



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO: DA
DINÂMICA KEPLERIANA ÀS CORREÇÕES
RELATIVÍSTICAS**

José Aurilan de Oliveira Feitosa

PIRIPIRI
- 2025 -

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO: DA
DINÂMICA KEPLERIANA ÀS CORREÇÕES
RELATIVÍSTICAS**

José Aurilan de Oliveira Feitosa

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob a orientação do Prof. Dr. Neymar José Nepomuceno Cavalcante, apresentado em complementação aos requisitos para obtenção do título de Graduado em Licenciatura Plena em Física.

PIRIPIRI
- 2025 -

F311p Feitosa, Jose Aurilan de Oliveira.

A precessão do periélio de Mercúrio: da dinâmica kepleriana às correções relativísticas / Jose Aurilan de Oliveira Feitosa. - 2025.

59f.: il.

Monografia (graduação) - Curso de Licenciatura em Física, Campus Professor Antônio Giovanni de Sousa da Universidade Estadual do Piauí, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Neymar José Nepomuceno Cavalcante".

1. Órbita de Mercúrio. 2. Relatividade Geral. 3. Mecânica Clássica. 4. Métrica de Schwarzschild. I. Cavalcante, Neymar José Nepomuceno . II. Título.

CDD 530

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
ANA ANGELICA PEREIRA TEIXEIRA (Bibliotecário) CRB-3^a/1217

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família, pelo apoio constante e incentivo em todos os momentos desta jornada acadêmica. A compreensão e conselhos serviram de suporte para minha progressão ao longo desses anos de estudos.

Agradeço ao meu amigo e colega José Guilherme, pelas discussões enriquecedoras, parceria nos momentos difíceis e pelos conhecimentos compartilhados.

Ao meu orientador, Dr. Neymar Nepomuceno, minha gratidão pela paciência, sabedoria e orientação. Sua expertise e dedicação foram essenciais para a conclusão deste trabalho. Sou grato pelas valiosas contribuições e pelo estímulo intelectual.

Ao meu amigo e ex-professor, Eraldo Paz, obrigado pelos conselhos, inspiração e pelo apoio além da sala de aula. Sua mentoria foi fundamental para meu crescimento acadêmico e pessoal.

À minha namorada, Maria Franciele, minha gratidão pelo apoio constante, compreensão e auxílio nos momentos difíceis, inclusive nos cuidados com minha saúde.

Aos meus professores da graduação, que compartilharam conhecimentos, conselhos e contribuíram para minha formação profissional e humana.

Por fim, a todos os meus amigos e colegas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Seja pelo compartilhamento de ideias, ajuda financeira ou emocional, vocês fizeram parte desta conquista.



ANEXO A RESOLUÇÃO CEPEX 003/2021 (TCC)
ATA DE APRESENTAÇÃO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e quatro dias do mês de junho de 2025, às quatorze horas, na sala sete do Campus Professor Antônio Giovanni Alves de Sousa UESPI - Piripiri, na presença da banca examinadora, presidida pelo professor **Dr. NEYMAR JOSÉ NEPOMUCENO CAVALCANTE** e composta pelos seguintes membros: 1) professor **Dr. Giovane de Souza Silva** e 2) professor **Dr. Éric Carvalho Rocha** o aluno **José Aurilan de Oliveira Feitosa** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação em Licenciatura em Física como elemento curricular indispensável à Colação de Grau, tendo como título: “**A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO: DA DINÂMICA KEPLERIANA ÀS CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS**”.

A Banca Examinadora reunida em sessão reservada deliberou e decidiu pelo resultado aprovado, obtendo a nota final 10,0, ora formalmente divulgado ao aluno e aos demais participantes, e eu professor **Dr. Anilton de Brito Vieira Filho** na qualidade de professor titular da disciplina de TCC II lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos membros da Banca Examinadora e pelo aluno apresentador do trabalho.

Assinaturas:

Documento assinado digitalmente

gov.br ANILTON DE BRITO VIEIRA FILHO
Data: 22/10/2025 07:07:50-0300
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

1 – Professor titular da disciplina

Documento assinado digitalmente

gov.br NEYMAR JOSE NEPOMUCENO CAVALCANTE
Data: 23/10/2025 14:22:55-0300
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

2 - Presidente da Banca Examina

Documento assinado digitalmente

gov.br GIOVANE DE SOUZA SILVA
Data: 23/10/2025 14:50:55-0300
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

3 - Membro da Banca

Documento assinado digitalmente

gov.br ERIC CARVALHO ROCHA
Data: 25/10/2025 16:29:21-0300
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

4 - Membro da Banca

Documento assinado digitalmente

gov.br JOSE AURILAN DE OLIVEIRA FEITOSA
Data: 27/10/2025 14:39:52-0300
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

5 - Aluno(a)

RESUMO

O questionamento constante sobre os fenômenos da natureza levaram ao surgimento da ciência, em especial a física. As leis de Newton e a lei da Gravitação retratam com exatidão as órbitas dos astros celestes ao considerar a gravidade como uma força que depende das massas envolvidas. Contudo, o planeta Mercúrio fugia das explicações dadas pela dinâmica newtoniana, onde esta não explicava a discrepância entre os valores observacionais e teóricos. Este trabalho tem como objetivo analisar o movimento orbital de Mercúrio sob duas abordagens da física: a Mecânica Clássica e a Teoria da Relatividade Geral (TRG). A primeira parte apresenta os fundamentos da Mecânica Clássica, abordando as Leis de Newton e a Lei da Gravitação Universal, o princípio da conservação da energia e do momento angular, as equações do movimento em potenciais centrais. Em seguida, as leis de Kepler foram revisadas. A partir desse arcabouço, examinam-se as perturbações no movimento planetário, utilizando a equação de Binet para modelar a órbita do planeta. A discrepância entre o valor previsto pela mecânica newtoniana e os dados observacionais quanto à precessão do periélio de Mercúrio revela a limitação da teoria. A segunda parte do trabalho trata dos fundamentos da TRG, apresentando os postulados que regem essa teoria e a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. As equações de Einstein foram resolvidas analiticamente para um corpo esfericamente simétrico, estático e sem carga. A partir dessa solução das equações de campo, conhecida como métrica de Schwarzschild, deduziu-se a equação do movimento que descreve a órbita de Mercúrio em um espaço-tempo curvo. São comparados os resultados obtidos com os dados observacionais, destacando-se a precisão da teoria relativística na explicação da precessão observada. Por fim, discute-se a relevância histórica deste problema para a validação da TRG.

Palavras-chave: órbita de Mercúrio; mecânica clássica; relatividade geral; precessão do periélio; métrica de Schwarzschild.

ABSTRACT

The constant questioning about the phenomena of nature led to the emergence of science, especially physics. Newton's laws and the Law of Gravitation accurately portray the orbits of celestial bodies by considering gravity as a force that depends on the masses involved. However, the planet Mercury eluded the explanations provided by Newtonian dynamics, which failed to account for the discrepancy between observational and theoretical values. This work aims to analyze Mercury's orbital motion under two approaches in physics: Classical Mechanics and the Theory of General Relativity (GR). The first part presents the fundamentals of Classical Mechanics, addressing Newton's Laws and the Law of Universal Gravitation, the principle of conservation of energy and angular momentum, and the equations of motion in central potentials. Next, Kepler's laws are reviewed. From this framework, perturbations in planetary motion are examined using Binet's equation to model the planet's orbit. The discrepancy between the value predicted by Newtonian mechanics and observational data regarding Mercury's perihelion precession reveals the theory's limitations. The second part of the work deals with the fundamentals of GR, presenting the postulates that govern this theory and the curvature of spacetime caused by the presence of mass and energy. Einstein's equations were analytically solved for a spherically symmetric, static, and uncharged body. From this solution of the field equations, known as the Schwarzschild metric, the equation of motion that describes Mercury's orbit in curved spacetime was derived. The results obtained are compared with observational data, highlighting the precision of relativistic theory in explaining the observed precession. Finally, the historical relevance of this problem for the validation of GR is discussed.

Keywords: Mercury's orbit; classical mechanics; general relativity; perihelion precession; Schwarzschild metric.

Sumário

1	Introdução	12
2	Fundamentos da Mecânica Clássica	13
2.1	As Leis de Newton	13
2.2	A Lei da Gravitação Universal	14
2.3	Conservação da Energia e do Momento Angular	15
2.4	Equações do Movimento em Potenciais Centrais	17
3	O Problema de Kepler	19
3.1	A Primeira Lei de Kepler: Órbitas Elípticas	19
3.2	A Segunda Lei de Kepler: Áreas Iguais em Tempos Iguais	22
3.3	A Terceira Lei de Kepler: Relação entre Período e Raio Médio	23
4	Perturbações no Movimento Planetário	24
4.1	O Vetor de Laplace-Runge-Lenz	24
4.2	Contribuições Newtonianas para a Precessão do Periélio de Mercúrio	26
4.2.1	A Equação de Binet	26
4.2.2	Solução da Equação de Binet (Órbita Não Perturbada)	28
4.2.3	Potencial Efetivo com Perturbações	29
4.2.4	Solução da Equação de Binet Modificada	30
4.2.5	Cálculo do Avanço do Periélio de Mercúrio	31
4.3	Mercúrio e o Limite da Física Clássica	33
5	Fundamentos da Relatividade Geral e Aplicações ao Movimento Planetário	33
5.1	Postulados da Relatividade Geral	34
5.2	Curvatura do Espaço-Tempo e Órbitas Planetárias	34
5.3	Equações de Einstein para Campos Estáticos Esfericamente Simétricos	35
5.4	A Solução de Schwarzschild e suas Implicações Orbitais	36
6	A Correção Relativística da Órbita de Mercúrio	41
6.1	Cálculo do Avanço do Periélio a Partir da Métrica de Schwarzschild	42
6.2	Comparação com Dados Observacionais	48
6.3	Relevância Histórica da Precessão do Periélio na Confirmação da Relatividade Geral	48
7	Conclusão	49

8 Apêndice	50
8.1 Lei de Transformação de Coordenadas no Espaço Bidimensional	50
8.2 Lei de Transformação Vetorial	51
8.3 Análise Tensorial	51
8.4 Componente Covariante de um Tensor	52
8.5 Componente Contravariante de um Tensor	53
8.6 Seções Cônicas	54
8.7 Métrica de Schwarzschild	56
8.7.1 Mudanças de Coordenadas	56
8.7.2 Conexões da Métrica	57
8.8 Tensor de Riemann	57
Referências	59

Listas de Figuras

1	Representação da força gravitacional entre dois corpos de massas distintas. O vetor \vec{r} aponta da massa 1 para a massa 2, e \hat{r} representa o vetor unitário na mesma direção. As forças \vec{F}_{12} e \vec{F}_{21} são forças de mesma intensidade e direções opostas, conforme a terceira lei de Newton.	14
2	Representação vetorial no espaço tridimensional com destaque para o momento angular específico \vec{h} . O vetor \vec{r} indica a posição do corpo em relação à origem O , \vec{v} é o vetor velocidade, e $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ aponta perpendicularmente ao plano da órbita, conforme a regra da mão direita. O vetor \vec{u} representa a direção instantânea do movimento orbital, enquanto \vec{c} é um vetor constante na direção do eixo x	20
3	Representação de uma órbita elíptica em torno de um foco, conforme previsto pela primeira lei de Kepler. O corpo em movimento percorre a elipse sob influência de uma força central atrativa, com o foco ocupando a posição da fonte dessa força.	22
4	Representação do vetor de Laplace-Runge-Lenz no plano da órbita. Esse vetor aponta na direção do periélio e permanece constante em sistemas keplerianos ideais (sem perturbações), refletindo a simetria do potencial $1/r$ e a conservação da excentricidade. No entanto, em sistemas perturbados, como no caso da órbita de Mercúrio influenciada por efeitos relativísticos, a taxa de variação temporal desse vetor não é nula. Essa variação está diretamente relacionada à precessão do periélio, sendo uma ferramenta útil para descrever e quantificar esse desvio angular ao longo do tempo.	26
5	Gráfico do potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ em função da distância radial r . O potencial efetivo resulta da soma do potencial gravitacional atrativo ($-1/r$), da barreira centrífuga ($1/r^2$) e de termos perturbativos adicionais ($-1/r^3$). Essa forma modificada do potencial explica a estabilidade e a forma das órbitas, além de ser responsável por efeitos como a precessão do periélio.	30
6	Representação da precessão do periélio de Mercúrio. De acordo com a TRG, a presença de um efeito relativístico no campo gravitacional solar provoca um avanço gradual do ponto de maior aproximação (periélio) da órbita de Mercúrio a cada revolução. Esse fenômeno, observado e confirmado experimentalmente, foi uma das primeiras evidências a favor da teoria de Einstein.	42
7	Gráfico do potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ em função da distância radial r . O potencial efetivo combina o potencial central atrativo (o termo $-1/r$), a barreira centrífuga (termo proporcional a $1/r^2$) e correções adicionais (como $-1/r^3$), que são responsáveis por efeitos relativísticos, como a precessão do periélio. Essa forma modificada do potencial explica desvios orbitais observados em corpos celestes, como Mercúrio.	44

1 Introdução

Desde o surgimento das primeiras civilizações, o ser humano busca entender a natureza, inicialmente através de mitos e crenças em divindades, posteriormente por intermédio de explicações baseadas na razão e observação. Ao observar o céu noturno, as diferentes culturas construíram denominações aos corpos celestes conforme arcabouço científico de sua época, tais manifestações foram transmitidas ao longo do tempo para as gerações futuras [1].

