UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
CAMPUS POETA TORQUATO NETO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSIMÁRIA FERREIRA CARNEIRO
MARIA CRISTIELE CUNHA DE SOUSA

APLICAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES DE ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM AMBIENTES DIVERSOS.

TERESINA - PI
2023

JOSIMÁRIA FERREIRA CARNEIRO
MARIA CRISTIELE CUNHA DE SOUSA

APLICAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES DE ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM AMBIENTES DIVERSOS.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Estadual do Piauí, como requisito necessário para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Afonso Norberto da Silva

TERESINA - PI

2023

C289a Carneiro, Josimária Ferreira.
Aplicação de áreas e volumes de alguns sólidos geométricos em ambientes diversos / Josimária Ferreira Carneiro, Maria Cristiele Cunha de Sousa. – 2023.
68 f. : il.

Monografia (graduação) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Licenciatura em Matemática, *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2023.
"Orientador: Prof. Dr. Afonso Noberto daa Silva."

1. Geometria espacial. 2. Área. 3. Volumetria. 4. Problemas aplicados. I. Sousa, Maria Cristiele Cunha de. II. Título.

CDD: 516.23

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Francisca Carine Farias Costa (Bibliotecária) CRB-3ª/1637

GOVERNO DO ESTADO DO PIAUÍ
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA- CCN
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
REGIME REGULAR – CAMPUS "POETA TORQUATO NETO"

ATA DE APRESENTAÇÃO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 21 dias do mês de novembro de 2023 às 16:30 horas , no ANFITEATRO do CCN do Campus do Campus Torquato Neto, UESPI, na presença da Banca Examinadora, presidida pelo(a) professor(a) Alonso Norberto da Silva e composta pelos seguintes membros: 1) Raimundo Nonato Rodrigues; 2) Edivan Alano Luiz e aluno(a) Josimária Ferreira Carneiro apresentou o Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática como elemento curricular indispensável à Colação de Grau, tendo como título: APLICAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES DE ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM AMBIENTE DIVERSOS . A Banca Examinadora reunida em sessão reservada deliberou e decidiu pelo resultado (aprovado ou Reprovado) APROVADO ora formalmente divulgado ao aluno e aos demais participantes, e eu professor(a) Raimundo Nonato Rodrigues na qualidade de professor Titular da disciplina de TCC lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos membros da Banca Examinadora e pelo(a) aluno(a) Josimária Ferreira Carneiro apresentador(a) do trabalho.

OBS: 8.5

Assinaturas:

1 – Professor Titular da disciplina TCC

Raimundo Nonato Rodrigues

2 - Presidente da Banca Examinadora

Alonso Norberto da Silva

3 – Membro da Banca

Edivan Alano Luz

4 – Aluno(a) Josimária Ferreira Carneiro

Rua João Cabral, 2231 – Bairro Pirajá – Cep: 64.002-150 – Teresina – Piauí
Fones: (86) 3213-7524 Ramal: 259 / E-mail: coordenacaodematematica@ccn.uespi.br

ATA DE APRESENTAÇÃO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 21 dias do mês de novembro de 2023 às 16:30 horas , no ANFITEATRO do CCN do Campus do Campus Torquato Neto, UESPI, na presença da Banca Examinadora, presidida pelo(a) professor(a) Afonso Norberto da Silva e composta pelos seguintes membros: 1) Raimundo Nonato Rodrigues; 2) Edivan Alano Luiz e aluno(a) Maria Cristiele Cunha de Sousa apresentou o Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática como elemento curricular indispensável à Colação de Grau, tendo como título: APLICAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES DE ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM AMBIENTE DIVERSOS . A Banca Examinadora reunida em sessão reservada deliberou e decidiu pelo resultado (aprovado ou Reprovado) APROVADO ora formalmente divulgado ao aluno e aos demais participantes, e eu professor(a) Raimundo Nonato Rodrigues na qualidade de professor Titular da disciplina de TCC lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos membros da Banca Examinadora e pelo(a) aluno(a) Maria Cristiele Cunha de Sousa apresentador(a) do trabalho.

OBS: 8,5

Assinaturas:

1 – Professor Titular da disciplina TCC

Raimundo Nonato Rodrigues

2 - Presidente da Banca Examinadora

Afonso Norberto da Silva

3 – Membro da Banca

Edivan Alano Luz

4 – Aluno(a) Maria Cristiele Cunha de Sousa

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, por nos permitir chegar até aqui sempre nos dando forças, aos familiares: Zilmar Ferreira, Josimar Santos Carneiro, Isabel Cristina Cunha, Antonio das costas Sousa, Maria Crislaine Cunha Sousa, Maria Crislenilde Cunha Sousa, Francisco Elcione Cunha Sousa, Jhoária Ferreira Carneiro e Josanne Tarcília Ferreira Carneiro pelos estímulos, apoio incondicional em todos os momentos.

Ao nosso orientador professor Dr. Afonso Norberto da Silva, por toda orientação e apoio ao longo deste trabalho. E a todos os professores do curso de matemática do Campus Poeta Torquato Neto que desempenham com dedicação as aulas ministradas.

Agradecemos a todos os colegas e amigos do curso, e as pessoas que passaram em nossa jornada, em especial, Maria da Cruz vieira da Silva, pela amizade e por sempre me apoiar em todos os momentos durante o curso e William Fernando por ter sido a voz dos graduandos durante sua estadia.

Agradecemos de forma especial a Maria Cristiane cunha Sousa, pelo apoio, incentivo, dedicação e orientação durante todo o curso e elaboração do trabalho.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um desenvolvimento gradual do estudo sobre áreas e volumes de alguns sólidos e presentes aplicações expostas em situações do cotidiano. Sobre este tema, foi feito uma pesquisa de caráter bibliográfico, apresentando o conceito de volume e dos principais sólidos geométricos bem como as demonstrações das suas respectivas fórmulas para o cálculo de área e volume com o objetivo de facilitar o entendimento delas. Procuramos trabalhar aplicações de área e volumes de alguns sólidos geométricos em situações cotidianas para o alcance do objetivo, ao propormos e resolvermos alguns problemas contextualizados abordando diferentes situações do dia a dia. Constatou-se que os objetivos foram alcançados, ao dar ênfase no tratar do desenvolvimento e ao utilizar-se de habilidades matemáticas relacionadas a situações do dia a dia.

Palavras-chave: Sólidos geométricos; Volumes e Áreas; Problemas aplicados.

ABSTRACT

The present work presents a gradual development of the study on areas and volumes of some solid and present applications exposed in everyday situations. On this subject, bibliographic research was carried out, presenting the concept of volume and the main geometric solids as well as the demonstrations of their respective formulas for the calculation of area and volume in order to facilitate their understanding. We seek to work on area and volume applications of some geometric solids in everyday situations to achieve the objective, by proposing and solving some contextualized problems addressing different everyday situations. It was found that the objectives were achieved by emphasizing the treatment of development and by using mathematical skills related to everyday situations.

Keywords: Geometric solids; Volumes and Areas; Applied problems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria surgiu de necessidades práticas do uso do espaço para construções e demarcações, da utilização das formas geométricas com grande riqueza e variedades. Boyer (1974, p.5). Percorre a história em diferentes atividades, como a utilização no desenvolvimento em atividades na engenharia, arquitetura, agricultura, artes, entre outros. Assim, a importância da geometria é inegável, tanto sob o ponto de vista prático quanto do aspecto instrumental da organização do pensamento. Além de ser de grande importância no apoio - como, por exemplo, nos conceitos de medições, no entendimento da engenharia civil, pintura artística, como na arquitetura, colabora também no esclarecimento de situações abstratas, facilitando a comunicação da ideia matemática presente no dia a dia. À vista disso, a importância da geometria também se dá pelo fato de se estar cercado por ela no dia a dia, mesmo que algumas pessoas não percebam que ela está presente em suas vidas. Howard Evens (2011, p.90-93).

Desse modo, o presente trabalho busca mostrar aplicações práticas do uso da geometria espacial em cálculos de áreas e volumes. Como visto no exercício 1 das aplicações, temos como exemplo a aplicação do uso da área da superfície do cilindro para o cálculo do orçamento de uma obra, que é capaz de mostrar o uso dos conceitos geométricos espaciais como ferramenta para solução de problemas práticos presentes no dia a dia.

Dada a importância no dia a dia, o domínio desse conteúdo deve ser estimulado através de pesquisas que mostram suas aplicações em diversos ambientes. Neste sentido, desenvolvemos um estudo sobre o seguinte tema da geometria espacial: aplicabilidade de áreas e volumes de sólidos no cotidiano.

Considerando o tema apresentado acima, foi definido como objetivo geral analisar as aplicações da geometria espacial investigando como alguns desses conceitos são utilizados para resolver problemas práticos do cotidiano.

Isto posto para alcance do objetivo principal traçou-se os seguintes objetivos específicos: apresentar a definição de alguns sólidos geométricos; apontar a demonstração de como obter as fórmulas de áreas e volumes dos sólidos geométricos apresentados; evidenciar aplicações de áreas e volumes presentes nas diversas situações do dia a dia que exigem o melhor entendimento de fórmulas geométricas espaciais.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos, além da introdução e considerações finais. Para melhor entendimento foram assim organizados: no primeiro capítulo é apresentado os aspectos históricos e destacada algumas noções elementares da geometria plana e espacial e alguns conceitos inerentes ao tema; e o segundo capítulo aborda o conceito de volume de um sólido geométrico, apresenta a demonstração da expressão do cálculo de volume de um bloco retangular cujas arestas são números racionais e irracionais e também destaca intuitivamente o Princípio de Cavalieri; já o terceiro, trata sobre a definição de alguns dos principais sólidos geométricos, como também traz as demonstrações de algumas expressões de cálculo de área e volume dos sólidos definidos; e por fim, o quinto descreve as aplicações com intuito de demonstrar a contribuição da geometria espacial na resolução de alguns problemas envolvendo área e volume em um contexto prático.

2 ASPECTOS HISTÓRICO E NOÇÕES ELEMENTARES DA GEOMETRIA ESPACIAL

A geometria não possui um ponto de partida claro para sua origem, uma vez que há diversas perspectivas sobre o assunto. Entretanto, segundo Carl Benjamin Boyer (1974, p.4) o historiador Heródoto e o filósofo Aristóteles em seus estudos utilizam as civilizações egípcias como origem mais antiga. Heródoto afirmava que a geometria teve seu marco inicial no Egito, surgindo da necessidade de fazer novas medidas de terra, visto que ocorriam inundações anuais nas margens do rio Nilo, terreno mais fértil do norte da África e Oriente Médio, onde se estabelecia a agricultura, que era a principal fonte econômica do Egito Antigo. Por outro lado, Aristóteles argumentava que a dedicação aos estudos e ao lazer das classes sociais ricas foi a razão do surgimento dela.

De modo geral, segundo estudos e análises de objetos da época, na pré-história já se fazia uso da geometria, porém não há documentos que comprovam o seu desenvolvimento. Desta forma, é mais usual tomar o Egito como ponto de partida do surgimento da geometria. Há muitos relatos sobre relações geométricas conjecturadas nas dimensões da Grande Pirâmide (Pirâmide de Quéops). Boyer (1974, p.9-15) em seu livro*, A história da Matemática* cita alguns escritos egípcios, como o Papiro Rhind, Papiro Ahmes e Papiro de Moscou, que possuem problemas práticos envolvendo geometria, em especial o cálculo do volume de um sólido, no caso específico, o volume do tronco de uma Pirâmide. Vale ressaltar que os egípcios além de calcular volume, também sabiam fazer cálculos da área de sólidos.

Desde tempos remotos, acredita-se que os gregos buscaram conhecimento sobre geometria no Egito. Atualmente, em livros didáticos, pode-se encontrar referência a essa perspectiva de pensamento, exemplificando, o livro *A conquista da Matemática: 6° ano* de

José Ruy Giovanni introduz uma unidade trazendo esse fato como uma curiosidade. Já o autor Boyer (1974, p.16) afirma que de fato, há chances de que os gregos emprestaram dos egípcios alguma matemática elementar, entretanto, existe um possível exagero acerca do empréstimo mencionado.

De acordo com estudos, as civilizações antigas da Mesopotâmia designadas babilônias, continham tabletas em escrita cuneiforme que possuíam diversas informações matemáticas utilizadas na época. E ainda, para essas civilizações a geometria se originou da prática, isto é, da necessidade de cálculos para demarcação de terras, eles calculavam área e volumes de sólidos como tronco de cones e pirâmides, paralelepípedo reto-retângulo e prisma reto de base trapezoidal, embora o cálculo do volume de alguns dos sólidos citado eram feitos incorretamente. Howard Evens (2011, p.60 e 61).

Em suma, as civilizações mais antigas como a egípcia, babilônica entre outras beneficiaram outras civilizações entre elas a grega, contribuindo para o desenvolvimento da matemática em especial na área geométrica.

2.1 Noções Elementares de geometria Espacial

A geometria Espacial é a área da Matemática que faz a análise de objetos tridimensionais, ou seja, objetos geométricos no espaço. Nela estuda-se sólidos geométricos, como os poliedros e os corpos redondos. Para se aprofundar na geometria espacial é importante ter conhecimento dos conceitos primitivos de ponto, reta e plano.

2.1.1 Conceitos de ponto, reta e plano

De maneira convencional, os termos geométricos são estabelecidos por meio de definição. Entretanto, ponto, reta e plano são conceitos primitivos (noções primitivas) da Geometria que não possuem uma definição, são adotados de maneira intuitiva por meio da experiência e observação.

Euclides no livro *I* de O*s elementos* afirma que:

- Ponto é aquilo de que nada é parte, não possui dimensão;
- Linha reta, ou reta, é a linha que está posta por igual com pontos sobre si mesma, é comprimento sem largura, ou seja, possui infinitos pontos colineares que são adimensionais;

- Superfície plana, ou plano é a superfície que está posta por igual com as retas sobre si mesma. Sendo essas retas concorrentes ou paralelas distintas.

O espaço é o conjunto de todos os elementos determinados acima, no qual desenvolve-se a Geometria Espacial. A partir desses conceitos primitivos é possível introduzir a definição de alguns sólidos geométricos.

2.2 Poliedros

A seguir, definiremos o que é um poliedro e demonstraremos a relação de Euler. Para as definições apresentadas, tomamos como referência DOLCE, O & POMPEO.

2.2.1 Poliedro convexo

Considerando um número finito *n* $(n \geq 4)$ de polígonos planos convexos (ou região poligonal convexas) tais que:

a) Dois polígonos não estão em um mesmo plano;
b) Cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
c) O plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço.

Desta forma, ficam determinadas *n* semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semiespaços é chamada de poliedro convexo.

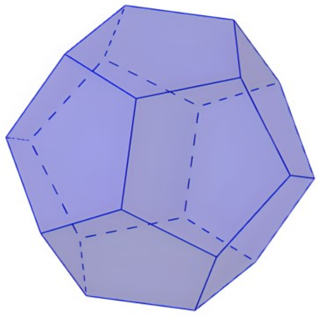
2.2.1.1 Elementos

Os poliedros possuem os seguintes elementos:

- Faces: são polígonos convexos;
- Arestas: são os lados dos polígonos:
- Vértices: são os vértices dos polígonos.

Um poliedro *P* possui um número finito de faces, arestas e vértices. E ainda, a reunião das faces é a superfície do poliedro.

Figura 1: Poliedro.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

2.2.2 Relação de Euler

Teorema (teorema de Euler)**:** *Para todo poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértice, ou para sua superfície, vale a relação*

$$V - A + F = 2$$

Demonstração:

I) Vamos provar inicialmente por indução finita, referente ao número de faces que, para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação:

$$V_i - A_i + F_i = 1$$

onde,

V_i é o número de vértice,

A_i é o número de aresta,

F_i é o número de face da superfície poliédrica limitada aberta.

1) Para $F_i = 1$.

A superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados, logo, n arestas *e* n vértices. Ou seja,

$$V_i = n, A_i = n$$

Daí temos,

$$V_i - A_i + F_i = n - n + 1 = 0 + 1 = 1$$

Portanto, $V_i - A_i + F_i = 1$

Logo, a relação é válida para uma superfície com $F_i = 1$.

