



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS TENSORES:
APLICAÇÕES NA TEORIA DA RELATIVIDADE**

José Guilherme de Araújo

PIRIPIRI
- 2025 -

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS TENSORES:
APLICAÇÕES NA TEORIA DA RELATIVIDADE**

José Guilherme de Araújo

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Prof. Dr. Neymar José Nepomuceno Cavalcante, apresentado em complementação aos requisitos para obtenção do título de Graduado em Licenciatura Plena em Física.

A658i Araujo, Jose Guilherme de.

Uma introdução ao estudo dos tensores: aplicações na Teoria da Relatividade / Jose Guilherme de Araujo. - 2025.
34f.: il.

Monografia (graduação) - Curso de Licenciatura em Física,
Campus Professor Antônio Giovanni Alves de Sousa da Universidade
Estadual do Piauí, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Neymar José Nepomuceno Cavalcante".

1. Tensores. 2. Álgebra Tensorial. 3. Tensor Energia-Momento.
4. Relatividade. I. Cavalcante, Neymar José Nepomuceno . II.
Título.

CDD 530.11

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
ANA ANGELICA PEREIRA TEIXEIRA (Bibliotecário) CRB-3^a/1217

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que nunca soltou a minha mão e é a força que me faz continuar fazendo o que eu gosto.

À minha família, que sempre depositaram total confiança em mim, me impulsionaram a buscar o melhor caminho, foram o meu apoio emocional e quem me fez ficar sempre de pé durante todo esse processo.

Ao meu colega de turma, José Aurilan, pela amizade e por todo o apoio acadêmico.

Ao professor Dr. Neymar Nepomuceno, por sempre se empenhar em mostrar da melhor forma os conteúdos estudados.

A todo o corpo docente do curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual do Piauí - Campus Piripiri.

*Existe uma força motriz mais poderosa do
que o vapor, a eletricidade e a energia
atômica: a vontade.*

(Albert Einstein)



ANEXO A RESOLUÇÃO CEPEX 003/2021 (TCC)
ATA DE APRESENTAÇÃO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e quatro dias do mês de junho de 2025, às quinze horas, na sala sete do Campus Professor Antônio Giovanni Alves de Sousa UESPI - Piripiri, na presença da banca examinadora, presidida pelo professor **Dr. NEYMAR JOSÉ NEPOMUCENO CAVALCANTE** e composta pelos seguintes membros: 1) professor **Dr. Giovane de Souza Silva** e 2) professor **Dr. Éric Carvalho Rocha** o aluno **José Guilherme de Araújo** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Licenciatura em Física como elemento curricular indispensável à Colação de Grau, tendo como título: **“UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS TENSORES: APLICAÇÕES NA TEORIA DA RELATIVIDADE”**.

A Banca Examinadora reunida em sessão reservada deliberou e decidiu pelo resultado aprovado, obtendo a nota final 10,0, ora formalmente divulgado ao aluno e aos demais participantes, e eu professor **Dr. Anilton de Brito Vieira Filho** na qualidade de professor titular da disciplina de TCC II lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos membros da Banca Examinadora e pelo aluno apresentador do trabalho.

Assinaturas:

Documento assinado digitalmente
gov.br ANILTON DE BRITO VIEIRA FILHO
Data: 07/10/2025 08:35:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

1 - Professor titular da disciplina de TCC
Documento assinado digitalmente

gov.br NEYMAR JOSE NEPOMUCENO CAVALCANTE
Data: 08/10/2025 00:39:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

2 - Presidente da Banca Examinadora
Documento assinado digitalmente

gov.br GIOVANE DE SOUZA SILVA
Data: 08/10/2025 06:24:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

3 - Membro da Banca
Documento assinado digitalmente

gov.br ERIC CARVALHO ROCHA
Data: 08/10/2025 10:00:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

4 - Membro da Banca

Documento assinado digitalmente

gov.br JOSE GUILHERME DE ARAUJO
Data: 08/10/2025 13:22:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

5 - Aluno(a)

RESUMO

Tensores são objetos matemáticos utilizados na física que generalizam escalares, vetores e matrizes. Eles permitem que as leis físicas sejam invariantes ao serem analisadas em qualquer sistema de coordenadas. Essa ferramenta se aplica no estudo de três importantes tensores na Teoria da Relatividade: Matéria Incoerente (Poeira), Fluido Perfeito e Campo Eletromagnético. Nesse contexto, este trabalho visou desenvolver a álgebra tensorial e as aplicações mencionadas. Nessa primeira parte, algumas equações que se encontram compactadas em muitos materiais de apoio foram desenvolvidas para efeito de melhor compreensão e os conceitos envolvidos na utilização dessas expressões foram tratados numa linguagem mais simples. Na segunda parte, por sua vez, cada um dos tensores foram trabalhados partindo das quantidades que os identificam, bem como os passos necessários para construí-los, também utilizando uma linguagem mais clara. Mediante o que foi feito, após desenvolver a álgebra tensorial, o tensor para a Matéria Incoerente foi estruturado a partir de um campo vetorial de quadrivelocidade e por um campo escalar de densidade própria. Em seguida, o tensor para o Fluido Perfeito foi construído acrescentando um campo escalar de pressão aos campos de quadrivelocidade e densidade própria. Por fim, as equações de Maxwell foram convertidas para o formalismo tensorial. Com estes procedimentos, foi possível facilitar o trabalho e entendimento de alguns conceitos e equações presentes na análise tensorial e suas aplicações.

Palavras-chave: Tensores, Álgebra Tensorial, Tensor energia-momento, Relatividade.

ABSTRACT

Tensors are mathematical objects used in physics that generalize scalars, vectors, and matrices. They allow physical laws to remain invariant when analyzed in any coordinate system. This tool is applied in the study of three important tensors in the Theory of Relativity: Incoherent Matter (Dust), Perfect Fluid, and Electromagnetic Field. In this context, the present work aimed to develop tensor algebra and its mentioned applications. In the first part, some equations that are often presented in a compact form in many reference materials were fully developed to enhance understanding, and the concepts involved in the use of these expressions were addressed in simpler language. In the second part, each tensor was explored starting from the quantities that define them, as well as the steps required for their construction, also using clearer language. Based on what was done, after developing tensor algebra, the tensor for Incoherent Matter was structured using a vector field of four-velocity and a scalar field of proper density. Next, the tensor for the Perfect Fluid was constructed by adding a scalar pressure field to the four-velocity and proper density fields. Finally, Maxwell's equations were converted into the tensor formalism. With these procedures, it was possible to facilitate the understanding of certain concepts and equations involved in tensor analysis and its applications.

Keywords: Tensors, Tensor Algebra, Energy-momentum Tensor, Relativity.