O questionamento constante sobre os fenômenos da natureza levaram ao surgimento da ciência, em especial a física. Na dinâmica de movimentos, as leis de Newton, com base nas leis de Kepler, descrevem com grande precisão eventos que ocorrem em baixas velocidades. A lei da Gravitação retrata com exatidão as órbitas dos astros celestes ao considerar a gravidade como uma força que depende das massas envolvidas. Contudo, o planeta Mercúrio fugia das explicações dadas pela dinâmica newtoniana, onde esta não explicava a discrepância entre os valores observacionais e teóricos [2, 3].

Em 1915, Albert Einstein publicou a famosa Teoria da Relatividade Geral (TRG), na qual apresentou a gravidade com um efeito da deformação da geometria do espaço-tempo devido a matéria e energia. A equação de Einstein estabelece, a partir do formalismo tensorial, a relação de como a massa e energia deformam a geometria do espaço-tempo, cuja solução no vácuo é conhecida como métrica de Schwarzschild. Essa métrica descreve o campo gravitacional exterior a um corpo massivo, esférico e sem carga elétrica, com dependência apenas da distância radial [4, 5].

Na região mais próxima a sua estrela, Mercúrio realiza um movimento que desafia a mecânica newtoniana, ao apresentar um desvio angular pequeno em sua órbita, mas significativo. Tal teoria explica que, a maior parte desse precessão é devido aos efeitos gravitacionais de outros planetas do sistema solar, sendo os com mais influência, Vênus, Terra, Júpiter e, em menor valor o Sol, que apresenta uma forma oblata decorrente da rotação em torno de seu eixo. A teoria proposta por Einstein atribuiu uma pequena correção relativística ao considerar que após uma volta completa a órbita não é uma elipse fechada, o que é resultado da precessão causada pela geometria do espaço-tempo[6, 7].

Neste trabalho de conclusão de curso, será abordado o problema da órbita de Mercúrio seguindo duas vertentes fundamentais da física: Mecânica Clássica e Teoria Relatividade Geral. Inicialmente, pelas leis de Newton e a lei da gravitação, que consideram a gravidade como uma força central que varia inversamente com o quadrado da distância entre os corpos. Utilizando o cálculo diferencial integral, será feito uma investigação acerca dos efeitos perturbativos gravitacionais sobre a órbita do planeta. Em seguida, com base nos princípios da Relatividade Geral, será empregada uma abordagem apoiada na métrica de Schwarzschild, que permite uma descrição mais precisa do movimento de Mercúrio no espaço-tempo curvo.

2 Fundamentos da Mecânica Clássica

A mecânica clássica representa o primeiro grande arcabouço teórico da física para a descrição do movimento dos corpos. O seu desenvolvimento compreende entre os séculos XVI e XVIII, ela surgiu como uma necessidade de dar respostas comprehensíveis aos fenômenos naturais a partir de princípios racionais e métodos experimentais. O grande cientista sistematizador do conhecimento foi Galileu Galilei, cujos os trabalhos na investigação dos movimentos adquiriu um caráter experimental e matemático. Essa nova abordagem na dinâmica viria a ser aprimorada por Isaac Newton no final do século XVII, a partir de leis gerais do movimento e do cálculo diferencial integral.

Em seu livro *Principia Mathematica*, Newton publicou em 1687 as leis que regem a dinâmica e a lei da gravitação universal, descrevendo com notável precisão movimentos de corpos celestes e terrestres. Essa estrutura teórica, baseada em conceitos como força, massa, espaço e tempo absoluto, persistiu por mais de dois séculos. Nesta seção, serão apresentados os princípios que fundamentam a mecânica clássica, com ênfase nas leis de Newton e forças em potências centrais que servirão de base para compreensão da relatividade geral e o entendimento da gravidade como a curvatura do espaço-tempo [8].

2.1 As Leis de Newton

As leis de Newton constituem a base formal da dinâmica clássica, fornecendo os princípios fundamentais que regem o movimento dos corpos sob a ação de forças. A primeira lei, também conhecida como princípio da inércia, estabelece que *um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme tende a manter seu estado, a menos que força resultante atue sobre ele*. A inércia é a resistência dos corpos em mudar seu estado de movimento, o que está intrinsecamente relacionada à massa do corpo.

A segunda lei estabelece quantitativamente que *a aceleração de um objeto é diretamente proporcional à força resultante que atua sobre ele e inversamente proporcional à sua massa, seguindo a mesma direção da força*. Esta lei é definida pela equação vetorial:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

em termos diferenciais é expressa como sendo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

onde \vec{P} é o momento linear.

A terceira lei afirma que, *para toda ação, existe uma reação de igual intensidade e direção, porém de sentido oposto*. Isso implica que, quando um corpo exerce força em outro, este aplica uma força no primeiro, no entanto, essas forças não se anulam por

serem aplicadas em corpos distintos [9, 10, 11].

2.2 A Lei da Gravitação Universal

O astrônomo Cláudio Ptolomeu (100–170 d.C.) formulou o modelo geocêntrico, no qual a Terra encontra-se no centro de todos os movimentos celestes. Este modelo atendeu às perspectivas da época, o que fez durar por mais de mil anos. No século XVI, o astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473–1543) apresentou o modelo heliocêntrico baseado em observações e cálculos matemáticos de que o Sol está no centro do sistema solar e os planetas, incluindo a Terra, giram ao seu redor. Essa ideia representou uma ruptura com a tradição aristotélico-ptolomaica imposta até então [12].

Posteriormente, Johannes Kepler formulou as três leis do movimento planetário (que será visto em detalhes na proxima seção), descrevendo com precisão as órbitas elípticas dos planetas ao redor do Sol. Contudo, foi Isaac Newton quem consolidou o entendimento das forças que regem os corpos celestes ao formular, em 1687, a Lei da Gravitação Universal. Segundo Newton, *todos os objetos que possuem massa exercem forças de atração uns sobre os outros, cuja intensidade é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.* Essa lei é expressa pela equação:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \quad (1)$$

onde \vec{F}_{12} é a força gravitacional que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2 de massas m_1 e m_2 , respectivamente, ver Figura (1). O sinal negativo indica que a força é atrativa, ou seja, tem sentido oposto ao vetor posição. Esses corpos estão separados por uma distância r , módulo do vetor \vec{r} que possui vetor unitário \hat{r} . E G é a constante gravitacional universal, calculada em laboratório em 1798 pelo físico inglês Henry Cavendish (1731–1810), cujo valor experimental é aproximadamente $6,674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ [9, 13]. A dependência de

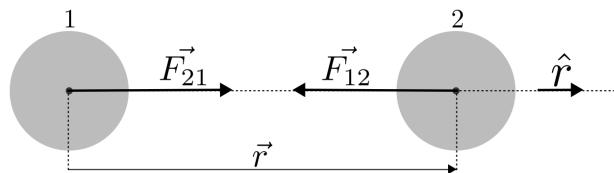


Figura 1: Representação da força gravitacional entre dois corpos de massas distintas. O vetor \vec{r} aponta da massa 1 para a massa 2, e \hat{r} representa o vetor unitário na mesma direção. As forças \vec{F}_{12} e \vec{F}_{21} são forças de mesma intensidade e direções opostas, conforme a terceira lei de Newton.

Fonte: Autoria própria (2025).

\vec{F}_{12} com o inverso do quadrado da distância pode ser compreendido por meio do conceito

de fluxo de campo gravitacional. Suponha uma esfera Z de raio r em torno da massa pontual M gerando um campo gravitacional ao seu redor. O vetor campo gravitacional \vec{g} gerado por essa massa é radial e aponta para a própria massa, dado pela seguinte relação

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r},$$

o elemento de área de Z em coordenadas esféricas é dado por

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}.$$

O fluxo de campo gravitacional através de z é dado pela integral de superfície fechada do produto escalar $\vec{g} \cdot d\vec{A}$:

$$\Phi_g = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-G \frac{M}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}) .$$

Sendo o produto escalar $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$, chegaremos a expressão

$$\Phi_g = -GM \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2)$$

Resolvendo separadamente as integrais para (θ) e (ϕ) na Eq.(2), encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \theta d\theta &= -\cos \theta|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \\ \int_0^{2\pi} d\phi &= 2\pi, \end{aligned}$$

e, a partir dos resultados obtidos das integrais, o fluxo torna-se

$$\Phi_g = -GM \cdot 2 \cdot 2\pi = -4\pi GM.$$

O resultado mostra que o fluxo depende apenas de grandezas constantes, independente do raio da esfera. Para que o fluxo total permaneça invariante ao se aumentar a distância r , o módulo do campo e, portanto, da força gravitacional precisa decrescer proporcionalmente a $1/r^2$. Este formalismo matemático não apenas justifica a forma da Lei de Newton dada pela Eq.(1), mas também, estabelece uma profunda conexão entre a geometria do espaço e gravitação [14].

2.3 Conservação da Energia e do Momento Angular

Como vimos anteriormente, a lei da gravitação universal de Newton descreve uma força de atração que varia com o inverso do quadrado da distância entre dois corpos.

Essa força é classificada como uma força central, pois atua sempre ao longo da linha que conecta os centros de massa dos corpos envolvidos. Matematicamente, uma força central pode ser expressa por

$$\vec{F} = F\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = F\frac{\vec{r}}{r}, \quad (3)$$

em que F representa a intensidade da força, que depende apenas da distância r . Essa força é conservativa (independente da trajetória). Considerando um sistema de corpos de massas M e m , existe uma energia potencial gravitacional associada, expressa pela equação

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r}.$$

A energia mecânica do sistema é a soma da energia cinética, T , e da energia potencial gravitacional

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}. \quad (4)$$

Como a força gravitacional não realiza trabalho dissipativo, a energia mecânica total E permanece constante ao longo do tempo.

Além disso, outra grandeza que permanece constante é o momento angular \vec{L} , que em relação à origem do sistema de coordenadas é dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (5)$$

Derivando a Eq.(5) em relação ao tempo, chegaremos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) \\ &= m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \\ &= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) \\ &= m(0 + \vec{r} \times \vec{a}) \\ &= \vec{r} \times m\vec{a}, \end{aligned}$$

como isso, temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (6)$$

Substituindo a Eq.(3) na Eq.(6), teremos

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r} \times F \frac{\vec{r}}{r} \\ &= \frac{F}{r} (\vec{r} \times \vec{r}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde esse resultado mostra que para forças centrais, $\vec{F} \propto \hat{r}$,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{constante.} \quad (7)$$

A conservação do momento angular implica que o vetor \vec{L} mantém sua direção e magnitude constantes durante o movimento. Assim, a conservação da energia e do momento angular não apenas simplifica a análise dos sistemas gravitacionais, como também fornece os alicerces teóricos para a compreensão da dinâmica orbital de corpos celestes [15, 16].

2.4 Equações do Movimento em Potenciais Centrais

Um potencial central é aquele cuja intensidade depende unicamente da distância entre duas partículas e está sempre direcionado ao longo da linha que as une. Em outras palavras, o potencial V é função apenas do módulo da posição relativa, isto é, $V = V(r)$, cuja a força central correspondente é obtida da forma

$$\vec{F}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr} \hat{r}.$$

Considerando um sistema de duas partículas de massas m e M , em que M está fixa na origem e m se move sob a influência de um potencial central, a equação do movimento para m é dada pela segunda lei de Newton

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{dV}{dr} \hat{r}. \quad (8)$$

Como mostrado anteriormente, o momento angular \vec{L} é conservado. Escolhendo o plano de movimento como sendo o plano xy , podemos descrever o vetor posição \vec{r} usando coordenadas polares (r, θ) , o que nos permite decompor a equação do movimento em componentes radiais e angulares. A velocidade em coordenadas polares é dada por

$$\vec{v} = r' \hat{r} + r \theta' \hat{\theta}. \quad (9)$$

Derivando a Eq.(9) em relação ao tempo, obtemos a aceleração

$$\vec{a} = (r'' - r\theta'^2)\hat{r} + (r\theta'' + 2r'\theta')\hat{\theta}.$$

Como a força é central não há componente tangencial, portanto, a equação do movimento na direção $\hat{\theta}$ será

$$r\theta'' + 2r'\theta' = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por mr , chegaremos

$$\begin{aligned} mr^2\theta'' + 2mrr'\theta' &= 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\theta') &= 0 \\ mr^2\theta' &= \text{constante} \\ mr^2\theta' &= L. \end{aligned} \tag{10}$$

Onde L representa o momento angular da partícula. Da Eq.(8), teremos apenas a equação radial da aceleração expressa da seguinte forma

$$m(r'' - r\theta'^2) = -\frac{dV}{dr}. \tag{11}$$

Na Eq.(10), isolando θ' e substituindo na Eq.(11), obtemos a equação do movimento radial

$$mr'' = -\frac{dV}{dr} + \frac{L^2}{mr^3}.$$

A equação acima pode ser entendida como o movimento de uma partícula em um potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$, com a inclusão de uma contribuição centrífuga ($L^2/2mr^2$), que representa a energia associada ao movimento angular, cuja contribuição impede que a partícula colapse para $r = 0$:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{12}$$

Contudo, a equação do movimento se reduz à forma:

$$mr'' = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}.$$

Essa equação descreve o movimento radial da partícula como se estivesse sujeita a um potencial escalar $V_{\text{eff}}(r)$, o que permite a análise qualitativa do movimento orbital com base nas propriedades desse potencial.