2) Supomos que a relação é válida para uma superfície de F' faces, que possui V' vértices e A' arestas, ou seja, vale a relação,

$$V' - A' + F' = 1$$

3) Vamos provar que vale para uma superfície $F_i = F' + 1$ faces.

Note que, por hipótese, a relação $V' - A' + F' = 1$ é válida.

Ao acrescentarmos a essa superfície aberta, uma face de p arestas e considerando que q destas arestas coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_i faces, A_i arestas, V_i vértices tais que,

$F_i = F' + 1$

$A_i = A' + p - q$

$V_i = V' + p - (q + 1)$

Tomando $t = (p - q)$, segue,

$F_i = F' + 1$

$A_i = A' + t$

$V_i = V' + t - 1$

Substituindo os valores obtidos acima na expressão $V_i - A_i + F_i$, tem-se:

$$V_i - A_i + F_i = (V' + t - 1) - (A' + t) + (F' + 1) = V' + t - 1 - A' - t + F' + 1 = V' - A' + F'$$

Note que $V_i - A_i + F_i = V' - A' + F'$, logo provamos que a expressão não se altera ao acrescentarmos ou tirar uma face da superfície, como por hipótese $V' - A' + F' = 1$, vem que,

$$V_i - A_i + F_i = 1$$

O que prova a relação (I).

II) Consideremos a superfície de um poliedro convexo com V vértice, A aresta e F faces, retirando dela uma face, fica então uma superfície aberta para a qual vale a relação (I) . Como,

$V_i = V$, $A_i = A$ e $F_i = F - 1$, segue $V - A + (F - 1) = 1 \Rightarrow V - A + F = 1 + 1 = 2$.

Logo,

$$V - A + F = 2.$$

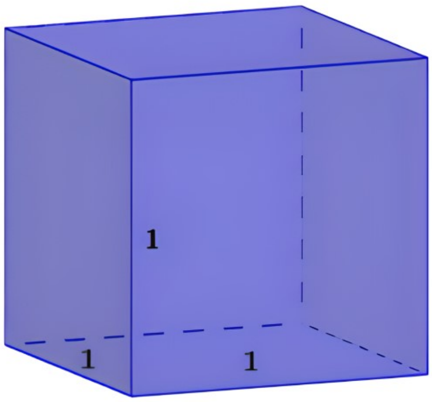
3 VOLUME DE UM SÓLIDO

O volume de um sólido S é a medida do espaço que esse sólido ocupa, ou seja, é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

1) Sólidos congruentes tem volumes iguais;
2) Se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não tem pontos inteiros comuns, então o volume S é a soma dos volumes de S_1 com S_2.

A unidade de medida padrão de volume em geral é o cubo. Assim, o cubo unitário, cuja aresta mede 1 cm (centímetro), seu volume mede 1 cm^3 (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir 1 m (metro), seu volume será 1 m^3 (metro cúbico).

Figura 2: Cubo unitário.



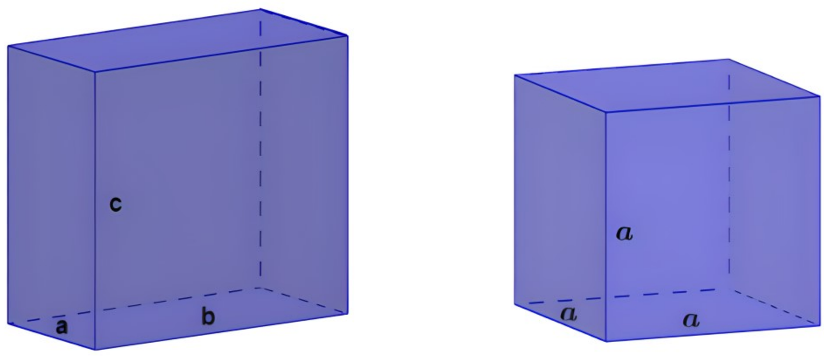
Fonte: Elaborado pelas autoras.

O volume de um sólido S será dado pela quantidade de cubos unitários que cabem em S, ou seja, pelo número que indica a quantidade de cubos unitários que S suporta.

3.1 Volume de um poliedro retangular

Um poliedro retangular é um sólido limitado por seis faces retangulares, cujos lados são chamados de arestas. Pode-se determinar o poliedro ao conhecer as três arestas concorrentes em um único ponto. O cubo é um poliedro retangular cuja medida das arestas são iguais e todas as faces são quadradas.

Figura 3: Poliedro retangular de arestas *a, b, c e* cubo de aresta *a*.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Teorema: *O volume de um cubo C de aresta a é Vc =* a^3*.*

Demonstração: Consideremos um cubo C, cuja aresta mede a unidade, se a é um número inteiro positivo, então podemos decompor o cubo C em a^3 cubos unitários justapostos, logo o volume de C é a^3.

Suponha agora que a é um número racional, tal que $a = \frac{1}{q}$, onde q é um número inteiro positivo, se decompormos cada aresta de um cubo unitário em q partes iguais teremos q^3 cubos justapostos de aresta $\frac{1}{q}$. Assim, temos que cada cubo com aresta de medida $\frac{1}{q}$, tem volume igual a $\frac{1}{q^3}$, isto é , $(\frac{1}{q})^3$.

Quando dado um cubo C cuja aresta tem como medida o número racional a, tal que $a = \frac{p}{q}$, podemos decompor cada uma de suas arestas em p partes iguais, cada uma delas terá como comprimento $\frac{1}{q}$. Deste modo, o cubo ficará dividido em p^3 cubos justapostos, cada um dos quais tem aresta medindo $\frac{1}{q}$, consequentemente, o volume de cada cubo menor é $\frac{1}{q^3}$. Portanto o volume de C será,

$$Vc = p^3 . \frac{1}{q^3} = \frac{p^3}{q^3} = (\frac{p}{q})^3$$

Logo Vc = $(\frac{p}{q})^3$.

Assim, podemos afirmar que, o volume de um cubo C cuja aresta tem medida um número racional a é igual a a^3.

Considerando o ponto de vista prático, não é possível, através de medidas diretas, obter um número irracional como medida de uma aresta. Entretanto, sob o ponto de vista teórico podemos encontrar números irracionais e obter valores aproximados a irracionais.

Deste modo, iremos provar que, o volume de um cubo C, o qual a aresta é um número irracional a é igual a a^3, ou seja, $V_c = a^3$.

Seja um x qualquer, tal que $x < a^3$. Existe um número racional r de modo que $r < a$ tão próximo de a quanto desejamos, isto é, $x < r^3 < a^3$. Então o cubo C de aresta a, contém um cubo Q, cuja aresta é o número racional r, segue-se que $V_Q < V_c$. Tendo em vista que o volume de Q é r^3, pois r é racional, concluímos que $r^3 < V_c$ e portanto, $x < V_c$.

Analogamente, tome qualquer $y > a^3$. Existe um s racional, tal que $s > a$ tão próximo de a que $a^3 > s^3 > y$. Então o cubo C de aresta a está contido em um cubo Q_2 de aresta s racional, assim $V_c < V_{Q_2} < y$, logo $V_c < y$. Portanto $V_c = a^3$.

Teorema: *O volume de um paralelepípedo retângulo P (a, b, c) de dimensões a, b e c é* $V_P = abc$.

Demonstração: Considere P(a, b, c) um poliedro retângulo cuja arestas medem a, b e c, denotamos o volume de P por V_P. Suponhamos que as medidas das arestas sejam números racionais tais que, $a = \frac{x}{q}$, $b = \frac{y}{q}$ e $c = \frac{z}{q}$, onde x, y , z e q são números inteiros positivos. Ao decompormos as arestas a, b e c em respectivamente x, y e z segmentos de comprimento $\frac{1}{q}$, temos que o paralelepípedo P ficará decomposto em x, y e z cubos justapostos de aresta $\frac{1}{q}$ e volumes $\frac{1}{q^3}$ cada. Logo,

$$V_P = xyz\ \frac{1}{q^3} = \frac{x}{q}\ \frac{y}{q}\ \frac{z}{q}\ .$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo P(a, b, c) onde a, b e c são racionais é dado pelo produto de suas dimensões, ou seja, $V_P = abc$.

Consideremos agora P(a, b, c) um paralelepípedo retangular com arestas a, b, c quaisquer. Seja x tal que $x < abc$, existe números racionais m, n, p de modo que $m < a$, $n < b$ e $p < c$ de tal forma que $x < mnp < abc$. Logo, o paralelepípedo P(a, b, c) contém o paralelepípedo Q cujas arestas medem m, n e p. Assim, $V_P > V_Q = mnp > x$, ou seja $V_P > x$.

Tomemos agora um y qualquer, tal que $y > abc$. Podemos encontrar números racionais r, s e t, tais que $r > a$, $s > b$ e $t > c$ tão próximo de a, b e c quanto desejarmos, de forma que $abc < rst < y$. Logo, P (a, b, c) está contido em um paralelepípedo Q_2, cujas arestas medem r, s e t. Portanto, $V_P < V_{Q_2} = rst < y$, ou seja, $V_P < y$.

Assim, se $x < abc < y$ e $x < V_P < y$, então $V_P = abc$.

Logo, o volume de um paralelepípedo retângulo P(a, b, c) de dimensões a, b e c é $V_P = abc$. Tomando como base a face de dimensão a e b, denotando por B a área dessa base e a aresta c sendo a altura h, podemos escrever:

$$V_P = B.h$$

3.2 O Princípio de Cavalieri

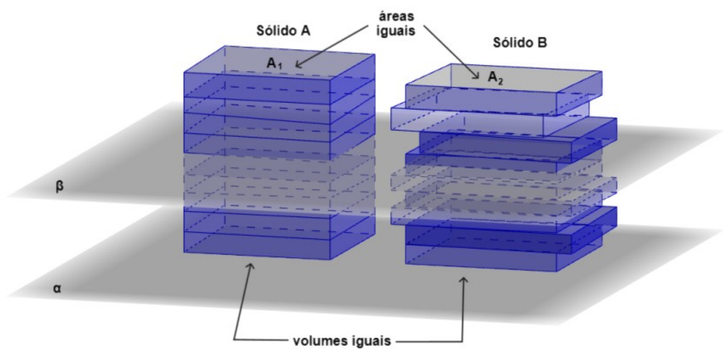
Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão, na Itália, no ano de 1598. Ainda jovem juntou-se à ordem dos jesuados, foi discípulo de Galileu Galilei, tornou-se professor em 1629. Escreveu sobre muitos aspectos da matemática pura e aplicada, com vasto material publicado sobre geometria, trigonometria, astronomia e óptica. No entanto, o livro mais influente que o projetou como um dos grandes matemáticos do século XVII foi *Geometria indivisibilibus continuorum*, publicado em 1635, obra que apareceu o princípio que levou seu nome.

Abordaremos, inicialmente esse princípio de forma intuitiva, supondo a situação a seguir.

Suponhamos a existência de uma coleção finita de chapas retangulares de mesma dimensão e consequentemente, de mesmo volume, perfeitamente arrumado de modo que haja a formação de sólidos A e B de mesmo volume.

Consideremos esses sólidos com base no mesmo plano α e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α. Qualquer plano β, secante aos sólidos A e B, paralelo a α, determina em A e B superfícies equivalentes, conforme ilustra a figura a seguir:

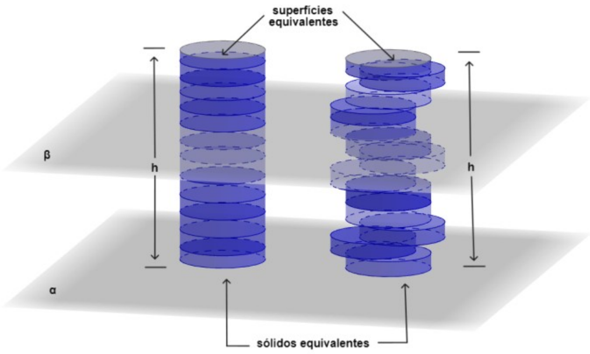
Figura 4: Sólidos A e B (chapas retangulares)



Fonte: DOLCE, O. e POMPEO (2005, p.164)

A mesma ideia pode ser estendida para duas pilhas com igual número de moedas congruentes.

Figura 5: Sólidos de superfícies equivalentes.



Fonte: DOLCE, O. e POMPEO (2005, p.165)

O fato que acabamos de caracterizar intuitivamente é formalizado pelo princípio de Cavalieri.

Teorema (Princípio de Cavalieri): *Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes) são sólidos de volume iguais (sólidos equivalentes).*

4 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

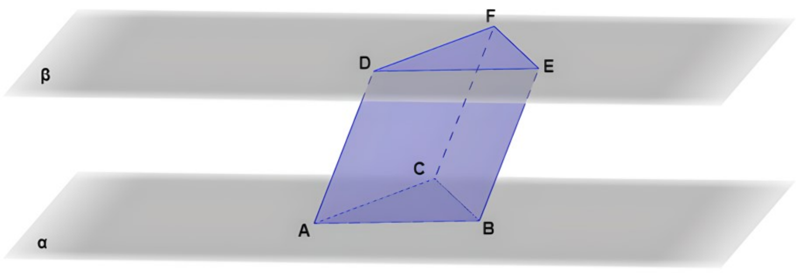
Sólidos Geométricos são figuras geométricas que possuem três dimensões, entres elas, as mais conhecidas são: prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera. O que segue, tomamos como referência DOLCE, O & POMPEO e MACHADO.

4.1 Prisma

Definição 1. Denominamos *prisma* a todo poliedro convexo em que:

1) Há duas faces (chamadas de base) que são polígonos congruentes contidos em planos paralelos distintos; e
2) As demais faces (chamadas faces laterais) são paralelogramos determinados por pares de lados correspondente nas duas bases.

Figura 6: Prisma



Fonte: Elaborado pelas autoras

4.1.1 Elementos

- O prisma possui: 2 bases congruentes, *n* faces laterais (paralelogramos), (*n + 2)* faces, *n* arestas laterais; *3n arestas, 3n* diedros, 2*n* vértices e 2*n* triedros.
- A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases.

Segundo DOLCE,O. & POMPEO, para o prisma é válida a relação de Euler :

$V - A + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2.$

4.1.2. Nomenclatura e classificação

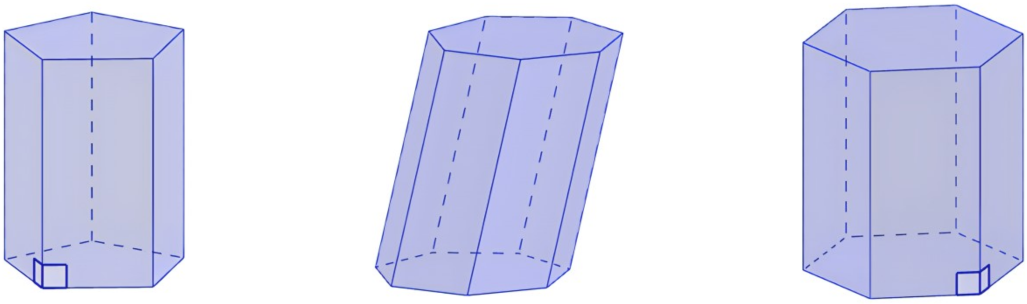
Os prismas são nomeados de acordo com os polígonos da base: prisma triangular (base; triângulo) prisma quadrangular (base; quadrilátero), prisma hexagonal (base; hexágono), assim por diante.

Podemos classificá-los como;

- Prisma reto é aquele cuja as arestas laterais são perpendiculares aos planos da base. Em um prisma reto, as faces laterais são retângulos.
- Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.
- Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

A figura a seguir da direita para a esquerda, ilustra o prisma pentagonal reto, prisma heptagonal oblíquo e prisma hexagonal regular respectivamente.

Figura 7: Prisma pentagonal reto, prisma heptagonal oblíquo e prisma hexagonal regular.