Sumário

1	Introdução	10
2	Álgebra Tensorial	11
2.1	Variedades e Coordenadas	11
2.2	Parametrização de Curvas e superfícies	12
2.3	Transformação de coordenadas	15
2.4	Tensores Contravariantes	17
2.5	Tensores Covariantes	19
2.6	Tensores Mistos	22
2.7	Operações elementares com Tensores	22
3	Tensor Energia-Momento	25
3.1	Matéria Incoerente	25
3.2	Fluido Perfeito	29
3.3	Equações de Maxwell	30
4	Conclusão	33
	Referências	34

Lista de Figuras

1	Curvas em coordenadas polares.	12
2	Dois sistemas de coordenadas não degenerados cobrindo uma esfera	12
3	Sobreposição de mapas de coordenadas em uma variedade.	12
4	Parametrização em 1D.	13
5	Parametrização em 2D.	13
6	Vetor tangente à curva em P.	17
7	Linhos-mundo de partículas de poeira.	26

1 Introdução

A física necessita de um conjunto de variáveis temporais e espaciais para descrever com eficiência grande parte dos fenômenos que acontecem na natureza e no universo [1]. Com isso, devemos escolher essas variáveis (coordenadas) de acordo com o tipo de problema que estamos trabalhando, sabendo que elas podem sofrer alterações, mas a lei física que está presente em tal fenômeno, não. Assim, definimos que as leis da física devem possuir um caráter covariante, isto é, invariante e independente do conjunto de coordenadas utilizado [2, 3].

Partindo desse viés, sabemos que a teoria newtoniana e suas contribuições no desenvolvimento do cálculo diferencial foram de fundamental importância para a física. No entanto, o formalismo utilizado por Newton na elaboração de suas leis, em virtude das transformações ocorridas no início do século XX com o advento das teorias da relatividade propostas por Albert Einstein, precisou da introdução de um objeto matemático mais geral que englobasse quantidades (como vetores e escalares), no intuito de que o princípio da invariância das leis físicas fosse satisfeito. A essa ferramenta damos o nome de tensor [4, 5].

Com base nisso, na Teoria da Relatividade Restrita (TRR), por exemplo, a utilização dos tensores permite analisar propriedades como a densidade de energia e o fluxo de momento, ambos em paralelo, no contexto do espaço-tempo de Minkowski. Já na Teoria da Relatividade Geral (TRG), a gravidade é descrita pela curvatura do espaço-tempo, que depende diretamente da distribuição de matéria e energia representada pelo tensor energia-momento [6].

Nesse cenário, o tensor energia-momento compacta, em uma matriz 4×4 , informações sobre a densidade de energia e momento, fluxos de energia, além de outras grandezas que ditam como a distribuição de momento e energia afetam a geometria do espaço-tempo. Com isso, vemos a importância do estudo dos tensores, uma vez que esse ferramental matemático é utilizado em diversas áreas da física, em especial na relatividade, e em outros campos [1].

O objetivo deste trabalho é apresentar os conceitos acerca da álgebra tensorial, evidenciando como ela é desenvolvida e utilizada. Além disso, também encontram-se presentes neste material algumas aplicações de tensores na Teoria da Relatividade, com ênfase nos tensores energia-momento para a Matéria Incoerente (Poeira), Fluido Perfeito e as Equações de Maxwell no formalismo tensorial.

2 Álgebra Tensorial

O formalismo vetorial, utilizado na teoria newtoniana, contribui para a resolução de diversos problemas na mecânica clássica. Isso decorre da validade das equações vetoriais em qualquer direção do espaço tridimensional, da facilidade na análise de gráficos, da possibilidade de decompor essas expressões, entre outros fatores. Além disso, o formalismo dos vetores amplia nossa compreensão acerca dos fenômenos físicos e matemáticos por trás de cada equação utilizada. Da mesma forma, na Teoria da Relatividade, trabalhamos com a linguagem dos tensores; uma ferramenta capaz de descrever leis físicas de forma independente do sistema de coordenadas [7].

Neste trabalho, utilizaremos a notação de índice convencional (superiores e inferiores), partindo da análise de como os tensores se transformam quando realizamos uma mudança de sistema de coordenadas. Essa abordagem é mais simples e direta, pois podemos trabalhar diretamente com as componentes dos tensores, isto é, com as expressões que descrevem como esses objetos mudam localmente em diferentes sistemas de coordenadas, além de estar alinhada com os ideais de Einstein acerca da invariância das leis da física para qualquer sistema de coordenadas [7].

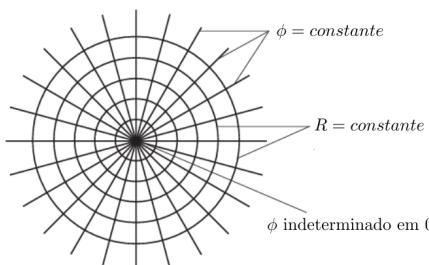
2.1 Variedades e Coordenadas

Para a realização deste trabalho, vamos considerar o uso de tensores n -dimensionais. Um tensor é um objeto matemático que generaliza escalares, vetores e matrizes, descreve relações entre essas grandezas, e que se aplica a uma entidade geométrica denominada variedade diferenciável. De forma resumida, uma variedade é algo que “localmente” se assemelha com o espaço euclidiano n -dimensional, e “globalmente” pode ter uma forma mais complexa. Podemos visualizar melhor isso ao comparar a superfície de uma esfera com o plano euclidiano, onde percebemos que no todo eles são distintos [8]. Porém, localmente, a superfície da esfera se parece com um espaço definido pelo plano euclidiano. Uma propriedade crucial que é pertinente a essa distinção é que a esfera é compacta, isto é, possui um “tamanho finito” e o plano é não compacto e se estende infinitamente. Essa característica da variedade é global, não local, o que significa que ela não pode ser detectada apenas em uma região pequena da esfera [7].

Vamos supor uma variedade qualquer de n dimensões como sendo um conjunto de pontos, em que cada ponto possui um conjunto de n coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) . A notação de índices superiores que foi utilizada será explicada nos próximos tópicos, onde está relacionada à distinção entre componentes contravariantes e covariantes de tensores. Em muitos casos, essas coordenadas podem variar de $-\infty$ a $+\infty$. Um aspecto importante é que, em geral, não é possível cobrir toda a variedade com um único sistema de coordenadas bem definido em todos os pontos (não degenerado), isto é, um sistema de coordenadas que pode

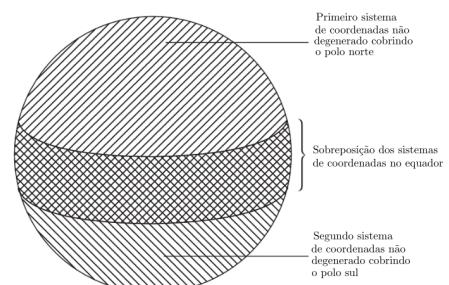
identificar unicamente cada ponto sem confusão ou ambiguidade, sendo mais conveniente, em muitos casos, utilizar sistemas de coordenadas com pontos degenerados. Por exemplo, as coordenadas polares planas (R, ϕ) no plano têm uma degeneração na origem, uma vez que ϕ não é bem definido quando $R = 0$ (Figura 1). A degenerescência na origem poderia ser evitada utilizando coordenadas cartesianas, mas opta-se pelas coordenadas polares por se tratar de um problema de simetria circular. Para cobrir toda a superfície de uma esfera, seriam necessários, no mínimo, dois sistemas de coordenadas, como ocorre, por exemplo, com as coordenadas esféricas definidas separadamente nos hemisférios norte e sul (Figura 2) [7].

Figura 1: Curvas em coordenadas polares.