A importância dessa formulação está em transformar um problema bidimensional com

simetria central em um problema unidimensional de movimento efetivo radial, possibilitando a análise detalhada do tipo de órbita (fechada, aberta ou seção cônica) em função da energia e do momento angular [10, 16].

3 O Problema de Kepler

Em 1609, o astrônomo alemão Johannes Kepler publicou sua obra *Astronomia Nova*, onde apresentou as três leis do movimento planetário, que hoje levam seu nome. Os estudos das órbitas celestes tiveram grandes contribuições do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, que por sua vez coletou grandes quantidade de dados observacionais [2, 15]. A aquisição desses dados permitiram Kepler formular as três leis do movimento planetário, que veremos a seguir.

3.1 A Primeira Lei de Kepler: Órbitas Elípticas

Considere um planeta girando em torno do Sol, que está localizado em um foco, adotaremos o sistema de coordenadas no centro do Sol. O vetor que localiza o planeta é $\vec{r}=\vec{r}(t)$ e o vetor velocidade $\vec{v}=\vec{r}'$, vetor aceleração $\vec{a}=\vec{r}''$. Para fins de simplificação adotaremos $r = |\vec{r}|$. De acordo com a lei da Gravitação e a segunda lei de Newton [2, 3],

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \quad (13)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (14)$$

Igualando as Eqs.(13) e (14) acima, chegamos a seguinte expressão

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} = -\frac{GM}{r^3}r\hat{u} = -\frac{GM}{r^2}\hat{u}.$$

O vetor \vec{a} é paralelo a \vec{r} , aplicando a derivada temporal no produto vetorial $\vec{r} \times \vec{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) &= \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}' \\ &= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} \\ &= 0. \end{aligned}$$

O produto vetorial $\vec{r} \times \vec{v}$ é um vetor \vec{h} constante com módulo $|\vec{h}| \neq 0$. O vetor posição \vec{r} é perpendicular a \vec{h} para qualquer valor de t , ver Figura (2).

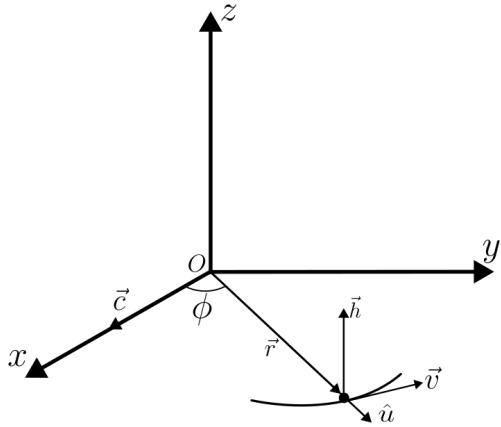


Figura 2: Representação vetorial no espaço tridimensional com destaque para o momento angular específico \vec{h} . O vetor \vec{r} indica a posição do corpo em relação à origem O , \vec{v} é o vetor velocidade, e $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ aponta perpendicularmente ao plano da órbita, conforme a regra da mão direita. O vetor \hat{u} representa a direção instantânea do movimento orbital, enquanto \vec{c} é um vetor constante na direção do eixo x .

Fonte: Autoria própria (2025).

Para demonstrar a primeira lei de Kepler, vamos reescrever o vetor \vec{h} da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\vec{h} &= \vec{r} \times \vec{v} \\
&= \vec{r} \times \vec{r}' \\
&= r\hat{u} \times (r\hat{u})' \\
&= r\hat{u} \times (r'\hat{u} + r\hat{u}') \\
&= r\hat{u} \times r'\hat{u} + r\hat{u} \times r\hat{u}' \\
&= r^2(\hat{u} \times \hat{u}').
\end{aligned}$$

Agora, considerando o produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{h} = -\frac{GM}{r^2}\hat{u} \times (r^2\hat{u} \times \hat{u}'),$$

temos

$$\vec{a} \times \vec{h} = -GM\hat{u} \times (\hat{u} \times \hat{u}'), \quad (15)$$

e utilizando a relação denominada de produto vetorial triplo, isto é,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

com \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} vetores quaisquer, mostramos que a Eq.(15) pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{h} &= -Gm[(\hat{u} \cdot \hat{u}')\hat{u} - (\hat{u} \cdot \hat{u})\hat{u}'] \\ \vec{a} \times \vec{h} &= GM\hat{u}'.\end{aligned}\quad (16)$$

O resultado da Eq.(16) também pode ser obtido da seguinte forma

$$(\vec{v} \times \vec{h})' = \vec{v}' \times \vec{h} = \vec{a} \times \vec{h} = GM\hat{u}'. \quad (17)$$

Integrando a Eq.(17), chegaremos a expressão

$$\begin{aligned}\int (\vec{v} \times \vec{h})' dt &= GM \int \hat{u}' dt \\ \vec{v} \times \vec{h} &= GM\hat{u} + \vec{c}.\end{aligned}\quad (18)$$

O angulo ϕ entre \vec{c} e \vec{r} , o planeta possui as coordenadas polares (r, ϕ) . O vetor \vec{h} aponta na direção z; os vetores $\vec{v} \times \vec{h}$ e \hat{u} são perpendiculares a \vec{h} , portanto, o vetor constante \vec{c} também pertence ao plano xy [17]. A partir da Eq.(18), determinamos o seguinte produto escalar

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= \vec{r} \cdot (GM\hat{u} + \vec{c}) \\ &= GM\vec{r} \cdot \hat{u} + \vec{r} \cdot \vec{c} \\ &= GMr\hat{u} \cdot \hat{u} + |\vec{r}||\vec{c}|\cos\phi \\ &= GMr + rc\cos\phi \\ &= r(GM + c\cos\phi).\end{aligned}\quad (19)$$

Resolvendo para r na Eq.(19), chegaremos ao resultado

$$\begin{aligned}r &= \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{GM + c\cos\phi} \\ &= \frac{1}{GM} \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{(1 + \frac{c}{GM}\cos\phi)}.\end{aligned}\quad (20)$$

O numerador na Eq.(20) é um produto misto, isto é

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2,$$

portanto, temos

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{c}{GM}\cos(\phi)}. \quad (21)$$

Considerando as seguintes definições

$$e = c/GM \implies 1/GM = e/c, \quad (22)$$

a Eq.(21) toma a seguinte forma

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\phi)} \quad (23)$$

com

$$d = \frac{h^2}{c}.$$

A Eq.(23) é uma equação da forma polar para seção cônica com foco na origem. Sabemos que a trajetória de um planeta é fechada, portanto, com excentricidade $e < 1$, o que determina uma cônica elíptica. Os pontos extremos da órbita do planeta são denominados de periélio e afélio, conforme a Figura (3).

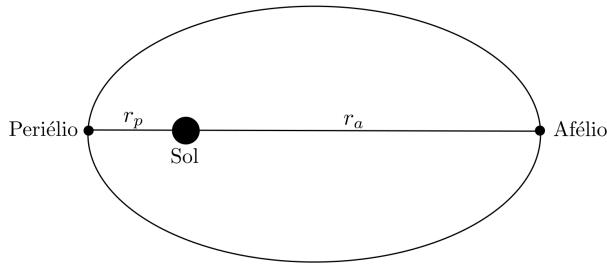


Figura 3: Representação de uma órbita elíptica em torno de um foco, conforme previsto pela primeira lei de Kepler. O corpo em movimento percorre a elipse sob influência de uma força central atrativa, com o foco ocupando a posição dessa força.

Fonte: Autoria própria (2025).

3.2 A Segunda Lei de Kepler: Áreas Iguais em Tempos Iguais

Experimentos mostram que a energia, momento linear e momento angular se conservam. Pela conservação do momento angular, temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

não sofre variação no tempo, este em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\vec{L} = m\rho^2\varphi'\hat{z}.$$

Considerando a equação do comprimento de um arco, $l = \rho\varphi$, onde ρ é o raio da circunferência e φ o ângulo central, temos que para um deslocamento angular infinitesimal $d\varphi$ corresponde um elemento de arco

$$dl = \rho d\varphi.$$

O elemento de área dA varrido pelo vetor raio é então dado por

$$dA = \frac{1}{2}\rho dl = \frac{1}{2}\rho(\rho d\varphi) = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi.$$

A área total correspondente a um dado deslocamento é expressa pela integral

$$A = \int dA = \int \frac{\rho dl}{2} = \int \frac{\rho(\rho d\varphi)}{2} = \frac{1}{2} \int \rho^2 \varphi' dt = \frac{|\vec{L}|}{2m} \int dt.$$

Portanto, para uma revolução, teremos

$$A = \frac{|\vec{L}|T}{2m},$$

comprovando que a lei das áreas mostra a relação direta entre a área descrita pelo movimento de um planeta e o momento angular [16].

3.3 A Terceira Lei de Kepler: Relação entre Período e Raio Médio

A força gravitacional sentida por um planeta que orbita o Sol é da forma centrípeta. Sendo assim, teremos, $\vec{F}_g = \vec{F}_{cp}$, cujos módulos são

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Isolando a velocidade nesta equação, chegamos a expressão

$$v^2 = \frac{GM}{r}. \quad (24)$$

Para um volta completa em torno do Sol, teremos

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \quad (25)$$

Substituindo a Eq.(25) na Eq.(24),

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \Rightarrow 4\pi^2 r^3 = GMT^2.$$

A partir desse resultado, a terceira lei de Kepler assume a forma

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{constante},$$

com esta relação sendo aplicada a todos os corpos celestes que descrevem órbitas elípticas [3].

4 Perturbações no Movimento Planetário

A mecânica newtoniana, com base na lei da Gravitação Universal, garante uma poderosa descrição do movimento dos corpos celestes. As órbitas planetárias em torno de uma estrela perfeitamente esférica são previstas pela teoria como elipses fixas, de acordo com as leis de Kepler. No entanto, o sistema solar real é dinâmico e caótico, com múltiplas interações gravitacionais. Essas perturbações produzem efeitos sutis que no entanto, fazem com que as órbitas planetárias se desviem das elipses keplerianas perfeitas e estáticas [18].

4.1 O Vetor de Laplace-Runge-Lenz

As órbitas dos planetas são governadas por forças conservativas, ou seja, que não dependem da trajetória. Portanto, o momento angular, L , e a energia, E , são conservados. No contexto de forças centrais a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$\vec{P}' = f(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

O produto vetorial da derivada temporal do momento linear \vec{P}' com o momento angular \vec{L} , toma a forma

$$\begin{aligned} \vec{P}' \times \vec{L} &= f(r) \frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times \vec{P}') \\ &= f(r) \left[\frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times m\vec{r}') \right] \\ &= mf(r) \left[\frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times \vec{r}') \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Implementando o produto vetorial triplo na Eq.(26)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

com

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{b} = \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \vec{r}',$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{P}' \times \vec{L} &= mf(r) \left[\left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}' \right) \vec{r} - \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \right) \vec{r}' \right] \\ &= m \frac{f(r)}{r} [(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r}']. \end{aligned} \quad (27)$$

Dada a seguinte relação

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r \cdot r) = rr', \quad (28)$$

e substituindo a Eq.(28) na Eq.(27), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{P}' \times \vec{L} &= m \frac{f(r)}{r} [(rr') \vec{r} - (r^2) \vec{r}'] \\ &= mf(r) [r' \vec{r} - rr' \vec{r}] \\ &= -mf(r)r^2 \left(\frac{\vec{r}'}{r} - \frac{r' \vec{r}}{r^2} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (29)$$

Dentro do âmbito de forças centrais, a força proporcional ao inverso do quadrado da distância tem grande relevância física, a qual adotaremos em nossa análise. Na Eq.(29) substituindo $f(r)$ por $f = -\frac{k}{r^2}$, chegamos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) &= -m \left(-\frac{k}{r^2} \right) r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= mk \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Integrando a Eq.(30), determina-se

$$\vec{P} \times \vec{L} = mk \frac{\vec{r}}{r} + \vec{A},$$

com $k = GMm$ e vetor \vec{A} denominado de vetor de Laplace-Runge-Lenz, ver Figura (4).

