metodologia de ensino é rica em poder de desenvolvimento do aluno, pelo fato de possibilitar um contexto real ou não, em que são aprendidos temas e tópicos matemáticos.

A matemática por exigir um raciocínio e uma lógica em suas descobertas ou tentativas de descobertas, é mal vista pelos alunos, fato esse, apesar de ser conhecido, ainda persisti nos dias atuais como dificuldade no ensino aprendizagem matemático.

Um dos atrativos para os alunos se interessem pela matemática, pode ser a relação direta ou concreta da matemática com a realidade em sua volta, e ao mesmo tempo que a resolução de problemas é uma isca para atrair os alunos, também é um mecanismo de desenvolvimento intelectual.

> Um dos objetos de trabalhar com a resolução de problemas é, de maneira geral, contribuir no desenvolvimento intelectual do aluno, no que diz respeito aos aspectos específicos do saber matemático. Além do mais, através dessa estratégia é possível interligar a matemática com outras disciplinas ou com situações do mundo vivenciado pelo aluno (PAIS, 2006, p.131).

As metodologias usadas em sala aula de aula também não ajudam esse processo de interligar o que está se aprendendo a vida cotidiana, são necessários novos métodos para chamar a atenção os alunos e não os espantar, de aguçar sua criatividade, todo ser humano é um ser pensante, capaz de raciocinar, o que precisamos são de estímulos, motivação, não aceitar respostas por aceitar, entender qual foi o caminho para chegar até a solução. (LOPES, MARASINI, 2012).

É papel do professor incentivar seus alunos e sempre mostrar o melhor caminho (não quer dizer que seja mais fácil) para resolver um problema, portanto um professor deve fugir das aulas pragmáticas, pois, prejudica seus alunos cognitivamente, o professor deve chamar a atenção dos alunos, deixá-los interessados, e trabalhar dentro da esfera de conhecimento dos mesmos, estimular o raciocínio independente (POLYA, 1995).

Considerações finais

Com a evolução da sociedade ao longo da história como um todo, em relação a tecnologias, métodos de trabalho, medicina, etc. com a educação não é diferente. Sempre são necessários novos métodos de ensino em todas as áreas da educação, devido a constante mudança no mundo e nas pessoas, falando especificamente dos alunos. Este trabalho visa reforçar o ensino da geometria plana através dos teoremas de Menelaus e de Ceva, além de divulgar mais um instrumento para o auxílio em resolução de problemas geométricos, com o intuito de ajudar os alunos a conseguirem seu maior potencial possível nos testes, pelo quais os teoremas podem ser mais usados. Trabalhos e livros com relação a este, foram usados, além de questões de geometria plana para melhor visualização da aplicação dos teoremas. Questões abordadas aqui, que podem ser consideradas como uma amostra, a priori podem parecer de difíceis soluções, porém, com os teoremas as resoluções ficaram mais diretas e transparentes.

O ensino da geometria é muito relevante na formação do aluno, não só na esfera acadêmica, mas na formação como cidadão, e o que vimos é a não valorização do seu ensino. Com isso se perde potencialidade nos estudos, mesmo naqueles que não são matemáticos em sua essência, e o que vimos é o crescente desinteresse por parte dos alunos com a geometria. São sempre necessários estudos coma finalidade de atrair a atenção para a geometria, mostrar sua importância, desenvolver métodos ou divulgar aqueles já conhecidos com o intuito de facilitar ao máximo o ensino da geometria.

A aplicação dos teoremas é bem ampla, podendo emergir além das questões de provas das Olímpiadas Brasileira de Matemática (OBM) e das escolas militares e também do ensino básico, por exemplo, em graduações de bacharelado ou licenciatura em matemática. Esse estágio de formação é estratégico, com os teoremas sendo de conhecimento de futuros professores, a probabilidade de os mesmos serem discutidos ou pelo menos mencionados no ensino básico é bem maior.