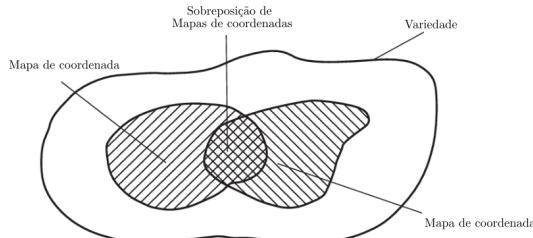
Fonte: D'Inverno (1992).

Figura 2: Dois sistemas de coordenadas não degenerados cobrindo uma esfera



Fonte: D'Inverno (1992).

Figura 3: Sobreposição de mapas de coordenadas em uma variedade.



Fonte: D'Inverno (1992).

Portanto, trabalharemos com sistemas de coordenadas que cobrem apenas uma parte da variedade e que são chamados de mapas de coordenadas. Um conjunto de mapas de coordenadas que cobre toda a variedade é chamado de atlas (Figura 3) [7].

2.2 Parametrização de Curvas e superfícies

Para entendermos a importância do processo de parametrização, vamos analisar o movimento de uma partícula ao longo de uma curva descrita no espaço tridimensional (Figura 4). Sabemos que, em geral, uma função na forma $y = f(x)$ não satisfaz o teste da reta vertical, que serve para verificar graficamente se uma relação é uma função de x e, por conseguinte, bem comportada e possível de ser analisada com mais facilidade. Neste

caso, temos que implementar a técnica de parametrização. Consideramos as coordenadas x^i da partícula em função do parâmetro u , isto é

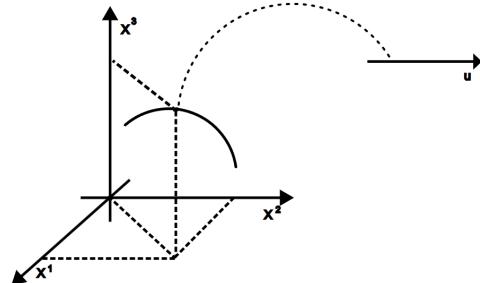
$$x^i = x^i(u) \implies \begin{cases} x^1 = x^1(u) \\ x^2 = x^2(u) \\ x^3 = x^3(u). \end{cases} \quad (1)$$

As equações acima são chamadas de equações paramétricas. Cada valor do parâmetro u corresponde a um ponto no espaço tridimensional dado pela coordenada (x^1, x^2, x^3) [9].

Da mesma forma, podemos descrever uma superfície por uma função vetorial de dois parâmetros u^1 e u^2 , como mostra a Figura 5. Então, x^1 , x^2 e x^3 , são funções das duas variáveis u^1 e u^2 [9], ou seja

$$x^i = x^i(u^j) \implies \begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2) \\ x^2 = x^2(u^1, u^2) \\ x^3 = x^3(u^1, u^2). \end{cases} \quad (2)$$

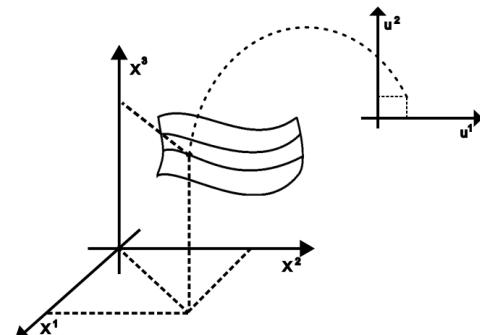
Figura 4: Parametrização em 1D.



Fonte: Autoria própria (2025).

Ao expressarmos a superfície dessa forma, dizemos que ela está parametrizada. As Eqs.(2) constituem as equações paramétricas da superfície [9].

Figura 5: Parametrização em 2D.



Fonte: Autoria própria (2025).

De modo geral, tomaremos uma variedade, e analisaremos os pontos que ela contém, bem como certos subconjuntos desses pontos que formam curvas e superfícies n -dimensionais. Como nos casos de curvas e superfícies no espaço euclidiano tridimensional, podemos descrever uma variedade de 4 dimensões, por exemplo, utilizando equações paramétricas, que nos dizem como as coordenadas dos pontos da curva variam em função de um ou mais parâmetros. Para o caso do parâmetro u , temos

$$x^a = x^a(u) \implies \begin{cases} x^1 = x^1(u) \\ x^2 = x^2(u) \\ x^3 = x^3(u) \\ x^4 = x^4(u), \end{cases} \quad (3)$$

ou na forma compacta

$$x^a = x^a(u) \quad (a = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

Da mesma forma, como um subespaço da variedade ou superfície de 4 dimensões possui 3 graus de liberdade (3 parâmetros), estes podem ser descritos pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(u^1, u^2, u^3) \\ x^2 &= x^2(u^1, u^2, u^3) \\ x^3 &= x^3(u^1, u^2, u^3) \\ x^4 &= x^4(u^1, u^2, u^3), \end{aligned}$$

ou na forma compacta

$$x^a = x^a(u^1, u^2, u^3), \quad (a = 1, 2, 3, 4). \quad (5)$$

O subespaço definido pela Eq.(5) é denominado de hipersuperfície (dimensão $n - 1$), que é como se fosse um “pedaço” que contém as mesmas características da variedade, e o processo realizado pode ser utilizado para qualquer variedade n -dimensional [7, 8].

A quantidade de parâmetros envolvidos fornece uma relação entre as coordenadas, ou seja, uma equação que as conecta e define a hipersuperfície no espaço da variedade, isto é

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0. \quad (6)$$

No mesmo viés, um ponto em uma posição geral em uma variedade tem n graus de liberdade. Se esse ponto estiver restrito a uma hipersuperfície, como um subespaço 4D, por exemplo, suas coordenadas devem obedecer a condição

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0, \quad (7)$$

que é a mesma expressão mostrada na Eq.(6). De maneira similar, os pontos em um subespaço $4D$ devem obedecer a condição de possuir apenas 3 equações que conectam suas coordenadas

$$\begin{aligned} f^1(x^1, x^2, x^3, x^4) &= 0 \\ f^2(x^1, x^2, x^3, x^4) &= 0 \\ f^3(x^1, x^2, x^3, x^4) &= 0, \end{aligned}$$

que é uma alternativa à representação paramétrica dada na Eq.(5) [7, 8].

2.3 Transformação de coordenadas

Como foi mencionado, um ponto em uma variedade pode ser coberto por muitos mapas de coordenadas diferentes. Quando realizamos operações com tensores, estas devem ser válidas para todos os sistemas de coordenadas. Com isso, precisamos analisar como esse objeto matemático se comporta quando fazemos a alteração de um sistema de coordenadas para outro. Sob esse ponto de vista, consideraremos a mudança de coordenadas $x^a \rightarrow x^{a'}$, definida pelo conjunto de n equações

$$x^{a'} = f^a(x^1, x^2, x^3, x^4) \implies \begin{cases} x^{1'} = f^1(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ x^{2'} = f^2(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ x^{3'} = f^3(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ x^{4'} = f^4(x^1, x^2, x^3, x^4), \end{cases} \quad (8)$$

sendo as funções f^a diferenciáveis, contínuas e de valor único, pelo menos em determinados intervalos de suas variáveis. Dessa forma, temos uma transformação de coordenadas que ocorre no mesmo ponto da variedade, mas com coordenadas diferentes, onde as coordenadas antigas são (x^1, x^2, x^3, x^4) e as novas coordenadas são denotadas por $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'})$. Podemos escrever a Eq.(8) da forma compacta

$$x^{a'} = f^a(x^b), \quad (9)$$

assumindo, a partir desse ponto, que os índices latinos minúsculos variam de 1 a n , de acordo com a dimensão da variedade, e que as funções f^a dependem apenas das coordenadas antigas. Ainda é possível escrever a Eq.(8) de forma mais simples como

$$x^{a'} = x^{a'}(x^b) \implies \begin{cases} x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ x^{3'} = x^{3'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ x^{4'} = x^{4'}(x^1, x^2, x^3, x^4), \end{cases} \quad (10)$$

onde as funções $f^a(x^b)$ são denotadas por $x^{a'}(x^b)$ [3, 7].

