Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação - PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

FLÁVIO BRITO DE SOUZA

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA PARA O ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM VETORIAL.

TERESINA
2025

FLÁVIO BRITO DE SOUZA

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA PARA ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM VETORIAL.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Piauí (UESPI), como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básico e suas tecnologias.

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito.
Coorientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha.

TERESINA

2025

FLÁVIO BRITO DE SOUZA

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA PARA ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM VETORIAL.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovado por:

Documento assinado digitalmente
ARNALDO SILVA BRITO
Data: 09/10/2025 14:42:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
NATA FIRMINO SANTANA ROCHA
Data: 07/10/2025 14:55:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha – Coorientador e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
ANDERSON FABIAN DE SOUSA MENESES
Data: 08/10/2025 18:01:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Anderson Fabian de Sousa Meneses – Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Documento assinado digitalmente
CLEIDINALDO AGUIAR SOUZA
Data: 09/10/2025 13:01:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza – Examinador (externo)
Universidade Federal do Piauí – UFPI

TERESINA

SETEMBRO/2025

S719p Souza, Flávio Brito de.
Proposta de ensino de Geometria Analítica para o Ensino Médio: uma abordagem vetorial / Flávio Brito de Souza. - 2025.
75f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campus Poeta Torquato Neto, Teresina - PI, 2025.
"Orientação: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito".
"Coorientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha".

1. Geometria Analítica. 2. Abordagem Vetorial. 3. Ensino Médio. 4. E-book. I. Brito, Arnaldo Silva . II. Rocha, Natã Firmino Santana . III. Título.

CDD 510.71

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
JOSÉ EDIMAR LOPES DE SOUSA JÚNIOR (Bibliotecário) CRB-3ª/1512

Flávio Brito de Souza, licenciado em matemática pela Universidade Estadual do Piaui-UESPI, especialista em Metodologia no Ensino Superior pela Faculdade Adelmar Rosado-FAR e professor efetivo nas cidades Teresina-PI e em Timon-MA.

Dedico este trabalho a minha mãe, você é a razão pela qual eu nunca desisti. Agradeço por sua fé mim e perseverança.

AGRADECIMENTOS

Com profunda gratidão e humildade, concluo mais um capítulo da minha jornada acadêmica. Agradeço a Deus, minha fonte de inspiração, força e sabedoria, agradeço por guiar-me e iluminar meu caminho. Aos meus pais, exemplos de amor, dedicação e perseverança, obrigado por incentivarem meus sonhos, vossa confiança e apoio foram essenciais. À minha esposa, companheira e amiga, agradeço por sua paciência, compreensão e apoio incondicional, você é minha rocha. Aos familiares e amigos, que me apoiaram durante essa jornada, agradeço por suas orações, palavras de encorajamento e amor. Agradeço também aos professores, orientadores e colegas que contribuíram para o meu crescimento acadêmico.

"O Senhor é minha força e minha canção." (Êxodo 15:2)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta didático-pedagógica para o ensino de Geometria Analítica para o 3º ano do Ensino Médio, em conformidade com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), com foco na utilização da abordagem vetorial como ferramenta metodológica. Ao longo do texto, serão exploradas definições, propriedades e demonstrações que embasam o conteúdo abordado, com especial atenção à precisão conceitual e ao rigor matemático. Entre os temas abordados estão o estudo de triângulos, a análise de retas no plano cartesiano e a determinação de pontos de intersecção, utilizando ferramentas que possibilitam tanto a verificação de alinhamento e paralelismo quanto a discussão do posicionamento relativo de retas no plano cartesiano. Também serão apresentadas e comparadas duas abordagens de resolução de problemas: o método tradicional, baseado na manipulação algébrica de equações e coordenadas cartesianas, e o método vetorial, baseado em operações e propriedades de vetores. Como parte integrante da proposta, um e-book será apresentado como recurso educacional, reunindo conceitos, demonstrações e exemplos resolvidos para oferecer um recurso acessível e estruturado para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no ensino médio sob uma perspectiva vetorial.

Palavras-chave: geometria analítica; abordagem vetorial; ensino médio, e-book.

ABSTRACT

This paper presents a didactic-pedagogical proposal for teaching Analytical Geometry in the third year of high school, in accordance with the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC, 2018), focusing on the use of the vector approach as a methodological tool. Throughout the text, definitions, properties, and demonstrations that support the content covered will be explored, with special attention to conceptual precision and mathematical rigor. Among the topics covered are the study of triangles, the analysis of lines in the Cartesian plane, and the determination of intersection points, using tools that enable both the verification of alignment and parallelism and the discussion of the relative positioning of lines in the Cartesian plane. We will also present and compare two problem-solving approaches: the traditional method, based on the algebraic manipulation of Cartesian equations and coordinates, and the vector method, based on operations and properties of vectors. As an integral part of the proposal, an e-book will be presented as an educational resource, bringing together concepts, demonstrations, and solved examples to offer an accessible and structured resource for teaching and learning Analytical Geometry in high school from a vector perspective.

Keywords: analytical geometry; vector approach; high school, e-book.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) o conteúdo de Geometria Analítica é introduzido apenas no 3º ano do Ensino Médio, estabelecendo, pela primeira vez, a articulação entre os entes geométricos e suas representações algébricas. Nesse novo cenário, vamos além das representações analíticas, essa nova visão da geometria nos permite realizar manipulações algébricas, que são de grande ajuda para compreensão desse novo conceito de geometria.

Durante a formação acadêmica em Matemática, observou-se que a abordagem vetorial da Geometria Analítica contribui para uma compreensão mais clara e estruturada dos conceitos, em contraste com a perspectiva tradicional presente na Educação Básica. Tal constatação leva à seguinte questão central desta pesquisa: como a introdução da abordagem vetorial pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio?

Diante do exposto, propomos um ensino de geometria analítica em uma abordagem vetorial. Para (Lima, 2015), "[...] Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor, [...] , é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física'. Dito isto, utilizaremos a importante ferramenta "vetor" como protagonista em nosso trabalho, tendo em vista que sua aplicação já no decurso do ensino médio se demonstra viável. Segundo (Oliveira, 2020),"De maneira geral, percebemos que os alunos sentiram-se motivados com o estudo de Geometria Analítica com abordagem vetorial no ensino médio". Essa abordagem vetorial não será de toda uma novidade para os alunos, pois como já foi mencionado, a introdução de vetores já se faz presente nos anos inicias do ensino médio no componente curricular de Física, ao propor a inclusão da ferramenta vetor no ensino médio se terá uma interdisciplinaridade entre a matemática e a física e um ganho substancial no ensino/aprendizagem de geometria analítica. Para (Furlani, 2016),"É importante a utilização do conceito de vetores no ensino de Geometria Analítica, no sentido de obter uma aproximação das disciplinas de Matemática e Física, agindo como um fator facilitador do entendimento do assunto no processo ensino aprendizagem".

Neste contexto, esta dissertação busca contribuir para o aprimoramento do ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio por meio de uma abordagem vetorial. Para isso, apresenta-se e contextualiza-se o conceito de vetor como ferramenta pedagógica, explorando conteúdo específicos como o estudo de triângulos e as equações da reta. Em contraposição à abordagem tradicional, predominante na maioria dos livros didáticos da educação básica, propõe-se a elaboração de um e-book como recurso didático, construído a partir dos conteúdos e metodologias desenvolvidos ao longo da pesquisa, no qual os tópicos da educação básica são tratados sob uma perspectiva vetorial. Ao final, realiza-se um comparativo entre aplicações resolvidas pelo método tradicional e pela abordagem vetorial, evidenciando suas diferenças e potencialidades.

No âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), esta pesquisa apresenta especial relevância por alinhar-se ao propósito central do programa: articular a formação acadêmica avançada com a prática docente na Educação Básica. A proposta contribui diretamente para o campo da docência da Matemática na educação básica, pois busca desenvolver recursos didáticos que ampliem a compreensão conceitual dos estudantes e, ao mesmo tempo, forneçam instrumentos de trabalho inovadores para professores de Matemática. Ao propor uma abordagem vetorial aplicada à Geometria Analítica, o trabalho fortalece o compromisso do PROFMAT de produzir conhecimento científico com impacto pedagógico imediato, promovendo a atualização das práticas de ensino e estimulando a integração entre teoria e prática.

A dissertação está organizada em seis capítulos. O Capítulo 2 apresenta a definição de vetor, suas operações fundamentais e o estudo do posicionamento relativo em $\mathbb{R}^2$. O Capítulo 3 aborda a teoria dos triângulos, enfatizando classificação e propriedades. O Capítulo 4 dedica-se ao estudo da reta, contemplando equações e posições relativas. O Capítulo 5 descreve o e-book como recurso didático e apresenta um comparativo entre as abordagens tradicional e vetorial. Por fim, o Capítulo 6 traz as considerações finais e, no Apêndice, encontra-se o link de acesso ao produto educacional aqui produzido.

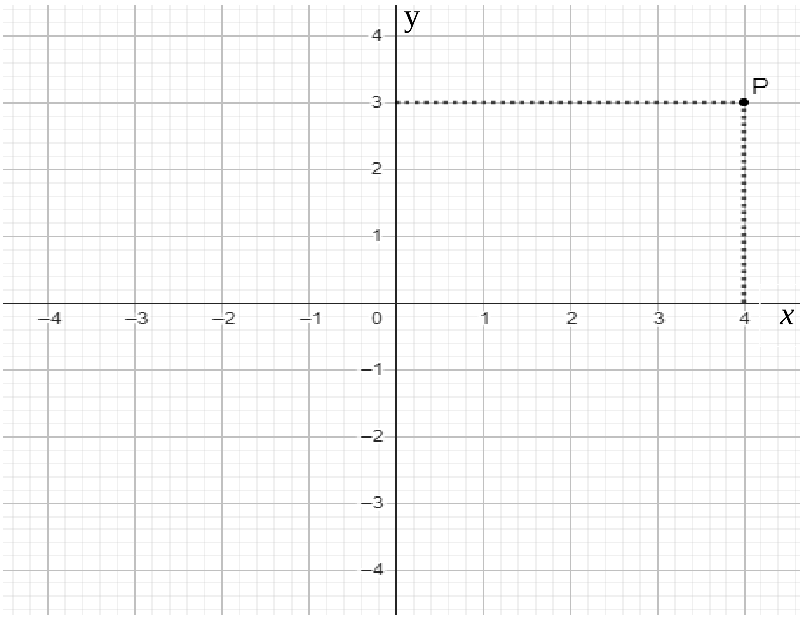
2 VETORES

Nesse capítulo, abordaremos tópicos essenciais para uma boa compreensão do conceito de vetor, ferramenta essa, que será de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho. Iremos aqui, definir vetor e destacar algumas das principais operações entre os mesmos. Nesse primeiro momento teremos como ambiente de trabalho o conjunto dos pontos da geometria euclidiana de duas dimensões, que a partir de agora denotaremos por plano cartesiano. Alguns resultados da geometria euclidiana serão usados livremente, supondo o autor serem conceitos já assimilados pelo leitor.

2.1 PLANO CARTESIANO ($\mathbb{R}^2$)

Para o estudo que segue, iremos utilizar o plano cartesiano. Trata-se de um sistema de eixos coordenados perpendiculares entre si. O ponto comum a esses eixos (Ponto O) é dito origem do plano cartesiano. Para cada ponto P pertencente ao plano cartesiano existe uma correspondência biunívoca a um par de números sobre os eixos.

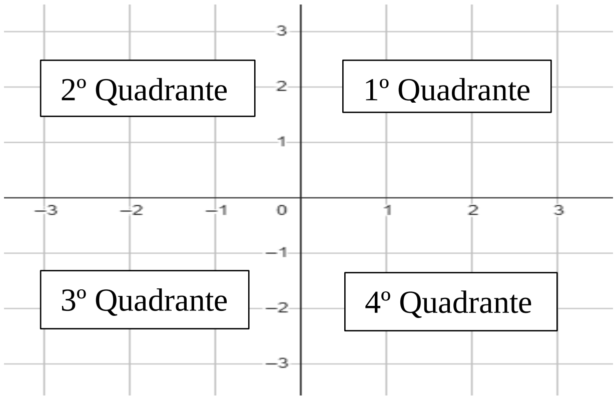
Figura 1- Plano cartesiano



Fonte: Autor

Denotamos a reta Ox como eixo das abscissas e a reta Oy como eixo das ordenadas. Dizemos que o ponto P, veja Figura 1, tem abscissa $x = 4$ e ordenada $y = 3$ ou simplesmente $P = (4, 3)$. O par de números $(4, 3)$ é dito par ordenado e os números 4 e 3, nessa ordem, são as coordenadas do ponto P em relação ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas, respectivamente. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes:

Figura 2- Quadrantes



Fonte: Autor

1º Quadrante: temos $x > 0$ e $y > 0$;

2º Quadrante: temos $x < 0$ e $y > 0$;

3º Quadrante: temos $x < 0$ e $y < 0$;

4º Quadrante: temos $x > 0$ e $y < 0$.

