UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PROP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOAFSON SOUSA ALENCAR

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

TERESINA

2025

JOAFSON SOUSA ALENCAR

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT - UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática. Linha de Pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica.
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima.
Coorientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha.

TERESINA

2025

A368f Alencar, Joafson Sousa.
Funções trigonométricas e movimento harmônico simples: uma proposta de sequência didática / Joafson Sousa Alencar. - 2025.
46 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Piauí, 2025.
"Orientação: Prof. Dr. Alexandre B. do Nascimento Lima".
"Coorientação: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha".

1. Funções trigonométricas. 2. Movimento harmônico simples. 3. Sequência didática. I. Lima, Alexandre B. do Nascimento . II. Rocha, Natã Firmino Santana . III. Título.

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecário) CRB-3ª/1188

JOAFSON SOUSA ALENCAR

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática. Linha de Pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica.
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento Lima.
Coorientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha.

Aprovada em 29 de setembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br ALEXANDRE BEZERRA DO NASCIMENTO LIMA
Data: 10/10/2025 17:06:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alexandre Bezerra do Nascimento
PROFMAT/UESPI - Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br NATA FIRMINO SANTANA ROCHA
Data: 10/10/2025 17:10:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Pof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha
PROFMAT/UESPI - Coorientador

Documento assinado digitalmente
gov.br ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA
Data: 09/10/2025 19:36:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Antonio Kelson Vieira da Silva
UFPI – Examinador Externo

Documento assinado digitalmente
gov.br JEFFERSON DE BRITO SOUSA
Data: 10/10/2025 16:26:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jefferson de Brito Sousa
PROFMAT/UESPI – Examinador Interno

AGRADECIMENTOS

À Deus e a todos que contribuíram direta e indiretamente nessa trajetória.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de propor uma abordagem interdisciplinar para o estudo de funções trigonométricas, associando-as com o estudo de Movimento Harmônico Simples (MHS), por meio da elaboração de uma sequência didática para o Ensino Médio. O objetivo de tal proposta é relacionar os conhecimentos matemáticos com os fenômenos físicos, mais precisamente os movimentos periódicos, promovendo, assim, um aprendizado mais amplo e significativo aos alunos. Nesse sentido, desenvolveu-se uma sequência didática que parte do aspecto investigativo e, a partir dele, se constrói um novo conhecimento, visando consolidar o aprendizado ao longo de todo o processo. A metodologia sugerida na execução da sequência didática é constituída de observações, questionário investigativo, atividade e avaliação final.

Palavras-chave: Funções trigonométricas; Movimento harmônico simples; Sequência didática.

ABSTRACT

This work aims to propose an interdisciplinary approach to the study of trigonometric functions, associating them with the study of simple harmonic motion (SHM) through the development of a didactic sequence for high school education. The purpose of this proposal is to relate mathematical knowledge to physical phenomena, more specifically periodic motions, thus promoting broader and more meaningful learning for students. In this regard, a didactic sequence was developed starting from an investigative perspective, from which new knowledge is built, aiming to consolidate learning throughout the entire process. The methodology suggested for implementing the didactic sequence consists of observations, an investigative questionnaire, activities, and a final assessment.

Keywords: Trigonometric functions; Simple harmonic motion; Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática trabalhada no Ensino Médio é aquela que habilita o estudante a adquirir um maior grau de percepção em relação a outros campos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) dizem que é necessário que os alunos do Ensino Médio:

> [...] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam que a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (Brasil, 2006, p. 69).

É necessário dar sentido ao que está sendo trabalhado em sala, principalmente a Matemática, visto que ela desperta uma maior resistência e rejeição por parte dos estudantes. Isso ocorre porque, na maioria das vezes, a abordagem é feita sem significado e sem relação com o mundo real.

Não basta apenas recorrer às definições, usos de teoremas e propriedades sem antes instigar os estudantes a fazer reflexões com questionamentos, situações do mundo afora ou mesmo do seu cotidiano. Não é suficiente dizer que o estudo de determinado assunto é importante, mas comprovar sua relevância.

A partir do momento em que a abordagem é desvinculada da contextualização, surge uma barreira no processo de ensino-aprendizagem, e aí se torna um desafio ainda maior. Por isso, cabe ao professor conduzir esse processo de modo que os estudantes não tenham essa dificuldade.