Em seguida, realizamos a diferenciação da Eq.(10) em relação a cada uma das coordenadas x^b , o que resulta na matriz de transformação 4×4 ($n \times n$ de forma geral)

$$\left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x^{4'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{4'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{4'}}{\partial x^3} & \frac{\partial x^{4'}}{\partial x^4} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

onde o determinante J' dessa matriz é chamado de Jacobiano da transformação:

$$J' = \left| \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \right|. \quad (12)$$

Admitiremos que J' seja diferente de zero em uma certa região do espaço das coordenadas x^b . Nessas condições, o teorema da função inversa garante a existência de uma transformação inversa bem definida. Dessa forma, podemos reescrever a Eq.(10), de forma que as coordenadas antigas são escritas em função das coordenadas novas

$$x^a = x^a(x^{b'}) \implies \begin{cases} x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'}) \\ x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'}) \\ x^3 = x^3(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'}) \\ x^4 = x^4(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'}). \end{cases} \quad (13)$$

Além disso, para J' diferente de zero, a matriz de derivadas da transformação inversa é a inversa da matriz da transformação direta, e o determinante da matriz inversa é o inverso do determinante original. Logo, temos que

$$J = \left| \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}} \right|,$$

sendo $J = \frac{1}{J'}$ [3, 7].

Trabalharemos com as chamadas variedades lisas, onde as funções denotadas pelas Eqs.(10) e (13) podem ser diferenciadas infinitas vezes, o que garante que essas funções que relacionam os dois sistemas de coordenadas sejam muito bem comportadas [7, 10].

Uma superfície no espaço tridimensional é descrita pela equação $z = f(x, y)$. Tomando o diferencial dessa expressão, temos que

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Da mesma forma, podemos tomar como base a Eq.(10) e determinar o diferencial de uma

mudança de coordenadas como sendo

$$dx^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^4} dx^4, \quad (14)$$

ou, na forma compacta

$$dx^{a'} = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} dx^b. \quad (15)$$

Pela convenção de soma de Einstein, entende-se que há uma soma sobre os índices repetidos. Assim, podemos escrever a Eq.(15) sem o somatório [3, 7], isto é

$$dx^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} dx^b. \quad (16)$$

Os índices a e b são chamados de fixo e de soma, respectivamente, onde a e b podem assumir qualquer valor de 1 a n .

2.4 Tensores Contravariantes

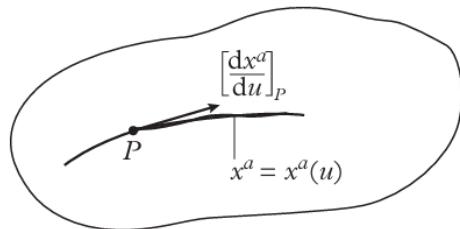
Partiremos da análise de um ponto P na variedade n -dimensional com uma curva parametrizada por u , $\gamma(u)$, onde $P = \gamma(0)$. Suponhamos também a existência de um sistema de coordenadas local na vizinhança do ponto P com coordenadas dadas por (x^1, \dots, x^n) . Com essa abordagem, podemos escrever a curva γ como sendo

$$x^a = x^a(u).$$

Realizando a diferenciação em $u = 0$, obtemos um vetor tangente à curva em P (Figura 6), definido por

$$T^a = \frac{dx^a}{du}(0). \quad (17)$$

Figura 6: Vetor tangente à curva em P.



Fonte: D'Inverno (1992).

Agora, supondo a existência de um novo sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^{n'})$, também

na vizinhança de P , é possível descrever a curva γ no sistema de coordenadas $x^{a'}$ utilizando a Eq.(10) na forma

$$x^{a'}(u) = x^{a'}(x^b(u)). \quad (18)$$

Nessas condições, o vetor tangente em P é definido por

$$T^{a'} = \frac{dx^{a'}}{du}(0), \quad (19)$$

e, por conseguinte, temos que

$$T^{a'} = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \right]_P \left[\frac{dx^b}{du}(0) \right] = \left[\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} \right]_P T^b. \quad (20)$$

Como já discutido anteriormente, o índice b está sendo somado. Com isso, podemos interpretar que as componentes do vetor tangente no novo sistema de coordenadas são obtidas através da multiplicação das componentes antigas pela matriz jacobiana da transformação de coordenadas. Definimos, portanto, um tensor contravariante de ordem 1 cujas componentes, denotadas por X^a no sistema de coordenadas x^a , se transformam sob a mudança de coordenadas

$$X^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} X^b, \quad (21)$$

onde a matriz jacobiana da transformação é avaliada no ponto P . Essa relação expressa como as componentes do tensor mudam em relação a diferentes sistemas de coordenadas, assim, evidenciando sua natureza contravariante [3, 7]. Para efeito de compreensão, tomando $a, b = 1, 2, 3$, as três equações compactadas na Eq.(21) são expressadas na forma

$$\begin{aligned} X^{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^b} X^b && \Leftrightarrow a = 1 \\ &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} X^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} X^2 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} X^3 && \Leftrightarrow b = 1, 2, 3 \\ &= \frac{\partial x}{\partial r} X^1 + \frac{\partial x}{\partial \theta} X^2 + \frac{\partial x}{\partial \phi} X^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^b} X^b && \Leftrightarrow a = 2 \\ &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} X^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} X^2 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} X^3 && \Leftrightarrow b = 1, 2, 3 \\ &= \frac{\partial y}{\partial r} X^1 + \frac{\partial y}{\partial \theta} X^2 + \frac{\partial y}{\partial \phi} X^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{3'} &= \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^b} X^b && \Leftrightarrow a = 3 \\
&= \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} X^1 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} X^2 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} X^3 && \Leftrightarrow b = 1, 2, 3 \\
&= \frac{\partial z}{\partial r} X^1 + \frac{\partial z}{\partial \theta} X^2 + \frac{\partial z}{\partial \phi} X^3,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
x^{a'} &= (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (x, y, z) \\
x^b &= (x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi).
\end{aligned}$$

Vetores “comuns”, como posição, velocidade, aceleração; são exemplos de vetores contravariantes, que se transformam como foi mostrado acima.

É fundamental estabelecer a distinção entre um objeto geométrico invariante e a forma como ele é representado em um sistema de coordenadas específico. Por exemplo, ao expressar o vetor tangente em coordenadas locais x^a , essa representação é dada por n números $[dx^a/dt]_P$, e números diferentes $[dx^{a'}/dt]_P$ no sistema de coordenadas $x^{a'}$ [7].