2.2 RETA ORIENTADA

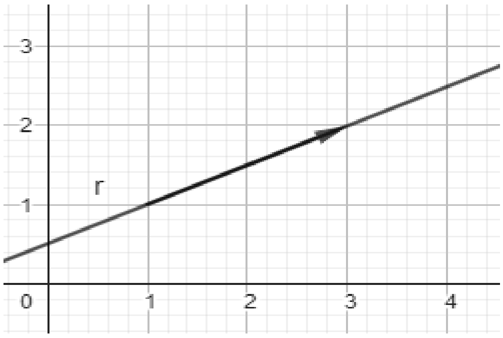
Antes de apresentar a definição formal de reta orientada, é necessário retomar um conceito fundamental em Matemática: direção e sentido[1]. Uma reta no plano pode ser considerada como um conjunto infinito de pontos dispostos linearmente em ambas as direções. Ao fixar uma orientação, estabelece-se um sentido positivo para o percurso ao longo da reta, ficando o sentido oposto automaticamente definido como negativo. Essa

[1] Direção refere-se à linha imaginária sobre a qual uma reta se encontra, enquanto sentido indica a orientação específica nessa linha, podendo ser dois sentidos opostos para cada direção.

convenção fornece a base conceitual para a noção de reta orientada, essencial no estudo vetorial da Geometria Analítica.

Definição 2.1: Uma reta r diz-se orientada quando lhe é fixado o sentindo de percurso, considerado positivo, e é indicada por uma seta.

Figura 3- Reta orientada



Fonte: Autor

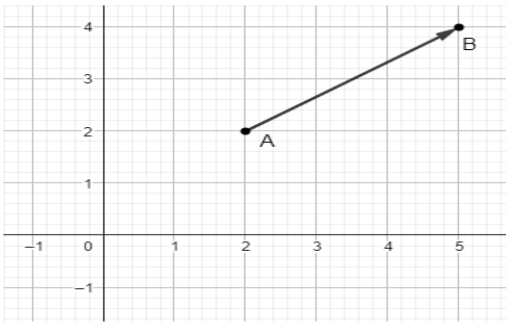
Observação 2.1: O sentido oposto é dito negativo.

2.3 SEGMENTO ORIENTADO

Suponha um segmento de reta definido por dois pontos distintos. Agora, analise em como podemos atribuir um significado especial a esse segmento, definindo um ponto inicial e um ponto final. Essa ideia é fundamental para o conceito de segmento orientado.

Definição 2.2: Sejam A e B pontos no plano cartesiano. Considere o segmento que tem como A a origem e B sua extremidade, daí esse segmento é dito orientado. Notação: AB (Lê-se; segmento AB).

Figura 4- Segmento orientado AB

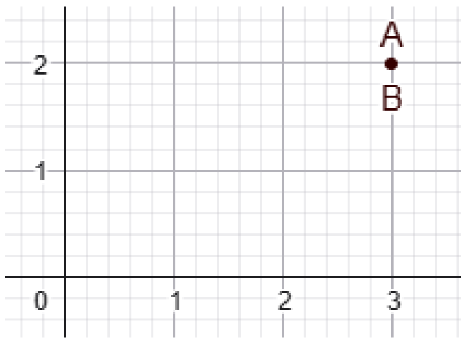


Fonte: Autor

2.3.1 Segmento nulo

Definição 2.3: Um segmento cuja origem coincide com a extremidade é dito segmento nulo.

Figura 5- Segmento nulo AB

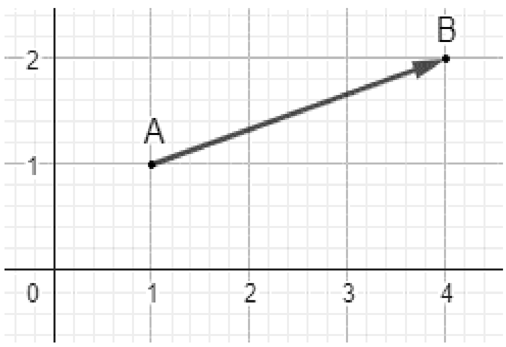


Fonte: Autor

2.3.2 Segmento oposto

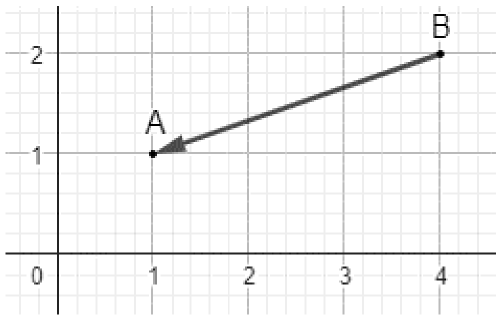
Definição 2.4: Seja AB é um segmento orientado, dizemos que o segmento BA é o seu oposto.

Figura 6- Segmento orientado AB



Fonte: Autor

Figura 7- Segmento orientado BA

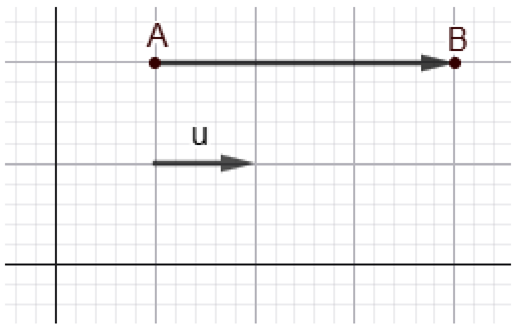


Fonte: Autor

2.3.3 Medida de um segmento

Fixada uma medida de comprimento u, podemos determinar a medida do segmento AB, usando como unidade de medida o comprimento de u.

Figura 8- Fixando unidade de medida



Fonte: Autor

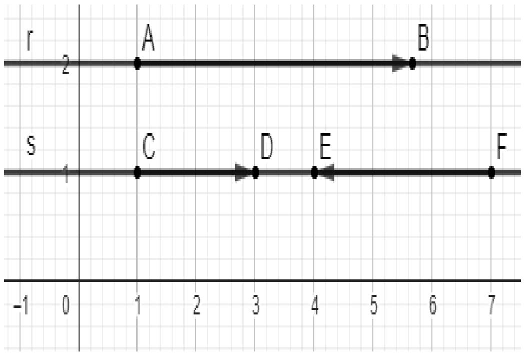
- Medida do segmento AB igual $3u$, onde denotamos por $\overline{AB} = 3u$. Como ilustra a Figura 8.
- Note que o segmento orientado $\overline{BA} = 3u$, segue que $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Observação 2.2: Segmento nulo tem medida igual a zero.

2.3.4 Direção e sentido

Definição 2.5: Dizemos que dois segmentos orientados AB e CD possuem mesma direção se suas retas suportes são paralelas ou coincidentes.

Figura 9- Segmentos de mesma direção

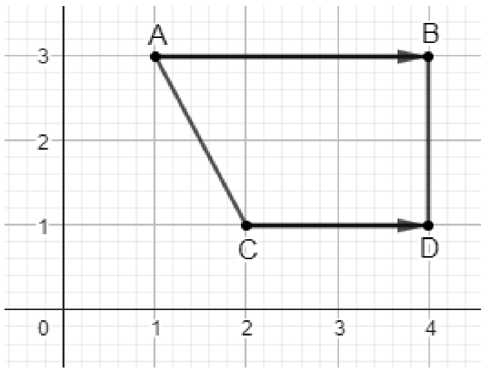


Fonte: Autor

- Na Figura 9 temos r paralela a s. Note que r e s são as retas suporte do segmentos AB e CD, FE respectivamente. Segue que os segmentos AB, CD e FE estão na mesma direção;

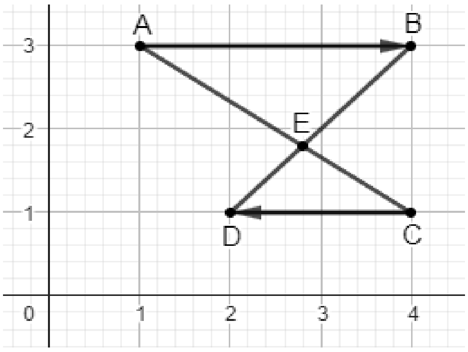
Definição 2.6: Sejam AB e CD dois segmentos orientados com mesma direção. Dizemos que os segmentos AB e CD tem mesmo sentido se os segmentos AC e BD não se intersectam.

Figura 10 - AB e CD mesmo sentido



Fonte: Autor

Figura 11 - AB e CD sentidos contrários



Fonte: Autor

Observação 2.3: Só se pode comparar sentido entre segmentos, se os mesmos estiverem na mesma direção.

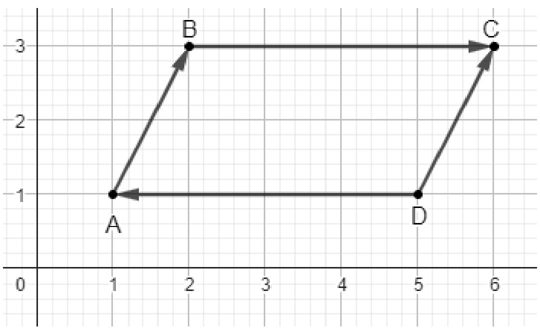
2.4 SEGMENTOS EQUIPOLENTES

Suponha dois segmentos de reta orientados, cada um com seu próprio ponto inicial e ponto final. Agora, analise como podemos comparar esses segmentos para determinar se eles têm a mesma direção, sentido e comprimento. Essa ideia é fundamental para o conceito de segmentos equipolentes.

Definição 2.7: Dados os segmentos orientados AB e CD. Dizemos que estes segmentos são equipolentes (notação: $AB \sim CD$) se eles possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

Exemplo 2.1: Seja $ABCD$ um paralelogramo. Considere os segmentos orientados AB, BC, DC e DA.

Figura 12- Segmentos equipolentes



Fonte: Autor

- Temos, $AB \sim DC$;
- Temos, $DA \nsim BC$.

Observação 2.4: Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

2.5 VETOR

Suponha que você precise descrever uma quantidade que tem não apenas magnitude (ou tamanho), mas também direção e sentido. Por exemplo, quando você descreve um deslocamento de um ponto a outro no espaço. Nesse contexto, surge a necessidade de um conceito matemático que possa capturar essas características de maneira eficaz. Agora que temos uma ideia geral, vamos definir formalmente o que é um vetor e apresentar suas principais características.

Definição 2.8: Dado um segmento orientado AB, chama-se vetor o conjunto de todos os segmentos equipolentes a AB.

Tomando $\overrightarrow{AB}$ como notação para o conjunto mencionado, temos:

$$\overrightarrow{AB} = \{CD \ / \ CD \sim AB\}$$

Definição 2.9: Chama-se módulo de um vetor $\overrightarrow{AB}$ a medida do comprimento do segmento orientado que o representa.

Notação; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \overline{AB}$

Definição 2.10: Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são ditos iguais quando $AB \sim CD$.

Notação: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Definição 2.11: Um vetor $\overrightarrow{AB}$ é dito nulo se $\overline{AB} = 0$.

Notação: $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Definição 2.12: Chama-se o vetor $\overrightarrow{AB}$ de unitário se $|\overrightarrow{AB}| = 1$.

Definição 2.13: O versor de um vetor $\overrightarrow{AB}$ é o vetor que tem mesma direção, mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$ e módulo igual a 1.

Observação 2.5: A notação do vetor oposto de $\overrightarrow{AB}$ é dada por $\overrightarrow{BA}$ ou $-\overrightarrow{AB}$.