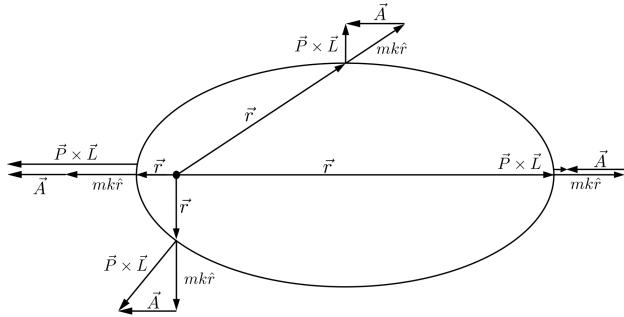


Figura 4: Representação do vetor de Laplace-Runge-Lenz no plano da órbita. Esse vetor aponta na direção do periélio e permanece constante em sistemas keplerianos ideais (sem perturbações), refletindo a simetria do potencial $1/r$ e a conservação da excentricidade. No entanto, em sistemas perturbados, como no caso da órbita de Mercúrio influenciada por efeitos relativísticos, a taxa de variação temporal desse vetor não é nula. Essa variação está diretamente relacionada à precessão do periélio, sendo uma ferramenta útil para descrever e quantificar esse desvio angular ao longo do tempo.

Fonte: Autoria própria (2025).

Portanto, o vetor \vec{A} é uma constante de movimento no problema de Kepler não perturbado, isto é, para órbitas fixas e estáticas. No caso em que existe perturbação, a taxa de rotação desse vetor será a velocidade de precessão da órbita [19, 16, 20].

4.2 Contribuições Newtonianas para a Precessão do Periélio de Mercúrio

Um dos efeitos mais notáveis resultantes dessas perturbações é a precessão do periélio, que consiste no avanço gradual do ponto mais próximo de sua estrela. O planeta Mercúrio por ser mais próximo ao Sol, é fortemente influenciado pelo campo gravitacional do mesmo e pelas perturbações dos outros planetas, o que implica numa precessão significativa em sua órbita. Nesta seção iremos analisar o desvio do periélio de Mercúrio a partir da mecânica clássica de Newton.

4.2.1 A Equação de Binet

Para obtermos uma equação da trajetória $r = r(\theta)$, é conveniente fazer a mudança de variável

$$u = u(\theta) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r}.$$

A partir da Eq.(10), referente a conservação do momento angular, podemos expressar θ' na forma

$$\theta' = \frac{L}{mr^2} = \frac{Lu^2}{m}. \quad (31)$$

A derivada temporal da posição r' , é dada pela regra da cadeia

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) \theta' = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \theta'. \quad (32)$$

Substituindo a Eq.(31) na Eq.(32), obtemos a expressão:

$$r' = \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \left(\frac{Lu^2}{m} \right) = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}. \quad (33)$$

Aplicando a derivada segunda na Eq.(33), temos

$$\begin{aligned} r'' &= \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad r'' = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) \left(\frac{Lu^2}{m} \right) \\ &= -\frac{Ld^2u}{md\theta^2} \frac{Lu^2}{m} \\ &= -\frac{L^2u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

A componente radial da segunda lei de Newton é dada pela equação

$$F_r = m(r'' - r\theta'^2), \quad (35)$$

com isso, a força gravitacional em termos de u assume a forma

$$F_r(u) = -GMmu^2. \quad (36)$$

Igualando as Eqs.(35) e (36), encontramos

$$m(r'' - r\theta'^2) = -GMmu^2. \quad (37)$$

Substituindo na Eq.(37) as Eqs.(31) e (34), e considerando a mudança de variável ($r = 1/u$), obtemos

$$m \left(-\frac{L^2u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} \left(\frac{Lu^2}{m} \right)^2 \right) = -GMmu^2,$$

após algumas simplificações, mostra-se que

$$-\frac{L^2 u^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{L^2 u^3}{m} = -GMmu^2.$$

Agora, dividindo ambos os membros desta equação por $-L^2 u^2/m$ e assumindo $u \neq 0$, obtemos o resultado

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (38)$$

Esta é a equação de Binet para o potencial gravitacional newtoniano que descreve o movimento de uma partícula sob ação de uma força central, como a força gravitacional, no qual a trajetória é uma cônica.

4.2.2 Solução da Equação de Binet (Órbita Não Perturbada)

A solução geral da Eq.(38) é dada por

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0),$$

onde A e θ_0 são constantes de integração [21]. Esta solução é comumente escrita na forma

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (39)$$

onde a excentricidade orbital é expressada pela relação

$$e = \frac{AL^2}{GMm^2},$$

com $0 \leq e < 1$ e θ_0 sendo uma constante de fase que determina a orientação da elipse no plano orbital. No periélio temos a seguinte condição sendo satisfeita

$$\cos(\theta - \theta_0) = 1 \implies \theta = \theta_0.$$

Reescrivendo a Eq.(39) em termos de $r = 1/u$, mostra-se que

$$\begin{aligned} r(\theta) &= \frac{L^2/(GMm^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \\ &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \end{aligned} \quad (40)$$

onde p é um parâmetro geométrico da cônica associado à distância do foco a borda, sendo perpendicular ao eixo maior e dado pela expressão

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}.$$

A Eq.(40) descreve uma trajetória perfeita e estática [20]. No sistema físico real, a órbita de Mercúrio não é uma elipse perfeitamente fechada e imóvel. O periélio de Mercúrio denota uma pequena precessão, uma mudança gradual na orientação da elipse ao longo do tempo. O fato é que o potencial gravitacional efetivo de Mercúrio é afetado por diversos fatores perturbativos que modificam a forma do potencial, produzindo a precessão.

O principal fator que provoca tal mudança é a interação gravitacional de outros planetas. Sobre Mercúrio, além da intensa força do Sol, os demais corpos do sistema solar, em especial Vênus, Terra e Júpiter (devido a sua grande massa), influenciam gravitacionalmente em maior escala a órbita de Mercúrio.

4.2.3 Potencial Efetivo com Perturbações

O potencial efetivo gravitacional, Eq.(12), pode ser incrementado com um termo de perturbação $V_{\text{pert}}(r)$, com isso, temos a seguinte expressão matemática:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + V_{\text{pert}}(r). \quad (41)$$

O termo $L^2/2mr^2$ é a energia potencial associada ao movimento angular e impede que o planeta descreva uma trajetória radial direto para a fonte gravitacional. O potencial perturbado pode ser aproximado da seguinte forma

$$V_{\text{pert}}(r) = -\frac{\beta}{r^3}, \quad (42)$$

onde β é uma constante positiva que quantifica a intensidade da perturbação. Substituindo a Eq.(42) na Eq.(41), chegamos a seguinte relação

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\beta}{r^3}, \quad (43)$$

cujo comportamento é ilustrado na Figura (5).

É notório através do gráfico o quanto rápido o $V_{\text{eff}}(r)$ cresce quando o r aumenta.

A introdução de um potencial perturbativo modifica a força radial e como consequência, a equação de Binet. Ao considerarmos uma força perturbativa efetiva $F_{\text{pert}}(r)$ que, após as devidas manipulações e aproximações comuns em mecânica celeste (como a média sobre uma órbita ou a consideração de pequenas correções), leva a uma modificação linear na

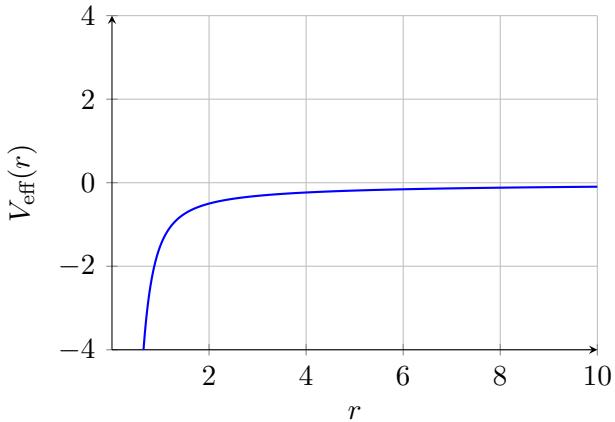


Figura 5: Gráfico do potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ em função da distância radial r . O potencial efetivo resulta da soma do potencial gravitacional atrativo ($-1/r$), da barreira centrífuga ($1/r^2$) e de termos perturbativos adicionais ($-1/r^3$). Essa forma modificada do potencial explica a estabilidade e a forma das órbitas, além de ser responsável por efeitos como a precessão do periélio.

Fonte: Autoria própria (2025).

equação de Binet, que assume a forma

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}\right)u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (44)$$

Aqui, β_{eff} é uma constante efetiva que engloba os efeitos da perturbação. A derivação exata desta forma linear a partir de um $V_{\text{pert}}(r) = -\beta/r^3$ (que naturalmente levaria a um termo não linear $\propto u^2$) envolve etapas de linearização ou métodos de perturbação mais avançados. Tendo em vista o objetivo desta seção, podemos considerar a forma linear acima como uma aproximação válida para perturbações fracas. O termo $2m\beta_{\text{eff}}/L^2$ é pequeno comparado a 1.

4.2.4 Solução da Equação de Binet Modificada

A Eq.(44), é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Seja $k_0^2 = 1 - 2m\beta_{\text{eff}}/L^2$, obtemos a seguinte equação de Binet

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + k_0^2u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (45)$$

A solução geral da Eq.(45) é da forma

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2k_0^2} + A' \cos(k_0\theta - \theta'_0),$$

onde $A' = eGMm^2/L^2k_0^2$. Colocando em evidência $GMm^2/L^2k_0^2$, obtemos

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2k_0^2} [1 + e \cos(k_0\theta - \theta_0)].$$

Substituindo na equação acima o valor de k_0 , chegaremos a seguinte solução

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2(1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2})} \left[1 + e \cos \left(\sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \theta - \theta_0 \right) \right],$$

onde e é a excentricidade e θ_0 é a constante de fase. Para pequenas perturbações, isto é,

$$\frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2} \ll 1,$$

temos que

$$\frac{1}{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \sim 1.$$

Logo, a solução toma a forma

$$u(\theta) \approx \frac{GMm^2}{L^2} \left[1 + e \cos \left(\sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \theta - \theta_0 \right) \right]. \quad (46)$$

A Eq.(46), quando comparada com a Eq.(38), apresenta uma diferença em relação ao argumento do cosseno que passou a ser $k_0\theta - \theta_0$, isso se deve ao fato dos efeitos perturbativos na equação de Binet.

4.2.5 Cálculo do Avanço do Periélio de Mercúrio

Na Eq.(46), a frequência angular efetiva da oscilação radial é

$$k_0 = \sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}}.$$

Como a perturbação é pequena, $2m\beta_{\text{eff}}/L^2 \ll 1$, podemos expandir k_0 usando a aproximação binomial da forma:

$$\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2},$$

para x pequeno. Essa aproximação modifica k_0 da seguinte forma

$$k_0 = \sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2} \right) = 1 - \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}.$$

O periélio ocorre quando o argumento do cosseno na Eq.(46) é um múltiplo de 2π , ou seja, $2n\pi$, onde n é um inteiro. Uma revolução completa, no sentido de $u(\theta)$ retornar ao mesmo valor com a mesma derivada (por exemplo, de um periélio ao próximo), ocorre quando $k\theta$ varia de 2π . Portanto, o ângulo θ_{rev} para uma órbita radial completa é

$$k\theta_{\text{rev}} = 2\pi \implies \theta_{\text{rev}} = \frac{2\pi}{k},$$

com $k = 1$ (sem perturbação), então $\theta_{\text{rev}} = 2\pi$, e a órbita é uma elipse fechada. No entanto, com $k \neq 1$, θ_{rev} será diferente de 2π . A precessão do periélio após uma revolução, $\Delta\theta$, é a diferença entre θ_{rev} e 2π :

$$\Delta\theta = \theta_{\text{rev}} - 2\pi = \frac{2\pi}{k} - 2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{k} - 1 \right), \quad (47)$$

onde $1/k_0$ é

$$\frac{1}{k_0} \approx \frac{1}{1 - \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}}. \quad (48)$$

Considerando a seguinte aproximação binomial na Eq.(48)

$$\frac{1}{(1-x)} \approx 1 + x,$$

chega-se à expressão

$$\frac{1}{k} \approx 1 + \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}. \quad (49)$$

Substituindo a Eq.(49) na Eq.(47), temos

$$\Delta\theta \approx 2\pi \left[\left(1 + \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2} \right) - 1 \right] \quad (50)$$

$$\approx 2\pi \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}. \quad (51)$$

A Eq.(51) mostra que a perturbação introduzida na equação de Binet modificada induz uma precessão secular (isto é, um avanço lento e contínuo) no periélio da órbita. A direção da precessão (avanço ou retrocesso) depende do sinal de β_{eff} . Se $\beta_{\text{eff}} > 0$, como assumido para o $V_{\text{pert}} = -\beta/r^3$, então $k_0 < 1$, $1/k_0 > 1$, e $\Delta\theta > 0$, o que significa um avanço do periélio. A partir deste formalismo pode-se calcular a taxa de precessão do periélio de Mercúrio devido a várias perturbações newtonianas, uma vez que a constante β_{eff} apropriada para cada efeito seja determinada [10, 22, 19].