> Contextualizar os conceitos matemáticos, para o ensino, significa articular vivências concretas e diversificadas, que podem oportunizar um aprendizado significativo. No caso da Matemática, pode-se a partir das vivências, perceber e interpretar os conceitos matemáticos presentes na vida do estudante, para que futuramente ele saiba lidar com situações que lhes remetem ao que foi aprendido (Azambuja, 2013, p. 20).

Do ponto de vista do aluno é necessário haver relevância no que está sendo estudado. O conhecimento não deve ficar restrito ao que é exposto e abordado nos livros, mas deve ir além disso. Não obstante, a proposta do ensino atual baseia-se na contextualização dos conceitos, justamente para gerar um maior interesse pelo público e dar mais sentido ao processo de ensino.

Apenas argumentar que a Matemática é uma disciplina base para as demais é insuficiente. Agora, fazer menções e, a partir delas, expor dados, trazer situações problemas que constatem a sua relação com outros ramos, com áreas distintas, havendo um diálogo entre elas, certamente irá promover um novo olhar, outra maneira do aluno se posicionar em relação à mesma e modificar um pouco seu pensamento a respeito.

Segundo Mendes (2008, p. 32), quando se destaca que é "[...] urgente uma retomada dos valores humanos na resolução de problemas para que seja possível eliminar esse processo de exclusão do ensino de Matemática", isso quer dizer que é necessário rever a forma como a disciplina está sendo trabalhada, se há uma associação com outras áreas, para que assim possa ser banido o desinteresse total pelo seu aprendizado.

Quando o conhecimento matemático envolve esse aspecto, isso faz com que a disciplina assuma um papel mais amplo, no sentido de promover um olhar diferente por parte de quem está estudando-a, já que não ficará isolada de outros contextos, mas passará a fazer parte deles.

É importante salientar também a evolução da Matemática como uma disciplina social, pois são inúmeras as contribuições da ciência para o desenvolvimento da sociedade, dos avanços tecnológicos que dispomos hoje e que tais estudos não surgiram do nada, mas foram necessários para promover ou aprimorar algo que antes não era possível. Que a mesma é uma ferramenta muito eficiente para modelar situações, tomar decisões frente a alguns eventos, apontar caminhos e soluções.

A abordagem em sala de aula, realizada dessa maneira, propicia um processo de ensino-aprendizagem mais compreensível, vasto e rico. Problemas que dialogam com outras áreas evidenciam a importância do uso do conhecimento trabalhado em sala de aula e fazem os estudantes se colocarem nas situações que são apresentadas.

No que diz respeito à relação da Matemática com a ciência, vemos que a mesma fornece todas as ferramentas necessárias para compreender e lidar com os fenômenos e as situações que nos rodeiam. Sua utilização vai muito além de fórmulas e cálculos, pois é a partir dela que hipóteses são verificadas, fenômenos modelados, dados analisados, previsões feitas, processos otimizados.

Em relação à física, percebemos que ambas as ciências estão associadas uma à outra. A física recorre à Matemática, frequentemente para investigar fenômenos e, a partir deles, modelá-los, a fim de expressar uma relação mais precisa entre as grandezas que estão sendo analisadas. Segundo Pinheiro, Pietrocola e Alves Filho (2001), a Matemática fornece uma estrutura essencial à física, ou seja:

> [...] a Matemática fornece um conjunto de estruturas dedutivas, por meio das quais se expressam as leis empíricas ou os princípios teóricos da Física [...] ela é uma forma de linguagem e ferramenta, por meio da qual são estruturadas as relações entre os elementos constituintes de uma teoria (Pinheiro; Pietrocola; Alves Filho, 2001, p. 40).

No que diz respeito à relação entre as duas disciplinas no ensino, nota-se que ambas ainda são tratadas de forma independente, sem haver a associação, principalmente na abordagem dos conteúdos nos livros didáticos. Cenário bastante desafiador para os professores que visam uma abordagem mais interdisciplinar e aplicável ao contexto real dos estudantes. De acordo com Pietrocola (2002), há um impasse muito grande por parte dos professores de ambas as disciplinas, visto que:

> Os professores de Física gostariam que seus alunos chegassem à sala de aula com os pré-requisitos matemáticos completos. Em contrapartida, os professores de Matemática não aceitam, com razão, que sua disciplina seja pensada apenas como instrumento para outras disciplinas, e impõem uma programação que nem sempre se articula com aquela da Física (Pietrocola, 2002, p. 96).