O que diferencia os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ é unicamente o sentido.

Para simplificar a notação, é usual representar o vetor $\overrightarrow{AB}$ por uma letra minúscula acompanhada de uma seta. Tal convenção, além de prática, será amplamente adotada nas seções subsequentes.

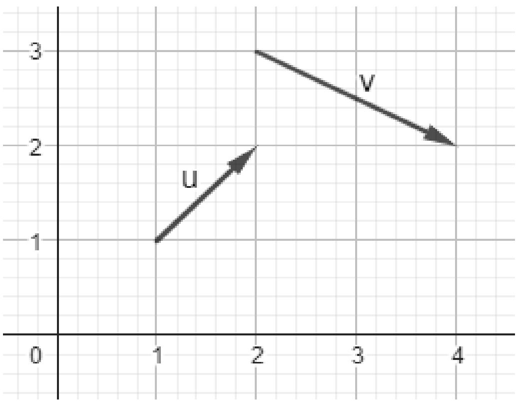
2.6 OPERAÇÕES GEOMÉTRICA ENTRE VETORES

As operações entre vetores em $\mathbb{R}^2$ podem ser definidas de forma rigorosa tanto pela representação geométrica quanto pela algébrica. Geometricamente, a adição e a subtração de vetores correspondem a construções que produzem novos vetores resultantes, obedecendo às propriedades estruturais do espaço vetorial[2].

2.6.1 Adição de vetores

Definição 2.14: Para somar dois vetores geometricamente, coloca-se a extremidade de um vetor na origem do próximo, o vetor soma é o segmento orientado de origem do primeiro vetor e extremidade do segundo. Como ilustra a Figura 14.

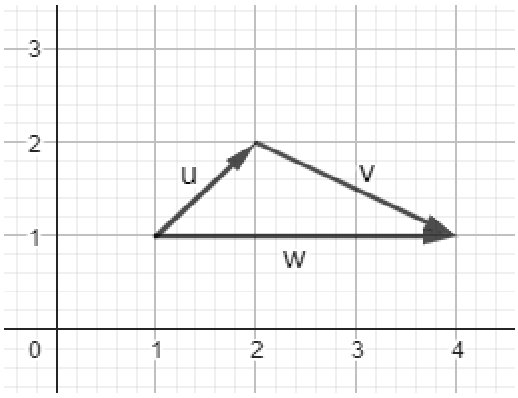
Figura 13 - Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$



Fonte: Autor

[2] Um espaço vetorial é uma coleção de elementos (chamados vetores) que podem ser somados entre si e multiplicados por números (escalares), seguindo regras algébricas específicas que garantem a consistência das operações de adição e multiplicação.

Figura 14- Soma $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



Fonte: Autor

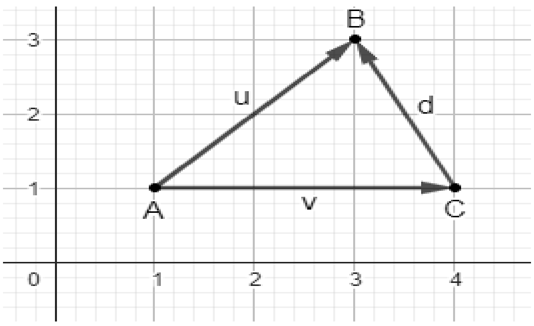
Temos que a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por definição é o vetor $\vec{w}$. Portanto, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Observação 2.6: A definição acima se mantém para a soma superior a dois vetores.

2.6.2 Subtração de vetores

Definição 2.15: Definimos a diferença entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como $\vec{u} - \vec{v}$ onde o vetor $-\vec{v}$ é o vetor oposto do vetor $\vec{v}$. Como ilustra a Figura 15.

Figura 15- Subtração $\vec{u} - \vec{v}$



Fonte: Autor

Note que $\overrightarrow{CA} = -\vec{v}$. Segue:

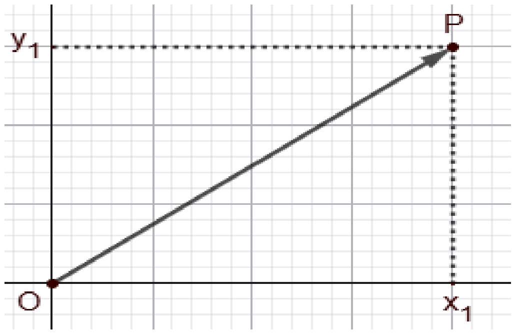
$$\vec{d} = \overrightarrow{CA} + \vec{u} = -\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - \vec{v}$$

2.7 FORMA ALGÉBRICA DE UM VETOR

Até o momento, tudo que foi definido em relação a vetores diz respeito a sua forma geométrica. Nessa seção, iremos representar vetores de forma algébrica, tal representação será bastante útil para efeito de cálculos.

Pela Seção 2.1, para todo ponto P pertencente ao plano cartesiano podemos definir sua localização por meio de suas coordenadas nos eixos das abcissas e ordenadas. Nesta seção iremos associar a cada ponto P, um vetor que terá como origem o ponto O e extremidade o ponto P e sua representação analítica será dada pelas coordenadas do ponto P. Como ilustra a Figura 16.

Figura 16- Vetor $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1)$



Fonte: Autor

Assim, o vetor $\overrightarrow{OP}$ terá representação analítica dada pelo par ordenado (x_1, y_1).

2.7.1 Igualdade e operações entre vetores

Definição 2.16: Dados o vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, definiremos $\vec{u}$ igual a $\vec{v}$ quando tivermos $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

Definição 2.17: Dados o vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, definiremos $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, \ y_1 + y_2)$. De forma análoga, $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2 \ , \ y_1 - y_2)$.

2.7.2 Propriedades da adição de vetores

Para as demonstrações que seguem, tomaremos $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3)$ e $\vec{0} = (0, 0)$.

P1) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Temos:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\
&= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\
&= \vec{v} + \vec{u}
\end{aligned}
$$

P2) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Note que:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\
&= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\
&= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\
&= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})
\end{aligned}
$$

P3) Existência e unicidade do vetor nulo: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Existência:

Temos:

$$\vec{u} + \vec{0} = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1 + 0, y_1 + 0) = (x_1, y_1) = \vec{u}$$

Unicidade:

Suponha que exista um vetor $\vec{n} = (a, b)$ tal que $\vec{u} + \vec{n} = \vec{u}$.

Segue,

$$\vec{u} + \vec{n} = \vec{u} \Leftrightarrow (x_1 + a, y_1 + b) = (x_1, y_1)$$

Daí,

$$x_1 + a = x_1 \quad \text{e} \quad y_1 + b = y_1$$

Isto é,

$$a = 0 \quad \text{e} \quad b = 0$$

Logo,

$$\vec{n} = \vec{0}$$

P4) Existência e unicidade do vetor oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Existência:

Temos:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (x_1 + (-x_1),\ y_1 + (-y_1)) = (0,0) = \vec{0}$$

Unicidade:

Suponha que exista um vetor $\vec{n} = (a, b)$ tal que $\vec{u} + \vec{n} = \vec{0}$.

Segue,

$$\vec{u} + \vec{n} = \vec{0} \iff (x_1 + a, y_1 + b) = (0,0)$$

Daí,

$$x_1 + a = 0 \quad \text{e} \quad y_1 + b = 0$$

Isto é,

$$a = -x_1 \quad \text{e} \quad b = -y_1$$

Logo,

$$\vec{n} = -\vec{u}$$

Observação 2.7: Tudo que foi dito para igualdade e operações de vetores se aplica para mais de dois vetores.

2.7.3 Multiplicação de vetor por número real

Definição 2.18: Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real α, definiremos a multiplicação de α por $\vec{v}$ por $\alpha \cdot \vec{v}$, onde:

1. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (Por definição)

2. Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\alpha \cdot \vec{v} \neq \vec{0}$, e ainda:

- $\alpha \cdot \vec{v}$ terá mesma direção de $\vec{v}$;
- Se $\alpha > 0$, então $\alpha \cdot \vec{v}$ terá mesmo sentido de $\vec{v}$;
- Se $\alpha < 0$, então $\alpha \cdot \vec{v}$ terá sentido contrário ao de $\vec{v}$.
- $|\alpha \cdot \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$

2.7.4 Propriedades da multiplicação de vetor por um número real

M1) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$ $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

M2) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$ $\quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$

M3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$ $\quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$

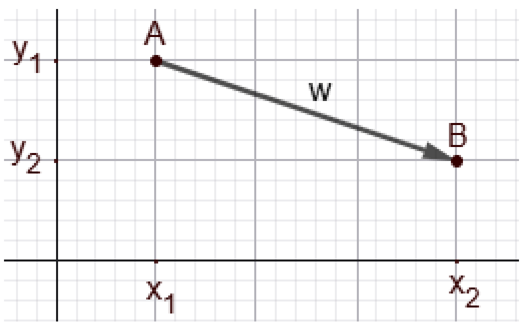
M4) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ $\quad \forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Observação 2.8: As propriedades aqui expostas, também são válidas para os números reais, dessa forma as operações entre vetores (adição e multiplicação por um número real) seguem o mesmo princípio que o cálculo algébrico elementar.

2.7.5 Representação algébrica de um vetor fora da origem

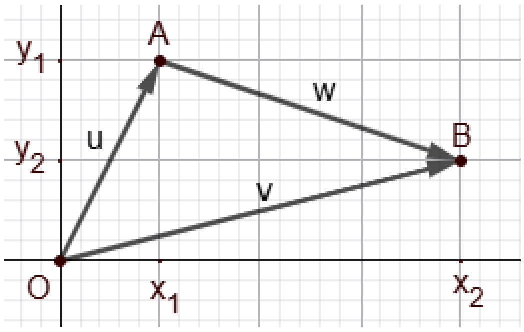
Na Seção 2.7 associamos para cada ponto $P \in \mathbb{R}^2$ um vetor de origem em O e extremidade em P. Aqui, daremos uma representação algébrica para vetores fora da origem. Como ilustram as Figuras 17 e 18.

Figura 17- Vetor $\vec{w}$



Fonte: Autor

Figura 18- Vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$



Fonte: Autor

Note que o vetor $\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1)$. Assim, podemos exibir as coordenadas de vetores determinados por pontos quaisquer do $\mathbb{R}^2$, isto é, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ serão dadas pela diferença entre o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ou simplesmente $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Exemplo 2.2: Seja $A = (3,5)$ e $B = (1,-6)$. Segue, que as coordenadas cartesianas do vetor $\overrightarrow{AB}$ serão:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-6) - (3,5) = (1-3, -6-5) = (-2,-11)$$

Exemplo 2.3: Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos do $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Seja $M(x,y)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Daí, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$. Como $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Temos:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AM}$$

Daí,

$$B - A = 2(M - A) \iff M = \frac{1}{2}(A + B)$$

Logo,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Exemplo 2.4: Os pontos $A = (3,-5)$ e $C = (-1,3)$ são os vértices de uma diagonal de um paralelogramo. Determine o ponto de interseção das diagonais.

É suficiente determinar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Utilizando o Exemplo 2.3 temos:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (1, -1)$$

2.8 PARALELISMO ENTRE VETORES

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ no $\mathbb{R}^2$, suponha que exista um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$$

Pela Subseção 2.7.3, temos $\alpha \cdot \vec{v}$ com mesma direção de $\vec{v}$, isto é, $\alpha \cdot \vec{v} \mid\mid \vec{v}$ segue $\vec{u} \mid\mid \vec{v}$. Em outras palavras, o vetor $\vec{u}$ será paralelo ao vetor $\vec{v}$ se, e somonte se, o vetor $\vec{u}$ for múltiplo do vetor $\vec{v}$.

Exemplo 2.5: Seja $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (6, 4)$. Note que:

$$\vec{v} = (6, 4) = 2 \cdot (3, 2) = 2. \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \mid\mid \vec{v}$$

Observação 2.9: Sejam $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos do $\mathbb{R}^2$. Daí, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$. Se existir um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$, então os pontos A, B e C são colineares.

$$A, B \text{ e } C \text{ são colineares} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

2.9 PRODUTO INTERNO

O produto interno entre vetores é uma operação que associa dois vetores a um número real, fornecendo uma medida da relação entre suas direções e magnitudes. Ele é fundamental em diversas áreas da matemática, permitindo calcular ângulos, projeções e determinar ortogonalidade entre vetores.