As Olimpíadas brasileiras de Matemática (OBM) e provas de ingresso nas escolas militares são um campo fértil para testar o conhecimento dos alunos, além da evidente possiblidade de mudança de vida de muitos estudantes. É cada vez mais notória esses tipos de prova, que valoriza os alunos que vem das Olimpíadas Brasileiras de Matemática de escolas Públicas (OBMEP) e podem ter um ensino diferenciado e específico quando são bem posicionados em relação as notas nas provas (Escolas militares). Falando um pouco mais das OBM, uma ferramenta que auxilia nas resoluções de seus exercícios de geometria plana, são os teoremas de Menelau e o de Ceva, pouco conhecidos, mas de extrema utilidade, não só nas modalidades aqui apresentadas, mas em outras também. Teoremas que trazem conhecimentos anteriores a eles, que de tão simples, sejam tão ricos em informações.

7 Referências

•A leitura e a escrita como prática pedagógica em aulas de matemática: uma experiência de produção de textos. revistasbemsp,2022. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/677/528. Acesso em: 29 de jun. de 2023.

•ALVES, Diego Saochine. Os teoremas esquecidos pelos professores de geometria plana do ensino médio. 2015.

•Base nacional comun curricular. Ministerio da educação e da cultura. Disponivel em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf acesso em 29 de jun. de 2023

•BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da matemática. Editora Blucher, 2019.

•CADERNOS, P. D. E. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. 2014.

•CALDATTO, Marlova Estela e Pavanello, Regina Maria. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. Url https://revistas.rcaap.pt/index.php/quadrante/article/view/22913, 2015.

•CRUZ, Keyte Rocha da. A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA NO PROCESSO ENSINO APRENDIZAGEM: uma alternativa pedagógica para o ensino da matemática. Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem, v.4, p.108-116, 2022.

•Dificuldades na resolução de problemas básicos de matemática: um estudo de caso do agreste sergipano. periódicos UFPA,2016. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/2571. Acesso em: 29 de jun. de 2023.

•Etnomatemática: estudos propõem novas abordagens para o ensino da disciplina. PUCRS,2022. Disponível em: https://www.pucrs.br/blog/etnomatematica/. Acesso em: 29 de jun. de 2023.

•EUCLIDES. Os elementos:Euclides. tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

•EVES, Howard Whitley. Introdução à história da matemática. Unicamp, 1995.

•FARIAS, Marcelo Luís de . O uso da tecnologia da informação pelo professor de matemática no ensino de Geometria. Repositorio da UFSM, Santa Maria, 2011.

•FERREIRA, Elsa Maria Barrigão. ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA EM AMBIENTES GEOMÉTRICOS DINÂMICOS: O tema de Geometria do Plano no 9º ano de escolaridade. Repositorio da Universidade do Minho, 2005.

•Geometria - Aula 66 - Teorema de Ceva. Disponivel em: `https://youtu.be/FUQesA0-NwY`, Acesso em: 30 de jun. de 2023, 2014.

•Geometria Plana(AFA -1998). tutor brasil,2012. Disponível em: `https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=21519`. Acesso em: 14 de mai. de 2023.

•Geometria Plana(Escola Naval - 2012) . tutor brasil,2012. Disponível em: `https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=26796`. Acesso em: 15 de mai. de 2023.

•GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; DA SILVA, Carmen Kaiber; MORA, Castor David. Perspectivas em Educação Matemática/Perspectives in Mathematics Education. Acta Scientiae, v. 6, n. 1, p. 37-56, 2004.

•JUNIOR, Romualdo Santos Silva. Uma proposta de ensino de geometria planano ensino fundamental: a matemática presente no cotidiano dosestudantes. Society and Development, v. 9, n.7, e143973931, RIO GRANDE DO SUL, 2020.

•LIMA, Juliana Miguel Paterno. A importância da sequência didática para a aprendizagem significativa da matemática. Revista Artigos. Com, 2, e829https://acervomais.com.br/index.php/artigos/article/view/829, são Paulo, 2019.

•LOPES, Ana Carolina; MARASINI, Sandra Mara. O USO DE SITUAÇÕES PROBLEMA PELOS PROFESSORES MUNICIPAIS DE MATEMÁTICA DE LAGOA VERMELHA/RS.

•LORENZATO, Sergio.POR QUE NA0 ENSINAR GEOMETRIA?. UNICAMP IN:a educação matemática em revista.Blumenau: SBEM, ano III, N. 4, Campinas , 1995.