Podemos estender a Eq.(21) para definir tensores contravariantes de ordem superior. Para um tensor de ordem 2, por exemplo, o objeto é descrito por n^2 componentes associadas a um ponto P . Escrevemos essas componentes como X^{ab} no sistema de coordenadas x^a , que se transformam de acordo com expressão

$$X^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^c} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^d} X^{cd}. \quad (22)$$

É possível definir tensores de ordem maior seguindo a mesma lei de transformação. Um caso particularmente simples é o de um tensor de ordem zero (escalar). Por definição, um escalar é uma quantidade que permanece invariante sob transformações de coordenadas. Isso significa que, se ϕ representa um escalar em um sistema de coordenadas, então sua expressão em qualquer outro sistema será

$$\phi' = \phi \quad (23)$$

no ponto P . Essa invariância reflete a característica de um escalar, que não depende do sistema de referência escolhido [3, 7].

2.5 Tensores Covariantes

Consideraremos agora uma função escalar diferenciável ϕ (real), definida na variedade. Em um ponto genérico P , temos que $\phi(P) = k$ (k é uma constante real). No espaço

euclidiano tridimensional de coordenadas (x^1, x^2, x^3) , $\phi(x^a) = k$ define uma superfície e

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right),$$

que é o gradiente dessa função, denota um vetor normal à superfície. Tomando ϕ como um campo escalar e introduzindo um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) na vizinhança do ponto P , temos

$$\phi = \phi(x^a). \quad (24)$$

Localmente, esta equação define uma hipersuperfície S que passa pelo ponto P . A derivada de ϕ fornece um vetor covariante em P e normal a S , isto é

$$N_a = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x^a}\right]_P. \quad (25)$$

A partir daí, é notável que o índice em vetores covariantes é inferior (N_a), enquanto para vetores contravariantes, o índice é superior (T^a) [7].

Consideraremos um novo sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^{n'})$, também na vizinhança do ponto P . Continuaremos estudando a mesma hipersuperfície, mas agora em termos das novas coordenadas $x^{a'}$. Nessa nova representação, a hipersuperfície é dada por $\phi(x^{a'}) = k$ [7]. Com isso, o vetor normal à hipersuperfície no ponto P tem suas componentes denotadas por

$$N'_a = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x^{a'}}\right]_P. \quad (26)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado ao tratar da transformação das componentes de tensores contravariantes, podemos considerar que as coordenadas originais x^a sejam funções das novas coordenadas $x^{b'}$, isto é

$$\phi = \phi(x^a(x^{b'})).$$

Diferenciando em relação à $x^{b'}$ e aplicando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{b'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^a} \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}},$$

onde $\partial x^a / \partial x^{b'}$ é avaliado em P . Em seguida, podemos alterar a ordem dos termos, o índice de soma e o índice fixo (de b para a), obtendo

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{a'}} = \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} \frac{\partial\phi}{\partial x^{b'}}, \quad (27)$$

de modo que a Eq.(25) e a Eq.(26) se tornam

$$N'_a = \left[\frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} \right]_P N^b. \quad (28)$$

A equação acima utiliza a matriz inversa da transformação de coordenadas, expressa por $\partial x^b / \partial x^{a'}$ [7].

Dessa forma, podemos definir o que chamamos de vetor covariante ou tensor covariante de ordem 1, dado pelas componentes X_a no sistema de coordenadas x^a , no ponto P. A transformação desse tensor é do tipo

$$X'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} X_b, \quad (29)$$

tendo matriz de transformação avaliada no ponto P [3, 7].

Um tensor covariante atua em tensores contravariantes, como se fossem funções que agem sobre vetores. O gradiente de uma função escalar e um vetor normal à uma superfície são exemplos de tensores covariantes.

De maneira similar ao que foi feito no caso dos tensores contravariantes, tomando $a, b = 1, 2, 3$, as três equações compactadas na Eq.(29) podem ser expressadas na forma

$$\begin{aligned} X'_1 &= \frac{\partial x^b}{\partial x^{1'}} X_b && \Leftarrow a = 1 \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial x^{1'}} X_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x^{1'}} X_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x^{1'}} X_3 && \Leftarrow b = 1, 2, 3 \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} X_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x} X_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x} X_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'_2 &= \frac{\partial x^b}{\partial x^{2'}} X_b && \Leftarrow a = 2 \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial x^{2'}} X_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x^{2'}} X_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x^{2'}} X_3 && \Leftarrow b = 1, 2, 3 \\ &= \frac{\partial r}{\partial y} X_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y} X_2 + \frac{\partial \phi}{\partial y} X_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'_3 &= \frac{\partial x^b}{\partial x^{3'}} X_b && \Leftarrow a = 3 \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial x^{3'}} X_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x^{3'}} X_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x^{3'}} X_3 && \Leftarrow b = 1, 2, 3 \\ &= \frac{\partial r}{\partial z} X_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z} X_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} X_3. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} x^{a'} &= (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (x, y, z) \\ x^b &= (x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi). \end{aligned}$$

Podemos definir um tensor covariante de ordem 2 pela lei de transformação

$$X'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^d}{\partial x^{b'}} X_{cd}, \quad (30)$$

e assim por diante para tensores de ordem superior [3, 7].

2.6 Tensores Mistos

Com base nas transformações feitas para obter as Eqs.(22) e (30), podemos introduzir a noção de tensores mistos, que possuem índices contravariantes e covariantes. Por exemplo, analisando um tensor misto de ordem 3, com um índice superior (contravariante) e dois inferiores (covariantes), as componentes desse tensor, em um novo sistema de coordenadas, se transformam segundo a lei

$$X'_{bc} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^f}{\partial x^{c'}} X_{ef}. \quad (31)$$

Quando um tensor possui p índices contravariantes e q índices covariantes, dizemos que ele é um tensor do tipo (p, q) . Essa notação indica quantos índices superiores e inferiores estão presentes nas suas componentes [3, 7].

2.7 Operações elementares com Tensores

Quando realizamos operações matemáticas com tensores, o resultado obtido também será um tensor, desde que a operação preserve a estrutura de transformação tensorial. A quantidade que foi operada deve obedecer à regra de transformação apropriada. Com isso, é possível somar dois tensores do mesmo de tipo $(1, 2)$, por exemplo, e obter como resultado um outro tensor também de tipo $(1, 2)$, isto é

$$X_{bc}^a = Y_{bc}^a + Z_{bc}^a. \quad (32)$$

O mesmo vale para a subtração de tensores do mesmo tipo e para a multiplicação por um número real. Nos dois casos, o resultado continua sendo um tensor do mesmo tipo, uma vez que essas operações não alteram a regra de transformação [7].