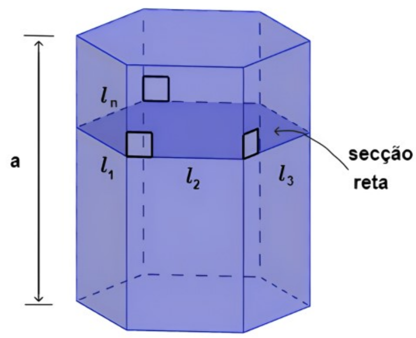
Fonte: Elaborado pelas autoras

4.1.3 Áreas lateral e total

A área lateral de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

Consideremos um prisma de aresta lateral medindo *a* e $l_1, l_2, \ldots l_n$ as medidas dos lados de uma secção reta.

Figura 8: Prisma de arestas laterais *a* e secção reta *l*.



Fonte: Elaborado pelas autoras

Sabemos que as faces laterais de um prisma sempre serão paralelogramos, assim, tomando *a* como base e a altura igual a um lado da secção reta, temos que a área lateral (A_l) é:

$A_l = al_1 + al_2 + \ldots + a\,l_n = (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)\,.\,a \Rightarrow A_l = 2p\,.\,a$ (onde $2p$ é a medida do perímetro da secção reta e a é a medida da aresta lateral.)

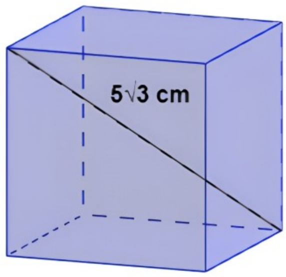
A área total é a soma das áreas das faces laterais (A_l) com a áreas das duas bases.

Assim:

$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2p\,.\,a + 2B$ (onde B é a área da base).

Exemplo 4.1 (UFOP-MG). A área total de um cubo cuja diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm?

Figura 9: Cubo com diagonal que mede $5\sqrt{3}$ cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras

Solução: Como a diagonal de um cubo pode ser calculada pela expressão matemática d = $a\sqrt{3}$ e foi apresentada que a medida da diagonal(d) é $5\sqrt{3}$, temos:

$$d = a\sqrt{3} \Rightarrow 5\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

Assim, temos que 5 cm é a medida da aresta do cubo.

Com isso, podemos calcular a área da sua base (A_b):

$$(A_b) = a \cdot a = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$$

Como o cubo contém duas bases iguais, podemos multiplicar a área da base por dois, deste modo, $2 \cdot 25 = 50$ cm² (I)

Temos que como os lados do cubo são congruentes, então a sua área lateral(A_l) será quatro vezes a área da base:
$(A_l) = 4 \cdot A_b = 4 \cdot 25 = 100$ cm² (II)

Agora, utilizando (I) e (II) para o cálculo da área total do cubo, temos:
Área Total = $A_l + 2 \cdot A_b = 100 + 50 = 150$ cm²

Portanto, a área total do cubo com diagonal que mede $5\sqrt{3}$ cm é 150 cm².

4.1.4 Volume

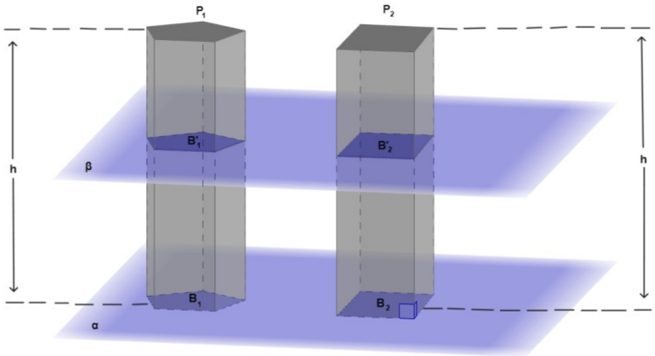
Para obtermos o volume de um prisma podemos utilizar o Princípio de Cavalieri. Sem perda de generalidade, suponhamos um prisma P_1 de altura h e área da base $B_1 = B$ e um paralelepípedo retângulo P_2 de mesma altura e área da base $B_2 = B$. Consideremos que os dois sólidos têm bases contidas num mesmo plano α e estão em um dos semiespaços determinado por α. Suponhamos agora, um plano β qualquer paralelo a α de modo que secciona os sólidos

P_1 e P_2, produzindo secções de área B'_1 e B'_2, note que a secção paralela a base de cada prisma (paralelepípedo é um prisma) é congruente a essa base. Assim:

$B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$, $B_1 = B = B_2 \Rightarrow B'_1 = B'_2$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm volumes iguais. Como o volume de um paralelepípedo é V = Bh, ou seja, $V_{P_2} = Bh$, então o volume do prisma V_{P_1} é também $V_{P_1} = Bh$. Desta forma, concluímos que o volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

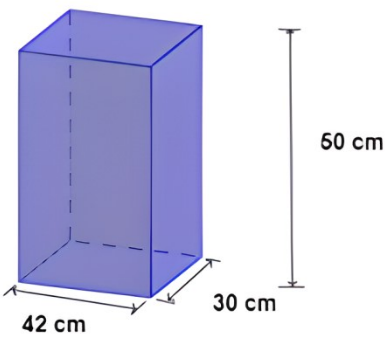
Figura 10: Prisma P_1 e paralelepípedo P_2.



Fonte: Elaborado pelas autoras

Exemplo 4.2 (OBMEP): Uma lata de tinta de paralelepípedo reto retângulo de dimensões 30cm x 42cm x 50cm. Qual a sua capacidade em litros?

Figura 11: Paralelepípedo retangular.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Com os dados apresentados, encontraremos a área da sua base(A_b), assim:

$$A_b = a \cdot b = 30 \cdot 42 = 1260 \text{ cm}^2$$

Agora, utilizando o valor da altura dada poderemos calcular o seu volume, deste modo:

$Volume = A_b \cdot h = 1260 \cdot 50 = 63000$ cm³

Porém, como queremos em litros ficará 63 dm³, ou seja, 63 litros.

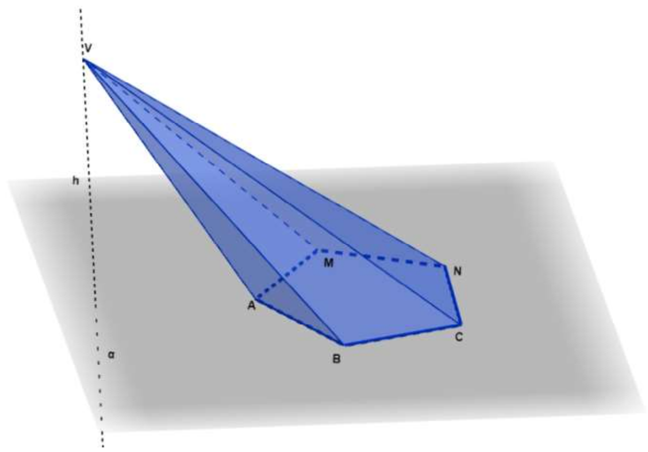
Portanto, a capacidade de tinta na lata será de 63 litros.

4.2. Pirâmide

Definição 2. Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC...MN situado em um plano α e um ponto V denominado vértice (chamado de vértice da pirâmide) fora desse plano. Chama-se pirâmide (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com extremidade no vértice fora do plano da base e a outra nos vértices do polígono.

Observe na figura abaixo, representamos um poliedro convexo ABCNMV em que a face ABCNM é um polígono contido no plano α, e V é o único ponto que não está em α. Logo V é o vértice da pirâmide e o polígono ABCNM é a base.

Figura 12: Pirâmide.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

4.2.1 Elementos

Considere a pirâmide de base ABC...MN e vértice V. Assim;

- Uma pirâmide possui: *1* base (polígono contido no plano), *n* faces laterais (triângulos), *n + 1* faces, *n* arestas, *2n* arestas, *2n* diedros*, n + 1* vértice*, n + 1* ângulos poliédrico e *n* triedros.
- A altura de uma pirâmide é a distância *h* entre o vértice e o plano da base.

Para uma pirâmide é válida a relação de Euler :

$V - A = (n + 1) - 2n + 2n + (n + 1) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2.$

4.2.2 Nomenclatura

As pirâmides são nomeadas de acordo com o polígono da base: pirâmide triangular (base; triângulo), pirâmide quadrangular (base; quadrilátero), pirâmide pentagonal (base; pentágono), etc.

4.2.3 Áreas lateral e total

A área lateral (A_l) de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais. Como as faces laterais de uma pirâmide são triângulos, segue:

A_l = *soma das áreas dos triângulos das faces.*

A área total de uma pirâmide é a somo da área lateral (A_l) com a área da base (B).

$$A_t = A_l + B$$

Em uma pirâmide regular, sendo:

m : medida do apótema da pirâmide

l : medida das arestas da base

B : área da base

P : apótema da base

L : medida da aresta lateral

R : raio da circunferência circunscrita

Temos,

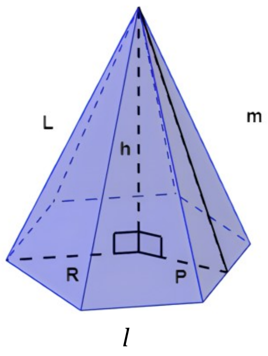
Área lateral $A_l = n.A = n\,\frac{lm}{2}$

Onde, *n* é o número de faces laterais da pirâmide e $\frac{lm}{2}$ é a área de uma face lateral (área de um triângulo da face).

Área total $A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = n\,\frac{lm}{2} + B.$

Veja figura a seguir:

Figura 13: Pirâmide.



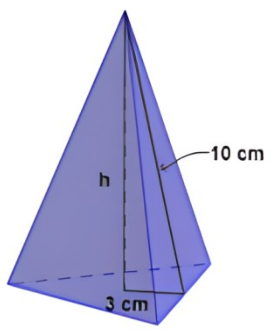
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Relações métricas:

- $M^2 = P^2 + h^2$
- $L^2 = R^2 + h^2$

Exemplo 4.3 (OBMEP). Determine a área total de uma pirâmide triangular regular cujo apótema mede 10 cm e o apótema da base mede 3cm.

Figura 14: Pirâmide com apótema de 10 cm e apótema da base 3cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como a base da pirâmide, que é um tetraedro equilátero, mede 3 cm, então a sua altura mede 9 cm. Pois, o apótema do triângulo é a terça parte da altura.

Dessa maneira, a aresta da base mede $\frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ cm.

Assim, poderemos calcular a área da base(A_b), isto é:

$A_b = \frac{(6\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{108 \cdot \sqrt{3}}{4} = \ 27\sqrt{3}$ cm² (I)

Como a área lateral(A_l) contém três triângulos, então o seu cálculo será a área do triângulo(A_t) multiplicado por três, assim:

$A_l = 3 \cdot A_t = 3 \cdot \frac{6\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 90\sqrt{3}$ cm² (II)

Logo, utilizando (I) e (II), temos:

Área Total = $A_b + A_l = 27\sqrt{3} + 90\sqrt{3} = 117\sqrt{3}$ cm².

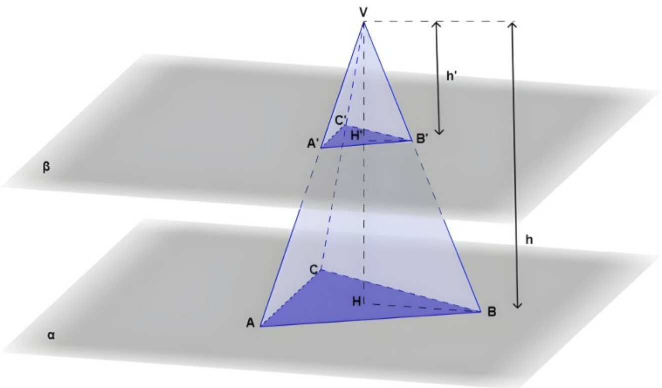
Portanto, a área total de uma pirâmide triangular regular é $117\sqrt{3}$ cm².

4.2.4 Volume

I) Secção paralela à base de um tetraedro

1) Quando se secciona um tetraedro a secção e a base são semelhantes, e as arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão, isto é, a razão de semelhança entre a base e a secção é $\frac{h'}{h}$.

Figura 15: Pirâmide.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Tomamos uma pirâmide triangular de vértice V e base ABC contida em um plano *α.* Consideremos um plano *β* paralelo a *α,* tal que *β* secciona a pirâmide. Note que os ângulos do triângulo ABC (triângulo da base) e os ângulos do triângulo A´B ´C´(triângulo gerado pela secção) são congruentes, pois possuem lados respectivamente paralelos. Assim temos que a secção e a base são triângulos semelhantes.

Note ainda que os segmentos B´H´ e BH são paralelos, pois são interseções de planos paralelos por um terceiro. Logo, os triângulos VH´B`e VHB são semelhantes (pelo caso ângulo ângulo) e portanto:

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$

Ou seja, as arestas laterais e a altura ficam dividida na mesma razão.

A razão de semelhança é $\frac{h'}{h}$, pois da semelhança dos triângulos VAB e VA´B´ temos:

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}$$

Portanto, os triângulos que determinam a secção e a base são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h'}{h}$.

2) A razão entre as áreas da secção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice, ou seja é igual a $\frac{h'^2}{h^2}$.

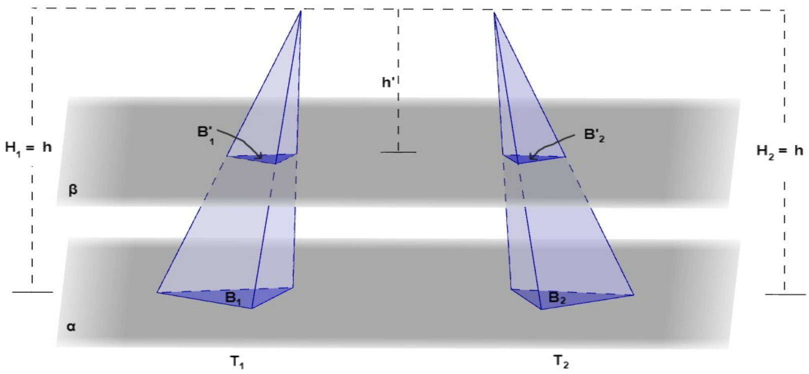
II) Equivalência de tetraedros

Teorema: *Duas pirâmides triangulares (tetraedros) de mesma base e mesma altura têm mesmo volume*.

Demonstração: Consideremos dois tetraedros T_1 e T_2, cujas áreas das bases são respectivamente B_1 e B_2 e H_1 e H_2 as alturas. De fato, $B_1 = B_2 = B$ e $H_1 = H_2 = h$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que as bases de área $B_1 = B_2 = B$ estão contidas em um mesmo plano e que α e que os vértices contidos em um mesmo semiespaço dos determinado por α. Dado um plano β qualquer, paralelo a α, tal que β secciona T_1 e T_2 a uma distância h' dos seus vértices gerando secções de áreas B'_1 e B'_2, conforme ilustra a figura.

Figura 16: Tetraedros T_1 e T_2, seccionados por β (plano paralelo a α).



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Observe que:

$$\left(\frac{B'_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2, \frac{B'_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2\right) \Rightarrow \frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}.$$

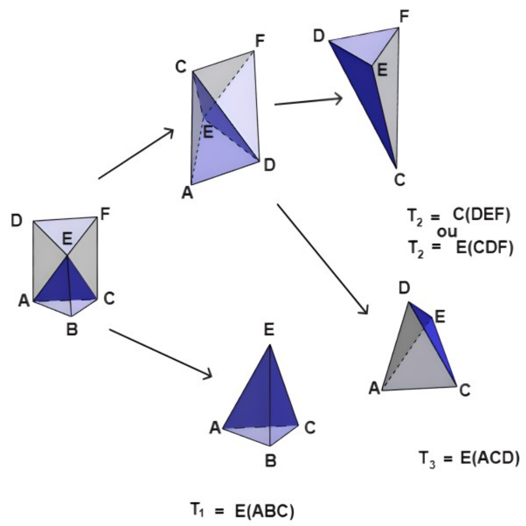
Como $B_1 = B_2 = B$ por 1) temos $B'_1 = B'_2$.

A partir disso, concluímos, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume dos sólidos T_1 e T_2 são iguais.