4.3 Mercúrio e o Limite da Física Clássica

Em 1859, Urbain Le Verrier realizou um estudo detalhado sobre a órbita de Mercúrio, utilizando dados observacionais precisos que foram registrados ao longo do século XIX. Ele determinou que o periélio da órbita de Mercúrio, o ponto de maior aproximação ao Sol, apresentava um avanço angular no tempo (precessão), ou seja, girava lentamente em torno do Sol.

As observações astronômicas sobre a precessão total do periélio de Mercúrio era de aproximadamente 574,83 segundos de arco por século. Desses, cerca de 531,40 segundos de arco podiam ser explicados pelas perturbações gravitacionais causadas pelos outros planetas do Sistema Solar, de acordo com os cálculos da mecânica newtoniana. Essa análise levava em consideração os efeitos das massas de Vênus, Terra, Júpiter e outros corpos celestes sobre a órbita de Mercúrio [18].

Essa discrepância entre o valor teórico e observacional tornou-se um problema central na astronomia e na física do século XIX, revelando uma limitação da teoria de Newton. Embora extremamente bem-sucedida na descrição do movimento dos planetas mais distantes do Sol, a teoria não conseguia dar conta do comportamento orbital de Mercúrio em regiões onde o campo gravitacional solar era mais intenso[20].

A conciliação desses dados indicava a necessidade de uma nova abordagem teórica. Esse problema permaneceu como um mistério até 1915, quando Albert Einstein, por meio da Teoria da Relatividade Geral, ao levar em conta a curvatura do espaço-tempo gerada pelo Sol, forneceu uma explicação precisa e natural para o fenômeno, marcando uma das primeiras confirmações experimentais da nova teoria gravitacional.

5 Fundamentos da Relatividade Geral e Aplicações ao Movimento Planetário

A Mecânica Clássica, embora bem-sucedida em descrever uma vasta gama de fenômenos gravitacionais, encontra limitações em regimes de campos gravitacionais muito intensos ou quando velocidades próximas à da luz estão envolvidas. Notavelmente, a precessão anômala do periélio de Mercúrio não pôde ser completamente explicada pela teoria newtoniana, mesmo considerando as perturbações de outros planetas. A Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por Albert Einstein, oferece uma nova descrição da gravitação, não como uma força, mas como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. Esta seção introduzirá os princípios fundamentais da TRG e a solução de Schwarzschild, que é crucial para entender o movimento planetário em campos gravitacionais fortes e, subsequentemente, explicar a precessão do periélio de Mercúrio.

5.1 Postulados da Relatividade Geral

A TRG é fundamentada a partir de alguns postulados fundamentais:

O Princípio da Equivalência: Afirma que não há experimento local que possa distinguir entre os efeitos de um campo gravitacional uniforme e os de uma aceleração constante de um referencial. Com isso, vale a equivalência entre massa inercial e gravitacional. Um efeito direto é que a luz deve ser desviada por campos gravitacionais.

O Princípio da Covariância Geral: As leis da física devem ser as mesmas em qualquer sistema de coordenadas, desse modo, as grandezas físicas por natureza são covariantes. Isso implica que, as componentes tensoriais covariantes se transformam de maneira específica sob mudanças de coordenadas, ver Apêndice (8.4).

A Curvatura do Espaço-Tempo: A presença de massa e energia curva o espaço-tempo. Inversamente, a curvatura do espaço-tempo dita como a matéria e a energia se movem. A gravitação é, portanto, um efeito geométrico da curvatura do espaço-tempo.

Esses postulados propostos por Einstein dão sustentação teórica a TRG e a formulação matemática tensorial [23].

5.2 Curvatura do Espaço-Tempo e Órbitas Planetárias

Na TRG, as partículas livres movem-se ao longo de geodésicas no espaço-tempo curvo. Uma geodésica é o caminho de menor energia em um espaço curvo, análogo a uma linha reta no espaço Euclidiano. A equação da que descreve uma geodésica de uma partícula em um campo gravitacional é da forma:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (52)$$

onde $x^\mu(\tau)$ são as coordenadas da partícula parametrizadas pelo tempo próprio τ (para partículas massivas). Os termos $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ são os símbolos de Christoffel (ou conexões da métrica), que são derivados das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas parciais. As conexões da métrica estabelecem como vetores mudam de ponto a ponto em espaço-tempo curvo, dadas pela equação:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} \right), \quad (53)$$

com $\mu, \alpha, \beta, \rho = 0, 1, 2, 3 = t, r, \theta, \phi$. As componentes não nulas da Eq.(53) constam no Apêndice (8.7.2).

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é fundamental, pois define a estrutura geométrica do espaço-tempo, incluindo como distâncias e intervalos de tempo são medidos. O intervalo infini-

tesimal ds^2 entre dois eventos no espaço-tempo é dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (54)$$

A forma específica de $g_{\mu\nu}$ é determinada pela distribuição de massa e energia [7, 23].

5.3 Equações de Einstein para Campos Estáticos Esfericamente Simétricos

A relação entre a curvatura do espaço-tempo e a distribuição de massa e energia é dada pelas Equações de Campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (55)$$

onde o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, juntamente com o escalar de Ricci R , são responsáveis por nos dar informação acerca da curvatura do espaço tempo. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é o objeto principal a ser encontrado, pois é através dele que obtemos informações sobre como as distâncias se comportam ao longo do espaço-tempo. Consequentemente, determinamos as trajetórias dos corpos. E por fim, temos a constante gravitacional newtoniana, G , a velocidade da luz no vácuo, c , e o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ que nos diz como o conteúdo de energia, matéria e momento estão distribuídos no espaço-tempo. Basicamente, essa equação informa que a presença de massa e energia no espaço-tempo afeta a geometria do espaço-tempo, e a geometria afeta a maneira como a massa ou energia devem se comportar. Essa equação é de extrema importância para a física teórica, pois nos fornece uma descrição matemática precisa do comportamento da gravitação, permitindo que sejam feitas previsões sobre fenômenos astrofísicos, como buracos negros, órbitas planetárias, lentes gravitacionais, entre outros [7].

A Eq.(55) é um sistema de dez equações diferenciais parciais não lineares acopladas para as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Encontrar soluções exatas para essas equações é geralmente muito difícil. Para campos estáticos e esfericamente simétricos no vácuo (ou seja, fora de uma distribuição de massa esférica e não rotativa), o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ é nulo. Nesse caso, as equações de campo de Einstein se simplificam para a forma:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (56)$$

A solução para Eq.(56) nessas condições é conhecida como a métrica de Schwarzschild.

5.4 A Solução de Schwarzschild e suas Implicações Orbitais

A geometria do espaço-tempo ao redor de corpos celestes massivos, como o Sol, pode ser descrita por uma solução exata das equações de campo de Einstein conhecida como solução de Schwarzschild. Essa métrica é fundamental na relatividade geral, pois representa a única solução esfericamente simétrica no vácuo, sendo essencial para o estudo de buracos negros, movimento de planetas e desvio gravitacional da luz.

Para deduzir essa solução de forma analítica, é necessário começar com o caso mais simples de um espaço-tempo sem curvatura, conhecido como espaço-tempo plano. Esse tipo de geometria é descrito pela métrica de Minkowski, cuja forma é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (57)$$

Essa métrica serve como base para comparações com soluções mais complexas e curvas, como a métrica de Schwarzschild, permitindo analisar os efeitos da gravidade na estrutura do espaço-tempo. A Eq.(57) está expressa nas coordenadas cartesianas (t, x, y, z) . Para uma descrição mais adequada a sistemas com simetria esférica, como no caso da solução de Schwarzschild, é conveniente reescrevê-la em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , ver Apêndice (8.7.1), temos

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (58)$$

Uma vez que estamos interessados na solução para o exterior de um corpo esférico, devemos considerar as equações de campo de Einstein no vácuo, ou seja, com $R_{\mu\nu} = 0$. A métrica procurada deve satisfazer duas condições importantes. Primeiramente, a solução deve ser estática, o que implica que não devem existir termos cruzados na métrica e que os componentes da métrica não podem depender da coordenada temporal. Em segundo lugar, a solução deve apresentar simetria esférica. Essa exigência é implementada considerando a métrica de Minkowski, cuja parte espacial é expressa como $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, descrevendo, assim, uma esfera. Para que essa forma esférica seja preservada na nova métrica, o termo $d\phi^2$ deve vir acompanhado de um fator $\sin^2 \theta$ multiplicado pelo coeficiente de $d\theta^2$.

Além disso, os demais coeficientes da métrica podem ser funções da coordenada radial r , já que se assume que o sistema é esfericamente simétrico e estático. Sendo assim, reescrevemos a Eq.(58) na forma:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2, \quad (59)$$

onde definimos: $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Na Eq.(59), observa-se que a assinatura da métrica permanece inalterada mesmo com a introdução de funções exponenciais nos coeficientes.

Contudo, para simplificar a forma da métrica, é conveniente eliminar a dependência exponencial. Para isso, realizamos uma mudança de coordenadas radiais, definindo uma nova coordenada \bar{r} , dada por

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r. \quad (60)$$

Essa mudança de coordenadas tem como objetivo absorver a função $\gamma(r)$ na nova coordenada radial \bar{r} , de modo que os termos angulares da métrica assumam a forma padrão $\bar{r}^2 d\Omega^2$, preservando explicitamente a simetria esférica. Derivando a Eq.(60) em relação a r , obtemos a expressão diferencial para $d\bar{r}$:

$$d\bar{r} = e^{\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right) dr. \quad (61)$$

Elevando ambos os lados da Eq.(61) ao quadrado e isolando o termo dr^2 , podemos reescrever o elemento diferencial como

$$dr^2 = e^{-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} d\bar{r}^2.$$

Substituindo essa relação na métrica original, obtemos uma nova forma para a métrica com coordenadas $(t, \bar{r}, \theta, \phi)$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} e^{-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \\ &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Podemos agora considerar o caso particular em que a função $\gamma(r) \rightarrow 0$, ou seja, desativamos explicitamente a reparametrização radial. Nesse limite, as coordenadas retornam às suas formas originais:

$$e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} \xrightarrow{\bar{r} \rightarrow r} e^{2\beta(r)}.$$

Portanto, a Eq.(62) retorna à forma da métrica nas coordenadas padrão (t, r, θ, ϕ) , a saber:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (63)$$

Essa forma evidencia a simetria esférica e estática da solução buscada para o campo gravitacional no vácuo, exterior a uma distribuição esférica de massa.