Definição 2.19: Dados o vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ no $\mathbb{R}^2$, definimos produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, ou simplesmente $\vec{u}$ interno $\vec{v}$, (Notação: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $<\vec{u}, \vec{v}>$) o número real dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

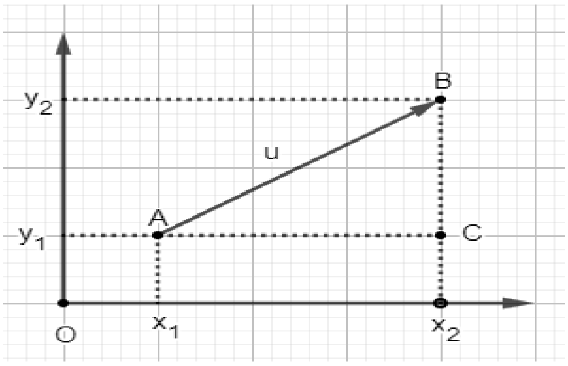
Exemplo 2.6: Seja $\vec{u} = (-4, 7)$ e $\vec{v} = (3, -4)$. O produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \cdot 3 + 7 \cdot (-4) = -12 - 28 = -40$$

2.10 MÓDULO DE UM VETOR

Na Definição 2.9 definimos módulo como sendo o comprimento de um vetor. Nessa seção, iremos determinar o comprimento de um vetor dado. Como ilustra a Figura 19.

Figura 19- Representação do vetor $\overrightarrow{AB}$



Fonte: Autor

Temos que $|\vec{u}| = \overline{AB}$, $\overline{AC} = (x_2 - x_1)$ e $\overline{BC} = (y_2 - y_1)$. Note que o triângulo ABC é retângulos em C.

Temos,

$$|\vec{u}|^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Logo,

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note ainda que a representação algébrica do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Logo, $|\vec{u}|$ será a raiz quadrada da soma dos quadrados das coordenadas do vetor $\vec{u}$.

Observação 2.10: Obter o módulo de um vetor é equivalente a obter a distâncias entre os dois pontos que o determinam, isto é; $d_{A,B} = |\vec{u}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(Notação: $d_{A,B}$ é a distância do ponto A ao ponto B)

Exemplo 2.7: Dados os vetores $\vec{u} = (-2, 4)$ e $\vec{v} = (3, 2)$, segue que:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

e

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Observação 2.11: Tomando $\vec{u} = (x_1, y_1)$, temos pela Observação 2.10 que $|\vec{u}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$. Daí:

$$|\vec{u}|^2 = \left(\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\right)^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

A observação acima, nos diz que a norma do vetor $\vec{u}$ ao quadrado é igual ao produto interno do $\vec{u}$ por ele mesmo.

Observação 2.12: Conhecida a forma de calcular o módulo de um vetor $\vec{u}$, podemos determinar o versor de $\vec{u}$ da seguinte forma. Se $\vec{v}$ versor de $\vec{u}$, temos:

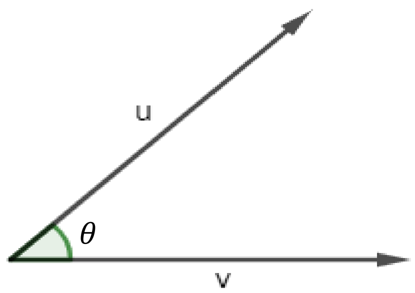
$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

- Note que $\vec{v}$ tem mesmo sentido e direção de $\vec{u}$;
- E ainda, $|\vec{v}| = 1$

2.11 ÂNGULOS ENTRE DOIS VETORES.

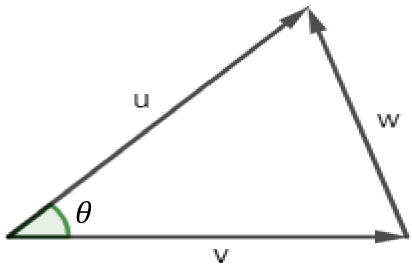
Seja θ o ângulo formado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, onde $0º \leq \theta \leq 180º$.

Figura 20- Ângulos entre vetores



Fonte: Autor

Figura 21- Triângulo entre vetores



Fonte: Autor

Note que o vetor $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow |\vec{w}| = |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow |\vec{w}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$. Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, como ilustra a Figura 21, temos:

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2. |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$$

Daí,

$$|\vec{u}|^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$$

E ainda,

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Logo,

$$\theta = arc\ cos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Como,

$$0 \leq \theta = arc\ cos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \leq 180^{o}. \quad (2.1)$$

Então,

(i) $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 90^{o} < \theta \leq 180^{o}$;

(ii) $0 < \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \Leftrightarrow \quad 0^{o} \leq \theta < 90^{o}$;

(iii) $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 90^{o}$.

Do item (iii) e pelo fato dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ serem não nulos, segue que $\theta = 90^{\circ}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemplo 2.8: Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1)$.

Segue,

$$cos\,\theta \;=\; \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \;=\; \frac{(2,3)\cdot(2,1)}{(\sqrt{2^2+3^2})\cdot(\sqrt{2^2+1^1})} = \frac{2\cdot2+3\cdot1}{\sqrt{13}\ \cdot\ \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

Logo,

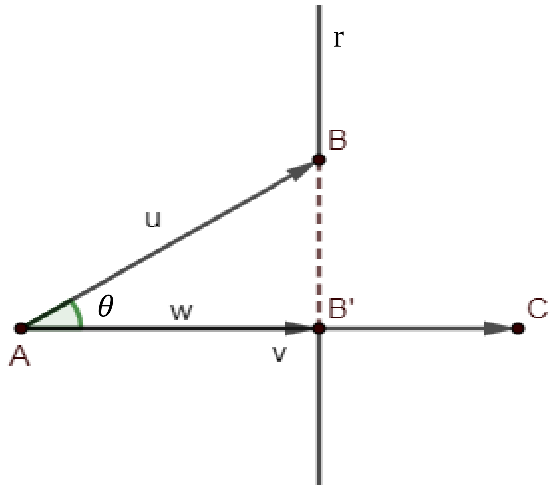
$$\theta = arc\;cos\;\frac{7}{\sqrt{65}}$$

2.12 PROJEÇÃO ENTRE VETORES

Considere os vetores não nulos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Seja θ o ângulo formado por eles. Como ilustram as Figuras 22 e 23.

Caso 1: $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$

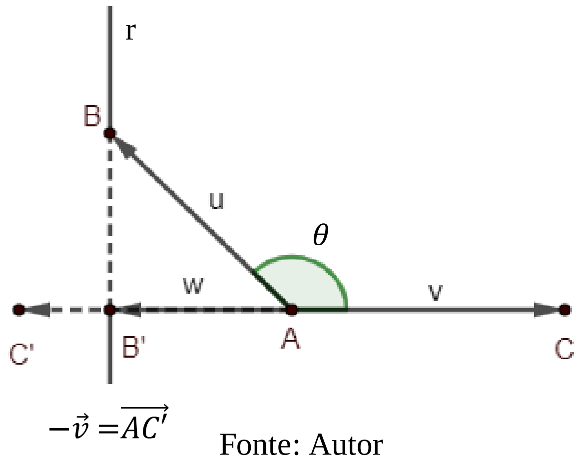
Figura 22- Proj. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$



Fonte: Autor

Caso 2: $90^o < \theta < 180^o$

Figura 23- Proj. de $\vec{u}$ sobre $-\vec{v}$.



Fonte: Autor

- Seja r perpendicular a reta suporte $\overleftrightarrow{B'C}$ e B' o ponto de interseção, segue $\vec{w} = \overrightarrow{AB'}$ é dito a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. Como ilustra aFigura 22.

- Seja r perpendicular a $(-\vec{v}\,)$ e B' o ponto de interseção, segue $\vec{w} = \overrightarrow{AB'}$ é dito a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. Como ilustra a Figura 23.

Observação 2.13: Caso em que $\theta = 90^o$, teremos $\vec{w} = \overrightarrow{AB'}$, onde $A = B'$, isto é, $\vec{w} = \overrightarrow{AB'} = \vec{0}$.

De posse do que foi dito, iremos exibir o vetor $\vec{w}$ em função dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. As duas situações possíveis para o ângulo θ são ilustradas com as Figuras 22 e 23. Note que em ambas os casos teremos $\vec{w}$ na mesma direção do vetor $\vec{v}$, isto é, existe um $k \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\vec{w} = k \cdot \vec{v} \qquad (2.2)$$

Daí,

$$|\vec{w}| = |k|\cdot|\vec{v}| \iff |k| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{w}|$$

Temos ainda que,

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot \cos\theta = |\vec{u}| \cdot \left(\frac{|\vec{u}\,.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}\right) = \frac{|\vec{u}\,.\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Logo,

$$|k| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \left(\frac{|\,\vec{u}\,.\vec{v}\,|}{|\vec{v}|} \right) = \frac{|\vec{u}\,.\vec{v}|}{|\vec{v}|^2} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{2.3}$$

Substituindo (2.3) em (2.2), temos:

$$\vec{w} = \left(\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

Notação:

$$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

Exemplo 2.9: Dados $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 0)$. Determine a $Proj_{\vec{v}}\,\vec{u}$. Temos:

$$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v} = \left(\frac{2(-1)+1\cdot 0}{(-1)^2+(0)^2} \right) \cdot (-1, 0) = \left(\frac{-\,2}{1} \right) \cdot (-1, 0) = (2, 0)$$

3 TRIÂNGULOS

Este capítulo tem como finalidade apresentar os fundamentos matemáticos relativos aos triângulos sob o foco da Geometria Analítica e da abordagem vetorial, estabelecendo conexões entre a formalização teórica e as possibilidades pedagógicas no Ensino Médio. Ao tratar dos triângulos em uma perspectiva vetorial, busca-se oferecer uma compreensão mais estruturada das relações métricas e angulares, facilitando a visualização e a resolução de problemas.

3.1 CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Nesta seção, discutiremos as condições necessárias para a existência de um triângulo. A análise vetorial nos permitirá visualizar quando três pontos determinam ou não um triângulo, considerando os módulos e direções dos vetores determinados por esses pontos.

Dados $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos do $\mathbb{R}^2$ e seja θ o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$. Pela Seção 2.13, os pontos A, B e C serão colineares se:

(i) $cos\,\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 1$

(ii) $cos\,\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = -1$

Do item (i) temos:

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$$

Como,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)$$

e

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

Segue,

$$[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)]^2 = 0$$

Isto é,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0$$

De forma análoga, tem-se o mesmo resultado para o item (ii).

Portanto, os pontos A, B e C serão vértices de um triângulo se:

$$\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Isto é, os pontos A, B e C serão vértice de um triângulo se, e somente se, o determinante das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ for diferente de 0(zero).

Exemplo 3.1: Dados os pontos $A = (2, 3), B = (-2, 5)$ e $C = (1, 4)$. Mostremos que os pontos são vértices de um triângulo.

Temos,

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 2) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (-1, 1).$$

Daí,

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \cdot 1 - (2 \cdot (-1)) = -4 + 2 = -2 \neq 0$$

Logo, A, B e C são vértice de um triângulo.

3.2 CLASSIFICAÇÃO DO TRIÂNGULO QUANTO AOS ÂNGULOS

Utilizando a linguagem vetorial, classificamos os triângulos com base na medida de seus ângulos internos. Essa abordagem permite deduzir tais classificações a partir de produtos escalares e cálculo da norma de vetores, proporcionando uma análise rigorosa e coerente com a estrutura algébrica do plano.

3.2.1 Triângulo retângulo

Proposição 3.1: Dados os pontos A, B e C vértices de um triângulo. Segue:

(i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\, ABC$ é retângulo em Â;

(ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\, ABC$ é retângulo em $\hat{B}$;

(iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\, ABC$ é retângulo em $\hat{C}$.

Prova do item (i):

Seja θ o ângulo formado pelos vetores os $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Pela definição de produto interno temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| cos\, \theta \;\Leftrightarrow\; cos\, \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Logo,

$$\theta = arc\, cos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Pela Seção 2.11 $-$ Desigualdade (2.1), temos:

$$0 \leq \theta = arc\, cos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \leq 180^{o}.$$

Assim,

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 90^{o}$$

Portanto,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 90^{o}$$

O que prova o item (i).