III) Decomposição de um prisma triangular

Teorema: *Todo prisma triangular é a soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si.*

Figura 17: Prisma triangular.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Demonstração: Consideremos um prisma triangular de bases ABC e DEF. Seccionando-o pelo plano AEC, obtemos o tetraedro $T_1 = E(ABC)$ e a pirâmide quadrangular *E(ACFD). S*eccionando a pirâmide quadrangular pelo plano CDE, obtemos o tetraedro $T_2 = E(CDF)$ (ou $T_2 = C(DEF)$ e $T_3 = E(ACD)$.

Daí temos:

Prisma $ABCDEF = T_1 + T_2 + T_3 \Rightarrow V_P = VT_1 + VT_2 + VT_3$.

As pirâmides $T_1 = E(ABC)$ e $T_2 = C(DEF)$têm mesmo volume, pois possuem as bases *ABC* e *DEF* congruentes (bases do prisma) e mesma altura (altura do prisma). Ou seja, $VT_1 = VT_2$.

Como as faces de um prisma é um paralelogramo e *CD* é diagonal do paralelogramo *ACFD* podemos afirmar que as pirâmides $T_2 = E(CDF)$ e $T_3 = E(ACD)$ possuem bases congruentes, logo têm mesmo volume e mesma altura (distância de *E* ao plano *ACDF).* Isto é, $VT_2 = VT_3$.

Portanto, segue-se que $VT_1 = VT_2 = VT_3$.

Tomando B como área da base e h a medida da altura do prisma, note que B é a área da base e h é a medida da altura do tetraedro T_1. Sabemos que $VT_1 = VT_2 = VT_3 = VT$ e o volume do prisma é dado por $V_P = VT_1 + VT_2 + VT_3$.

Logo,

$$V_P = VT_1 + VT_2 + VT_3. \Rightarrow 3VT = Bh \Rightarrow VT = \tfrac{1}{3}Bh.$$

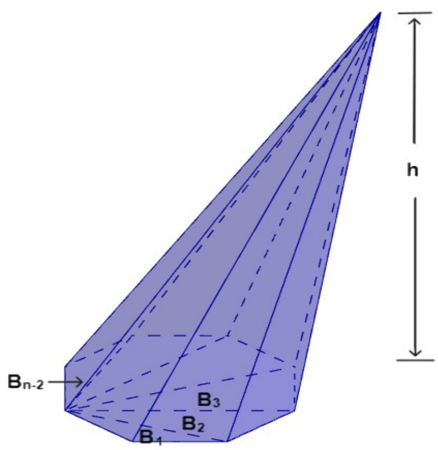
Assim, obtemos que o volume de uma pirâmide triangular (tetraedro) $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela medida de sua altura.

IV) Volume de uma pirâmide qualquer

Teorema: *O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração: Consideremos B a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer de n lados. Veja na figura a seguir:

Figura 18: Pirâmide generalizada.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Note que esta pirâmide pode ser dividida em $(n - 2)$ tetraedros, cujas medidas das áreas das bases são $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-2}$, daí vem:

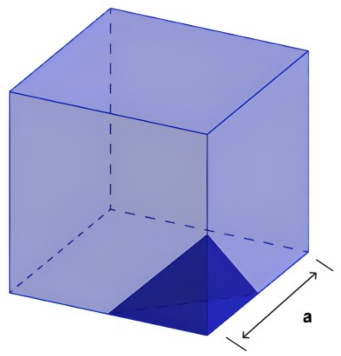
$$V = VT_1 + VT_2 + VT_3 + \ldots + VT_{n-2} \Rightarrow V = \tfrac{1}{3}B_1h + \tfrac{1}{3}B_2h + \tfrac{1}{3}B_3h + \ldots + \tfrac{1}{3}B_{n-2}h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \tfrac{1}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_{n-2})\,h \Rightarrow V = \tfrac{1}{3}Bh$$

Portanto, o volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Exemplo 4.4 (OBMEP). Em um cubo de aresta medindo a, marcam-se os pontos médios de três arestas que concorrem a um mesmo vértice. O plano α que contém estes 3 pontos, divide o cubo em dois sólidos, dos quais uma pirâmide. Determine o volume desta pirâmide.

Figura 19: Pirâmide construída dentro de um cubo.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Com os pontos médios nas três arestas, temos que essas arestas medem metade das arestas do cubo, ou seja, $\frac{a}{2}$. Sendo uma das faces da pirâmide como a base e que não esteja no plano α. Essa base será um triângulo retângulo de catetos e altura medindo $\frac{a}{2}$. Temos que a área do triângulo(A_t) será:

$$A_t = \frac{A_b \cdot h}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8} \text{ cm}^2$$

Agora, podemos calcular o volume da pirâmide(V_p):

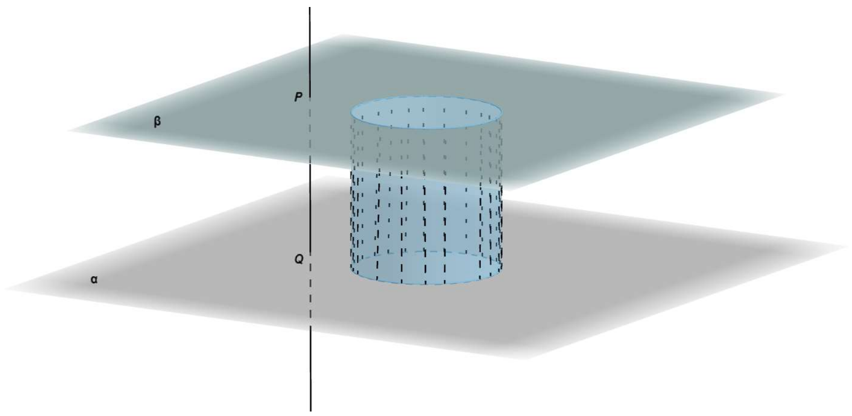
$$V_p = \frac{A_t \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{a^3}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^3}{48} \text{ cm}^3.$$

Logo, temos que o volume dessa pirâmide é $\frac{a^3}{48}$ cm³.

4.3. Cilindro

Definição 3. Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r, situado em um plano α, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se cilindro circular ou cilindro, à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos dos círculos e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α.

Figura 20: Cilindro.

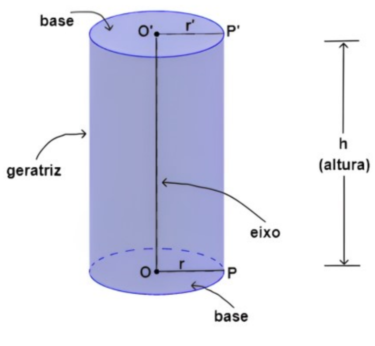


Fonte: Elaborado pelas autoras.

4.3.1 Elementos

- O cilindro possui: *2* bases: círculos congruentes situados em planos paralelos.
- *Geratrizes:* são os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de cento O e raio r e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro O' e raio r.
- r é o raio da base.
- A altura de um cilindro é a distância h entre os planos das bases.
- Eixo é a reta que passa pelos centros das bases.

Figura 21: Cilindro.



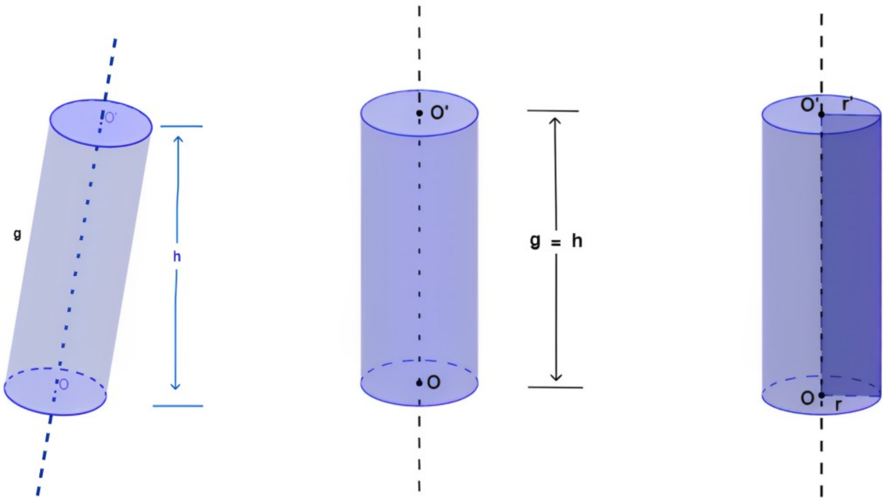
Fonte: Elaborado pelas autoras

4.3.2 Classificação

- Se o eixo é oblíquo aos planos das bases, temos um cilindro circular oblíquo.
- Se o eixo é perpendicular aos planos das bases, temos um cilindro circular reto.

- O cilindro circular reto é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.

Figura 22: Cilindro oblíquo e cilindro circular reto (cilindro de revolução).



Fonte: Elaborado pelas autoras

Secção meridiana : intersecção do cilindro com o plano que contém o eixo.
Secção transversal : secção de um cilindro por um plano paralelo à base, obtendo um circulo paralelo a base.

4.3.3 Cilindro equilátero

É um cilindro cuja secção meridiana (intersecção do cilindro com um plano que contém a reta *OO´* determinada pelos centros das bases. No cilindro oblíquo é um paralelogramo e no reto é um quadrado) é um quadrado portanto, apresenta:

$$g = h = 2r$$

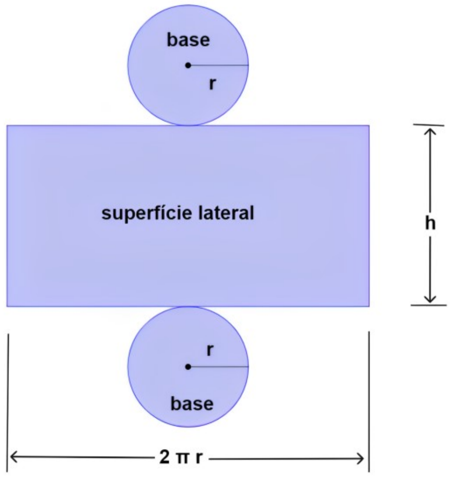
4.3.4 Área das superfícies lateral e total

Superfície lateral é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada de *área lateral* e indicada por A_l.

Superfície total é a reunião da superfície lateral com os círculos da base. A área dessa superfície é chamada de *área total* e indicada por A_t.

Para calcular as áreas lateral e total de um cilindro reto, basta planificá-lo. Observe que ao planificar encontramos um retângulo de dimensões $2\pi r$ e altura h e dois círculos de área B = πr^2. Veja figura a seguir:

Figura 23: Cilindro planificado.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

A área lateral será a área do retângulo correspondente a superfície lateral. Segue então:

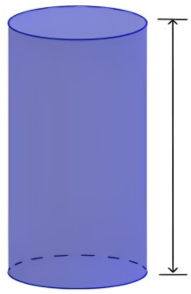
$$A_l = 2\pi rh$$

A área total de um cilindro é a soma da área (A_t) lateral com a área dos dois círculos das bases, logo:

$$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r\,(h + r)$$

Exemplo 4.5 (CEV-Urca 2021). Em um cilindro circular reto de altura 1 m, sabe-se que a razão entre a área lateral e a área total é $\frac{1}{3}$. Qual o valor do raio da base?

Figura 24: Cilindro reto de altura 1 m.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como conhecemos o valor da sua altura temos que, a área sua lateral $(A_l) = 2\pi r \cdot 1 = 2\pi r$. Sendo que como a área total(A_t) é a soma da área lateral e duas vezes a área da base, temos que:

$A_t = 2\pi r + 2 \cdot \pi r^2 = 2\pi r(1 + r)$

Sabendo que a razão entre a área lateral e a área total é $\frac{1}{3}$, temos:

$\frac{A_l}{A_t} = \frac{1}{3} => \frac{2\pi r}{2\pi r(1+r)} = \frac{1}{3} => \frac{1}{1+r} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 + r = 3 \Rightarrow r = 2$

Portanto, temos que o raio da base é 2 m.

4.3.5 Volume

Suponhamos um cilindro de altura h e área da base $B_1 = B$ e um prisma de altura h e área da base $B_2 = B$ (bases equivalentes), de modo que o prisma e o cilindro possuem suas base em um mesmo plano α e estão determinados em um dos semiespaços determinados por α. Consideremos um plano β qualquer, paralelo a α, que secciona o cilindro e o prisma, gerando secções B'_1 e B'_2, note que as secções têm áreas iguais, pois são congruentes as respectivas bases. Assim:

$B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B \Rightarrow B'_1 = B'_2$

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma e o cilindro têm volumes iguais.

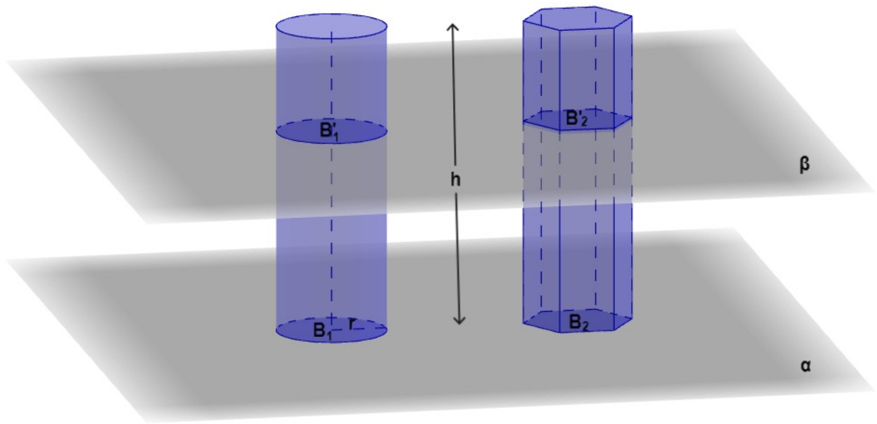
$$V_{cilindro} = V_{prisma}$$

Como o volume do prima é $V_{prisma} = B_2\, h$, ou seja, $V_P = Bh$, vem que o volume do cilindro é $V_{cilindro} = Bh;$ logo temos:

$$V = Bh$$

Desta forma, concluímos que o volume do cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

Figura 25: Cilindro e Prisma.



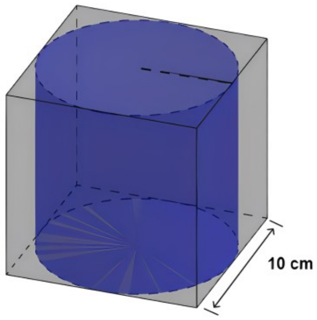
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Como a base de um cilindro é um círculo com raio r, então o volume é

$$V = \pi r^2 h$$

Exemplo 4.6 (OBMEP). Determine o volume de um cilindro inscrito em um cubo de aresta que mede 10 cm.

Figura 26: Cilindro inscrito em um cubo de aresta de 10 cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como a aresta do cubo mede 10 cm, então o raio do cilindro mede 5 cm e consequentemente, a altura do cilindro mede 10 cm.

Agora, usando os dados obtidos, podemos encontrar o volume do cilindro(V_c):

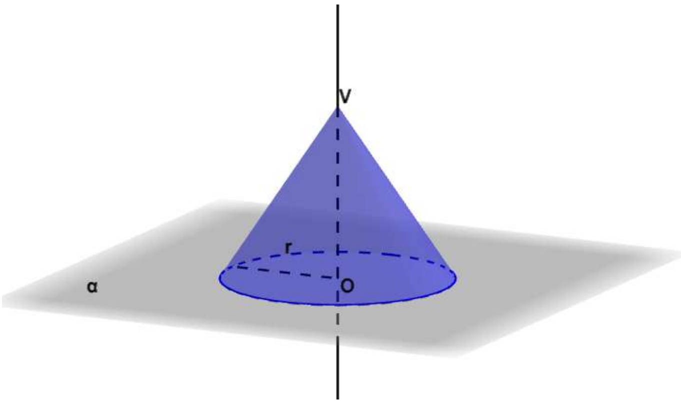
$$(V_c) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250\pi \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume do cilindro inscrito no cubo é 250π cm³.

4.4. Cone

Definição 4. Considerando um círculo (região circular) de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone circular à reunião dos segmentos de reta com extremidade em V e a outra nos pontos de círculo.

Figura 27: Cone.