Ambas as disciplinas dialogam entre si, no entanto, não há o diálogo entre os professores. Isso, de certa forma, torna as disciplinas ainda mais isoladas uma da outra, e faz com que o aluno tenha a visão de que a Matemática é necessária apenas para realizar cálculos, resolver equações.

São inúmeros os fatores que evidenciam o fracasso escolar na Matemática. Entretanto, a falta de estímulo agrava ainda mais essa realidade. Expor um determinado conteúdo apenas citando exemplos simples em que ele pode ser usado é uma maneira muito pobre de ressaltar sua relevância. Porque não promover um diálogo inicial logo no início da aula? De como a sociedade ou os meios dos quais ela dispunha na época antes da apropriação e sistematização do tema a ser trabalhado?

Questionamentos desse tipo geram reflexões, despertam curiosidade e, além disso, faz com que o público reconheça a enorme contribuição da Matemática na sociedade como um todo. O papel do professor, além de ser o mediador entre o conhecimento e o aluno, é despertar o senso crítico, a percepção, o raciocínio, e com esses elementos, desenvolver uma abordagem mais sólida e que venha de fato ter sentido na vida dos estudantes.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O processo de ensino e aprendizagem sempre sofre mudanças e adaptações. Não obstante, a educação é objeto de discussão e debate contínuo, visto que é a mola propulsora do desenvolvimento social, econômico e tecnológico de um país. Novos métodos são implementados, estratégias analisadas, propostas de abordagens são sugeridas para que, assim, possa haver uma maior melhoria na obtenção dos resultados. Dentre essas estratégias, a sequência didática é uma delas.

Segundo Zabala (1998, p. 18), em sua obra intitulada por *A prática educativa: como ensinar*, a sequência didática é constituída por um "[...] conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos"**.** Ainda segundo ele, as sequências didáticas são uma maneira de organizar diferentes atividades ao longo de uma unidade didática, possibilitando, assim, formas de intervenção, além de promover o aspecto avaliativo enquanto a mesma é executada.

Isso quer dizer que, ao realizar uma aula com o uso de uma sequência didática, o professor está buscando uma maior amplitude na apropriação do conhecimento dos alunos no fim do processo. Isso se justifica, pois é uma estratégia de ensino que visa trabalhar os conteúdos vinculados às atividades, que podem ser desenvolvidas por vários dias e, assim, serem feitas intervenções para atingir objetivos de aprendizagens mais específicos.

A participação dos alunos durante a execução da sequência didática é fundamental, pois nesse momento ele irá contribuir para sua própria aprendizagem. De acordo com Cabral (2017), vários princípios devem ser considerados, são eles: a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos; o ensino centrado na problematização; ensino reflexivo (ênfase na explicitação verbal); ensino centrado na interação e na sistematização dos saberes; utilização de atividades diversificadas, desafiadoras e estruturadas em níveis de complexidade. De acordo com ele:

> A concepção das intervenções de acordo com esses princípios é estimular uma participação ativa dos alunos. Essa condição de "sujeito ativo" pressupõe que o aprendiz assuma a construção do seu próprio conhecimento o que sugere o distanciamento da postura tradicional passiva na qual se limita a copiar e a reproduzir modelos algorítmicos, em geral, apresentados sem quaisquer justificativas (Cabral, 2017, p. 36).

Assim, a construção do conhecimento se dará de forma conjunta, partindo de um conhecimento que o aluno já terá consigo. E, a partir desse conhecimento, o professor irá desenvolver sua abordagem e expor informações novas acerca do mesmo, consolidando e promovendo uma abordagem mais ampla.

A sequência didática constitui-se não apenas como um roteiro, mas também como uma estratégia pedagógica que visa garantir a construção do conhecimento, pois parte dos saberes prévios dos alunos e, a partir deles, desenvolve uma abordagem que visa a articulação entre os conhecimentos já adquiridos com os novos.

2.1 Motivação

A maior razão pela qual o desenvolvimento deste trabalho se justifica é o fato de gerar um maior significado e sentido para os estudantes. Qualquer que seja o público alvo em que um determinado conhecimento científico será trabalhado, nota-se que há maior receptividade pelo mesmo, quando ele pode ser usado para compreender algumas situações ou podermos fazer uso dele em outros campos.