As componentes covariantes da métrica na Eq.(63) estão expressas logo abaixo

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (64)$$

enquanto isso, as componentes contravariantes são

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{2\alpha(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2\beta(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (65)$$

A geometria do espaço-tempo é totalmente caracterizada pelo Tensor de Riemann. Este tensor tem a seguinte forma:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (66)$$

Usando as componentes não nulas da conexão, determinamos a componente do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R^t_{rtr} &= \partial_t \Gamma^t_{rr} - \partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{t\lambda} \Gamma^\lambda_{rr} - \Gamma^t_{r\lambda} \Gamma^\lambda_{tr} \\ &= -\partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{rr} - \Gamma^t_{rt} \Gamma^t_{tr} \\ &= -\partial_r (\partial_r \alpha) + \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r \alpha \partial_r \alpha \\ &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2. \end{aligned}$$

As demais componentes não nulas do tensor de Riemann são

$$\begin{aligned} R^t_{\theta t\theta} &= -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \\ R^t_{\phi t\phi} &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\ R^r_{\theta r\theta} &= r e^{-2\beta} \partial_r \beta \\ R^r_{\phi r\phi} &= r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\ R^\theta_{\phi \theta\phi} &= \sin^2 \theta (1 - e^{-2\beta}). \end{aligned}$$

Contraindo o tensor de Riemann, obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}, \quad (67)$$

com $\mu = \nu = t, r, \theta, \phi$. Usando as componentes não nulas do tensor de Riemann, deter-

minamos as componentes do tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2 + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\
R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.
\end{aligned}$$

A curvatura escalar de Ricci é obtida calculando o traço

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu = R_t^t + R_r^r + R_\theta^\theta + R_\phi^\phi \quad (68)$$

com

$$\begin{aligned}
R_t^t &= -\frac{1}{e^{2\alpha}} \left[\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\beta}} \left(\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right) \right] \\
&= -e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\
R_r^r &= e^{-2\beta} \left[-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right] \\
R_\theta^\theta &= \frac{1}{r^2} (e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1) \\
R_\phi^\phi &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [\sin^2 \theta (r e^{-2\beta} \partial_r \beta - r e^{-2\beta} \partial_r \alpha - e^{-2\beta} + 1)].
\end{aligned}$$

Fazendo as devidas substituições, temos

$$\begin{aligned}
R &= \left[-e^{-2\beta} \left(\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right) \right] \\
&+ \left[e^{-2\beta} \left(-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right) \right] \\
&+ \left[\frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \beta - \frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \alpha - \frac{e^{-2\beta}}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \\
&+ \left[\frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \beta - \frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \alpha - \frac{e^{-2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right] \\
R &= -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\beta}) \right].
\end{aligned}$$

A relação entre as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ presentes nas exponenciais que estão multiplicando

os coeficientes da métrica na Eq.(63) é obtida fazendo $R_{tt} = 0$ e $R_{rr} = 0$

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] = 0 \quad (69)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta = 0. \quad (70)$$

Das Eqs.(69) e (70), escrevemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} \partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha &= R_{tt} e^{2(\alpha-\beta)} \\ -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta &= R_{rr} \end{aligned}$$

e a seguinte relação é obtida

$$\frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) = 0. \quad (71)$$

Integrando a Eq.(71), teremos

$$\begin{aligned} \int \partial_r \alpha(r) dr &= - \int \partial_r \beta(r) dr \\ \alpha(r) &= -\beta(r) + c, \end{aligned} \quad (72)$$

onde c é uma constante de integração. Agora, fazendo $R_{\theta\theta} = 0$, temos

$$e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 = 0, \quad (73)$$

escrevendo a Eq.(73) na forma

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1 \quad (74)$$

e integrando ambos os membros

$$\begin{aligned} \int \partial_r (r e^{2\alpha}) dr &= \int dr \\ r e^{2\alpha} + c_1 &= r + c_2 \\ r e^{2\alpha} &= r + c_2 - c_1 \\ e^{2\alpha} &= 1 - \frac{Rs}{r}, \end{aligned}$$

onde $c_2 - c_1 \equiv R_s$. Substituindo $e^{2\alpha}$ na métrica, obtemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ ds^2 &= -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{-2\alpha(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ ds^2 &= -e^{2\alpha(r)}dt^2 + (e^{2\alpha(r)})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ ds^2 &= -\left(1 - \frac{Rs}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{Rs}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \end{aligned}$$

no limite de campo fraco da teoria newtoniana $R_s \rightarrow 2GM$, portanto

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (75)$$

A métrica dada pela Eq.(75) é chamada de solução de Schwarzschild e descreve a geometria do espaço-tempo em torno de um objeto estático e esfericamente simétrico. A constante $R_s = 2GM$ é denominada de *raio de schwarzschild* [7, 24, 23, 22].

6 A Correção Relativística da Órbita de Mercúrio

O surgimento das leis de Newton representou um marco na ciência, permitindo importantes descobertas e previsões. A aplicação da lei da gravitação universal à astronomia foi fundamental para descrever as órbitas dos corpos celestes e possibilitou até mesmo a descoberta de novos planetas.

No entanto, observações mais precisas da órbita de Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol, revelaram uma discrepância em relação ao que era previsto pelas equações de Newton. Especificamente, o eixo maior da órbita elíptica de Mercúrio apresenta um avanço de segundos de arco por século ($\Delta\phi \sim 43''$), um fenômeno conhecido como precessão do periélio. Esse desvio foi identificado pelo astrônomo francês Urbain Jean Joseph Le Verrier em 1859, que analisou detalhadamente as perturbações no movimento do planeta [6].

A precessão da órbita de Mercúrio, como se vê na Figura (6), ocorre devido a vários fatores de perturbação, entre os quais se destacam a força gravitacional do Sol, dos planetas do sistema solar e os efeitos relativísticos da Teoria da Relatividade Geral (TRG).

Para entender o fenômeno da precessão do periélio de Mercúrio, nas próximas seções serão estudados detalhadamente o problema de Kepler via TRG [20].

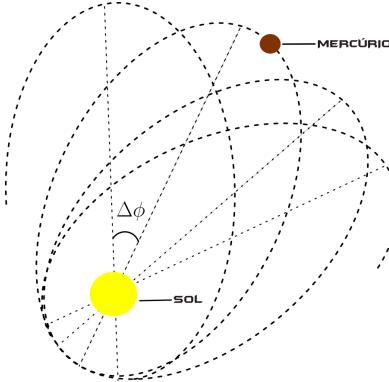


Figura 6: Representação da precessão do periélio de Mercúrio. De acordo com a TRG, a presença de um efeito relativístico no campo gravitacional solar provoca um avanço gradual do ponto de maior aproximação (periélio) da órbita de Mercúrio a cada revolução. Esse fenômeno, observado e confirmado experimentalmente, foi uma das primeiras evidências a favor da teoria de Einstein.

Fonte: Autoria própria (2025).

6.1 Cálculo do Avanço do Periélio a Partir da Métrica de Schwarzschild

Ao longo de uma geodésica que nos interessa, há duas quantidades que são conservadas:

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad \text{e} \quad L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}.$$

onde E e L são energia e momento angular, respectivamente. A partir dessas expressões pode-se deduzir uma equação para $r = r(\lambda)$. Considerando a métrica de Schwarzschild dada pela Eq.(75) e o quadrivetor

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad \text{com} \quad V^\mu V_\mu = -\epsilon,$$

temos que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu &= -\epsilon \\ -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 &= -\epsilon. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

e utilizando as expressões para o momento angular e energia, onde

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} \quad \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2},$$

obteremos a seguinte relação

$$\begin{aligned} -E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) &= 0 \\ -E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \epsilon - \frac{2GML^2}{r^3} - \frac{2GM\epsilon}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{2}$, temos

$$-\frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{GM\epsilon}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} = 0.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right) + V_{eff}(r) = \varepsilon, \quad (76)$$

onde $V_{eff}(r)$ é o potencial unidimensional, dado por

$$V_{eff}(r) = \frac{\epsilon}{2} - \frac{GM\epsilon}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}, \quad (77)$$

cujo o gráfico é dado pela Figura (7).

As órbitas em torno de uma estrela tem a característica de atribuir a função raio o parâmetro λ . Onde, a energia conservada por unidade de massa é E , mas a energia efetiva potencial para a coordenada r corresponde a

$$\varepsilon = \frac{1}{2}E^2.$$

Para obtermos uma equação para $dr/d\phi$, onde

$$\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \frac{L^2}{r^4}, \quad (78)$$

multiplica-se a Eq.(78) por (76), obtemos o resultado:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 2\varepsilon - \epsilon + \frac{2GM\epsilon}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GML^2}{r^3}. \quad (79)$$

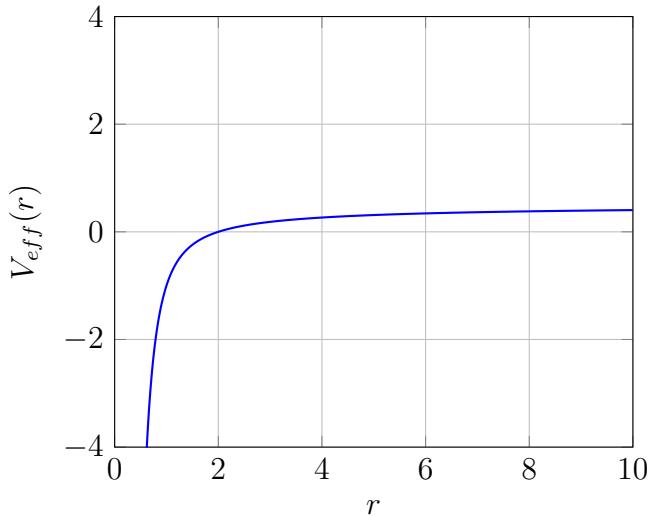


Figura 7: Gráfico do potencial efetivo $V_{eff}(r)$ em função da distância radial r . O potencial efetivo combina o potencial central atrativo (o termo $-1/r$), a barreira centrífuga (termo proporcional a $1/r^2$) e correções adicionais (como $-1/r^3$), que são responsáveis por efeitos relativísticos, como a precessão do periélio. Essa forma modificada do potencial explica desvios orbitais observados em corpos celestes, como Mercúrio.

Fonte: Autoria própria (2025).

Dada a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (80)$$

Substituindo a Eq.(80) na (79), obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \frac{r^4}{L^2} \left(2\varepsilon - \epsilon + \frac{2GM\epsilon}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GML^2}{r^3}\right) \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{r^4}{L^2} - \frac{2GMr^3}{L^2} + r^2 - 2GMr &= \frac{2\varepsilon r^4}{L^2} \end{aligned} \quad (81)$$

Para resolver a Eq.(81) defini-se uma nova variável:

$$x = \frac{L^2}{GMr},$$

resolvendo para r , teremos

$$r = \frac{L^2}{GMr}. \quad (82)$$

Considerando a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\phi} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{L^2}{GMx} \right) \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dr}{d\phi} &= -\frac{L^2}{GMx^2} \frac{dx}{d\phi}.\end{aligned}\tag{83}$$

Substituindo as Eqs.(82) e (83) em (81), determina-se

$$\frac{L^2}{G^2 M^2 x^2} \left(\frac{dx}{d\phi} \right) + \frac{L^6}{G^4 M^4 x^4} - \frac{2L^4}{G^2 M^2 x^3} + \frac{L^4}{G^2 M^2 x^2} - \frac{2L^2}{x^2} = \frac{2\varepsilon L^6}{G^4 M^4 x^4},$$

multiplicando ambos os membros por $\frac{G^2 M^2 x^4}{L^4}$, chegamos a expressão

$$\begin{aligned}2 \frac{d^2 x}{d\phi^2} - 2 + 2x - \frac{6G^2 M^2 x^2}{L^2} &= 0 \\ \frac{d^2 x}{d\phi^2} - 1 + x &= \frac{3G^2 M^2 x^2}{L^2}.\end{aligned}\tag{84}$$

A equação acima dentro da dinâmica newtoniana teria o segundo membro nulo, no entanto, a TRG atribui o termo não linear $3G^2 M^2 x^2/L^2$ no segundo membro, ao considerar a deformação geométrica do espaço-tempo.

A solução da Eq.(84) é mais uma perturbação:

$$x = x_0 + x_1.$$

A parte de ordem zero é

$$\frac{d^2 x_0}{d\phi^2} - 1 + x_0 = 0,\tag{85}$$

enquanto a parte de ordem 1,

$$\frac{d^2 x_1}{d\phi^2} + x_1 = \frac{3G^2 M^2 x_0^2}{L^2}.\tag{86}$$

A parte de ordem zero possui a seguinte solução:

$$x_0 = 1 + e \cos \phi\tag{87}$$

Conectando a solução do termo de ordem zero a equação do termo de primeira ordem,

resulta-se em:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{d\phi^2} + x_1 &= \frac{3G^2M^2}{L^2} (1 + e \cos \phi)^2 \\
&= \frac{3G^2M^2}{L^2} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \\
&= \frac{3G^2M^2}{L^2} \left[1 + 2e \cos \phi + e^2 \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) \right] \\
&= \frac{3G^2M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}e^2 \right) + 2e \cos \phi + \frac{1}{2}e^2 \cos 2\phi \right]. \tag{88}
\end{aligned}$$

Para resolver está equação temos que considerar as relações trigonométricas:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(\phi \sin \phi) + \phi \sin \phi = 2 \cos \phi$$

e

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(\cos 2\phi) + \cos 2\phi = -3 \cos 2\phi.$$

Então a solução será:

$$x_1 = \frac{2G^2M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}e^2 \right) + e\phi \sin \phi - \frac{1}{6}e^2 \cos 2\phi \right]. \tag{89}$$

O termo mais notável é $e\phi \sin \phi$, que se acumula ao longo de órbitas sucessivas, como é observado no gráfico da Figura (8). Este comportamento da solução leva a seguinte conclusão

$$x = 1 + e \cos \phi + \frac{3G^2M^2e}{L^2} \phi \sin \phi.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$x = 1 + e \cos[(1 - \alpha)\phi] \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{3G^2M^2}{L^2}.$$

Expandindo $\cos[(1 - \alpha)\phi]$ em uma série de Taylor com $\alpha = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\cos[(1 - \alpha)\phi] &= \cos \phi + \alpha \frac{d}{d\alpha} \cos[(1 - \alpha)\phi] \Big|_{\alpha=0} \\
&= \cos \phi + \alpha \phi \sin \phi.
\end{aligned}$$

Para uma volta completa, ou seja, a cada $\phi = 2\pi$, tem-se um avanço de um ângulo do

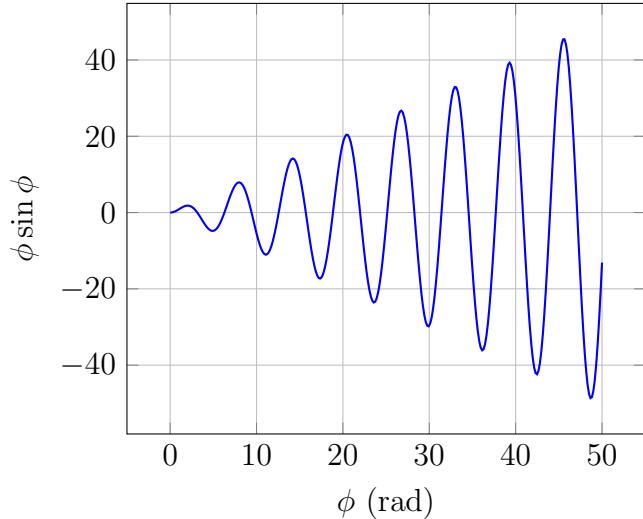


Figura 8: Contribuição da solução x_1 para a perturbação na órbita de Mercúrio. O gráfico mostra o comportamento de $\phi \sin \phi$, função que surge em correções perturbativas responsáveis pela precessão do periélio do planeta. Essa função descreve como pequenos desvios angulares acumulados afetam a trajetória ao longo de muitas órbitas, evidenciando o efeito acumulativo das perturbações relativísticas.