Considere um tensor covariante de ordem 2. Dizemos que esse tensor é simétrico

quando suas componentes satisfazem a relação

$$X_{ab} = X_{ba}. \quad (33)$$

Essa condição reduz o número de componentes independentes, uma vez que os valores espelhados na matriz de componentes são iguais, resultando em $\frac{1}{2}n(n + 1)$ componentes independentes. O mesmo vale para tensores de natureza contravariante, desde que seja feita a comparação entre índices do mesmo tipo. Caso a troca de índices resulte na troca de sinal, ou seja

$$X_{ab} = -X_{ba}, \quad (34)$$

o tensor é chamado anti-simétrico, possuindo $\frac{1}{2}n(n - 1)$ componentes independentes [7]. É possível separar as partes simétrica e anti-simétrica de um tensor com duas maneiras padronizadas, respectivamente:

$$X_{(ab)} = \frac{1}{2}(X_{ab} + X_{ba}), \quad (35)$$

$$X_{[ab]} = \frac{1}{2}(X_{ab} - X_{ba}). \quad (36)$$

De forma geral, podemos definir as partes simétrica e anti-simétrica de um tensor de ordem superior da seguinte forma:

$$X_{(a_1 a_2 \dots a_r)} = \frac{1}{r!} \quad (\text{soma sobre todas as permutações dos índices } a_1 \text{ a } a_r),$$

e

$$X_{[a_1 a_2 \dots a_r]} = \frac{1}{r!} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_r} X_{a_1 a_2 \dots a_r}.$$

Como exemplo de tensor anti-simétrico de ordem 3, temos

$$X_{[abc]} = \frac{1}{6} (X_{abc} - X_{acb} + X_{cab} - X_{cba} + X_{bca} - X_{bac}). \quad (37)$$

Observando a expressão acima, podemos perceber que os termos positivos surgem das permutações cíclicas dos índices, enquanto os termos negativos aparecem quando trocamos a ordem dos dois últimos índices em cada termo positivo. Quando um tensor permanece inalterado ao aplicar a simetrização completa em seus índices, se trata de um tensor totalmente simétrico. Analogamente, se um tensor coincide com sua anti-simetria completa, se trata de um tensor totalmente anti-simétrico [7].

Se tivermos um campo tensorial do tipo (p, q) , podemos multiplicá-lo por um campo

escalar ϕ , que é um tensor do tipo $(0,0)$. O resultado continua sendo um tensor do mesmo tipo (p,q) , uma vez que a multiplicação por escalares apenas modifica o valor das componentes, sem interferir na maneira como elas se transformam. Além disso, também é possível combinar dois tensores de tipos diferentes: supondo que temos um tensor Y do tipo (p_1, q_1) e um tensor Z do tipo (p_2, q_2) , ao multiplicarmos suas componentes, obtemos um conjunto de componentes de um tensor do tipo $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ [7], isto é

$$X^a_{bcd} = Y^a_b Z_{cd}. \quad (38)$$

Outra operação fundamental envolvendo tensores é a contração. Esse processo consiste em somar sobre um par de índices, um contravariante e um covariante, que estão em uma mesma expressão. Considerando um campo vetorial contravariante X^a e um campo vetorial covariante Y_a , podemos combiná-los da seguinte forma:

$$\phi = X^a Y_a, \quad (39)$$

onde o índice a é contraído, ou seja, somado. Do ponto de vista físico, isso nos mostra a obtenção de resultados independentes de coordenadas usando tensores [7].

Podemos estender o conceito de contração para tensores de ordem superior. Dado um tensor misto do tipo (p,q) , é possível realizar uma contração entre um índice contravariante e um índice covariante. Essa operação gera um novo tensor do tipo $(p-1, q-1)$, isto é

$$X^a_{bcd} \longrightarrow X^a_{acd} = Y_{cd},$$

resultando num tensor do tipo $(0,2)$, onde contraímos os índices a (superior) e b (inferior). O resultado da contração é sempre um tensor, independentemente do sistema de coordenadas utilizado [7].

Outra maneira de representar a contração é utilizando o delta de Kronecker:

$$X^a_{acd} = \delta^b_a X^a_{bcd}. \quad (40)$$

Nesse caso de multiplicação, o delta de Kronecker transforma o índice b em a , e vice-versa, ocorrendo a contração entre eles. Obtemos um tensor invariante (campo escalar) quando realizamos contrações sucessivas com tensores que possuem o mesmo número de índices superiores e inferiores, isto é, um tensor do tipo (p,p) . Sabemos que escalares são invariantes, o que os tornam importantes na física, pois essas grandezas não dependem do sistema de coordenadas e são fisicamente mensuráveis. Foi essa propriedade que motivou Einstein a utilizar tensores na formulação das leis da relatividade geral, uma vez que, ao utilizar o formalismo tensorial, as leis da física permanecem válidas em qualquer sistema

de coordenadas [3, 7].

3 Tensor Energia-Momento

Na formulação da relatividade, a interação entre a matéria, os campos e a geometria do espaço-tempo são denotadas pelas equações de Einstein, onde o conteúdo material do universo aparece representado por um objeto matemático chamado tensor energia-momento. Dependendo do tipo de matéria ou campo físico estudado, são empregadas diferentes expressões para esses tensores. Entre os mais relevantes na física, destacam-se três: a matéria incoerente, o fluido perfeito e o campo eletromagnético (formulado a partir das equações de Maxwell na forma tensorial) [1, 7].

3.1 Matéria Incoerente

Vamos começar analisando o caso mais simples de matéria na relatividade: a matéria incoerente (poeira). Podemos entendê-la como um modelo em que as partículas do fluido não interagem entre si, não havendo pressões, viscosidade nem trocas de energia interna. Esse tipo de matéria é descrita pelo campo vetorial de 4-velocidade (quadrivelocidade) e por um campo escalar de densidade própria. O primeiro, é denotado por

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau}, \quad (41)$$

com τ sendo o tempo próprio, que é o tempo medido no referencial de cada partícula ao longo de sua trajetória (linha-mundo) (Figura 7). A 4-velocidade representa a direção do movimento de cada partícula no espaço-tempo. O campo escalar, por sua vez, é dado por

$$\rho_0 = \rho_0(x), \quad (42)$$

que indica a densidade de massa medida por um observador que se move junto com o fluido, isto é, um observador co-móvel. Essa densidade é chamada de “própria” porque é referida ao referencial local de repouso do fluido [7].

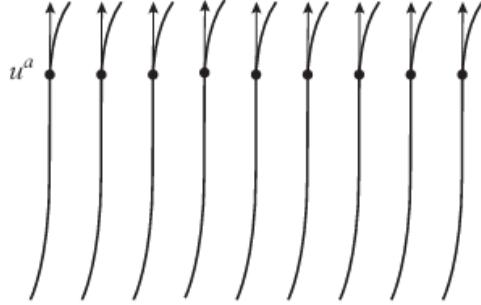
A combinação mais simples dessas duas quantidades resulta em um tensor simétrico de segunda ordem (requisito para um tensor energia-momento), conhecido como tensor energia-momento para o campo de matéria e denotado por

$$T^{ab} = \rho_0 u^a u^b. \quad (43)$$

Esse tensor mostra como a matéria incoerente influencia a geometria do espaço-tempo por meio das equações de Einstein [1, 7].

Agora, analisaremos o tensor energia-momento da matéria incoerente no contexto da

Figura 7: Linhas-mundo de partículas de poeira.