Fonte: Elaborado pelas autoras

4.4.1 Elementos

- O cone possui: *1* base, que é o círculo de centro O e raio r.
- Geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.
- Vértice: O ponto V citado acima.
- r é o raio da base.
- A altura de um cone é a distância entre o vértice e o plano da base.
- Eixo é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.

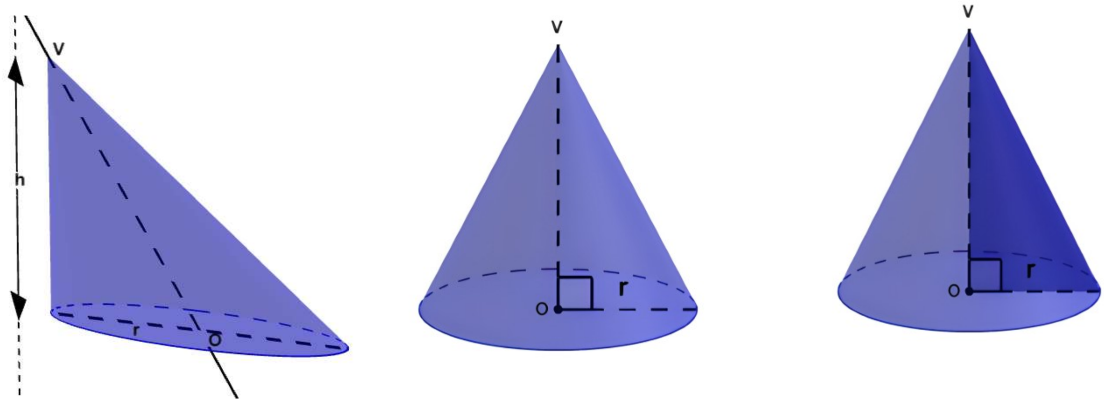
4.4.2 Classificação

Os cones podem ser classificados pela posição da reta VO em relação ao plano da base:

- Se a reta VO é oblíqua ao plano da base, temos um cone circular oblíquo.
- Se a reta VO é perpendicular ao plano da base, temos um cone circular reto.

- O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

Figura 28: Cone circular oblíquo e cone circular reto (cone de revolução).



Fonte: Elaborado pelas autoras

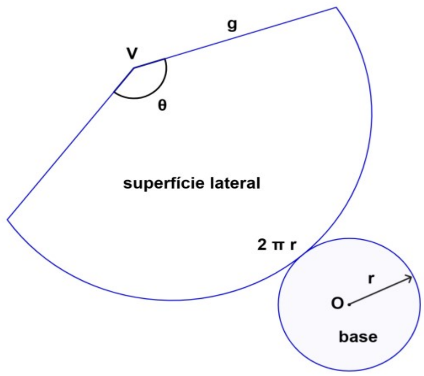
4.4.3 Área das superfícies lateral e total

Superfície lateral é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada de *área lateral* e indicada por A_l.

Superfície total é a reunião da superfície lateral com os círculos da base. A área dessa superfície é chamada de *área total* e indicada por A_t.

Para calcular as áreas lateral e total de um cone reto, devemos fazer sua planificação. Observe que ao planificá-lo, obtemos um setor circular cujo raio é *g* (geratriz) e comprimento do arco é $2\pi r$ e um círculo de área B = πr^2, veja figura a seguir:

Figura 29: Cone planificado.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

A área lateral do cone (setor circular) pode ser calculada utilizando a ideia de proporcionalidade, como sucede:

Comprimento do arco	área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_l

O que se obtém:

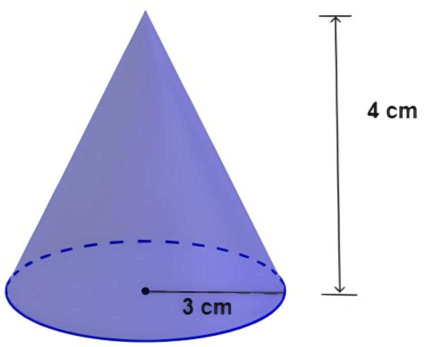
$$A_l = \frac{2\pi r . \pi g^2}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad A_l = \pi r g$$

Para calcular a área total de um cone devemos somar a área lateral (A_l) obtida com a área do círculo da base (B = πr^2). Desta forma:

$$A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow A_t = \pi r\ (g + r)$$

Exemplo 4.7 (OBMEP). Determine a área total de um cone reto de raio da base medindo 3cm e altura medindo 4cm.

Figura 30: Cone de raio 3 cm e altura 4 cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Utilizando o Teorema de Pitágoras para calcular a geratriz pelo triângulo retângulo que é formado pela altura e raio da base.

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow g^2 = 9 + 16 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = \sqrt{25} \Rightarrow g = 5$ cm

Agora, utilizaremos os dados obtidos para calcular a sua área total(A_t), temos:

$A_t = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 9\pi + 15\pi = 24\pi$ cm²

Portanto, a área total do cone reto é 24π cm².

4.4.4 Volume

Consideremos um cone de altura $H_1 = h$ e área da base $B_1 = B$ e um tetraedro de altura $H_2 = h$ e área da base $B_2 = B$, isto é, o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes.

Consideremos ainda que os dois sólidos possuem suas bases em um mesmo plano α e que os vértices estão em um mesmo semiespaço dos determinados por α.

Qualquer plano β paralelo a α, que secciona o cone a uma distância h' do vértice também secciona o tetraedro (à mesma distância h' do vértice), gerando secções de áreas B'_1 e B'_2. Temos daí:

$$\left(\frac{B'_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2, \frac{B'_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2\right) \Rightarrow \frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}.$$

Como $B_1 = B_2 = B$, vem que $B'_1 = B'_2$.

Então, pelo Princípio de Cavalieri, podemos afirmar que o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}$$

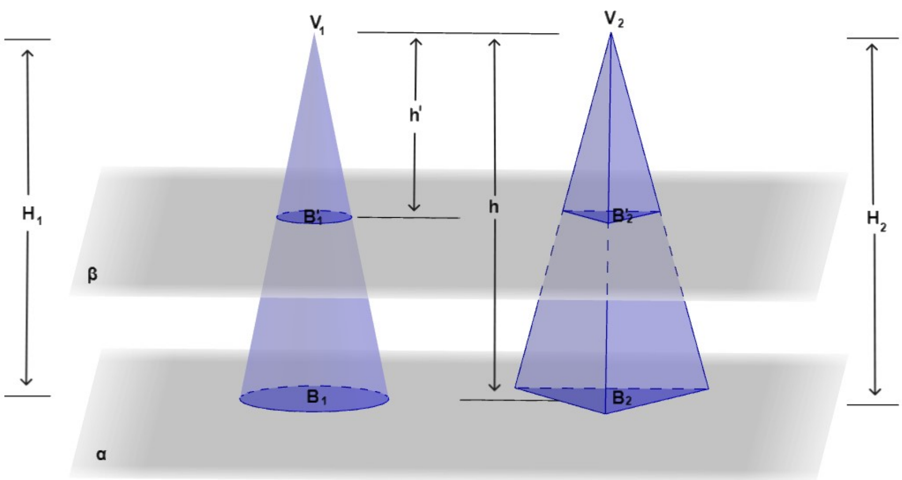
Como o volume do tetraedro é $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} B_2 h$, ou seja, $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} Bh$, vem que $V_{cone} = \frac{1}{3} Bh$; isto é:

$$V = \frac{1}{3} Bh.$$

Assim, concluímos que o volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Se $B = \pi r^2$, então $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

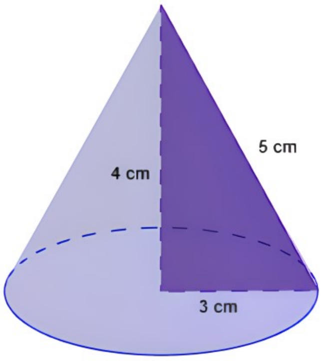
Figura 31: Cone e tetraedro.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Exemplo 4.8 (OBMEP). Um cone de revolução e obtido pela rotação de um triângulo retângulo, de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, tendo como eixo a reta suporte do lado de 4cm. Determine seu volume.

Figura 32: Cone obtido pela rotação de um triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Sendo o raio do cone 3 cm e a altura 4 cm, temos que a área da base(A_b) desse cone será:

$(A_b) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm²

Agora, podemos calcular o volume do cone de revolução(V_{CR}), assim:

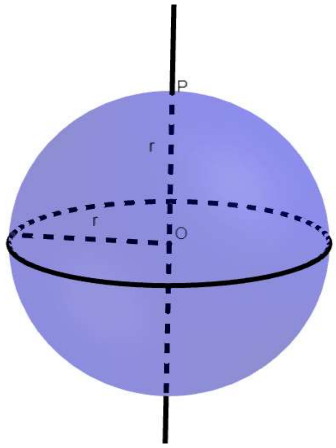
$(V_{CR}) = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{9\pi \cdot 4}{3} = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$

Portanto, o volume do cone de revolução é 12π cm³.

4.5 Esfera

Definição 5. Consideremos um ponto *O* e um segmento de medida *r*, chama-se esfera de centro *O* e raio *r* ao conjunto dos pontos *P* do espaço, tais que a distância do segmento *OP* seja menor ou igual a *r*.

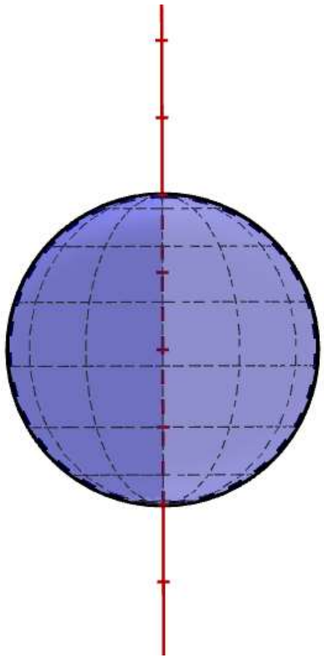
Figura 33: Esfera.



Fonte: Elaborado pelas autoras

A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Figura 34: Esfera.



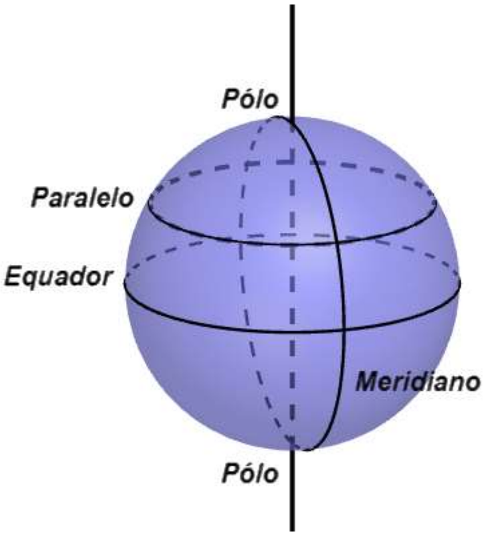
Fonte: Elaborado pelas autoras

4.5.1 Elementos

- Polos: são as interseções da superfície com o eixo.
- Equador: é a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.
- Paralelo: é uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo. É “paralela” ao equador.

- Meridiano: é uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.

Figura 35: Elementos de uma esfera.



Fonte: Elaborado pelas autoras

4.5.2 Área da superfície esférica

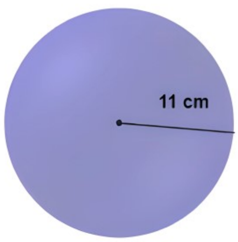
Denominar-se superfície esférica o conjunto dos pontos do espaço, tais que a distância desses pontos ao centro é igual ao raio.

A área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

$$A = 4\pi r^2$$

Exemplo 4.9 (OBMEP). Qual a quantidade de couro aproximada usada para forrar uma bola de futebol cujo raio é de aproximadamente 11 cm? (Note: $\pi \cong 3{,}14$)

Figura 36: Esfera de raio de 11 cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras

Solução: Utilizando o dado que o raio dessa bola de futebol é 11 cm, temos:

Área da bola = $4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 11^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 121 = 1.519{,}76$ cm²

Portanto, a quantidade aproximada de couro para forrar a bola de futebol é $1.519{,}76$ cm².

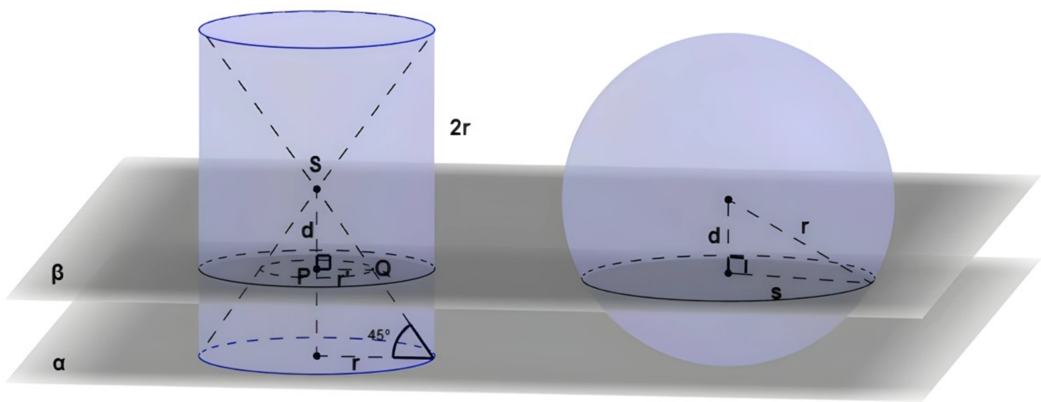
4.5.3 Volume

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base *r*, cuja altura é *2r* e uma esfera de mesmo raio *r*. Tomemos no interior desse cilindro dois cones de altura *r* tendo como bases as do cilindro e posicionados de modo que seus vértices se toquem em um ponto *S*. O sólido que está dentro do cilindro e externo aos dois cones é chamado de anticlépsidra.

Suponhamos que os sólidos, esfera e anticlépsidra estão apoiados sobre um plano α, ou seja, a esfera é tangente ao plano α e a anticlépsidra tem base em α.

Seja um plano β, paralelo a α, que secciona a esfera a uma distância *d* até o centro da mesma, também secciona o sólido anticlépsidra a uma distância *d* do seu vértice. Conforme ilustração abaixo:

Figura 37: Esfera, cilindro e cones



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Note que:

A área da secção na esfera é igual a:

$A = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$ (pois $s^2 = r^2 - d^2$)

A área da secção no sólido anticlépsidra é igual a área da coroa circular:

$Acc = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2 - d^2)$ ($r' = d$, pois como o cilindro é equilátero, temos que a altura do mesmo é *2r* e a altura de cada cone é igual ao raio da base r, daí segue, por semelhança de triângulos que o triângulo SPQ é isósceles, consequentemente, SP = PQ o que implica $r' = d$) .

De fato, as secções determinadas pelo plano β nos dois sólidos tem áreas iguais, então pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido anticlépsidra tem volumes iguais.

$$V_{esfera} = V_{anticlépsidra}$$

Como o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra e o volume da anticlépsidra é o volume do cilindro menos o volume de dois cones, vem que:

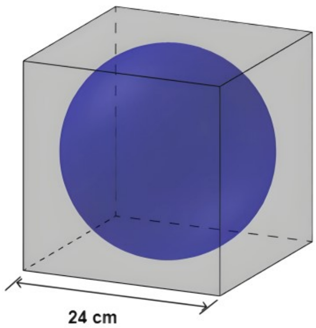
$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2V_{cone} = \pi r^2.2r - 2(\frac{1}{3}.\pi r^2.r) = \pi r^2.2r - \frac{2}{3}.\pi r^3 = \frac{4}{3}.\pi r^3$$

Ou seja, $V_{esfera} = \frac{4}{3}.\pi r^3$.

Assim, concluímos que o volume de um\a esfera de raio r é $\frac{4}{3}.\pi R^3$.

Exemplo 4.10 (OBMEP). Qual o volume de uma esfera inscrita em um cubo de 24 cm de aresta?

Figura 38: Esfera de raio de 11 cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como temos que a esfera é inscrita no cubo, então o seu raio é a metade da medida da aresta do cubo, ou seja, 12 cm.