•MACEDO, Darilene Maria Ribeiro. Resgatando alguns teoremas clássicos da Geometria Plana. 2014.

•MONTEIRO, Jair Curcino; CASTILHO, Weimar Silva; DE SOUZA, Wallysonn Alves. SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO INSTRUMENTO DE PROMOÇÃO DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica , v. 9, n. 01 de 2019.

•NACIONAIS, INTRODUÇÃO AOS PARÂMETROS CURRICULARES. terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC-Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

•NOGUEIRA, Leandro Teles et al. Aplicação de alguns teoremas na resolução de problemas geométricos. 2016.

•OLIVEIRA, Marcelo Mendes de. Teorema de Menelaus e Ceva-nivel II. Disponivel em: marcelom@lia.ufc.br,acesso em:29 de jun. de 2023

•O uso da tecnologia no ensino da Matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau. Revista Educação Publica,2021. Disponível em:https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o-uso-da-tecnologia-no-ensino-da-matematica-contribuicoes-do-isoftwarei-geogebra\textbf{\textbf{}}-no-ensino-da-funcao-do-1-grau, Acesso em: 13 de maio de 2023

•PAIVA, REB; ALVES, FRANCISCO REGIS VIEIRA. Redescobrindo Ceva e Menelaus em dimensão três. XI Seminário Nacional de História da Matemática, p. 1-11, 2015.

•PAIS, Luiz Carlos. Ensinar e aprender matemática. Autêntica, 2018.

•PEREIRA, Marcos Fabrício Ferreira. Uma Sequência Didática para o ensino de Semelhança de Figuras Planas. EBRAPEM, Curitiba, 2016.

•PERETTI, Lisiane e TONIN DA COSTA, Gisele Maria. SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA MATEMÁTICA. Revista de educação do IDEAU Vol. 8 – Nº 17, 2013.

•PIASESKI, CLAUDETE MARIA . A GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL. Repositorio da URICER, ERECHIM, 2010.

•POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: interciência, v. 2, p. 12, 1978.

•PROENÇA, Marcelo Carlos de; Maia-Afonso, Érika Janine; Mendes, Luiz Otavio Rodrigues; Travassos, Wilian Barbosa.Dificuldades de Alunos na Resolução de Problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. UNESP, RIO CLARO, 2022.

•ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro e Pedroso, Sandra Mara. O ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇAO BÁSICA: REALIDADE E POSSIBILIDADES. Repositorio da Universidade do Minho, 2007.

•SANTOS, Claudimar Abadio dos. A historia da matemática como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Repositorio da PUCSP, são Paulo, 2007.

•SANTOS, Jhonata Avelar dos; Freitas, Pedro Victor S.; Junior, GilsonS.Ferreira; Tanaka, Thiago Yukio. Explorando os teoremas de Menelaus e Ceva em questões de olimpíadas de matemática. Editora UNESP, São Paulo, pp. 97-115, 1999.

•SANTOS JÚNIOR, Clóvis Lisbôa dos. Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: uma proposta à produção de significados no estudo de Geometria. 2020. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

•Sequência didática: guia para a elaboração e execução.e.docente,2019. Disponível em:`https://edocente.com.br/sequencia-didatica-para-educacao-basica/`. Acesso em: 29 de jun. de 2023.

•SILVA, José Constantino da . Os Teoremas de Menelaus e Ceva. Repositorio da UFRPE, Recife,Ago. de 2015.

•SILVA, Max Deyvis Lesseski da. Geometria euclidiana: ensino e aplicações. Repositorio da UFMS, Campo Grande, 2014.

•SOUZA, Gil Fidelix de; DA CRUZ, Breno Arcanjo Fernandes; FERREIRA, Geraldo César Gonçalves. Demonstrações dos Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues no Plano de Argand-Gauss. Revista de Matemática, v.3, n.03, p.1-21, 2022.

•Teorema de Ceva-Aula 9.`https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/15481016022012Geometria_Eucliadiana_Plana_Aula_9.pdf`

•Teorema de Menelaus e problemas de colinearidade. Polos Olímpicos de Treinamento,2018. Disponível em: `http://www.mat.ufpr.br/poti/documentos/2018/material/Aula\%2008\%20-\%20Teorema\%20de\%20Menelaus.pdf`. Acesso em: 14 de mai. de 2023.