Prova do item (ii):

Na Seção 2.14 foi mostrado como exibir a projeção entre dois vetores.

De fato,

$$Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \vec{v} \tag{3.1}$$

Por hipótese,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} = 1 \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) em (3.1) temos:

$$Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Logo o triângulo de vértices ABC é retângulo em $\hat{B}$.

Prova do item (iii) é análoga ao item (ii), segue:

$$Proj_{\vec{u}}\, \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right) \vec{u} \tag{3.3}$$

Por hipótese,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} = 1 \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3) temos:

$$Proj_{\vec{u}}\, \vec{v} = 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

Logo o triângulo de vértices ABC é retângulo em $\hat{C}$.

Fica assim demonstrado a Proposição 3.1.

A recíproca da Proposição 3.1 é imediata e deixamos a cargo do leitor.

Exemplo 3.2: Sejam A, B e C pontos não colineares do $\mathbb{R}^2$. Mostre que tais pontos são vértices de um triângulo retângulo.

a) $A = (2, 1)$; $B = (4, 3)$; $C = (2, 5)$

b) $A = (-3, 3)$; $B = (1, -1)$; $C = (-3, -1)$

c) $A = (-2, 1)$; $B = (0, 3)$; $C = (1, -2)$

Resolução da alternativa (a)

Note que,

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (0, 4).$$

Segue,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8$$

e

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (2)^2 + (2)^2 = 4 + 4 = 8$$

Aplicando o item (ii) da Proposição 3.1, temos:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|^2 \Rightarrow \Delta\, ABC \text{ é retângulo em } \hat{B}.$$

Resolução da alternativa (b)

Note que,

$$\overrightarrow{AB} = (4, -4) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (0, -4).$$

Segue,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$$

e

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = (0)^2 + (-4)^2 = 16$$

Aplicando o item (iii) da Proposição 3.1, temos:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2 \Rightarrow \Delta\, ABC \text{ é retângulo em } \hat{C}.$$

Resolução da alternativa (c)

Note que,

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (3, -3).$$

Segue,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 - 6 = 0$$

Aplicando o item (i) da Proposição 3.1, temos:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \Delta\, ABC \text{ é retângulo em } \hat{A}.$$

3.2.2 Triângulo obtusângulo

Proposição 3.2: Dados os pontos A, B e C vértices de um triângulo. Segue:

(i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} > 90^o$

(ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > |\overrightarrow{AB}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{B} > 90^o$

(iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > |\overrightarrow{AC}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{C} > 90^o$

Demonstração: Análoga a demonstração da Proposição 3.1.

Observação 3.1: Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180º, temos que para um triângulo ser obtusângulo se faz necessário que ocorra apenas um dos itens acima.

3.2.3 Triângulo acutângulo

Proposição 3.3: Dados os pontos A, B e C vértice de um triângulo. Segue:

(i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} < 90^o$

(ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < |\overrightarrow{AB}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{B} < 90^o$

(iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < |\overrightarrow{AC}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{C} < 90^o$

Demonstração: Análoga a demonstração da Proposicão 3.1.

Observação 3.2: Para que o triângulo seja acutângulo, os itens acima devem ser satisfeitos simultaneamente.

Exemplo 3.3: Dados A, B e C pontos não colineares do $\mathbb{R}^2$, classifique os triângulos quanto aos ângulos.

a) $A = (4, 1)$; $B = (1, 2)$; $C = (2, 4)$

b) $A = (5, 3)$; $B = (-1, 3)$; $C = (-2, -1)$

Resolução da alternativa a)

Note que,

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 1) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (-2, 3)$$

Segue,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 + 3 = 9$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (-3)^2 + (1)^2 \ = 9 + 1 = 10$$

e

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = (-2)^2 + (3)^2 \ = 4 + 9 = 13$$

Pela Proposição 3.3 temos que o triângulo $\Delta\, ABC$ é acutângulo.

Resolução da alternativa b)

Note que,

$$\overrightarrow{AB} = (-6, 0) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (-7, -4).$$

Segue,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ 42 + (0) = \ 42$$

e

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (-6)^2 + (0)^2 \ = 36$$

Pela Proposição 3.3 temos que o triângulo $\Delta\, ABC$ é obtusângulo.

3.3 CLASSIFICAÇÃO DO TRIÂNGULO QUANTO AOS LADOS

Nesta seção, trataremos da classificação dos triângulos segundo a relação entre os comprimentos de seus lados. O enfoque vetorial permite calcular e comparar módulos dos vetores associados aos lados.

Definição 3.1: Sejam A, B e C pontos não colineares do $\mathbb{R}^2$. Temos:

(i) $|\overrightarrow{AB}|^2 \neq \ |\overrightarrow{AC}|^2 \neq \ |\overrightarrow{BC}|^2$ e $|\overrightarrow{AB}|^2 \neq |\overrightarrow{BC}|^2$, temos $\Delta\, ABC$ é escaleno;

(ii) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$ ou $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$ ou $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$, temos $\Delta\, ABC$ é isósceles;

(iii) $|\overrightarrow{AB}|^2 = \ |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$, temos $\Delta\, ABC$ é equilátero.

Exemplo 3.4: Sejam A, B e C pontos não colineares do $\mathbb{R}^2$. Classifique os triângulos quanto aos lados.

a) $A = (4, 1)$; $B = (1, 2)$; $C = (4, 4)$

b) $A = (5, 2)$; $B = (1, 2)$; $C = (3, 4)$

c) $A = (0, 0)$; $B = (2, 0)$; $C = (1, \sqrt{3})$

Resolução da alternativa (a)

Note que:

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 1)\ ,\ \overrightarrow{AC} = (0, 3)\ \text{ e }\ \overrightarrow{BC} = (3, 2).$$

Daí,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 10\ ;\ \ |\overrightarrow{AC}|^2 = 9\ \ ;\ \ |\overrightarrow{BC}|^2 = 13$$

Logo o triângulo $\Delta\, ABC$ é escaleno.

Resolução da alternativa (b)

Note que:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 0)\ ,\ \overrightarrow{AC} = (-2, 2)\ \text{ e }\ \overrightarrow{BC} = (2, 2)$$

Daí,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 16\ ;\ \ |\overrightarrow{AC}|^2 = 8\ \ ;\ \ |\overrightarrow{BC}|^2 = 8$$

Logo o triângulo $\Delta\, ABC$ é isósceles.

Resolução da alternativa (c)

Note que:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0)\ ,\ \overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3})\ \text{ e }\ \overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3})$$

Daí,

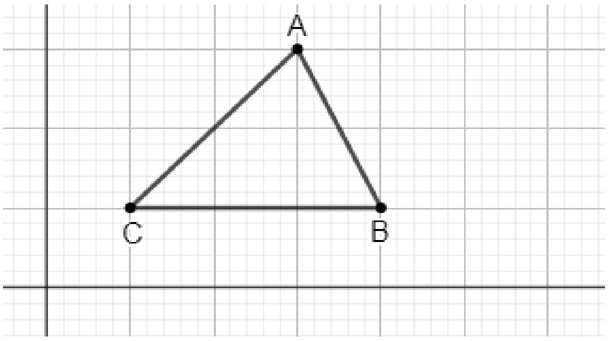
$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 4\ ;\ \ |\overrightarrow{AC}|^2 = 4\ \ ;\ \ |\overrightarrow{BC}|^2 = 4$$

Logo o triângulo $\Delta\, ABC$ é equilátero.

3.4 ÁREA DO TRIÂNGULO

Ao estudar vetores, tomamos posse de uma excelente ferramenta que nos auxilia em diversos problemas matemáticos, entre eles, temos o cálculo de áreas de figuras geométricas. Nesta seção, teremos condições de calcular área de um triângulo determinado por quaisquer pontos A, B e $C \in \mathbb{R}^2$, não colineares. Como ilustra a Figura 24.

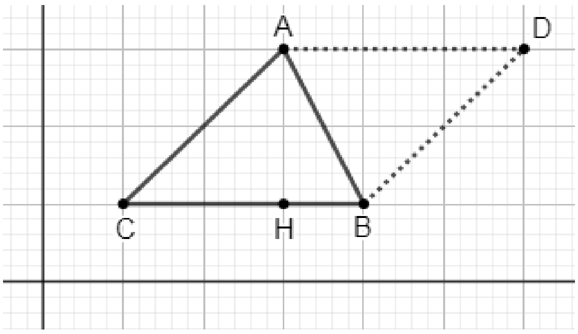
Figura 24- Triângulo ABC



Fonte: Autor

Tomemos um ponto $D \in \mathbb{R}^2$, tal que ADBC seja um paralelogramo. Considere ainda o ponto $H \in CB$, onde AH é altura do triângulo ABC. Como ilustra a Figura 25.

Figura 25- Paralelogramo $ADBC$



Fonte: Autor

Temos:

$$\overrightarrow{CH} = Proj_{\overrightarrow{CB}}\,\overrightarrow{CA} = \left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|^2}\right)\overrightarrow{CB}$$

Isto é,

$$|\overrightarrow{CH}| = \frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|}$$

Assim,

$$|\overrightarrow{CA}|^2 = |\overrightarrow{AH}|^2 + |\overrightarrow{CH}|^2 = |\overrightarrow{AH}|^2 + \left(\frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|}\right)^2$$

Daí,

$$|\overrightarrow{AH}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|}\right)^2 = \frac{|\overrightarrow{CA}|^2 \cdot |\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2}{|\overrightarrow{CB}|^2}$$

Logo,

$$|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2 \cdot |\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2}}{|\overrightarrow{CB}|}$$

Assim, sendo A_p a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, temos:

$$A_p = |\overrightarrow{CB}| \frac{\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2 \cdot |\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2}}{|\overrightarrow{CB}|} = \sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2 \cdot |\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2}$$

Segue,

$$(A_p)^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 \cdot |\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2$$

Tomando $\overrightarrow{CA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{CB} = (x_2, y_2)$, temos:

$$(A_p)^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 \cdot |\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2 = ({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2$$

Daí,

$$(A_p)^2 = (x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

Logo,

$$A_p = |x_1y_2 - y_1x_2| = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|$$

Temos que a área do paralelogramo será o determinante em módulo, das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. Como o triângulo de vértices A, B e C tem metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, segue:

$$A_T = \frac{1}{2} A_p$$

Exemplo 3.5: Seja $A = (1, -2), B = (2, -1)$ e $C = (-1, -3)$ vértices de um triângulo. Calcule sua área.

Temos,

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (-2, 1)$$

Segue,

$$A_T = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1(1) - 1(-2)| = \frac{1}{2} |1 + 2| = \frac{1}{2} |3| = \frac{3}{2}$$

4 ESTUDO DA RETA

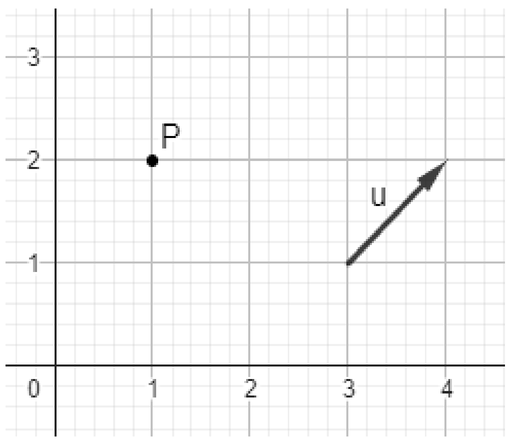
O estudo da reta constitui um dos temas centrais da Geometria Analítica, introduzido historicamente por René Descartes no século XVII, ao propor a correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Tal formulação marcou o início de uma nova etapa no desenvolvimento da Matemática, ao possibilitar a tradução de problemas geométricos em linguagem algébrica. Neste capítulo, abordaremos as principais formas de representação da reta, suas posições relativas e propriedades associadas, destacando como a linguagem vetorial oferece um caminho alternativo ao método algébrico tradicional. Além da formalização matemática, buscou-se evidenciar o caráter pedagógico do tema, ressaltando suas possibilidades de aplicação no ensino.

4.1 EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Apresentamos a equação vetorial da reta como expressão fundamental que liga um ponto dado no plano cartesiano a um vetor diretor. Essa forma facilita a construção e interpretação geométrica da reta.