Agora, podemos calcular o volume da esfera(V_e), temos:

$V_e = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 12^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 1.728}{3} = \frac{6.912\pi}{3} = 2.304\pi$ cm³

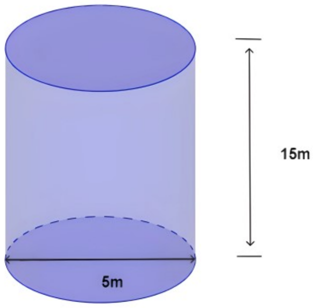
Portanto, o volume da esfera inscrita em um cubo é 2.304π cm³.

5 APLICAÇÕES

Na questão seguinte temos o uso da área da superfície do cilindro para o cálculo do orçamento de uma obra.

Aplicação 1 (Esa 2023). Determinado quartel tem caixas d'água no formato cilíndrico. Os militares do Pelotão de Obras receberam a missão de pintar uma caixa d'água deste quartel. Ajude-os a fazer o orçamento da obra encontrando a área total dessa caixa d'água, sabendo que sua altura é de 15 m e que seu diâmetro mede 5 m. (Considere $\pi = 3{,}14$)

Figura 39: Cilindro de 5 m de diâmetro e 15 m de altura.



Fonte: Elaborado pelas autoras

Solução: Sendo a altura 15 m e o diâmetro igual a 5 m, temos que o seu raio r = 2,5 m. Primeiramente, descobriremos a área da base do cilindro(A_b) com isso,

$A_b = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 = 19{,}625m^2$ (I)

Agora, calcularemos a área lateral(A_l) desse cilindro, assim:

$Al = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 15 = 235{,}5m^2$ (II)

Após descobri-las, usaremos (I) e (II) para encontrarmos a sua área total(A_T), assim:

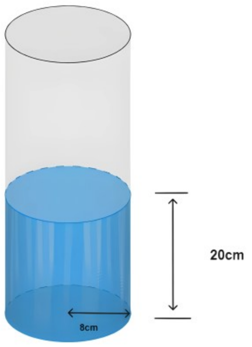
$A_T = A_l + 2A_b = 235{,}5 + 2 \cdot 19{,}625 = 274{,}75m^2$

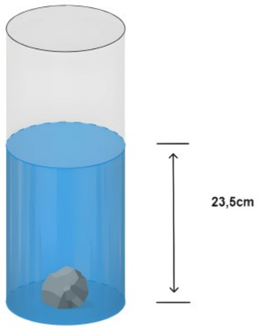
Portanto, a área total da caixa d'água é $274{,}75m^2$.

No que segue temos o uso da geometria básica para calcular o volume de um objeto irregular.

Aplicação 2 (Fuvest 2023). Para medir o volume de uma pedra com formato irregular, Ana utilizou um recipiente cilíndrico de raio r = 8 cm e com água até a altura de 20 cm. Após colocar a pedra no recipiente, a altura da água subiu para 23,5 cm. Qual é o volume dessa pedra?

Figura 40: Cilindro de 20 cm de altura e cilindro com pedra irregular com 23,5 cm.





Fonte: Elaborado pelas autoras

Solução: Iremos calcular o volume da figura I e da figura II e em seguida fazer a subtração do valor dos dois volumes.

Figura I:

$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h = 8^2 \cdot \pi \cdot 23{,}5 = 1504\pi$ cm³

Figura II:

$V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h = 8^2 \cdot \pi \cdot 20 = 1280\pi$ cm³

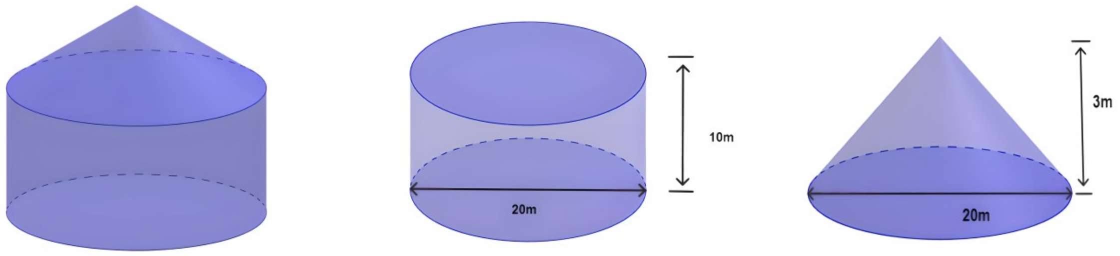
Assim, V_1 - $V_2 = 1504\pi$ - $1280\pi = 224\pi$ cm³.

Portanto, o volume da pedra irregular é 224π cm³

Na questão seguinte vamos mostrar a importância do cálculo de volumes de sólidos geométricos no dia a dia da agricultura.

Aplicação 3 (Unioeste 2023 adaptada). Um reservatório de água de determinada propriedade rural tem o formato da figura a seguir e está totalmente cheio. A parte inferior da figura é um cilindro circular reto de altura 10 metros e de diâmetro 20 metros. A parte superior do reservatório é um cone de altura 3 metros. A água desse reservatório é transferida para 10 pequenas caixas d'água com capacidade de 1000 litros cada uma e é usada para irrigação na propriedade. Cinco dessas caixas são abastecidas totalmente duas vezes ao dia e as outras cinco caixas são totalmente abastecidas somente uma vez ao dia. Se D é o número de dias completos nos quais é possível irrigar a propriedade com a água do reservatório, quanto são esse número de dias?

Figura 41: Cilindro com cone na parte superior, cilindro



Fonte: Elaborado pelas autoras

Solução: Sendo o volume do cilindro(V_{ci}) = $\pi \cdot r^2 \cdot h = 10^2 \cdot \pi \cdot 10 = 1000\pi m^3$ e volume do cone(V_{co}) $= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 3 = \frac{300\pi}{3} = 100\pi m^3$.

Temos que, utilizando os dados obtidos, encontraremos o volume total do reservatório(V_T):

$V_T = V_{ci} + V_{co} = 1000\pi + 100\pi = 1100\pi = 1100 \cdot 3{,}14 = 3454 m^3$.

Convertendo de m³ para L temos: $3454 \cdot 1000$ = 3.454.000L. Como cinco caixas são abastecidas duas vezes ao dia e as outras cinco só uma vez, temos que:

$(2 \cdot 5 + 5) \cdot 1000L = 15000$, logo são $15000L$ por dia.

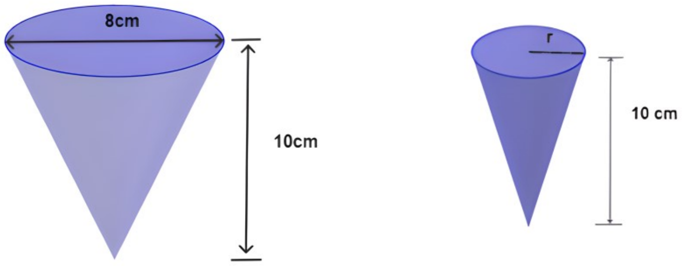
Assim, $\frac{3{,}454{,}000}{15000} = 230{,}26$

Portanto, o número de dias completos que é possível irrigar a propriedade com água do reservatório são 230 dias.

Na questão seguinte temos o uso do volume do cone na fabricação de chocolates.

Aplicação 4 (ENEM 2022). Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura. Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates, então encontre a medida do raio da base, em centímetro.

Figura 42: Cones circulares reto original e reduzido.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Seja o volume do chocolate original $(V_o) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \frac{160\pi}{3} cm^3$Calculando também o volume do chocolate reduzido$(V_R) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(r'\right)^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot \left(r'\right)^2 \cdot 10}{3}$cm³ (I)

Como reduzir 19% corresponde a um fator multiplicativo igual a 1 - $\frac{19}{100} = \frac{81}{100}$.

Com isso, podemos observar que o volume do chocolate reduzido é igual ao produto do volume do chocolate original com a redução de 19%, ou seja, $V_R = \frac{81}{100} \cdot V_o$.

Assim:

$V_R = \frac{81}{100} \cdot \frac{160\pi}{3} \Rightarrow V_R = 43{,}2\pi$ cm³ (II)

Agora, fazendo a substituição do (I) na expressão (II), temos:

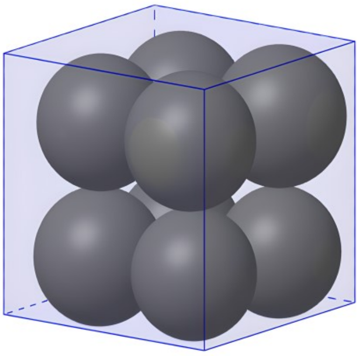
$\frac{\pi \cdot \left(r'\right)^2 \cdot 10}{3} = 43{,}2\pi \Rightarrow \frac{\left(r'\right)^2 \cdot 10}{3} = 43{,}2 \Rightarrow \left(r'\right)^2 \cdot 10 = 129{,}6 \Rightarrow \left(r'\right)^2 = 129{,}6 \Rightarrow r' = \sqrt{12{,}96} \Rightarrow r' = 3{,}6$

Portanto, temos que o raio do cone do chocolate reduzido é 3,60 cm.

Na questão seguinte temos o uso dos volumes da esfera e do prisma regular na fabricação de embalagens.

Aplicação 5 (UEMA 2021) O fabricante de uma das melhores bolas de basquete do país está colocando à venda uma embalagem cúbica, contendo 8 unidades, conforme a figura a seguir. Considerando que cada bola de basquete tem raio igual a "r " cm e que tangenciam todos os lados internos das faces da embalagem cúbica, o valor, em cm³, do espaço vazio dentro da caixa, ou seja, quanto é o espaço não preenchido pelas bolas de basquete?

Figura 43: Cubo com esferas que tangenciam os lados internos da face.



Fonte: Elaborado pelas autoras

Solução: Como cada bola tem raio igual a “r”, temos que lado(l) = 4r. E sendo V_N(volume do espaço não preenchido), V_b(volume da bola) e V_c(volume do cubo).

Temos que:

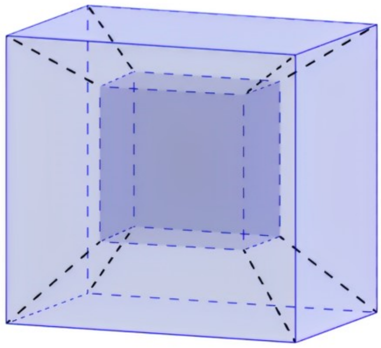
$$V_N = V_c - 8V_b = l^3 - 8 \cdot \frac{(4 \cdot \pi \cdot r^3)}{3} = (4r)^3 - \frac{32 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 64r^3 - \frac{32 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{192r^3 - 32 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{32r^3(\pi - 6)}{3}$$

Logo, o volume do espaço não preenchido da embalagem cúbica é $\frac{32r^3(\pi-6)}{3}$ cm³.

Na questão seguinte temos o uso da geométrica plana para identificar os tipos de figura.

Aplicação 6 (ENEM 2021). Muitos brinquedos que frequentemente são encontrados em praças e parques públicos apresentam formatos de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Uma empresa foi contratada para desenvolver uma nova forma de brinquedo. A proposta apresentada pela empresa foi de uma estrutura formada apenas por hastes metálicas, conectadas umas às outras, como apresentado na figura. As hastes de mesma tonalidade e espessura são congruentes. Com base na proposta apresentada, quantas figuras geométricas planas de cada tipo são formadas pela união das hastes?

Figura 44: Paralelepípedo conectado por segmentos de reta por outro paralelepípedo.



Fonte: ENEM 2021.

Solução: Olhando inicialmente para a figura geométrica maior percebemos que temos seis (6) quadrados e como a figura geométrica menor é idêntica a maior, então contém a mesma quantidade de quadrados, ou seja, seis (6) quadrados. Assim, são doze (12) figuras planas em forma de quadrado.

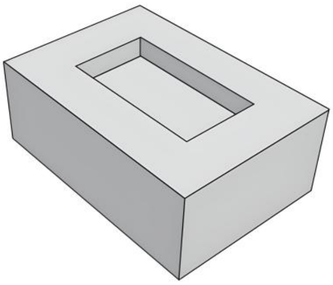
Agora, se olharmos para os segmentos de reta que estão conectando as duas figuras, podemos observar 12 figuras planas em forma de trapézio isósceles.

Portanto, são 12 trapézios isósceles e 12 quadrados.

Na questão seguinte temos o uso da relação de Euler para saber a relação entre os vértices, as faces e arestas de um poliedro não convexo.

Aplicação 7 (ENEM PPL 2019). No ano de 1751, o matemático Euler conseguiu demonstrar a famosa relação para poliedros convexos que relaciona o número de suas faces (F), arestas (A) e vértices (V): $V + F = A + 2$. No entanto, na busca dessa demonstração, essa relação foi sendo testada em poliedros convexos e não convexos. Observou-se que alguns poliedros não convexos satisfaziam a relação e outros não. Um exemplo de poliedro não convexo é dado na figura. Todas as faces que não podem ser vistas diretamente são retangulares. Qual a relação entre os vértices, as faces e as arestas do poliedro apresentado na figura?

Figura 45: Poliedro não convexo.



Fonte: ENEM PPL 2019.

Solução: Primeiramente, temos que o poliedro não convexo contém 16 vértices, 12 faces e 24 arestas. Se utilizarmos esses valores na relação de Euler temos: V + F = 16 + 11 = 27, porém percebe-se que o número de arestas deveria ser 24 e não 27.

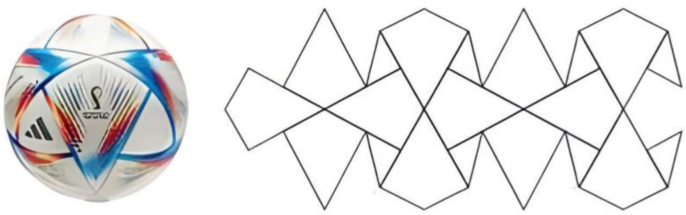
Para que a relação de Euler seja verdadeira, é necessário adicionar 3 á soma dos vértices e das faces para igualar o número de arestas mais 3, em vez de adicionar 2 como na fórmula geral de Euler para poliedros convexos.

Portanto, a relação correta é $V + F = A + 3$ para o poliedro não convexo.

Na questão seguinte temos o uso da área da superfície da esfera para o cálculo da quantidade de material para a produção de uma bola.

Aplicação 8 (Upf 2023). Com inspiração na arquitetura, na cultura e nas cores da bandeira do Catar, a bola oficial da Copa do Mundo de 2022 foi denominada Al Rihla, que significa "a jornada" em árabe (Fonte: https://www.metropoles.com/esportes/futebol/adidas-e-fifa-revelam-a-al-rihla-bola-oficial-da-copa-do-mundo-2022). A bola é revestida de pele de poliuretano com uma nova forma de painel de 20 peças, que melhora sua aerodinâmica. A figura a seguir apresenta a bola e seu o painel de peças. A Al Rihla tem circunferência de cerca de 70 cm. Considere que, para a produção de uma peça da bola, a quantidade de pele de poliuretano foi aumentada em 10%, devido aos recortes que devem ser feitos. Qual a quantidade desse material que será necessária para a produção de uma bola, em cm^2.

Figura 46: Esfera e seu painel de peças.



Fonte: Upf 2023.

Solução: Temos que como o perímetro é 70cm, podemos encontrar o seu raio:

$2\pi r = 70 \Rightarrow \pi r = 35 \Rightarrow r = \frac{35}{\pi}$ cm

Agora, utilizando o raio encontrado calcularemos a área da esfera(A_e), assim:

$Ae = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{35}{\pi}\right)^2 = 4 \cdot \frac{35^2}{\pi} cm^2$.

Como a pele de poliuretano aumentou 10%, multiplicaremos esse aumento com a área da esfera(A_e):

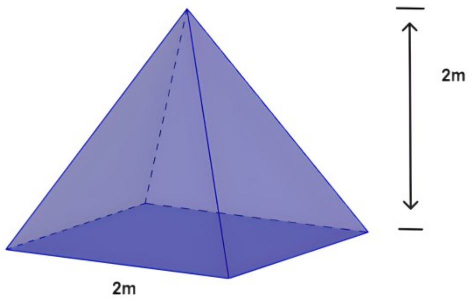
$$1{,}1 \cdot Ae = 1{,}1 \cdot \left(4 \cdot \frac{35^2}{\pi}\right)^2 \Rightarrow 1{,}1 \cdot Ae = \frac{4{,}4 \cdot 35^2}{\pi}$$

Portanto, a quantidade necessária de material será de $\frac{4{,}4 \cdot 35^2}{\pi}$.