•Teoremas de Ceva e Menelaus – Nível 2. Olimpiada brasileira de matematica,2017. Disponível em: `https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/menelCeva.pdf`. Acesso em: 13 de mai. de 2023.

•UBIRATAN, D'Ambrosio . A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: QUESTÕES

HISTORIOGRÁFICAS E POLÍTICAS E REFLEXOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Editora UNESP, São Paulo, pp. 97-115, 1999.

8 Anexo

Escola: ____

Professor (a): ____

Aluno: ____

Turma: ____

Sequência didática de matemática

Aplicação dos teoremas de Menelaus de Ceva nas resoluções de problemas geométricos

Introdução

Introduzir ao repertório dos alunos mais um instrumento para resolução de problemas geométricos.

Objetivos da aprendizagem:

Que os alunos possam reconhecer em quais situações problemas os teoremas podem ser aplicados e que sejam capazes de aplica-los.

Desenvolvimento

Atividade 1: Um breve histórico sobre a história da matemática será apresentado por meio de vídeos. Posteriormente será feita uma breve revisão sobre tópicos essências para a compreensão dos teoremas. Duração: 2 horas (ou 2 aulas)

Atividade 2: Um breve histórico em torno dos teoremas será apresentado aos alunos e posteriormente serão feitas as demonstrações dos teoremas e em seguida o software geogebra é usado. Duração: 2 horas (ou 2 aulas)

Atividade 3: A sala será organizada em pequenos grupos para reconhecimento de figuras e exercícios que os teoremas são aplicados serão resolvidos como exemplo. Duração: 2 horas (ou duas aulas)

Atividade 4: Será aplicado um teste com o intuito de verificar o quão os alunos compreenderam os teoremas: Duração: 2 horas (ou 2 aulas)

Fechamento: uma roda de conversa será formada para a discussão sobre os teoremas e perguntado aos alunos se realmente compreenderam os teoremas e se eles realmente facilitam as resoluções de problemas geométricas.

Atividade proposta como teste avaliativo

1. (AFA 1998) Na figura abaixo o perímetro do $\triangle ABC$ equilátero é $72cm$. M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{CE} = 16cm$. Então a medida do segmento $\overline{CN}$, em cm, é um sétimo de?

2. (Escola naval 2012) O triângulo da figura abaixo é equilátero, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ e $\overline{CD} = 6$. A área do $\triangle MAE$ vale?

3. (POT-Aula 8/2012)A bissetriz $\overline{AD}$ de um $\triangle ABC$ divide o lado $\overline{BC}$ na razão 2:1. Determine a razão em que a mediana $\overline{CE}$ divide a bissetriz.

4. (UFS, aula 09, teorema de Ceva) Se um triângulo possui duas medianas congruentes, então ele é isósceles.

5. (Semana Olímpica – Janeiro/2001 – Salvador, Nível ll) Os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD} e \overline{DA}$, de um quadrilátero são cortados por uma reta nos pontos K, L, M e N respectivamente, prove que:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \times \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = 1$$

Soluções da atividade proposta

1. Sendo $\triangle ABC$ equilátero, tem-se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 24cm$.

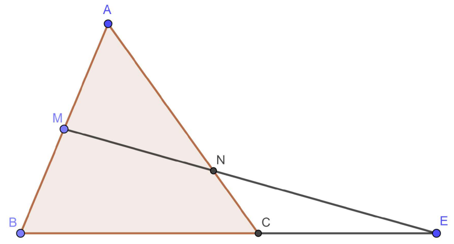


Figura 20: Autores

Como $M = \frac{\overline{AB}}{2}$, tem-se $\overline{AM} = \overline{MB} = 12cm$. Usando o teorema de Menelaus;

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1 \Rightarrow \frac{12}{12} \times \frac{40}{16} \times \frac{\overline{CN}}{(24 + \overline{CN})} = 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \times \frac{CN}{(24 - \overline{CN})} = 1$$

$$\Rightarrow 5\overline{CN} = 48 - 2\overline{CN} \Rightarrow 7\overline{CN} = 48 \Rightarrow \overline{CN} = \frac{48}{7} \Rightarrow \overline{CN} = \frac{1}{7} \times 48$$