Fonte: D'Inverno (1992).

relatividade especial utilizando coordenadas cartesianas no espaço-tempo de Minkowski. Nesse caso, a quadrivelocidade de uma partícula que se move com velocidade \mathbf{u} ($c = 1$) é dada por:

$$\begin{aligned} u^a &= \gamma(u^0, u^1, u^2, u^3) \\ u^a &= \gamma(1, u^i) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

onde o fator de Lorentz é $\gamma = (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}}$. O tempo próprio τ , medido ao longo da linha do mundo da partícula, é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \nu_{ab} dx^a dx^b \\ -d\tau^2 &= \nu_{ab} dx^a dx^b \\ &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= dt^2(1 - u^2) \\ &= \gamma^{-2} dt^2, \end{aligned} \tag{44}$$

logo, temos a seguinte relação

$$dt^2 = -\gamma^2 d\tau^2. \tag{45}$$

Sendo $t = t(\tau)$, comparando a Eq.(45) com a expressão a seguir

$$\begin{aligned} t &= t(\tau) \\ dt &= \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ dt^2 &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 d\tau^2, \end{aligned}$$

então

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -\gamma^2.$$

Com isso, é possível calcular a componente T^{00} do tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho_0 u^0 u^0 \\ &= \rho_0 u^0 u_0 g^{00} \\ &= \rho_0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx_0}{d\tau} g^{00} \\ &= \rho_0 \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} g^{00} \\ &= \rho_0 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 g^{00} \\ &= \rho_0 (-\gamma^2)(-1) \\ &= \gamma^2 \rho_0. \end{aligned}$$

Podemos interpretar o valor obtido para a componente T^{00} da seguinte forma: no movimento de um corpo, a energia associada à sua massa não permanece constante, uma vez que ela aumenta em razão do fator de Lorentz (γ), que está ligado à dilatação temporal percebida por observadores em repouso em relação ao sistema. Além disso, um volume que se move com velocidade \mathbf{u} em relação a um referencial inercial sofre uma contração, isto é, uma diminuição do volume medido por um observador externo. Como consequência combinada do aumento da energia e da redução do volume, a densidade de energia percebida por esse observador externo é elevada por um fator γ^2 em relação à densidade própria (medida por um observador que se move com o elemento de matéria). Logo, se um campo de matéria com densidade própria ρ_0 atravessa um referencial fixo com velocidade \mathbf{u} , esse referencial atribui a ele uma densidade relativística

$$\rho = \gamma^2 \rho_0, \quad (46)$$

refletindo tanto os efeitos dinâmicos quanto os geométricos do movimento. Assim, a componente T^{00} do tensor energia-momento representa essa densidade de energia, com a única contribuição relevante vindo do movimento das partículas da poeira. Pra unidades em que c é diferente de 1, seria necessário incluir um fator c^2 na definição do tensor energia-momento para manter a coerência dimensional [7].

Usando a Eq.(43) e a Eq.(46), é possível escrever as demais componentes de T^{ab} na

forma

$$T^{ab} = \rho \begin{bmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y & u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_z & u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

É possível demonstrar que o movimento de um campo de matéria do tipo "poeira" pode ser descrito na forma compacta

$$\partial_b T^{ab} = 0. \quad (48)$$

Para o caso em que $a = 0$, a Eq.(47) assume a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0. \quad (49)$$

A expressão acima corresponde à equação clássica da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (50)$$

que expressa, na mecânica dos fluidos, a conservação de massa: a variação local da densidade ρ que possui velocidade \mathbf{u} . No contexto da relatividade restrita, onde a matéria e a energia são equivalentes, essa mesma equação também representa a conservação da energia para um meio de poeira. Isso se traduz matematicamente pela Eq.(48). As equações correspondentes a $a = \alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), que estão relacionadas à conservação do momento, são denotadas por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z \mathbf{u}) = 0.$$

Combinando a equação acima com a Eq.(50), temos que

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = 0. \quad (51)$$

Essa expressão é idêntica à equação de movimento para um fluido perfeito que não está submetido à pressão nem forças externas. A título de comparação com a equação de Navier-Stokes, quando aplicada a um fluido ideal, temos que

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{X}, \quad (52)$$

em que p é a pressão no fluido e \mathbf{X} representa uma força de campo (como a gravidade) por unidade de massa. Comparando com a Eq.(51), observamos que ela corresponde

ao caso em que a pressão e as forças externas são desprezadas. Com isso, trata-se de um modelo idealizado que descreve o comportamento do fluido apenas com base em sua própria movimentação, sem interferência de influências externas ou internas adicionais [1, 7].

A exigência para que o tensor energia-momento tenha divergência nula na relatividade restrita reflete diretamente os princípios de conservação da energia e do momento no campo da matéria. Essa condição justifica o nome dado a esse tensor, já que ele incorpora essas duas leis fundamentais da física. A Eq.(48) denota essa condição e é conhecida como a lei de conservação da energia-momento. No entanto, se considerarmos um espaço-tempo curvo, a expressão original precisa ser generalizada para se manter válida em qualquer sistema de referência [7]. Nessa situação, utilizamos a derivada covariante, isto é

$$\nabla_b T^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_b T^{ab} - \Gamma_{bc}^a T^{cb} - \Gamma_{bc}^b T^{ac} = 0.$$

3.2 Fluido Perfeito

Um fluido perfeito é caracterizado como contínuo, onde propriedades como a densidade, pressão e velocidade, por exemplo, são consideradas funções contínuas do espaço e do tempo. Descrevemos esse fluido por uma quadri-velocidade $u^a = dx^a/d\tau$, um campo escalar $\rho_0 = \rho_0(x)$ (densidade) e um campo escalar de pressão $p = p(x)$. No caso em que a pressão desaparece ($p \rightarrow 0$), o fluido perfeito se caracteriza como matéria incoerente. Esse comportamento no limite sem pressão serve como um critério de consistência para a generalização do modelo [11].

Para construir o tensor energia-momento para um fluido perfeito, devemos considerar os tensores associados ao sistema, que são $u^a u^b$ e a métrica do espaço-tempo g^{ab} . Então, vamos supor uma forma geral para o tensor como sendo uma combinação da densidade de energia com o termo cinético $u^a u^b$, e acrescentando um termo associado à pressão, expressa por um segundo tensor simétrico S^{ab} . Dessa forma, o tensor energia-momento para o fluido perfeito é denotado por

$$T^{ab} = \rho_0 u^a u^b + p S^{ab}, \quad (53)$$

onde S^{ab} deve ser simétrico e construído unicamente a partir de $u^a u^b$. A forma mais geral e compatível com essas restrições é

$$S^{ab} = \lambda u^a u^b + \mu g^{ab}, \quad (54)$$

com λ e μ sendo constantes a serem determinadas. A escolha desses coeficientes é guiada pela exigência de que a conservação do tensor energia-momento, expressa pela equação $\partial_b T^{ab} = 0$ no espaço-tempo de Minkowski, se reduza no limite não relativístico às equações

clássicas da hidrodinâmica, como a equação da continuidade e equação de Navier-Stokes, que descrevem a dinâmica do fluido sob a influência da pressão. Ao impor essa correspondência com as equações clássicas, obtém-se que os únicos valores compatíveis são $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ [7, 11]. Com esses valores, a forma final do tensor energia-momento para o fluido perfeito torna-se

$$T^{ab} = (\rho_0 + p)u^a u^b - pg^{ab}. \quad (55)$$

É comum, na formulação relativística, redefinir a densidade ρ_0 como ρ , que passa a representar a densidade de energia no referencial do fluido. Dessa forma, a expressão final do tensor energia-momento do fluido perfeito é denotada na forma [7, 11]

$$T^{ab} = (\rho + p)u^a u^b - pg^{ab}. \quad (56)$$

Essa equação é adotada como definição geral de fluido perfeito, tanto na relatividade restrita quanto na relatividade geral, com a diferença de que, nesta última, a lei de conservação assume a forma covariante $\nabla_b T^{ab} = 0$. As equações de movimento do fluido em um dado espaço-tempo seguem diretamente dessa conservação, fornecendo a evolução das variáveis termodinâmicas e da quadri-velocidade. Para que o sistema seja fisicamente completo, é necessário adicionar uma equação de estado que relacione a pressão p com a densidade ρ e, em alguns casos, com a temperatura absoluta T . Em geral, essa equação tem a forma $p = p(\rho, T)$, mas em muitos contextos físicos, considera-se que a temperatura varia muito pouco ou é constante ao longo da evolução, o que permite adotar uma equação de estado mais simples, do tipo

$$p = p(\rho), \quad (57)$$

dependendo apenas da densidade de energia [7, 11].