Na questão seguinte temos o uso da área da superfície da pirâmide para o cálculo da quantidade de tecido para uma barraca.

Aplicação 9 (Ufms 2020). Um grupo de amigos decidiu acampar em local próximo a uma das cachoeiras da cidade de Bonito. Planejam utilizar uma barraca feita de tecido impermeável no formato de pirâmide regular quadrangular, com medidas da aresta de base de 2m e altura 2m. Considerando que a barraca deve isolar o grupo de toda umidade, inclusive a proveniente do solo, quantos metros quadrados de tecido são necessários?

Figura 47: Pirâmide de aresta da base e altura de 2 m.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Temos que como a aresta da base é 2 cm, logo o apótema da base quadrangular é $\frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1$ m. Com o valor do apótema da base podemos descobrir a apótema da pirâmide: $a^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$ m.

Como a área total da pirâmide é igual a área da base somado com a área lateral, temos:

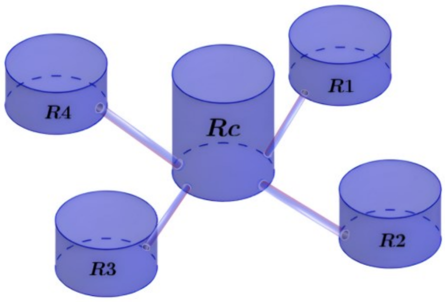
$A_T = A_b + A_l = l^2 + 4 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = 2^2 + 4 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{2}\right) = 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 4 + \sqrt{4^2 \cdot 5} = 4 + \sqrt{80}$

Logo, são necessários de tecido $4 + \sqrt{80}\, m^2$.

Na questão seguinte temos o uso do volume do cilindro para o cálculo da altura das colunas de água em uma construtora.

Aplicação 10 (ENEM 2019). Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_C) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4) os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m. As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água. No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes. Qual é a medida, em metros, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles?

Figura 48: Cilindro central conectado por outros cilindros menores.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como o diâmetro interno do cano é 0,10, temos que o r = 0,05 m. Sendo assim, o volume do cano(V_c) será:

$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 20 = 0{,}05\pi\, m^2$

Porém, como temos 4 canos conectados entre o reservatório central e os aos reservatórios auxiliares, multiplicaremos a quantidade de canos com o seu volume:

$4 \cdot 0{,}05\pi = 0{,}2\pi$ m²

Agora, calculando o volume do reservatório central(V_{RC}), temos que:

$V_{RC} = \pi \cdot 2^2 \cdot 3{,}30 = 13{,}2\pi$ m²

Sendo o volume do reservatório auxiliar representado por: V_A. Percebe-se, que podemos dizer que a água do reservatório central é igual o volume do cano mais quatro vezes o volume do reservatório auxiliar e mais uma quantidade no reservatório central, com isso:

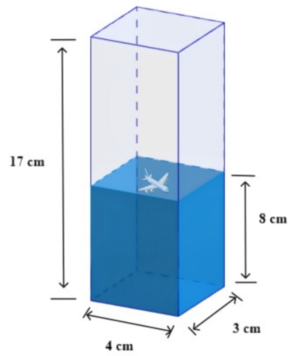
$V_{RC} = V_c + 4 \cdot V_A + (V_{RC})' = 13{,}2\pi = 0{,}2\pi + 4 \cdot V_A + V_C \Rightarrow 13\pi = 4 \cdot \pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot h + \pi \cdot 2^2 \cdot h \Rightarrow 13\pi = 4 \cdot \pi \cdot 2{,}25 \cdot h + 4\pi \cdot h => 13 = 4 \cdot 2{,}25 \cdot h + 4 \cdot h \Rightarrow 13 = 9 \cdot h + 4 \cdot h \Rightarrow 13 = 13 \cdot h \Rightarrow h = 1$.

Portanto, a altura das colunas de água no reservatório é 1 metro.

No próximo problema vamos fazer uma comparação entre o cálculo do volume do prisma e de um objeto desconhecido.

Aplicação 11 (ENEM 2020). Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a 6 cm³ cada, que ficarão totalmente submersas. Encontre o número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas.

Figura 49: paralelepípedo reto-retângulo.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como a a altura da coluna de água deve ser de pelo menos 15 cm, logo a quantidade de água que falta para cobrir o recipiente é 7 cm.

Calculando o volume do paralelepípedo(V_p):

$V_p = A_b \cdot h = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84\ cm^3$.

Agora, fazendo a divisão do volume do recipiente pelo volume de cada bolinha:

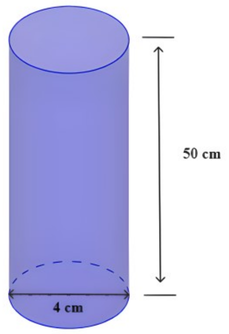
$84 \div 6 = 14$

Portanto, será necessário no mínimo 14 bolinhas para retirar o objeto.

No que segue vamos ver o uso da geometria na reciclagem de objetos metálicos.

Aplicação 12 (ENEM 2022). Peças metálicas de aeronaves abandonadas em aeroportos serão recicladas. Uma dessas peças é maciça e tem o formato cilíndrico, com a medida do raio da base igual a 4 cm e a da altura igual a 50 cm. Ela será derretida, e o volume de metal resultante será utilizado para a fabricação de esferas maciças com diâmetro de 1 cm, a serem usadas para confeccionar rolamentos. Para estimar a quantidade de esferas que poderão ser produzidas a partir de cada uma das peças cilíndricas, admite-se que não ocorre perda de material durante o processo de derretimento. Quantas dessas esferas poderão ser obtidas a partir de cada peça cilíndrica?

Figura 50: Cilindro de diâmetro de 4 cm e 50 cm de altura.



Fonte: Elaborada pelas autoras.

Solução: Primeiramente, calcularemos o volume da peça cilíndrica(V_p):

$V_p = \pi \cdot 4^2 \cdot 50 = 800\pi\ cm^3$ (I)

Como o diâmetro da esfera é 1 cm, então r = 0,5 cm. Agora, calculando o volume da esfera(V_e)

$V_e = \frac{4 \cdot \pi \cdot (0{,}5)^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 0{,}125}{3} = \frac{0{,}5\pi}{3} cm^3$ (II)

Fazendo a divisão entre (I) e (II), tem-se:

$\frac{800\pi}{\frac{0{,}5\pi}{3}} = 800\pi \cdot \frac{3}{0{,}5\pi} = 160\pi \cdot \frac{3}{0{,}1\pi} = 4{,}800$

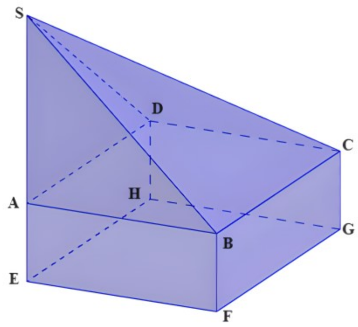
Logo, poderá ser obtido 4,800 esferas.

Na questão seguinte temos o uso dos volumes da pirâmide e do paralelepípedo para o cálculo da medida do segmento do sólido.

Aplicação 13 (Fuvest 2015). O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que

AE = 2cm, AD = 4cm e AB = 5cm. Qual é a medida do segmento SA que faz com que o volume do sólido seja igual à $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH?

Figura 51: pirâmide na parte superior e paralelepípedo reto na parte inferior.



Fonte: Fuvest 2015.

Solução: Podemos perceber que o volume total(V_T) do sólido é a soma do volume da pirâmide(V_{SABCD}) com o volume do paralelepípedo(V_{EFGH}) e chamemos SA = x. Assim, calculando o volume de ambos, temos:

$$V_T = V_{SABCD} + V_{EFGH} = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h + Ab \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot x + 4 \cdot 5 \cdot 2 = \frac{20x}{3} + 40$$

Agora, calculando o volume da pirâmide(V_{SEFGH}) temos:

$$V_{SEFGH} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot (2 + x) = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot (2 + x) = \frac{20(2+x)}{3}$$

Com isso, para encontrarmos o valor do segmento SA multiplicaremos $\frac{4}{3}$ pelo volume da pirâmide(V_{SEFGH}):

$$V_T = \frac{4}{3} \cdot V_{SEFGH} \Rightarrow \frac{20x}{3} + 40 = \frac{4}{3} \cdot \frac{20(2+x)}{3} \Rightarrow \frac{20x+120}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{40+20x}{3} = \frac{20x+120}{3} = \frac{160+80x}{9}$$

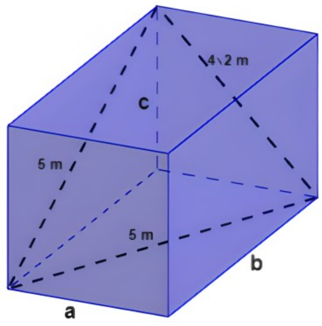
$$\Rightarrow \frac{60x+360}{9} - \frac{160-80x}{9} = 0 \Rightarrow \frac{20x-200}{9} = 0 \Rightarrow 20x = 200 \Rightarrow x = 10$$

Portanto, a medida do segmento SA = x é 10 cm.

Na questão seguinte temos o uso do volume do paralelepípedo para o cálculo da capacidade máxima de recebimento de água em uma piscina.

Aplicação 14 (Uece 2023). Uma piscina localizada na cobertura de um edifício residencial possui, internamente, a forma de um paralelepípedo retangular, com base plana horizontal. Se as medidas das linhas diagonais das faces laterais e da base interna da piscina são, respectivamente, 5 m, $4\sqrt{2}$ m e 5 m, então qual a capacidade máxima de recebimento de água no interior da piscina, em litros? Nota: 1 litro equivale a 1 dm^3.

Figura 52: pirâmide na parte superior e paralelepípedo reto na parte inferior.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Com os dados oferecidos e usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$a^2 + b^2 = (5)^2$ (I)

$b^2 + c^2 = (5)^2$ (II)

$a^2 + c^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$ (III)

Fazendo a subtração de (I) e (II), temos:

$a^2 - c^2 = 0 \Rightarrow a^2 = c^2$, ou seja, $a = c$

Se substituirmos em (III):

$a^2 + a^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 2a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 4$, logo, a = c = 4

Agora substituindo o resultado de a e c em (II):

$(b)^2 + (4)^2 = (5)^2 \Rightarrow b^2 + 16 = 25 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Como temos o valor de a, b e c podemos usá-los no cálculo do volume do paralelepípedo(V_p), assim:

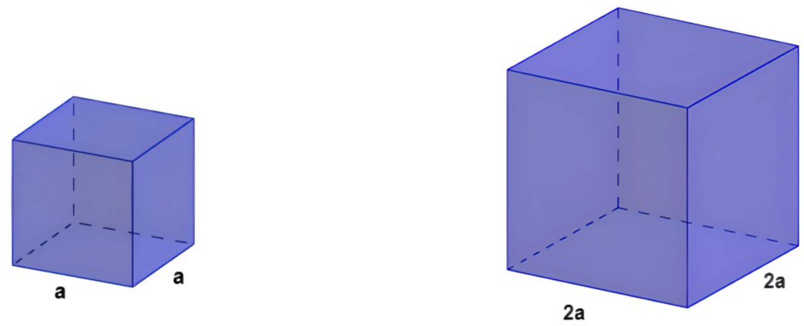
$V_p = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48\, m^3$

Logo, como queremos em litros, a capacidade máxima de água na piscina é $48000l$

Na questão seguinte temos os usos do volume e da área da superfície do cubo para o cálculo da economia do transporte de material de um produto.

Aplicação 15 (Fgv 2023). Certo produto é transportado em contêineres cúbicos. Para reduzir o custo da embalagem no transporte, os transportadores pretendem trocar o contêiner atual por um cubo maior, com aresta duas vezes a aresta do cubo atual. Suponha que o material gasto para montar um contêiner seja proporcional à área da superfície do cubo. Ao transportar um volume correspondente ao cubo maior totalmente cheio, a economia de material com o cubo maior em relação ao material gasto com os contêineres atuais, necessários para transportar o mesmo volume?

Figura 53: Cubo de aresta da base a e cubo de aresta da base 2a.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Sendo que n é *a quantidade de cubos menores para cada cubo maior, temos:*

$V_{maior} = V_{menor} \Rightarrow (2a)^3 = n \cdot a^3 \Rightarrow 8a^3 = n \cdot a^3 \Rightarrow n = 8$.

Agora, calculando a economia de material, temos:

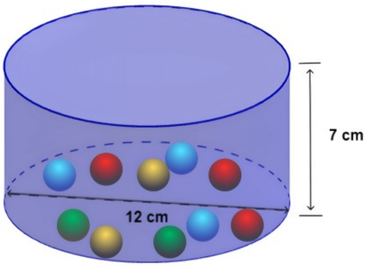
$$\frac{8 \cdot A_{menor} - A_{maior}}{8 \cdot A_{menor}} = \frac{8 \cdot 6a^2 - 6(2a)^2}{8 \cdot 6a^2} = \frac{48a^2 - 24a^2}{48a^2} = \frac{24a^2}{48a^2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Portanto, terá uma economia de 50%.

Na questão seguinte temos o uso dos volumes do cilindro e da esfera para o cálculo da quantidade necessária para encher a metade de uma piscina de bolinha.

Aplicação 16. Em uma festa de aniversário será usado uma piscina de bolinhas coloridas para as crianças brincarem. A piscina tem o formato de um cilindro reto, com altura 7 cm e diâmetro de 12 cm, como cada bolinha tem raio de 1 cm. Quantas bolinhas são necessárias para preencher a metade da piscina?

Figura 54: Cilindro de diâmetro 12 cm e 7 cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como queremos preencher a metade da piscina, temos que a altura será 3,5 cm e o raio 6 cm. Calculando o volume do cilindro(V_c):

$V_c = \pi \cdot (6)^2 \cdot 3{,}5 = 126\pi\ cm^3$

Agora, como cada bolinha tem raio 1 cm, podemos calcular o volume da bolinha$(V_b) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{4\pi}{3}\ cm^3$

Fazendo a divisão do volume do cilindro pelo volume de cada bolinha, temos que:

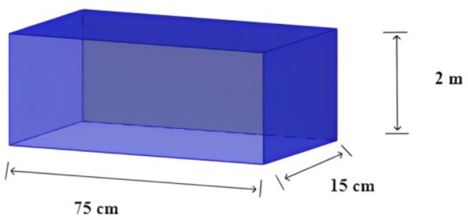
$x = \frac{V_c}{V_b} = \frac{126\pi}{\frac{4\pi}{3}} = 126\pi \cdot \frac{3}{4\pi} = 94$

Logo, a quantidade de bolinhas necessárias para encher a metade da piscina é 94 bolinhas.

Na questão seguinte temos o uso do volume do paralelepípedo para o cálculo da capacidade de armazenar livros em uma prateleira.

Aplicação 17. Uma estudante tem uma estante de livros com prateleiras retangulares no formato de um paralelepípedo. Se uma prateleira tem uma largura de 75 cm, uma profundidade de 15 cm e uma altura de 2 metros e os livros que o estudante guarda tem em média 30 cm de comprimento, 12 cm de largura e 2,5 cm de altura, quantos livros ele pode guardar, em média, nessa prateleira?

Figura 55: paralelepípedo de comprimento de 75 m, largura de 15 m e altura de 2 m.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

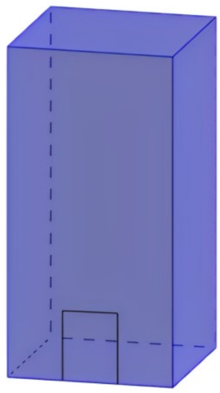
Solução: Sendo a largura de 75 cm e a profundidade de 15 cm e altura de 2 m = 200 cm, calculando o volume do paralelepípedo $(V_p) = 75 \cdot 15 \cdot 200 = 225.000$ cm³. O volume de um livro é $(V_l) = 30 \cdot 12 \cdot 2{,}5 = 900$ cm³.