2. Temos,

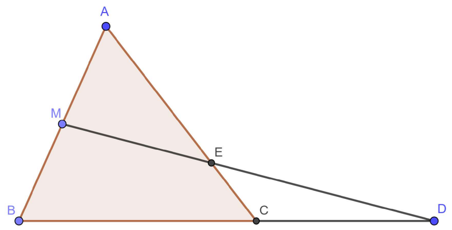


Figura 21: Autores

Aplicando o teroema de Menelaus, temos,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \Rightarrow \frac{5}{5} \times \frac{16}{6} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \Rightarrow \frac{8}{3} \times \frac{\overline{CE}}{EA} = 1$$

$$\Rightarrow 8\overline{EC} = 30 - 3\overline{EA} \Rightarrow 8\overline{EC} = 3(\overline{AC} - \overline{CE}) \Rightarrow 8\overline{EC} = 3(10 - \overline{CE})$$

$$\Rightarrow 8\overline{EC} = 30 - 3\overline{CE} \Rightarrow 11\overline{EC} = 30 \Rightarrow \overline{EC} = \frac{30}{11} \Rightarrow \overline{AE} = 10 - \frac{30}{11} = \frac{80}{11}$$

Tem-se, $\overline{AM} = 5$, $\overline{EA} = \frac{80}{11}$ lados do $\triangle AME$. Sendo o $\triangle AME$ equilátero, $\hat{A} = 60°$, Portanto

$$A = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{80}{11} \times sen 60° = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{80}{11} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{200\sqrt{3}}{11}.$$

3. Observe,

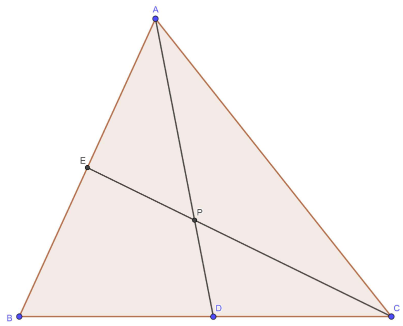


Figura 22: Autores

Podemos aplicar o teorema de Menelaus no $\triangle ABD$ em relação a $\overline{CE}$.

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = 1$$

Como $\overline{CE}$ é mediana e $\overline{AB}$ e $2\overline{BD} = \overline{DC}$, tem-se que:

$$1 \times \frac{\overline{BD} + \overline{BC}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{BD} + 2\overline{BD}}{2\overline{BD}} \times \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3\overline{BD}}{2\overline{BD}} \times \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{2}{3}$$

4. Observe que,

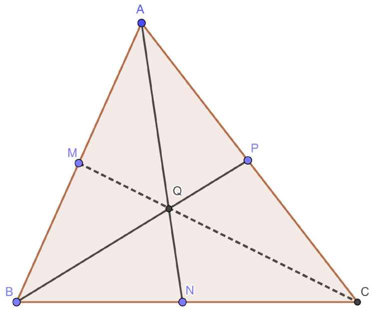


Figura 23: Autores

Sejam $\overline{AN}$ e $\overline{BP}$ medianas relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ respectivamente, traçemos $\overline{MC}$ tal que, $\{Q\} = \overline{AN} \cap \overline{BP} \cap \overline{MC}$. Aplicando o teorema de Ceva, temos;

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times 1 \times 1 = 1 \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1 \Rightarrow \overline{MA} = \overline{MB}$$

ou seja, $\overline{MC}$ tambem é mediana.