Fonte: Autoria própria (2025).

periélio:

$$\Delta\phi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi G^2 M^2}{L^2}.$$

Considerando a equação de uma elipse

$$r = \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi},$$

e o momento angular sendo escrito na forma

$$L^2 \approx GM(1 - e^2)a,$$

temos que o avanço do periélio poder ser determinado da seguinte forma

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2(1 - e^2)a}.$$

Este resultado possibilita a determinação com certa precisão da taxa de precessão do periélio de Mercúrio a cada volta completa [7, 22, 23].

6.2 Comparação com Dados Observacionais

A órbita de Mercúrio apresentou um dos primeiros desafios observacionais à mecânica newtoniana. Durante o século XIX, astrônomos notaram que o avanço do periélio do planeta excedia as previsões teóricas em aproximadamente 43 segundos de arco por século (arcsec/século). Essa discrepância persistiu mesmo após considerar todas as perturbações gravitacionais conhecidas.

A solução veio com a Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein, que prediz naturalmente um avanço adicional do periélio devido à curvatura do espaço-tempo. A Tabela (1) apresenta a comparação quantitativa entre os dados observacionais e as previsões relativísticas.

Tabela 1: Comparação entre observações e previsões da TRG para o avanço do periélio de Mercúrio.

Parâmetro	Valor (arcsec/século)
Avanço geodésico observado	575.31
Contribuição Newtoniana	532.30
Resíduo observado	43.01
Predição da TRG	42.98

Fonte: Autoria própria (2025).

Como mostra a tabela, a diferença entre o resíduo observado (43.01 arcsec/século) e a previsão da TRG (42.98 arcsec/século) é de apenas 0.03 arcsec/século, uma concordância relevante entre os valores observacional e teórico. Esta precisão, alcançada sem parâmetros ajustáveis, tornou-se um dos pilares experimentais da Relatividade Geral.

Medições modernas com técnicas de radar refinaram ainda mais esses valores, confirmado continuamente a teoria com incertezas inferiores a 0,01 arcsec/século. A resolução do enigma do periélio de Mercúrio ilustra o poder preditivo da Relatividade Geral e marcou um ponto de virada na física teórica, demonstrando a necessidade de uma nova compreensão da gravitação [20, 7, 23, 22].

6.3 Relevância Histórica da Precessão do Periélio na Confirmação da Relatividade Geral

A resolução do enigma da precessão anômala do periélio de Mercúrio pela Relatividade Geral transcendeu a mera solução de um problema astronômico; ela marcou um ponto de inflexão na física, evidenciando as limitações das leis de Newton e a necessidade de um novo paradigma para a gravitação. Enquanto a física newtoniana descreve a gravidade como uma força que age instantaneamente entre massas num espaço euclidiano e tempo absoluto, a Relatividade Geral introduziu conceitos revolucionários. A gravidade emerge da geometria dinâmica do espaço-tempo, descrita matematicamente através de tensores,

como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o tensor de curvatura de Riemann, que se relacionam com a distribuição de matéria e energia através das equações de campo de Einstein. A predição correta do avanço do periélio surgiu como uma consequência direta desta formulação, onde o movimento dos corpos celestes é uma geodésica nesse espaço-tempo curvo.

A importância deste feito reside também na forma como a Relatividade Geral aborda as grandezas covariantes, assegurando que as leis físicas sejam expressas de maneira independente do sistema de coordenadas escolhido (princípio da covariância geral). Esta característica é fundamental e contrasta com a estrutura da mecânica clássica. A correção para a órbita de Mercúrio não é uma simples correção de Lorentz no sentido das transformações da relatividade especial, que se aplicam a espaços-tempos planos; em vez disso, é uma manifestação intrínseca da curvatura do espaço-tempo perto do Sol, indo muito além das aproximações de campo fraco ou baixas velocidades onde as correções relativísticas especiais poderiam ser consideradas. O sucesso em explicar Mercúrio, onde outras teorias falharam, demonstrou o poder da estrutura tensorial e dos princípios geométricos da Relatividade Geral, impulsionando sua aceitação e destacando a profundidade da nova compreensão do universo proposta por Einstein [23, 25].

7 Conclusão

Neste trabalho, buscou-se tornar comprehensível para alunos da graduação o fenômeno da precessão da órbita de Mercúrio, expondo conceitos e equações de forma clara e didática. De início, revisaram-se as leis de Newton, a lei da gravitação universal e os princípios de conservação da energia e do momento angular. Em seguida, outro ponto a ser enfatizado é a abordagem feita sobre força central e potencial efetivo. Logo após, estudaram-se as leis de Kepler com base no cálculo diferencial integral, ao considerar órbitas estáticas e fixas. Posteriormente, na mecânica newtoniana, introduziram-se fatores perturbativos ao potencial efetivo, o que resultou na equação de Binet modificada, cuja solução inclui contribuições gravitacionais que influenciam a precessão de Mercúrio. Para explicar corretamente a discrepância entre os valores teóricos e observacionais, empregaram-se as equações de campo de Einstein, as quais estabelecem a relação entre curvatura do espaço-tempo devido à matéria e à energia. Por fim, a métrica de Schwarzschild, que descreve a geometria em torno de um corpo esfericamente simétrico, sem rotação e carga elétrica foi empregada para o cálculo da correção relativística. Com isso, resolveu-se a discrepancia entre os valores observados e os teóricos, confirmando-se a validade da TRG.

8 Apêndice

8.1 Lei de Transformação de Coordenadas no Espaço Bidimensional

Considere os sistemas de coordenadas (x, y) e (x', y') ilustrados na Figura (9).

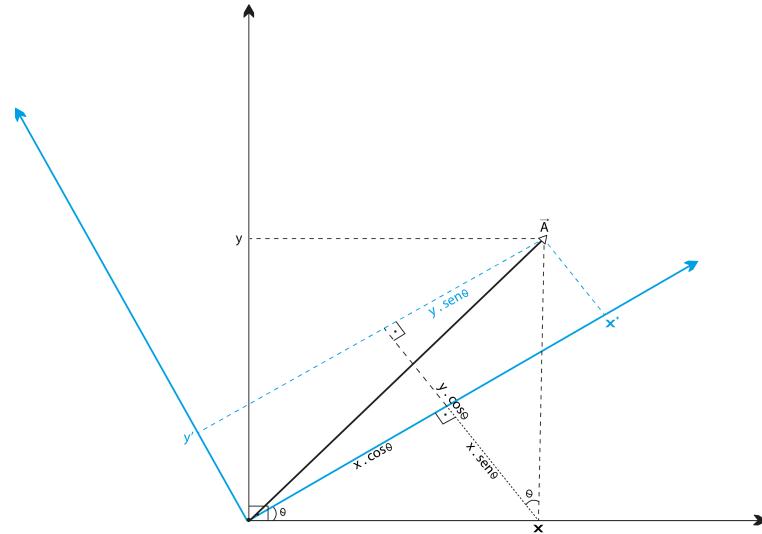


Figura 9: Representação de um plano rotacionado em torno de um eixo fixo. Esta configuração é utilizada para ilustrar transformações geométricas ou mudanças de orientação em sistemas de referência.

Fonte: Autoria própria (2025).

As coordenadas (x', y') do ponto A se relacionam com as coordenadas (x, y) pela expressão

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (90)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (91)$$

Reescrevendo as Eqs.(90) e (91) com $x = x_1$ e $y = x_2$, teremos

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \quad (92)$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \quad (93)$$

Os co-senos diretores podem ser definidos na forma:

$$a_{11} = \cos \theta \quad a_{12} = \sin \theta \quad a_{21} = -\sin \theta \quad a_{22} = \cos \theta.$$

Substituindo os co-senos diretos nas Eqs.(92) e (93), obtemos:

$$x'_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \quad (94)$$

$$x'_2 = -x_1 a_{21} + x_2 a_{22}. \quad (95)$$

A vantagem dessas notações é que elas nos permite reescrever as Eqs.(94) e (95) em símbolo de somatório:

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2$$

8.2 Lei de Transformação Vetorial

Vetores são entidades matemáticas que possuem direção, sentido e obedece a equação

$$V'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

quando o sistema sofre rotação.

As componentes do vetor **A** no novo sistema de coordenadas rotacionado obedece as equações:

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta, \\ A'_y &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta. \end{aligned}$$

Pela definição de a_{ij} como o co-seno do angulo entre a direção x'_i positiva e a direcão x_j positiva, podemos escrever (coordenadas cartesianas):

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x^j},$$

portanto, a Lei de Transformação Vetorial assume a forma

$$V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x^j} V_j, \quad (96)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

8.3 Análise Tensorial

Tensores são importantes em muitas áreas da física, incluindo relatividade geral e eletrodinâmica. Escalar e vetores são casos especiais de tensores. Uma quantidade que não muda sobre rotação do sistema de coordenadas em um espaço tridimensional, uma invariante, é denominada escalar. Um **escalar** é especificado por um número real e é um **tensor**

de ordem 0. Nesse sentido, uma quantidade cujas componentes mudam sob rotações como as da distância de um ponto a partir da origem escolhida, é denominada vetor. A transformação das componentes do vetor sob uma rotação das coordenadas preserva o vetor como uma entidade geométrica, independentemente da estrutura de referência. Em um espaço tridimensional, um **vetor** é especificado por $3 = 3^1$ números reais, por exemplo suas componentes cartesianas, e é um **tensor de ordem 1**. Um **tensor de ordem n** tem 3^n componentes que se transformam de uma maneira definida. Essa filosofia de transformação é de crucial importância para a análise tensorial e obedece ao conceito de vetor e de espaço vetorial (ou linear) dos matemáticos e à noção dos físicos de que observáveis físicos não dependem da escolha de estruturas coordenadas. Há uma base física para tal filosofia: descrevemos o mundo físico pela matemática, mas quaisquer previsões físicas que fazemos devem ser independentes de nossas convenções matemáticas [26].

8.4 Componente Covariante de um Tensor

Vetores ou tensores com o índice **subscrito** (A_i) são denominados de **covariante**. Matematicamente, temos a equação:

$$A'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} A_j$$

que é um **tensor** de ordem 1 (uma derivada). Os índices **i** e **j** são denominados, respectivamente, **índice fixo** e **índice de soma**. Nessa análise, teremos A'_1 , A'_2 , A'_3 , (com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$). Abrindo A'_1 :

$$\begin{aligned} A'_1 &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_1} A_j \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} A_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} A_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} A_3 \end{aligned}$$

mesmo raciocínio se estende as demais componentes.