3.3 Equações de Maxwell

Para trabalhar com as equações de Maxwell para o campo eletromagnético no contexto da relatividade restrita, iremos reformular essas expressões de acordo com o formalismo tensorial. Inicialmente, é necessário que elas sejam escritas nas coordenadas de Minkowski (espaço-tempo plano) [7]. Utilizando unidades lorentianas com $c = 1$, temos que as constantes de permissividade elétrica no vácuo, ϵ_0 , e permeabilidade magnética, μ_0 , são “abosrvidas”, isto é, são iguais a 1. Com isso, as equações de Maxwell no vácuo para o

campo eletromagnético são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (58)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (60)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (61)$$

Nessas equações, \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} é o campo magnético (indução magnética), ρ é a densidade de carga elétrica e \mathbf{j} é a densidade da corrente elétrica. A Eq.(58) é a lei de Gauss, que relaciona o fluxo elétrico em uma superfície fechada à uma carga; a Eq.(59) é a lei de Ampère generalizada, que relaciona o campo magnético a um fluxo de corrente; a Eq.(60) expressa o fato de que não existem monopólos magnéticos, ou seja, o campo magnético sempre se apresenta na forma de dipolos; e a Eq.(61) é a lei de indução de Faraday, que descreve como campos magnéticos variáveis no tempo geram campos elétricos. A densidade de carga elétrica ρ e a densidade da corrente elétrica \mathbf{j} não podem ser escritas arbitrariamente, pois estão ligadas pela equação de continuidade, que assegura a conservação da carga elétrica [7]. Para demonstrar isso, diferenciamos a Eq.(58) em relação a t , obtendo

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (62)$$

Em paralelo, tomado o divergente da Eq.(59), temos que

$$-\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (63)$$

Dessa forma, relacionando as duas últimas equações, vemos que ρ e \mathbf{j} satisfazem a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (64)$$

Para escrever essas equações na forma tensorial, introduzimos o tensor do campo eletromagnético F^{ab} [7], que organiza as componentes do campo elétrico e campo magnético, sendo ele de segunda ordem e antissimétrico, e denotado por

$$F^{ab} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Além disso, definimos a densidade de corrente (quadri-vetor fonte) j^a por

$$j^a = (\rho, \mathbf{j}). \quad (66)$$

Com isso, as equações de Maxwell são compactadas nas expressões tensoriais

$$\partial_b F^{ab} = j^a \quad (67)$$

$$\partial_a F_{bc} + \partial_c F_{ab} + \partial_b F_{ca} = 0 \implies \partial_{[a} F_{bc]} = 0. \quad (68)$$

onde a Eq.(67) agrupa as equações de fonte [7], e pode ser demonstrada da seguinte forma:

Para $a = 0$:

$$\partial_b F^{0b} = j^0 \implies \partial_i F^{0i} = \rho \implies \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (69)$$

Para $a = i$ ($i = 1, 2, 3$) :

$$\begin{aligned} \partial_b F^{ib} = j^i &\implies \partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = j^i \\ &\implies -\frac{\partial E^i}{\partial t} + \varepsilon^{ijk} \partial_j B^k = j^i \implies \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (70)$$

onde i, j e k representam as linhas e colunas da matriz que representa o tensor anti-simétrico. A demonstração da Eq.(68) é feita levando em consideração as duas classes de índices independentes:

Tripla $(0, i, j)$:

$$\begin{aligned} \partial_0 F_{ij} + \partial_j F_{0i} + \partial_i F_{j0} &= 0 \\ F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k, \quad F_{0i} = E_i & \\ \implies -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial B^k}{\partial t} + \partial_j E_i - \partial_i E_j &= 0 \\ \implies \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Lei de Faraday}) & \end{aligned} \quad (71)$$

Tripla puramente espacial (i, j, k) :

$$\begin{aligned} \partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki} &= 0 \\ F_{ij} = -\varepsilon_{ij\ell} B^\ell & \\ \text{Contraí-se com } \varepsilon^{ijk} \text{ e obtém-se:} & \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Lei de Gauss magnética}) & \end{aligned} \quad (72)$$

Por fim, a equação de continuidade no formalismo relativístico é dada por

$$\partial_a j^a = 0. \quad (73)$$

4 Conclusão

O presente trabalho explorou e apresentou a álgebra tensorial, bem como algumas aplicações dessa estrutura matemática na Teoria da Relatividade. Nessa perspectiva, tornou-se possível a aquisição de conhecimento sobre esse ferramental e sobre as quantidades necessárias para a modelagem de importantes aplicações do tensor energia-momento: o tensor associado à matéria incoerente, utilizado na descrição de feixes de partículas sem pressão; o tensor do fluido perfeito, presente na análise de fluidos relativísticos; e a conversão das equações de Maxwell para o formalismo tensorial, que auxiliam no estudo da eletrodinâmica relativística. Dessa forma, este trabalho contribuiu para o contato com a pesquisa e com o meio científico, além de despertar o interesse pela continuidade desse estudo em problemas mais elaborados da área.

Referências

- [1] S. DAHMEN, Relatividade especial e geral: uma introdução para estudantes de física. Porto Alegre: Instituto de Física – UFRGS, 2010.
- [2] R. P. Feynman, *O que é uma lei física*, vol. 35 of *Coleção Ciência Aberta*. Lisboa: Gradiva, 1989.
- [3] G. Arfken and H. Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 6 ed., 2007.
- [4] O. F. Piattella, “Introdução à relatividade geral,” *Cadernos de Astronomia*, vol. 1, no. 1, pp. 30–39, 2020. Acesso em: 20 jan. 2025.
- [5] I. F. De Souza and S. B. Soltau, “Mecânica newtoniana no formalismo tensorial para iniciantes,” *Revista Brasileira de Física*, vol. 3, no. 1, 2023. Acesso em: 2 maio 2025.
- [6] M. R. d. Medeiros, G. L. Gonçalves, and J. C. T. d. Moraes, “Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre relatividade restrita e geral,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, no. 1, pp. 25–35, 2007. Acesso em: 2 maio 2025.
- [7] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [8] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette, and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*. Amsterdam: North-Holland.
- [9] J. Stewart, *Cálculo, Volume 2*. São Paulo: Cengage Learning, 7 ed., 2015. Tradução da 7^a edição norte-americana.
- [10] R. Penrose, “Structure of space-time,” in *Battelle Rencontres 1967 Lectures in Mathematics and Physics* (C. M. DeWitt and J. A. Wheeler, eds.), pp. 121–235, New York, NY: W. A. Benjamin, 1968.
- [11] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.