$\overline{AN} = \overline{BP}$(Medianas congruentes) $\Rightarrow \overline{AQ} = 3\overline{QN}$, $\overline{BQ} = 3\overline{QP}$, $\overline{CQ} = 3\overline{QM}$

$$\begin{cases} \overline{AM} = \overline{AQ} + \overline{QN} \\ \overline{BP} = \overline{BQ} + \overline{QP} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AQ} + \overline{QN} = \overline{BQ} + \overline{QP} \\ 3\overline{QN} + \overline{QN} = 3\overline{QP} + \overline{QP} \\ 4\overline{QN} = 4\overline{QP} \\ \overline{QN} = \overline{QP} \end{cases}$$

$\overline{AQ} = 3\overline{QN} \Rightarrow \overline{AQ} = 3\overline{QP} \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{QB}$

$$\begin{cases} \overline{QN} = \overline{QP} \\ \overline{AQ} = \overline{QB} \end{cases} \Rightarrow \overline{BQ} = \overline{QC} \Rightarrow 3\overline{QP} = 3\overline{QM} \Rightarrow \overline{QP} = \overline{QN}$$

Como os triângulos AQB e AQC são isósceles, $\overline{QM}$ e $\overline{QP}$ são suas respectivas alturas, (perpendiculares aos seus respctivos lados). Daí o triângulo $\overline{MQB} \equiv \overline{AQP}(\overline{MQ} = \overline{QP}, \overline{AQ} = \overline{BQ})$, critério de congruência do triângulo retângulo. De forma análoga

$\triangle AMQ \equiv \triangle PQC \Rightarrow \overline{MB} = \overline{AP}, \overline{AM} = \overline{DC} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$.

5. Primeiro temos,

Traçando os segmentos $\overline{DL}$ e $\overline{BM}$ e sendo F o ponto de interseção dos segmentos, podemos aplicar o teroema de Menelaus ao triângulo DLC em relação ao $\overline{BM}$.

$$\frac{\overline{MD}}{MC} \times \frac{BC}{BL} \times \frac{FL}{FD} = 1$$

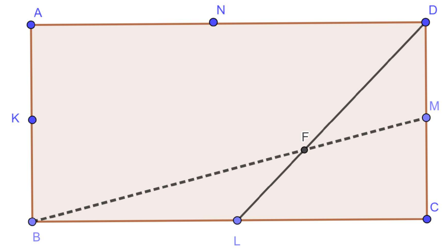


Figura 24: Autores

De forma análoga, sendo P a interseção de $\overline{AL}$ e $\overline{RC}$ aplicamos o teroema de Menelau.

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{PL}}{\overline{PA}} = 1$$

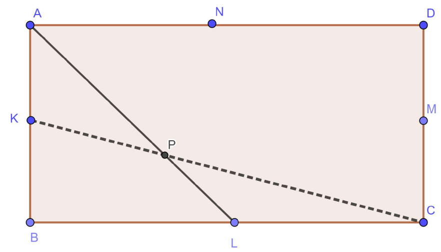


Figura 25: Autores

Podemos aplicar o teroema de Menelaus em mais duas situações no quadrado. No triângulo BAN em relação a $_{\overline{BD}}$, com S sendo a intereseção de $\overline{BN}$ e $\overline{KD}$

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KA}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{ND}} \times \frac{\overline{SN}}{\overline{SB}} = 1.$$

Ao triângulo CDN em relação a $\overline{MA}$ com interseção em T

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MD}} \times \frac{\overline{DA}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{TN}}{\overline{TC}} = 1.$$

Manipulando toas as igualdades encontradas, obtemos;

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BL}} \times \frac{\overline{FL}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{FL}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{PL}}{\overline{PA}}$$

$$= \frac{\overline{KB}}{\overline{KA}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{ND}} \times \frac{\overline{SN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MD}} \times \frac{\overline{DA}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{TN}}{\overline{TC}} = 1.$$

Manipulando os três primeiros termos em relação ao último, temos;

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \times \frac{\overline{BN}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = 1.$$

Exemplos da aplicação dos teoremas da sequencia didatica

1. Temos,

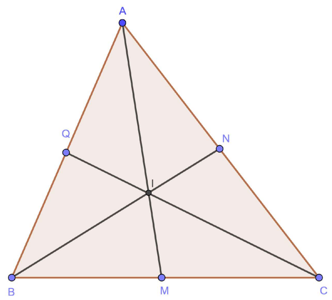


Figura 26: Autores

Como são medianas temos, $\overline{AQ} = \overline{QB}, \overline{MB} = \overline{MC}, \overline{MC} = \overline{NA}$. Portanto

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$$

Logo, pelo teorema de Ceva, as medianas se intersectam em um mesmo ponto.