Logo, o estudante pode guardar, em média, $225.000 \div 900 = 250$ livros nessa prateleira.

Na questão seguinte temos o uso da área da superfície do prisma regular para o cálculo da quantidade de tinta necessária para pintar as paredes externas de um prédio.

Aplicação 18. O dono de um prédio, com o formato de um prisma retangular, planejar pintar esse prédio. A área total das paredes externas do prédio é de 1.400 m². Se cada litro de tinta cobre 10 m², quantos litros de tinta serão precisos comprar?

Figura 56: Prisma retangular.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como a área das paredes externas medem 1.400 m², dividindo a área pela capacidade de da cobertura de um litro de tinta, temos que:

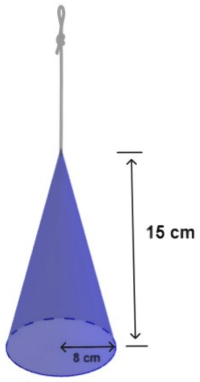
$$Litros\ de\ tinta\ necessários = \frac{área\ total\ das\ paredes}{capacidade\ de\ cobertura\ da\ tinta} = \frac{1.400}{10} = 140$$

Portanto, precisamos de 140 litros de tinta para pintar o prédio.

Na questão seguinte temos o uso da área da superfície de um cone reto para o cálculo de material necessário para cobrir uma luminária.

Aplicação 19. Uma empresa de luminária está querendo criar uma luminária nova de pendente lustre em forma de cone circular reto. Cada luminária tem um raio de base de 8 cm e uma altura de 15 cm. A empresa deseja cobrir o cone com um material para deixá-lo mais reflexivo, quanto de material será necessário cobrir a luminária? (Nota: $\pi \cong 3,14$)

Figura 57: Cone reto de raio 8 cm e altura 15 cm.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Usando o Teorema de Pitágoras para descobriremos a geratriz, temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow g^2 = 225 + 64 \Rightarrow g^2 = 289 \Rightarrow g = \sqrt{289} \Rightarrow g = 17$ cm

Agora, calculando a área do cone(A_c), tem-se:

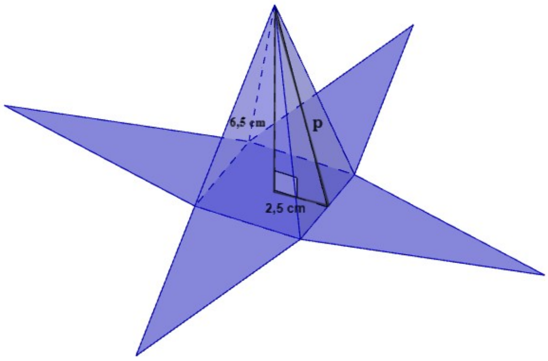
$A_c = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8 \cdot 17 = 64\pi + 136\pi = 142\pi = 142 \cdot 3{,}14 = 445{,}88$ cm²

Portanto, a quantidade de material necessário para cobrir a luminária é 445,88 cm².

Na questão seguinte temos o uso da área da superfície do triângulo para o cálculo das faces laterais para o molde das lembrancinhas de um aniversário.

Aplicação 20. A dona de uma loja que faz lembrancinhas de aniversário foi contratada para fazer uma lembrancinha no formato de pirâmide retangular. Resolveu fazer um molde para facilitar em fazê-los, onde tem 5 cm de largura e 6,5 cm de altura. Querendo fazer o molde das faces laterais que são triângulos isósceles, qual a área de cada triângulo?

Figura 58: Pirâmide retangular e sua planificação.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Calcularemos a apótema da pirâmide usando o Teorema de Pitágoras para descobrirmos a altura da pirâmide.

Assim:

$p^2 = (6,5)^2 + (2,5)^2 \Rightarrow p^2 = 42,25 + 6,25 \Rightarrow p^2 = 48,5 \Rightarrow p = \sqrt{48,5} \Rightarrow p \cong 6,96$ cm

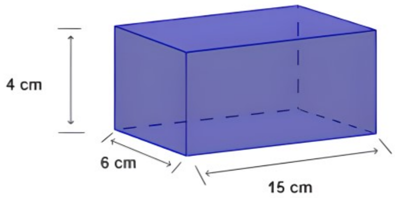
Agora, calculando a área da superfície do triângulo isósceles$(A_T) = \frac{6 \cdot 6,26}{2} = 20,88$

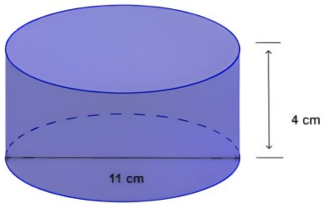
Portanto, a área de cada triângulo é $20,88$ cm².

Na questão seguinte temos o uso dos volumes do cilindro e do paralelepípedo para o cálculo da melhor opção de embalagem para um restaurante coreano.

Aplicação 21. Um restaurante coreano quer começar a fazer entrega a domicílio de um dos seus pratos famosos, o "kimbap" (sushi coreano), porém não sabem o melhor formato para a embalagem. Contendo duas opções: paralelepípedo ou cilindro. Qual a melhor opção para uma quantidade de 15 peças, com 1,5 cm de altura e 4,4 cm de diâmetro. E o paralelepípedo tem 15 cm de comprimento, 6 cm de largura e 4 cm de altura e o cilindro tem 11 cm de diâmetro e 4 cm de altura.

Figura 59: paralelepípedo e cilindro.





Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Como o raio de cada kimbap é 2,2 cm, podemos calcular o volume do kimbap (V_k):

$(V_k) = \pi \cdot (2{,}2)^2 \cdot 1{,}5 = 7{,}26\pi = 7{,}26 \cdot 3{,}14 = 22{,}7964$ cm³.

Logo, como são 15 peças, então 15 x 22,7964 = 341,946 cm³

Agora, calculando o volume de cada embalagem:

(I) Volume do paralelepípedo$(V_p) = 15 \cdot 6 \cdot 4 = 360$ cm³

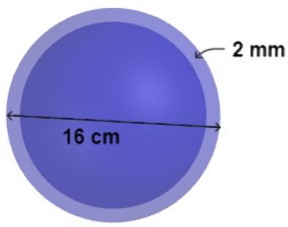
(II) Volume do cilindro$(V_c) = \pi \cdot (5{,}5)^2 \cdot 4 = 121\pi = 121 \cdot 3{,}14 = 379{,}94$ cm³

Portanto, melhor embalagem é o paralelepípedo para a quantidade de kimbap.

Na questão seguinte temos o uso da área da superfície de uma esfera para o cálculo da quantidade de revestimento necessário para cobrir a bola.

Aplicação 22. Para uma competição da ginástica rítmica, a bola, um dos aparelhos usados pela equipe será aplicado uma camada de revestimento para protegê-lo. Sendo o seu diâmetro 16 cm e o revestimento uma espessura de 2 mm, quantos centímetros quadrados de material precisará para cobrir a bola com esse revestimento? (Nota: $\pi \cong 3{,}14$).

Figura 60: Esfera de 16 cm de diâmetro.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Sendo o diâmetro da bola original é 16 cm, então o seu raio é 8 cm. E como a espessura do revestimento é de 2 mm, deve-se adicionar 2mm (ou 0,2 cm) no raio original.

Assim:

Raio com revestimento = raio original + espessura do revestimento

Raio com revestimento = 8 cm + 0,2

Raio do revestimento = 8,2 cm

Calculando a área da superfície da bola com o revestimento(A_r), tem-se:

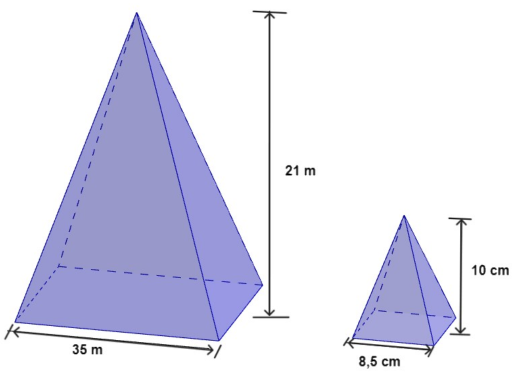
$A_r = 4\pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (8{,}2)^2 = 4 \cdot \pi \cdot 67{,}24 = 268{,}96 \cdot \pi = 844{,}53$

Portanto, são necessários para cobrir a bola $844{,}53$ cm².

Na questão seguinte temos o uso do volume da pirâmide para o cálculo do quociente entre a pirâmide real e a miniatura.

Aplicação 23. Deseja-se fazer uma miniatura da pirâmide do maior museu de arte do mundo, o museu Louvre de Paris. Com 10 cm de altura, 8,5 cm se largura. Sabendo que a pirâmide real tem o 21 m de altura e 35 m de largura na base. Qual o quociente que representa o volume original em relação a miniatura?

Figura 61: pirâmide real e miniatura da pirâmide .



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Solução: Primeiro, calculando o volume da miniatura (V_m), temos:

$V_m = \frac{1}{3} \cdot (0{,}085 \cdot 0{,}085) \cdot 0{,}1 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}007225 \cdot 0{,}1 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}0007225 = 0{,}00024083$ m³

Agora, calculando o volume da pirâmide real(V_r):

$V_r = \frac{1}{3} \cdot (35 \cdot 35) \cdot 21 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}225 \cdot 21 = \frac{1}{3} \cdot 25.725 = 8.575$ m³

Com isso, calculando o quociente entre os dois volumes:

$$Quociente = \frac{volume\ da\ pirâmide\ real}{volume\ da\ \min i\, atura} = \frac{8.575}{0{,}00024085} \cong 35.603.072$$

Portanto, o volume da pirâmide real é aproximadamente 35.603.072 vezes maior que o volume da miniatura.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho possibilitou uma análise no decorrer de sua elaboração de como os conceitos geométricos e sua aplicabilidade estão presentes na realidade das pessoas e através disso é possível afirmar por meio das aplicações que o conhecimento de alguns conceitos da geometria espacial é essencial para conseguir visualizar as propriedades e definições abordadas, com maior facilidade, permitindo ter várias percepções favoráveis.

Ao utilizar os cálculos de áreas e volumes observamos a partir do desenvolvimento das demonstrações que para se chegar nas fórmulas de área e volume é fundamental ter algum conhecimento prévio sobre raciocínio lógico matemático o que possibilita a melhor compreensão do que está sendo apresentado.

Então nesse sentido fica evidente que alguns conhecimentos acerca de cálculos de sólidos geométricos podem auxiliar a fim de que se consiga propor resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo de volumes e áreas destes sólidos, sejam eles pirâmides, prismas, esferas, cilindros, cones, entre outros em situações reais.

Dessa forma para o presente estudo foram coletadas e formuladas situações problemas sobre ocorrências comuns para analisar e investigar os conceitos e a importância das aplicações da geometria espacial, estas dispostas no capítulo 5. Como proposto temos os exemplos a seguir: aplicação 19, sobre a aplicação da expressão do cálculo de volume - como o uso do volume do cilindro para o cálculo da altura das colunas de água em uma construtora, neste caso para solução do problema primeiro tem-se que conhecer o raio do reservatório central para descobrir o seu volume através dos dados fornecidos pela situação problema e em seguida faz-se uso da fórmula do volume do cilindro que é dado pelo produto entre a área da base (sendo que a base sempre é um círculo) e sua altura, logo, para encontrar a altura exigida tem-se que encontrar o volume dos reservatórios auxiliares. Sendo necessário calcular o volume de um dos canos (cilíndricos) multiplicando este por quatro (como temos 4 canos conectados aos reservatórios) para encontrar a quantidade de água que passam por eles. Podemos observar que o reservatório central é igual ao volume dos canos mais 4 vezes o volume do reservatório auxiliar, (pois temos 4 reservatórios) utilizando os resultados anteriores já encontrados substituímos na fórmula de volume do cilindro, assim se chega ao valor da altura das colunas de água após cessar o fluxo entre os reservatórios auxiliares.

Na situação seguinte temos o uso da área da superfície de um cone reto como visto na aplicação 10, para o cálculo do material necessário para cobrir uma luminária. No problema proposto, para se obter a área da luminária (cone) temos que encontrar a sua área lateral, desta maneira utilizamos o teorema de Pitágoras para encontrar a sua geratriz usando o raio da base e a sua altura, com o resultado da geratriz podemos utilizar a fórmula da área do cone (área da base mais área lateral) para encontrar a quantidade necessária de material para cobrir a luminária.

Por fim, através das aplicações expostas percebe-se a importância do domínio e da contribuição dos conceitos geométricos espaciais para obtenção de soluções com mais facilidades e eficiência em situações presentes no cotidiano.

REFERÊNCIAS

BICUDO, I. **Os Elementos Euclides**, São Paulo: Editora Unesp, 2009.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **2023**. UPF: Questão 43, Processo seletivo de verão 2023. <Vestibular (upf.br) >.Acesso em: 18 de Agosto de 2023.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. 5. ed. São Paulo: Editora atual, 2005.

ESA.**2023**. Esa: Questão 6, MATEMATICA. Disponível em:<Prova_Geral_Tipo_A_para_divulgação.pdf (eb.mil.br)>. Acesso em 18 de Junho de 2023.

EVES, H. **Introdução á historia da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FAPEC. **2020**. UFMS: Questão 24, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias. <PSV - 2020 - Final (ufms.br)>. Acesso em: 7 de Junho de 2023.

Giovanni Júnior, José Ruy; Castrucci Benedicto. **A conquista da matemática: 6° ano, ensino fundamental anos finais.** 4. ed. São Paulo: FDT, 2018.

INEP. **2019**. Enem PPL: Questão 156, Prova de Matemática e suas Tecnologias. <2019_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD5.pdf (inep.gov.br)>. Acesso em: 16 de Junho de 2023.

INEP. **2019**. Enem: Questão 178, Prova de Matemática e suas Tecnologias.<2019_PV_impresso_D2_CD5.pdf (inep.gov.br) >. Acesso em: 17 de Agosto de 2023.

INEP. **2020**. Enem: Questão 178, Prova de Matemática e suas Tecnologias. <P2 2_DIA_CAD_6 CINZA_CN_MT.indd (inep.gov.br) >. Acesso em: 17 de Agosto de 2023.

INEP. **2021**. Enem: Questão 144, Prova de Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <Amarelo CN MT 2 Dia P1.indb (inep.gov.br)>. Acesso em: 16 de Junho de 2023.

INEP. **2022**. Enem: Questão 148, Prova de Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <2022_PV_impresso_D2_CD5.pdf (inep.gov.br)>. Acesso em: 16 de Junho de 2023.

ENEP. **2022**. Enem: Questão 169, Prova de Matemática e suas Tecnologias<2022_PV_impresso_D2_CD5.pdf (inep.gov.br) >. Acesso em: 19 de Agosto de 2023.

MACHADO, Antonio dos santos. **Matemática: Temas e Metas, 4**: Áreas e Volumes, São Paulo: Editora atual, 1998.

NETO. Angelo Papo. Módulo de geometria Espacial 2 - Volumes e áreas de primas e pirâmides. **Portal da OBMEP**, 2018. Disponível em: <http://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=40 >. Acesso em: 17 de junho de 2023.

PAES. **2021**. Uema: Questão 148, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias. Disponível em: <2-PROVA-PAES-2021-DIA-05_07_2021.pdf (uema.br)>. Acesso em: 16 de Junho de 2023.

PARANÁ. **2023**. Unioeste: Questão 48, Conhecimentos Gerais. Disponível em: <Tarde.pdf (unioeste.br)>. Acesso em: 20 de Agosto de 2023.

PCI. **2023**. FGV: Questão 169, Prova de conhecimentos Gerais<Provas Polícia Militar-AC (pciconcursos.com.br) >. Acesso em: 16 de Agosto de 2023.

USP. **2015**. Fuvest: Questão 49, Prova de conhecimentos Gerais<FUVEST 2015 - Primeira fase - Prova V>. Acesso em: 22 de Agosto de 2023.

USP. **2023**. Fuvest: Questão 86, Prova de Conhecimento Gerais. Disponível em: <Microsoft Word - PROVA_V (fuvest.br)>. Acesso em 18 de Junho de 2023.