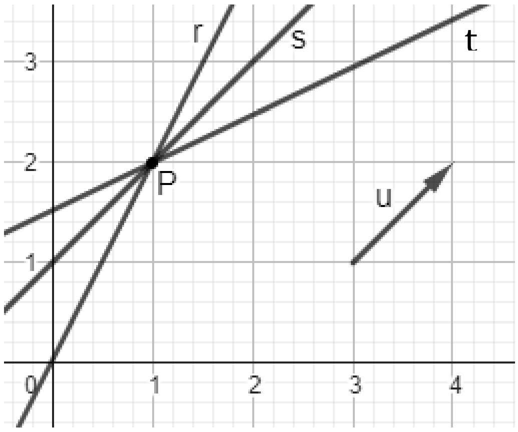
Seja P um ponto e $\vec{v}$ um vetor, ambos pertencentes a $\mathbb{R}^2$.

Figura 26- Ponto P e vetor $\vec{v}$



Fonte: Autor

Figura 27- Retas passando por P



Fonte: Autor

Na Figura 26 temos a representação do ponto P e o vetor $\vec{v}$. A Figura 27 mostra que as retas r, s e t passam por P, no entanto, apenas a reta s passa por P e tem mesma direção do vetor $\vec{u}$. Portanto, existe uma única reta passando por P e com mesma direção de $\vec{v}$. Se A é um ponto da reta s, temos que existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad A - P = \lambda \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad A = P + \lambda \cdot \vec{v}$$

Temos que $A = P + \lambda \cdot \vec{v}$ é dito equação vetorial da reta.

- O ponto A pertence a reta **s** para $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $\vec{v}$ é dito vetor diretor da reta s.

Exemplo 4.1: Obtenha a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (5, 4)$.

Note que $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$. Assim, se $X(x, y)$ é um ponto da reta que passa por A e B temos que existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad X - A = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad X = A + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (2, 3) + \lambda(3,1)$$

4.2 EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

A seguir, mostramos que a equação vetorial pode ser transformada na equação reduzida (ou explícita) da reta, discutindo sua interpretação geométrica e aplicação em problemas práticos.

Seja r a reta que passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (a, b)$ o vetor diretor da reta r. Se $A = (x, y)$ é um ponto qualquer da reta r.

Temos,

$$A = P + \lambda \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (x_1, y_1) + \lambda(a, b) \; \Leftrightarrow \; \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot a \\ y = y_1 + \lambda \cdot b \end{cases}$$

E ainda,

$$\begin{cases} \lambda a = x - x_1 \\ \lambda b = y - y_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a}\, x - \frac{b}{a}\, x_1 + y_1$$

Tomando $m = \frac{b}{a}$ e $n = (-\frac{b}{a} x_1 + y_1)$

Segue,

$$y = m \cdot x + n \tag{4.2}$$

Temos que (4.2) é dito equação reduzida da reta.

Exemplo 4.2: Determine a equação reduzida do Exemplo 4.1.

Temos,

$$(x, y) = (2, 3) + \lambda(3,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + \lambda \cdot 3 \\ y = 3 + \lambda \cdot 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\lambda = x - 2 \\ \lambda = y - 3 \end{cases}$$

Daí,

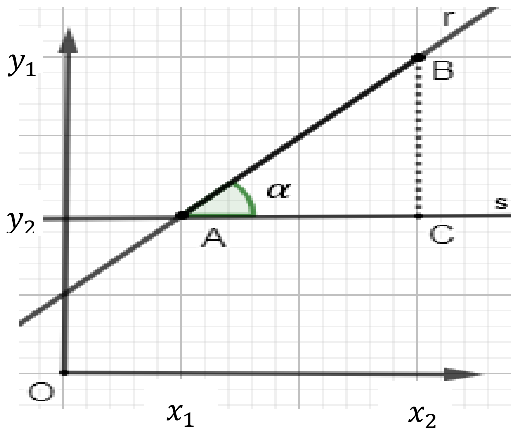
$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{1} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x + 7}{3}$$

4.2.1 Coeficiente angular da reta

Determinamos o coeficiente angular a partir da razão entre as componentes do vetor diretor, destacando seu papel na inclinação da reta e nas relações entre retas.

Definição 4.1: Definimos por coeficiente angular da reta a tangente do ângulo determinado pela reta e o eixo das abscissas.

Figura 28- Coeficiente angular da reta



Fonte: Autor

Dada a reta s paralela ao eixo das abscissas e $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ o vetor diretor da reta r. O coeficiente angular da reta r é dado pela tangente do ângulo α. Daí, temos:

$$tg\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b}{a} = m \qquad (a \neq 0)$$

Logo, o coeficiente angular da reta r será a razão entre a segunda e a primeira coordenadas do seu vetor diretor.

Observação 4.1: Em relação ao estudo do sinal do coeficiente angular m, temos:

- $m > 0$, dizemos que a inclinação de r é positiva;
- $m < 0$, dizemos que a inclinação de r é negativa;
- $m = 0$, dizemos que a reta r é paralela ao eixo das abscissas.

Exemplo 4.3: Seja r uma reta determinada pelos pontos $A = (4, 8)$ e $B = (6, -2)$. Determine o coeficiente angular da reta r.

Vimos que o coeficiente angular da reta r será a razão entre a segunda e a primeira coordenadas do seu vetor diretor. Daí:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -10). \text{ Logo } m = \frac{-10}{2} = -5 \;\Rightarrow\; \mathrm{m} = -5$$

4.3 POSIÇÕES ENTRE DUAS RETAS

Analisamos como duas retas podem se relacionar no plano: sendo paralelas, concorrentes ou perpendiculares, a partir da comparação entre seus vetores diretores.

4.3.1 Retas paralelas

A proposição seguinte nos dá condições necessárias para determinar o paralelismo entre duas retas r e s contidas em um plano, analisando seus respectivos vetores diretores.

Proposição 4.1: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ os vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Dizemos que r é paralela a s (Notação; $r \,||\, s$) se existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} \quad \Leftrightarrow \quad m_r = m_s$$

onde m_r e m_s são os coeficientes angulares das retas r e s, respectivamente.

Demonstração: É imediato, vide a Subseção 4.2.1

Observação 4.2: Note que:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow x_1 y_2 = y_1 x_2 \;\Leftrightarrow\; x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Isto é, as retas r e s serão paralelas se, somente se, o determinante das coordenadas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ for igual a 0.

Exemplo 4.4: Seja $\vec{u} = (3, 2)$ o vetor diretor da reta r. Os pontos $A = (4, 8)$ e $B = (-2, 4)$ pertencem a reta s. Mostremos que $r \,||\, s$.

Note que $\overrightarrow{AB} = (-6, -4)$ o vetor diretor da reta s. Temos:

$$m_r = \frac{2}{3} \;\text{ e }\; m_s = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; m_r = m_s \;\Rightarrow\; r \,||\, s.$$

4.3.2 Equação reduzida da reta paralela a uma reta dada e contendo um ponto fora dela

O resultado que segue, nos dará condições de exibir a equação reduzida da reta paralela a uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ dada e contendo um ponto $P = (x_P, y_P)$ fora dela.

Proposição 4.2: Dada uma reta r determinada pelos pontos A e B. Seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto não pertencente a r e $\vec{v} = (a, b)$ o vetor diretor da reta $\overleftrightarrow{AB}$. A equação reduzida de uma reta paralela a reta r passando pelo ponto P será dada por:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ x - x_P & y - y_P \end{pmatrix} = 0,$$

onde x e y são as coordenadas do ponto $Q \neq P$, tal que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$.

Demonstração:

De fato,

Note que $\overrightarrow{PQ} = (x - x_P, y - y_P)$ é vetor diretor da reta $\overleftrightarrow{PQ}$. Assim:

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \overrightarrow{PQ}$$

Daí:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ x - x_P & y - y_P \end{pmatrix} = 0$$

Segue,

$$a(y - y_P) - b(x - x_P) = 0$$

Logo,

$$y = \frac{b}{a}x + \left(y_P - \frac{b}{a}x_P\right)$$

O que conclui a demonstração.

Exemplo 4.5: Determine a equação da reta paralela à reta determinada pelos pontos de coordenadas $A = (1, 3)$ e $B = (3, -3)$ passando pelo ponto $P = (2, 3)$.

Seja $Q = (x, y) \notin \overleftrightarrow{AB}$. Note que $\overrightarrow{AB} = (2, -6)$ e $\overrightarrow{PQ} = (x - 2,\ y - 3)$ são os vetores diretores das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$, respectivamente.

Temos,

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ x - x_P & y - y_P \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ x - 2 & y - 3 \end{pmatrix} = 0$$

Segue,

$$2(y - 2) - (x - 2)(-6) = 0$$

Logo, a equação da reta paralela à reta determinada pelos pontos de coordenadas $A = (1, 3)$ e $B = (3, -3)$ passando pela ponto $P = (2, 3)$ é dada por:

$$y = -3x + 9$$

4.3.3 Retas concorrentes

Exploramos as condições sob as quais duas retas se interceptam em um único ponto, analisando a compatibilidade entre seus sistemas vetoriais.

Caso $m_s \neq m_r$, dizemos que as retas r e s são concorrentes

Exemplo 4.6: Dados $\vec{u} = (4, 8)$ e $\vec{v} = (3, 9)$ vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Temos:

$$m_s = \frac{y_2}{x_2} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{e} \quad m_r = \frac{y_1}{x_1} = \frac{8}{4} = 2$$

Temos $m_s \neq m_r$. Logo, a reta r é concorrente a reta s.

Observação 4.2: Vide Observação 4.1, é imediato que as retas r e s serão concorrentes se $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

4.3.4 Método prático para determinar o ponto comum entre duas retas concorrentes

Segue um procedimento algébrico prático para encontrar o ponto de interseção entre duas retas, partindo de suas equações vetoriais.

Proposição 4.3: Sejam r e s duas retas concorrentes, onde $(x_A, y_A) \in r$ e $(x_B, y_B) \in s$, e ainda, (a, b) e (c, d) vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Logo existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$r \cap s = (x_A + \alpha \cdot a, y_A + \alpha \cdot b) = (x_B + \beta \cdot c, y_B + \beta \cdot d)$$

onde,

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ c & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ a & b \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Demonstração:

De fato,

$$r := (x, y) = (x_A, y_A) + \alpha(a, b), \text{com } \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow r := \begin{cases} x = x_A + \alpha \cdot a \\ y = y_A + \alpha \cdot b \end{cases} \tag{4.3}$$

$$s := (x, y) = (x_B, y_B) + \beta(c, d), \text{com } \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow s := \begin{cases} x = x_B + \beta \cdot c \\ y = y_B + \beta \cdot d \end{cases} \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4) temos:

$$x_A + \alpha \cdot a = x_B + \beta \cdot c \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{x_A + \alpha \cdot a - x_B}{c} \tag{4.5}$$

$$y_A + \alpha \cdot b = y_B + \beta \cdot d \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{y_A + \alpha \cdot b - y_B}{d} \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6) temos:

$$\frac{x_A + \alpha \cdot a - x_B}{c} = \frac{y_A + \alpha \cdot b - y_B}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{d(x_B - x_A) - c(y_B - y_A)}{ad - bc}$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ c & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

De forma análoga, temos:

$$\beta = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ a & b \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Portanto, o ponto $r \cap s = (x_A + \alpha . a, y_A + \alpha \cdot b) = (x_B + \beta \cdot c, y_B + \beta \cdot d)$, onde:

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ c & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ a & b \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Exemplo 4.7: Dadas as retas r e s, não paralelas e definidas pelas equações abaixo. Determine o ponto de interseção dessas retas.

$r := (x, y) = (1, 5) + \alpha(2, 1)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

$s := (x, y) = (4, 3) + \beta(3, 5)$, com $\beta \in \mathbb{R}$

Utilizando a Proposição 4.2, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que o ponto $P = (x_A + \alpha \cdot a, y_A + \alpha \cdot b) = r \cap s$. Daí:

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ c & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} 4-1 & 3-5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{3\cdot 5-(-2)\cdot 3}{2\cdot 5-1\cdot 3} = \frac{15+6}{10-3} = \frac{21}{7} = 3$$

Portanto,

$$P = (1 + 3 \cdot 2, 5 + 3 \cdot 1) \Leftrightarrow P = (7, 8)$$

4.3.5 Discussão de um sistema linear de duas equações e duas vaiáveis

Nesta subseção relacionamos o estudo das retas com a resolução de sistemas lineares, discutindo os casos de existência e unicidade de solução. Essa conexão evidencia a importância da álgebra linear no tratamento de problemas geométricos.