2. Observe que:

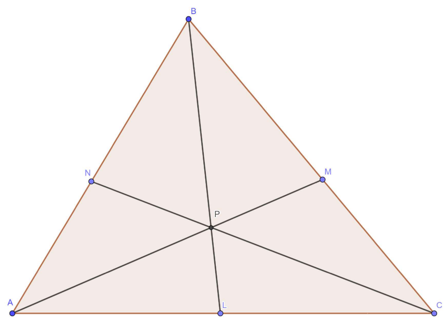


Figura 27: Autores

Aplicando o teorema de Menelaus no $\triangle ABL$ em relação ao $\overline{NC}$ obtemos

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{PL}}{\overline{PA}} = 1.$$

Aplicando o teorema de Ceva no $\triangle ABC$ obtemos

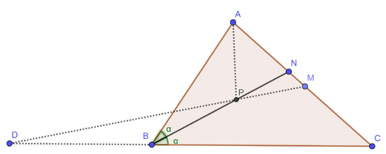
$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \times \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \times \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1.$$

Dai,

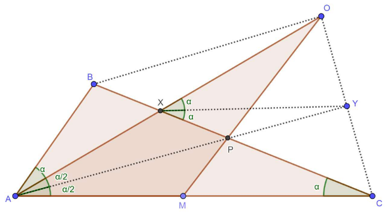
$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{PL}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}\times\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}\Rightarrow\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{PL}}{\overline{PA}}\Rightarrow\frac{\overline{PL}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}\times\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AP}}{\overline{PL}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{CM}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{BL}}$$

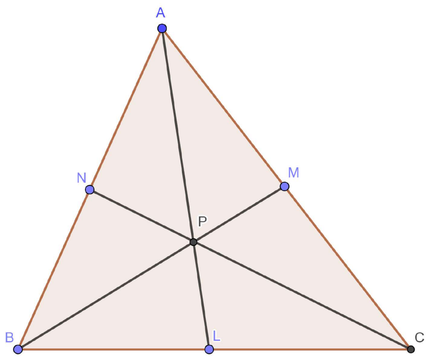
Figuras utilizadas como exemplos da sequência didática



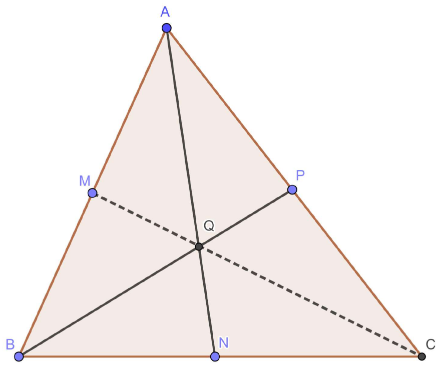
(a) Exemplo 1 de Menelaus



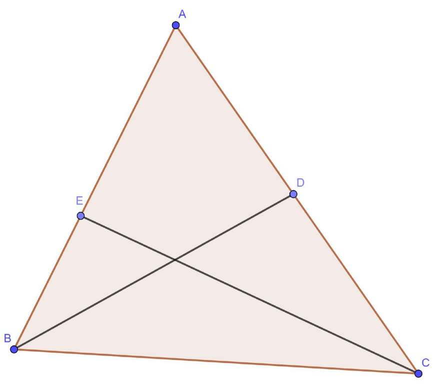
(b) Exemplo 2 de Menelaus



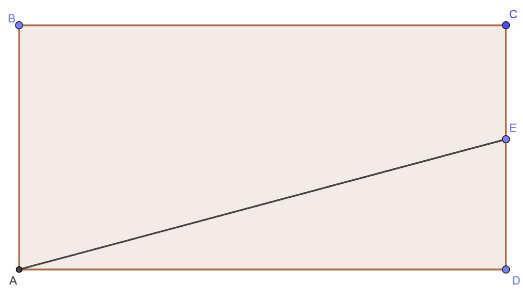
(a) Exemplo 1 de Ceva



(b) Exemplo 2 de Ceva



(a) Exemplo para o anexo 01



(b) Exemplo para o anexo 02

Fonte: Autores