Em termos de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_1} A_j \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3. \end{aligned}$$

Se partirmos de um vetor diferencial $d\mathbf{A}$, então, tomando $d\mathbf{A}'_i$ como uma função das variáveis “sem linha”, ficamos com a expressão:

$$dA'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} dA_j, \quad (97)$$

com o índice fixo $i = 1, 2, 3$, para R^3 , expressando dA'_1 , teremos

$$\begin{aligned} dA'_1 &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} dA_j \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} dA_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} dA_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} dA_3. \end{aligned}$$

8.5 Componente Contravariante de um Tensor

Se o vetor possui **índice superior (sobrescrito)** é denominado de **contravariante**. E obedece a seguinte Lei de Transformação:

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j;$$

a forma como expressada é similar a da covariante. Considerando o espaço tridimensional (R^3), temos A'^1, A'^2, A'^3 . Expressando A'^1 , teremos:

$$\begin{aligned} A'^1 &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^j} A^j \\ &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} A^3 \end{aligned}$$

Fazendo A'^1 em termos do sistema de coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} A'^1 &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \\ &= \frac{\partial x}{\partial r} A^1 + \frac{\partial x}{\partial \theta} A^2 + \frac{\partial x}{\partial \phi} A^3 \end{aligned}$$

Admitindo um vetor diferencial $d\mathbf{A}$, para o espaço tridimensional temos três componentes dA'^1, dA'^2, dA'^3 . De forma geral, podem ser "compactadas" na forma:

$$dA'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dA^j,$$

expressando dA'^1 ,

$$\begin{aligned} dA'^1 &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} dA^j \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} dA^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} dA^2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} dA^3. \end{aligned}$$

8.6 Seções Cônicas

O ponto P em coordenadas polares (r, θ) , ver Figura(10), é dado por

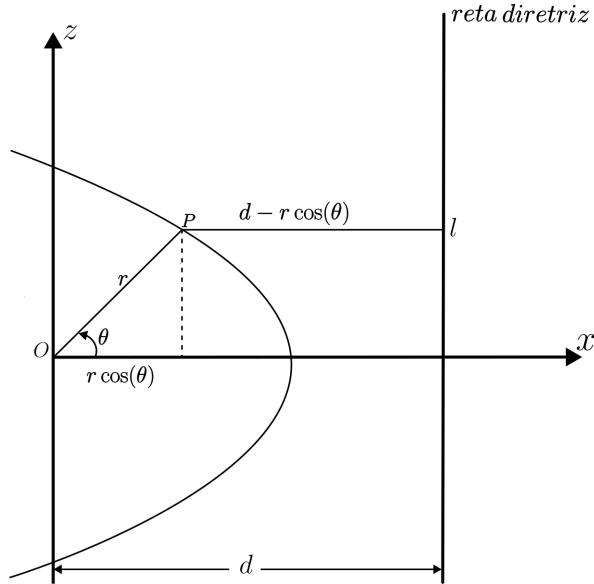


Figura 10: Representação esquemática da projeção radial e da distância à diretriz de uma órbita. A projeção radial indica a distância instantânea do corpo ao centro de força, enquanto a diretriz é uma linha de referência utilizada para definir a excentricidade e a forma da trajetória.

Fonte: Autoria própria (2025).

$$|OP| = r \quad \text{e} \quad |Pl| = d - r \cos \theta.$$

Aplicando a definição de excentricidade:

$$\begin{aligned} \frac{|OP|}{|PL|} &= e \\ |OP| &= e|PL| \\ r &= e(d - r \cos \theta). \end{aligned} \tag{98}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e convertendo para coordenadas cartesianas (sabendo que $r^2 = x^2 + y^2$ e $x = r \cos \theta$), teremos:

$$r^2 = e^2(d - r \cos \theta)^2$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= e^2(d - x)^2 \\x^2 + y^2 &= e^2(d^2 - 2dx + x^2) \\x^2 + y^2 &= e^2d^2 - 2dxe^2 + x^2e^2,\end{aligned}$$

isolando e^2d^2 ,

$$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2dxe^2 = e^2d^2.$$

Dividindo ambos os membros por $(1 - e^2)$, chegaremos ao resultado:

$$x^2 + \frac{2dxe^2}{1 - e^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}. \quad (99)$$

No primeiro membro da Eq.(99) podemos "acrescentar um zero",

$$x^2 + \frac{2dxe^2}{1 - e^2} + \left(\frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 - \left(\frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

o que permitirá completar o quadrado

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2} + \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2}. \quad (100)$$

O segundo membro pode ser simplificado na forma:

$$\frac{e^2d^2}{1 - e^2} + \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2} = \frac{(1 - e^2)e^2d^2 + d^2e^4}{(1 - e^2)^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Portanto, a Eq. (100) torna-se:

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}. \quad (101)$$

Na Eq.(101), se $e < 1$, representa uma elipse da forma:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1,$$

com os seguintes parâmetros,

$$\left. \begin{aligned}a^2 &= \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \\b^2 &= \frac{e^2d^2}{1 - e^2}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}c^2 &= a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2} \\c &= -h = \frac{e^2d}{1 - e^2}.\end{aligned}$$

Ao isolarmos para r na Eq. (98), encontramos

$$\begin{aligned} r &= ed - re \cos \theta \\ r(1 + e \cos \theta) &= ed \\ r &= \frac{ed}{1 + e \cos \theta}. \end{aligned} \quad (102)$$

a Eq. (102) é de uma cônica com foco na origem. E pode ser utilizada para descrever órbitas de corpos sob força central, como a gravitacional.

8.7 Métrica de Schwarzschild

8.7.1 Mudanças de Coordenadas

Para mudarmos das coordenadas cartesianas para as coordenadas esféricas utilizamos as relações

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Aplicando a diferenciação nas equações acima, chegamos as expressões

$$\begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta - r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Substituindo dx , dy e dz na Eq.(57), temos

$$\begin{aligned} ds^2 = & -dt^2 + (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\ & + (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta - r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 \\ & + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2, \end{aligned}$$

simplificando, chegaremos a seguinte expressão

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

8.7.2 Conexões da Métrica

As componentes não nulas das conexões da métrica constam abaixo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial r} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial r}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha(r)}}\right)\left[\frac{\partial(-e^{2\alpha(r)})}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^{2\alpha(r)}}\right)(-e^{2\alpha(r)}2\partial_r\alpha) \\
&= \partial_r\alpha,
\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r\alpha & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r\beta & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2\beta(r)} \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2\beta(r)}\sin^2\theta & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.
\end{aligned} \tag{104}$$

8.8 Tensor de Riemann

Segue abaixo as componentes do tensor de Riemann não nulas para o espaço-tempo de Schwarzschild:

$$\begin{aligned}
R_{\theta t\theta}^t &= \partial_t\Gamma_{\theta\theta}^t - \partial_\theta\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{t\lambda}^t\Gamma_{\theta\theta}^\lambda - \Gamma_{\theta\lambda}^t\Gamma_{t\theta}^\lambda \\
&= \Gamma_{tr}^t\Gamma_{\theta\theta}^r \\
&= 7\partial_r\alpha \cdot (-re^{-2\beta}) \\
&= -re^{-2\beta}\partial_r\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi t\phi}^t &= \partial_t\Gamma_{\phi\phi}^t - \partial_\phi\Gamma_{t\phi}^t + \Gamma_{t\lambda}^t\Gamma_{\phi\phi}^\lambda - \Gamma_{\phi\lambda}^t\Gamma_{t\phi}^\lambda \\
&= \Gamma_{tr}^t\Gamma_{\phi\phi}^r \\
&= \partial_r\alpha \cdot (-re^{-2\beta}\sin^2\theta) \\
&= -re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta r \theta}^r &= \partial_r \Gamma_{\theta \theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{r \theta}^r + \Gamma_{r \lambda}^r \Gamma_{\theta \theta}^\lambda - \Gamma_{\theta \lambda}^r \Gamma_{r \theta}^\lambda \\
&= \partial_r \Gamma_{\theta \theta}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta \theta}^r - \Gamma^r \Gamma_{\theta \theta} \Gamma_{r \theta}^\theta \\
&= \partial_r (-re^{-2\beta}) + (\partial_r \beta) (-re^{-2\beta}) - (-re^{-2\beta}) \left(\frac{1}{r}\right) \\
&= -e^{-2\beta} + 2r^{-2\beta} \partial_r \beta - re^{-2\beta} \partial_r \beta + e^{-2\beta} \\
&= re^{-2\beta} \partial_r \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi r \phi}^r &= \partial_r \Gamma_{\phi \phi}^r - \partial_\phi \Gamma_{r \phi}^r + \Gamma_{r \lambda}^r \Gamma_{\phi \phi}^\lambda - \Gamma_{\phi \lambda}^r \Gamma_{r \phi}^\lambda \\
&= \partial_r \Gamma_{\phi \phi}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\phi \phi}^r - \Gamma_{\phi \phi}^r \Gamma_{r \phi}^\phi \\
&= \partial_r (re^{-2\beta} \sin^2 \theta) + \partial_r \beta (-re^{-2\beta} \sin^2 \theta) - (-re^{-2\beta} \sin^2 \theta) \cdot \frac{1}{r} \\
&= -e^{-2\beta} \sin^2 \theta + 2re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta - re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta + e^{-2\beta} \sin^2 \theta \\
&= re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi \theta \phi}^\theta &= \partial_\theta \Gamma_{\phi \phi}^\theta - \partial_\phi \Gamma_{\theta \phi}^\theta + \Gamma_{\theta \lambda}^\theta \Gamma_{\phi \phi}^\lambda - \Gamma_{\phi \lambda}^\theta \Gamma_{\theta \phi}^\lambda \\
&= \partial_\theta \Gamma_{\phi \phi}^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi \phi}^r - \Gamma_{\phi \phi}^\theta \Gamma_{\theta \phi}^\phi \\
&= \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{1}{r} \cdot (re^{-2\beta} \sin^2 \theta) - (-\sin \theta \cos \theta) \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= -[\cos \theta \cos \theta + \sin \theta (-\sin \theta)] - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta (1 - e^{-2\beta}).
\end{aligned}$$

Referências

- [1] M. R. MARTINS, A. D. BUFFON, and M. C. D. NEVES, “A astronomia na antiguidade: um olhar sobre as contribuições chinesas, mesopotâmicas e egípcias,” *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, vol. 12, no. 2, pp. 115–132, 2019.
- [2] M. A. GARMS and I. L. CALDAS, “Síntese das leis de kepler,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, no. 4, p. e4201, 2017.
- [3] J. C. CARVALHO FILHO and A. S. M. GERMANO, “Leis de kepler e a gravitação universal,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 35, no. 2, p. 2501, 2013.
- [4] A. SAA, “Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de schwarzchild,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, no. 4, p. e4801, 2016.
- [5] D. SOARES, “De schwarzchild a newton,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, p. e20200123, 2020.
- [6] R. F. F. CUNHA and A. C. TORT, “O estudo de precessão da órbita de mercúrio no ensino médio,” *Revista do Professor de Física*, vol. 1, no. 2, pp. 45–56, 2017.
- [7] S. M. CARROLL, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1 ed., 2019.
- [8] C. A. ANTUNES, V. B. GALHARDI, and C. A. HERNASKI, “As leis de newton e a estrutura espaço-temporal da mecânica clássica,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, p. e3311, 2018.
- [9] I. NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica [Princípios Matemáticos da Filosofia Natural]*. Londini [Londres]: Royal Society, 1. ed. original ed., 1687.
- [10] S. T. THORNTON and J. B. MARION, *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Tradução de: Classical dynamics of particles and systems, 5th ed.
- [11] D. HALLIDAY, R. RESNICK, and J. WALKER, *Fundamentos de física*, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 10 ed., 2016.
- [12] C. M. PORTO, “A revolução copernicana: aspectos históricos e epistemológicos,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, p. e20190190, 2020.
- [13] P. A. TIPLER and G. MOSCA, *Física para cientistas e engenheiros*, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 6 ed., 2009.

- [14] F. F. S. JUSTINO and J. J. RODRIGUES, “Uma análise do comportamento do campo gravitacional no interior da terra,” *Latin-American Journal of Physics Education*, vol. 14, no. 4, p. 4310, 2020.
- [15] H. M. NUSSENZVEIG, *Curso de física básica*, vol. 1. São Paulo: Edgard Blücher, 4 ed., 2002.
- [16] C. FARINA, “O vetor de laplace-runge-lenz no problema de kepler,” *Fís. UEFS*, vol. 5, pp. 1–2, 2006.
- [17] J. STEWART, *Cálculo*, vol. 2. São Paulo: Cengage Learning, 7 ed., 2013. Tradução de: Calculus, 7th ed.
- [18] O. D. MIRANDA, “Avanço do periélio de mercúrio – o primeiro sucesso da teoria da relatividade geral de einstein,” *Conexões – Ciência e Tecnologia*, vol. 13, no. 2, pp. 7–20, 2019.
- [19] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. San Francisco: Addison-Wesley, 3rd ed., 2002.
- [20] R. F. F. d. CUNHA, *A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio*. Tese (doutorado), Rio de Janeiro, 2017.
- [21] P. R. CONCEIÇÃO, *Estudo do problema de Kepler via simetrias de Lie*. Tese (doutorado), São Paulo, 2018.
- [22] S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley & Sons, 1972.
- [23] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992. First edition. James Vickers is credited as co-author in later printings.
- [24] J. PLEBANSKI and A. KRASINSKI, *An introduction to general relativity and cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [25] D. McMahon, *Relativity demystified*. Tata McGraw-Hill Education, 2006.
- [26] G. B. ARFKEN and H. J. WEBER, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 6 ed., 2007. Tradução de: Mathematical methods for physicists, 6th ed.