Dados $(x_A, y_A) \in r$, $(x_B, y_B) \in s$ e sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ os vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Temos:

(i) O sistema linear é dito possível e indeterminado se:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ c & d \end{pmatrix} = 0;$$

(ii) O sistema linear é dito possível e determinado se $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$;

(iii) O sistema linear é dito impossível se:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Observação 4.3: A análise feita acima é análoga para o $\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ a & b \end{pmatrix}$.

4.3.6 Ângulos entre duas retas concorrentes

Mostraremos como calcular o ângulo formado entre duas retas concorrentes utilizando o produto escalar de seus vetores diretores. Para tanto, iniciemos com a seguinte definição.

Definição 4.2: Seja θ o ângulo formado por duas retas concorrentes r e s. O valor de θ será o ângulo formado pelos vetores diretores de suas respectivas retas.

Exemplo 4.8: Sejam $\vec{u} = (2, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0)$ vetores diretores das retas r e s, respectivamente. O ângulo formado por r e s será dado por:

$$cos\,\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\,\vec{u}\,| \cdot |\,\vec{v}\,|} = \frac{(2,2)(1,0)}{(\sqrt{2^2+2^2})(\sqrt{1^2+0^1})} = \frac{2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$$

Logo,

$$\theta = arc\,cos\,\frac{2}{2\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 45^{\circ}$$

4.3.7 Retas perpendiculares

Apresentamos as condições vetoriais para a perpendicularidade entre duas retas, com base na ortogonalidade de seus vetores diretores. A proposição que segue nos dará condição necessária para tal verificação.

Proposição 4.4: Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ os vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Se o produto interno dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ for igual a zero então a reta r será perpendicular a reta s (Notação; $r \perp s$)

Demonstração:

Seja θ o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Pela Seção 2.11 item (iii) temos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 90^{\circ}$$

Exemplo 4.9: Seja $\vec{u} = (3, -2)$ o vetor diretor da reta r. Os pontos $A = (2, -8)$ e $B = (6, -2)$ pertencem a reta s. Mostremos que $r \perp s$.

Note que $\overrightarrow{AB} = (4, 6)$ o vetor diretor da reta s. Temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 12 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad r \perp \text{s}.$$

4.3.8 Equação reduzida da reta perpendicular a uma reta dada e contendo um ponto fora dela

O resultado que apresentaremos, nos dar condições de exibir a equação reduzida da reta perpendicular a uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ dada e contendo um ponto $P = (x_P, y_P)$ fora dela.

Proposição 4.5: Dada uma reta r determinada pelos pontos A e B, e ainda, $\vec{v} = (a, b)$ seu vetor diretor. Seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto não pertencente a r. A equação reduzida de uma reta perpendicular a reta r passando pelo ponto P será dada por:

$$(a, b) \cdot (x - x_P, y - y_P) = 0,$$

onde x e y são as coordenadas do ponto Q, tal que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$.

Demonstração:

Note que $\overrightarrow{PQ} = (x - x_P, y - y_P)$ é o vetor diretor da reta $\overleftrightarrow{PQ}$. Assim:

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \overrightarrow{PQ}$$

Daí,

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (a,b) \cdot (x - x_P, y - y_P) = 0$$

Segue,

$$a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$$

Logo,

$$y = -\frac{a}{b}x + \left(\frac{a \cdot x_P + b \cdot y_P}{b}\right)$$

O que conclui nossa demonstração.

Exemplo 4.10: Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (2, 1)$ e $B = (1, 0)$. Dê a equação da reta s que passa pelo ponto $P = (2, 3)$ e perpendicular à reta r.

Tome $Q = (x, y) \in r$. Note que $\vec{v} = (-1, -1)$ e $\overrightarrow{PQ} = (x - 2,\ y - 3)$ são os vetores diretores das retas r e $\overleftrightarrow{PQ}$, respectivamente. Queremos $r \perp \overleftrightarrow{PQ}$. Pela Proposição 4.4 temos que a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ será dada pelo $\vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.

Daí,

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (-1, -1) \cdot (\, x - 2, y - 3) = 0$$

Segue,

$$(-1) \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (y - 3) = 0$$

Logo, a equação da reta s que passa pelo ponto $P = (2, 3)$ e perpendicular à reta r é dada por:

$$y = -x + 5$$

Os capítulos anteriores tiveram como finalidade apresentar os conceitos fundamentais que sustentam a proposta de ensino da geometria analítica sob uma perspectiva vetorial. Para um aprofundamento teórico, recomenda-se a consulta às obras (Lima, 2015), (Boulos, 2005) e (Steinbruch, 2000). Com base nesse referencial teórico, propõe-se, no capítulo seguinte, a exploração de situações que abranjam tanto a abordagem tradicional — amplamente difundida nos livros didáticos e nas práticas escolares da educação básica — quanto uma abordagem alternativa, fundamentada nas operações vetoriais.

5 RECURSO EDUCACIONAL

O estudo da Geometria Analítica pode ser conduzido por duas perspectivas principais: a tradicional, baseada em coeficientes angulares e manipulações algébricas, e a vetorial, que utiliza conceitos de vetores para integrar aspectos algébricos e geométricos. Neste capítulo, apresentamos um comparativo entre essas abordagens, evidenciando suas diferenças, potencialidades e contribuições para o ensino e a aprendizagem.

5.1 E-BOOK

Como recurso educacional resultante desta pesquisa, elaborou-se um e-book intitulado – Geometria Analítica para o Ensino Médio: Uma Abordagem Vetorial – destinado a apoiar o ensino e a aprendizagem desse conteúdo na educação básica. O material foi estruturado a partir da proposta metodológica defendida nesta dissertação, a qual privilegia o uso de vetores como ferramenta central para o estudo da Geometria Analítica, em contraposição à abordagem tradicional predominante nos livros didáticos. O e-book encontra-se organizado em três Capítulos:

- Vetores no plano – Apresenta a definição de vetor a partir da equipolência de segmentos, sua notação e representação no plano cartesiano, bem como operações geométricas e algébricas fundamentais.
- Triângulos – Discute as condições de existência, classificações dos triângulos e o cálculo de área;
- Estudo da reta – Contempla a equação vetorial e a equação reduzida da reta, analisando posições relativas entre duas retas e propriedades derivadas.

Além da fundamentação teórica, o e-book inclui exercícios resolvidos que exemplificam a aplicação do método vetorial, bem como atividades propostas para estimular a prática autônoma do estudante. Também foram inseridos recursos visuais, como representações gráficas, a fim de favorecer a compreensão e a articulação entre aspectos geométricos e algébricos.

Dessa forma, o e-book busca constituir-se em um material de apoio didático-pedagógico, coerente com as orientações da BNCC (2018), oferecendo ao professor e ao aluno um instrumento inovador para o estudo da Geometria Analítica em sala de aula e em atividades complementares.

5.2 DO MÉTODO TRADICIONAL À PERSPECTIVA VETORIAL

Ao articular essas duas perspectivas — a tradicional e a vetorial — objetiva-se estabelecer um comparativo que possibilite uma análise crítica das contribuições conceituais, operacionais e pedagógicas decorrentes da utilização do vetor como instrumento estruturante no tratamento dos conteúdos de geometria analítica. Parte-se da hipótese de que a abordagem vetorial propicia maior coesão interna entre os conceitos, favorece a generalização dos procedimentos e amplia as possibilidades de desenvolvimento do raciocínio geométrico, especialmente no estudo de objetos como pontos, triângulos e retas no plano cartesiano.

Essa construção dialógica entre abordagens distintas visa, portanto, não apenas sustentar a viabilidade da proposta aqui apresentada, mas também contribuir com a discussão sobre práticas pedagógicas mais coerentes, integradoras e alinhadas aos pressupostos da Educação Matemática contemporânea.

Com o intuito de conferir rigor metodológico a essa comparação, elegemos como referência as obras:

- *Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 7*;
- *Matemática Paiva – Volume 3*;
- *Matemática: Contextos & Aplicações – Volume 3*.

Todas amplamente reconhecidas e utilizadas no cenário educacional brasileiro. Tratam-se de materiais didático consolidados, cuja abordagem representa fielmente o tratamento tradicional da geometria analítica na educação básica, centrada na manipulação algébrica de equações e coordenadas cartesianas.

Dessa forma, ao confrontar os conteúdos e os procedimentos apresentados nas obras citadas acima, com aquelas oriundas da abordagem vetorial aqui defendida, e presente em nosso e-book, pretende-se evidenciar as potencialidades dessa proposta, destacando suas contribuições para a compreensão conceitual, a generalização de resultados e a resolução de problemas. A seguir, serão apresentadas as aplicações correspondentes.

Exercício 35: (Iezzi et al., 2013, p. 23). Os pontos $A = (2, 7), B = (-3, 0)$ e $C = (16, 5)$ são colineares?

Abordagem Tradicional

A abordagem utilizada em para a colinearidade de três pontos no plano consiste em verificar se os pontos pertencem a uma mesma reta, o que equivale a verificar se o determinante da matriz formada pelas coordenadas é nulo.

Três pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se, a área do triângulo que eles formam é igual a zero. A fórmula para essa área é:

$$\text{Área do } \Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\text{Área do } \Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 16 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Segue,

$$\text{Área do } \Delta ABC = \frac{1}{2}\left[2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - 7 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}\right]$$

E ainda,

$$\text{Área do } \Delta ABC = \frac{1}{2}[2(0 \cdot 1 - 5 \cdot 1) - 7(-3 \cdot 1 - 16 \cdot 1) + 1(-3 \cdot 5 - 16 \cdot 0)]$$

Logo,

$$\text{Área do } \Delta ABC = \frac{1}{2}[2 \cdot (-5) - 7 \cdot (-19) + 1 \cdot (-15)]$$

$$= \frac{1}{2}[-10 + 133 - 15]$$

$$= \frac{1}{2}[108] = 54 \neq 0$$

Portanto, os pontos $A = (2, 7), B = (-3, 0)$ e $C = (16, 5)$ não são colineares.

Abordagem Vetorial

Vimos na Seção 3.1 que os pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ serão vértices de um triângulo se:

$$\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Segue,

$$\det\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} = -5 \cdot (-2) - (-7) \cdot 14 = 10 + 98 = 108 \neq 0$$

Concluímos que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo, isto é, os pontos não são colineares.

Exercício 6:(Paiva, 2013, p.39). Sejam os pontos $A = (2, 5), B = (10, -1)$ e $C = (9, -2)$.

Letra b) Mostre que ABC é um Triângulo retângulo.

Abordagem Tradicional

A ideia é aplicar o Teorema de Pitágoras, para tanto, devemos determinar o comprimento dos lados do triângulo ABC.

Temos:

$(\overline{AB})^2 = (d_{A,B})^2 = (10 - 2)^2 + (-1 - 5)^2 = (8)^2 + (-6)^2 = 64 + 36 = 100$

$(\overline{AC})^2 = (d_{A,C})^2 = (9 - 2)^2 + (-2 - 5)^2 = (7)^2 + (-7)^2 = 49 + 49 = 98$

$(\overline{BC})^2 = (d_{B,C})^2 = (9 - 10)^2 + (-2 + 1)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$

Note que:

$$(\overline{AB})^2 = 100 = 98 + 2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2$$

Isto é,

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2$$

Logo, os pontos $A = (2, 5), B = (10, -1)$ e $C = (9, -2)$ são vértices de um triângulo retângulo.

Abordagem Vetorial

Note que,

$$\overrightarrow{AB} = (8, -6) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (7, -7)$$

Segue,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \cdot 7 + (-6) \cdot (-7) = 56 + 42 = 98$$

Note ainda que,

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 7^2 + (-7)^2 = 49 + 49 = 98$$

Aplicando a Proposição 3.1 temos que os pontos $A = (2, 5), B = (10, -1)$ e $C = (9, -2)$ são vértices de um triângulo retângulo.