Dessa forma, trabalhar o estudo de funções trigonométricas, que é um assunto que gera bastante dificuldade e receio pelos alunos, sob uma perspectiva de aplicação em fenômenos físicos, fará os estudantes perceberem sua importância, bem como compreender melhor tais situações.

2.2 Descrição do trabalho

No que tange o conteúdo de funções trigonométricas, nota-se uma dificuldade dos alunos em associar as representações gráficas com alguns fenômenos que permeiam nosso dia a dia. Dessa forma, a proposta deste trabalho é sugerir uma sequência didática que venha possibilitar a ligação entre as funções e fenômenos físicos, mais precisamente, o Movimento Harmônico Simples (MHS).

Para isso, será utilizada uma sequência didática como ferramenta pedagógica, para que o aluno possa vincular o estudo de funções com as equações e as representações gráficas do MHS. Possibilitando, assim, a associação da teoria matemática trabalhada em sala com fenômenos físicos.

No capítulo 3, será abordada a trigonometria no triângulo retângulo e as razões trigonométricas. Também será definido o conceito de ciclo trigonométrico e as funções seno e cosseno, bem como suas respectivas representações gráficas e períodos. No capítulo 4, será trabalhado o conceito de movimentos periódicos, movimento harmônico simples, bem como a função horária e função da velocidade de uma partícula que descreve movimento circular.

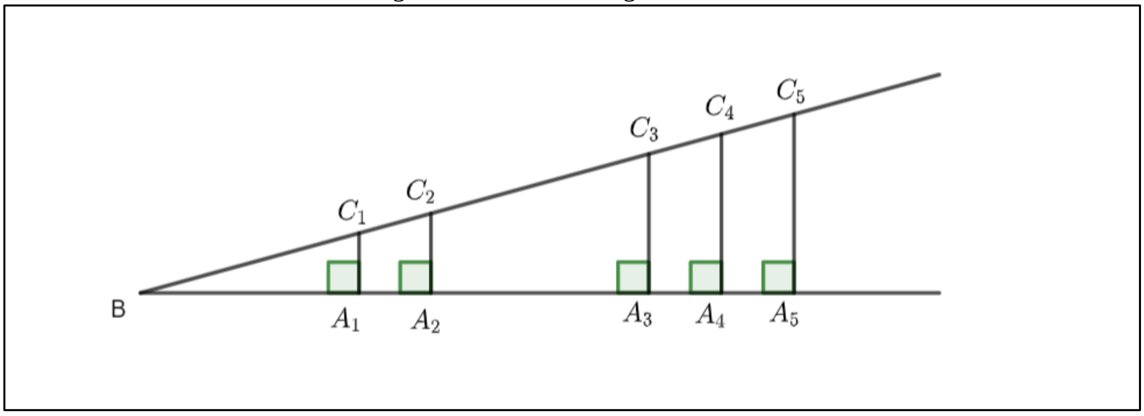
Por fim, no capítulo 5, será descrito passo a passo na sequência didática. Como o professor de matemática ou física deve proceder na abordagem do assunto com a turma, destacando assim, a importante aplicação do estudo das funções seno e cosseno no campo da física.

3 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E CICLO TRIGONOMÉTRICO

3.1 Triângulo retângulo

Dado um ângulo agudo B, vamos marcar sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3, ... e vamos conduzir, por eles, as perpendiculares A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, ... (conforme figura abaixo).

Figura 3.1 – Razões Trigonométricas



Fonte: Autoria própria

Os triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3,... são todos semelhantes entre si. Então:

$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais).

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais).