Exercício 21: (Iezzi et al., 2013, p.16). Determine os pontos que dividem o segmento AB em quatro partes iguais, sendo $A = (3, -2)$ e $B = (15,10)$.

Abordagem Tradicional

Dividir um segmento AB em quatro partes iguais significa encontrar três pontos internos que o seccionam em quatro segmentos congruentes. Para isso, aplicamos a fórmula do ponto que divide um segmento na razão $r = \frac{m}{n}$:

$$P = \left(\frac{n \cdot x_A + m \cdot x_B}{m + n}, \frac{n \cdot y + m \cdot y_B}{m + n}\right)$$

Como queremos dividir em partes iguais, considere as razões:

- Primeiro ponto (P_1): $\frac{1}{3}$

$$P_1 = \left(\frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 15}{1 + 3}, \frac{3(-2) + 1 \cdot 10}{1 + 3}\right) = \left(\frac{9 + 15}{4}, \frac{-6 + 10}{4}\right) = \left(\frac{24}{4}, \frac{4}{4}\right) = (6, 1)$$

- Segundo ponto (P_2): $\frac{2}{2}$

$$P_2 = \left(\frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 15}{2 + 2}, \frac{2(-2) + 2 \cdot 10}{2 + 2}\right) = \left(\frac{6 + 30}{4}, \frac{-4 + 20}{4}\right) = \left(\frac{36}{4}, \frac{16}{4}\right) = (9, 4)$$

- Terceiro ponto (P_3): $\frac{3}{1}$

$$P_3 = \left(\frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 15}{3+1}, \frac{1(-2) + 3 \cdot 10}{3+1}\right) = \left(\frac{3+45}{4}, \frac{-2+30}{4}\right) = \left(\frac{48}{4}, \frac{28}{4}\right) = (12, 7)$$

Abordagem Vetorial

Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (3, -2)$ e $B = (15{,}10)$ e $\vec{v} = (12, 12)$ seu vetor diretor. Pela Seção 4.1 a equação vetorial da reta r é dada por:

$$(x, y) = (3, -2) + t(12, 12), \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

Tomemos o ponto $P_t(x, y) \in r$. Segue:

- Se $t = 0 \Rightarrow P_0(3, -2)$
- Se $t = 1 \Rightarrow P_1(15, 10)$

Assim, os pontos que satisfazem o exercício pertencem a reta quando $0 \leq t \leq 1$. Como queremos dividir o segmento em quatro partes iguais, devemos tomar os seguintes valores para t:

- Se $t = \frac{1}{4} \Rightarrow P_{\frac{1}{4}} = (3, -2) + \frac{1}{4}(12, 12) = (3 + 3, -2 + 3) = (6,\ 1)$
- Se $t = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{\frac{1}{2}} = (3, -2) + \frac{1}{2}(12, 12) = (3 + 6, -2 + 6) = (9, 4)$
- Se $t = \frac{3}{4} \Rightarrow P_{\frac{3}{4}} = (3, -2) + \frac{3}{4}(12, 12) = (3 + 9, -2 + 9) = (12, 7)$

Exercício 126: (Iezzi et al., 2013, p.70) Determine a equação da reta paralela à reta determinada pelos pontos de coordenadas $A = (2, 3)$ e $B = (1, -4)$ passando pelo ponto $P = (0, 0)$.

Abordagem Tradicional

Na geometria analítica tradicional, uma reta no plano é identificada principalmente pelo seu coeficiente angular m, que representa sua inclinação. Duas retas são paralelas se tiverem o mesmo coeficiente angular.

(1) Coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$;

O coeficiente angular m_r de uma reta que passa por dois pontos é:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - 3}{1 - 2} = \frac{-7}{-1} = 7$$

(2) Equação da reta que passa pela origem.

Sabemos que a retas paralelas têm mesmo coeficiente angular, portanto a reta procurada também terá coeficiente angular igual a 7. Além disso, a reta passa pelo ponto $(0,0)$, então podemos utilizar a equação reduzida reta:

$$y = mx + b$$

Como b é o valor de y quando $x = 0$, e a reta passa pela origem, temos $b = 0$. Portanto, a equação procurada é:

$$y = 7x$$

Abordagem Vetorial

Seja $Q = (x,y) \notin \overleftrightarrow{AB}$. Note que $\overrightarrow{AB} = (-1,-7)$ e $\overrightarrow{PQ} = (x,\ y)$ são os vetores diretores das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$, respectivamente. Utilizando o resultado da Proposição 4.2.

Temos,

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ x - x_P & y - y_P \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ x & y \end{pmatrix} = 0$$

Segue,

$$-1 \cdot y - x \cdot (-7) = 0$$

Logo, a equação da reta paralela à reta determinada pelos pontos de coordenadas $A = (2,3)$ e $B = (1,-4)$ passando pela ponto $P = (0,0)$ é dada por:

$$y = 7x$$

Exercício 46: (Dante, 2016, p.100). Seja r uma reta que passa pelos pontos $A = (2,0), B = (0,4)$. Outra reta s passa pelos pontos $C = (-4,0)$ e $D = (0,2)$. O ponto de intersecção das duas retas é $P = (a,b)$. Nessas condições, calcule as coordenadas a e b do ponto P.

Abordagem Tradicional

Iremos determinar cada equação da reta a partir de seus pontos. Em seguida, resolveremos o sistema linear formado pelas duas equações para obter o ponto de intersecção.

(1) Equação da reta r.

Sabemos que:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-0}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Sabendo que a equação reduzida da reta é dada por $y = mx + b$, e como $m_{AB} = -2$ e $A = (2,0) \in r$, temos:

$$0 = -2 \cdot (2) + b \Rightarrow b = 4$$

Logo, a equação reduzida da reta r é:

$$y = -2x + 4$$

(2) Equação da reta s.

De forma análoga a (1), temos que a equação reduzida da reta s é:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

(3) Resolvendo o sistema linear obtido de (1) e (2):

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

Igualando as duas equações:

$$-2x + 4 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

Substituindo em $y = -2x + 4$

$$y = -2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + 4 \Leftrightarrow y = \frac{12}{5}$$

Logo, o ponto de intersecção das retas r e s é $P = \left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Abordagem Vetorial

Note que $\vec{u} = (2,4)$ e $\vec{v} = (2,-3)$ são vetores diretores das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, respectivamente. Daí as equações das retas serão dadas por:

$\overleftrightarrow{AB} \coloneqq (x,y) = (2,0) + \alpha(-2,4)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;

$\overleftrightarrow{CD} \coloneqq (x,y) = (0,2) + \beta(4,2)$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

Utilizando a Proposição 4.3, existe um α ∈ ℝ, tal que o ponto $P(x_A + \alpha a, y_A + \alpha b) = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$. Daí:

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ c & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{-2(2) - 2 \cdot 4}{-2(2) - 4 \cdot 4} = \frac{-12}{-20} = \frac{3}{5}$$

Portanto,

$$P = \left(2 + \frac{3}{5}(-2), 0 + \frac{3}{5}\, 4\right) \Rightarrow P = \left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

Exercício 143: (Iezzi et al., 2013, p.74) Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$. Dê a equação da reta s que passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e perpendicular à reta r.

Abordagem Tradicional

A abordagem tradicional está fundamentada no conceito de coeficiente angular m, que mede a inclinação de uma reta no plano cartesiano. O raciocínio parte da variação de y em relação a x — ou seja, o quanto a reta "sobe ou desce" à medida que avançamos no eixo x.

(1) Coeficiente angular:

O coeficiente angular m_r de uma reta que passa por dois pontos é:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$$

(2) Condição de perpendicularidade:

Se duas retas são perpendiculares, o produto de seus coeficientes angulares é igual a 1. Logo, se $m_r = -1$, então o coeficiente angular de s, denotado por m_s, será:

$$m_s(-1) = -1 \Rightarrow m_s = 1$$

(3) Equação da reta s:

Substituindo o ponto $P = (1, 2)$ e o coeficiente angular $m_s = 1$ na equação abaixo:

$$y - y_P = m_s(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

Logo, a equação da reta s que passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e perpendicular à reta r é dada por:

$$y = x + 1$$

Abordagem Vetorial

Tome $Q = (x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$. Note que $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$ e $\overrightarrow{PQ} = (x - 1,\ y - 2)$ são os vetores diretores das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$, respectivamente. Utilizando o resultado da Proposição 4.5.

Temos,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (1, -1) \cdot (\, x - 1, y - 2) = 0$$

Segue,

$$1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) = 0$$

Logo, a equação da reta s que passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e perpendicular à reta r é dada por:

$$y = x + 1$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como propósito central propor uma alternativa metodológica para o ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio, fundamentada em uma perspectiva vetorial. Para alcançar esse objetivo geral, buscou-se, em primeiro lugar, apresentar e contextualizar o conceito de vetor como ferramenta conceitual e operativa, capaz de sustentar de maneira unificada os principais conteúdos da Geometria Analítica. Essa fundamentação inicial forneceu a base necessária para o desenvolvimento dos capítulos seguintes, onde a linguagem vetorial foi constantemente utilizada como eixo estruturante.

Na sequência, buscou-se explorar conteúdos específicos da Geometria Analítica sob a ótica vetorial, como o estudo de triângulos, áreas e equações da reta. Essa exploração, realizada sobretudo nos capítulos 3 e 4, permitiu evidenciar o potencial da abordagem vetorial na sistematização dos procedimentos matemáticos, favorecendo a integração entre conceitos geométricos e ferramentas algébricas. A análise comparativa apresentada no Capítulo 5, entre a abordagem tradicional — marcada pela manipulação algébrica de equações e coordenadas cartesianas — e a abordagem vetorial — centrada na utilização de vetores — mostrou que a segunda amplia as possibilidades de generalização, articulação conceitual e clareza metodológica.

Por fim, com o intuito de dar aplicabilidade prática à proposta e de oferecer um recurso pedagógico acessível, foi desenvolvido e disponibilizado um e-book como produto educacional. Nele, os conteúdos da Geometria Analítica tradicionalmente ensinados no Ensino Médio foram revisitados sob a perspectiva vetorial, reafirmando a viabilidade da proposta e fomentando o debate sobre práticas alternativas no ensino da matemática.

Dessa forma, a articulação entre os objetivos específicos permitiu não apenas alcançar o objetivo geral desta pesquisa, mas também demonstrar que a abordagem vetorial constitui uma alternativa metodológica relevante, alinhada às exigências curriculares da Educação Básica e promissora para a superação das dificuldades recorrentes no ensino de Geometria Analítica. Conclui-se que o enfoque vetorial pode contribuir para uma formação matemática mais sólida, crítica e reflexiva, ao mesmo tempo em que abre caminho para práticas docentes comprometidas com o fortalecimento do ensino de matemática na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL, M. DA E. **Parâmetro Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. , [s.d.]. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 25 set. 2025.

[2] LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. [s.l.] Instituto Nacional de Mathática Pura e Aplicada, 2015.

[3] OLIVEIRA, C. G. G. **Geometria analítica e vetores no ensino médio.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul, 2020. 85 f. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=carlos+gabriel+germano&titulo=&polo=. Acesso em: 25 set. 2025.

[4] FURLANI, C. **O uso de conceitos vetoriais em geometria analítica no ensino médio com auxílio do geogebra**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná, 2016. 134 f. Disponível em: https: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=furlani&titulo=&polo=. Acesso em: 25 set. 2025.

[5] BOULOS, P.; CAMARGO, I. DE. **Geometria analítica - Um tratamento vetorial.** São Paulo: Ed. Prentice Hall Brasil, 2005.

[6] WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. **Geometria analítica**. [s.l.] Makron Books, São Paulo, 2000.

[7] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 7: Geometria analítica / Gelson Iezzi.** — 6. ed. — São Paulo : Atual, 2013. [s.l: s.n.].

[8] PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 2ª edição ed. São Paulo: Modena, 2013. v. Volume 3.

[9] DANTE, L. Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações - ensino médio**. São Paulo: Ática, 2016. v. Volume 3.

APÊNDICE: (LINK DE ACESSO – E-BOOK)

QR CODE acesso ao E-BOOK

LINK acesso ao E-BOOK

https://www.canva.com/design/DAGq60HjdXE/BzSTSa-hLLUwkuAZInnWmg/view?utm_content=DAGq60HjdXE&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=uniquelinks&utlId=ha58eb1660a