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \ldots$$

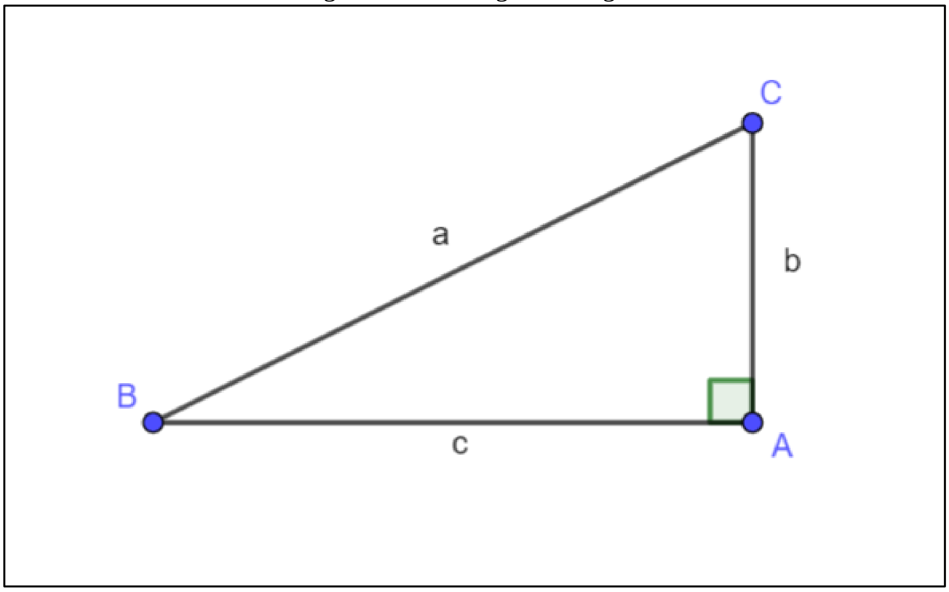
(fixado $\hat{B}$, os catetos oposto e adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais).

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{BA_2}{A_2C_2} = \frac{BA_3}{A_3C_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, os catetos adjacente e oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais).

Verificamos que as relações acima não dependem do tamanho dos triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3,..., mas dependem apenas do valor do ângulo B. Assim, considerando um triângulo retângulo e fixando um ângulo agudo B, temos:

Figura 3.2 – Triângulo retângulo



Fonte: Autoria própria

1º) Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$$

2º) Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

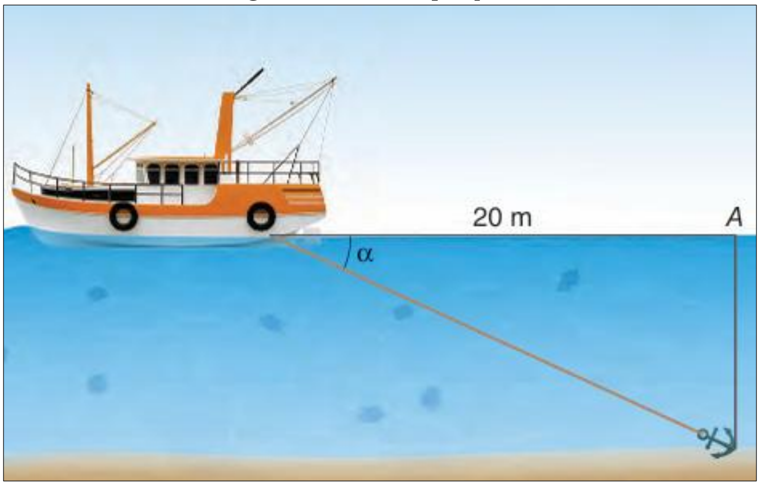
3º) Tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c}$$

Observe a situação a seguir, em que podemos utilizar essas razões para solucionar problemas de distâncias.

Exemplo: A âncora de um barco pesqueiro, depois de lançada, atingiu o fundo do rio. Como a profundidade do rio nesse ponto é menor que o comprimento da corda que prende a âncora ao barco, este se moveu 20 m em relação ao ponto A, de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corda, que formou um ângulo agudo de medida α com a superfície do rio, tal que $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Calcule a profundidade aproximada do rio nesse ponto.

Figura 3.3 – Barco pesqueiro



Fonte: Paiva, 2024

Solução:

Note que temos um triângulo retângulo em A e cujo cateto adjacente ao ângulo α tem medida 20 m. Estamos interessados em determinar a medida x(profundidade do rio), que no triângulo representa o cateto oposto ao ângulo α. Assim, a razão trigonométrica que relaciona cateto oposto com cateto adjacente é a tangente.

Como $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, concluímos que o cateto oposto a esse ângulo mede 5 unidades e a hipotenusa mede 13 unidades. Assim, a medida a do cateto adjacente pode ser determinada pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 5^2 = 13^2$$

$$a^2 = 144$$

$$a = 12$$

Assim, a tangente do ângulo α é dada por:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$$

Retomando ao triângulo do problema e determinando a profundidade x, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{20}$$

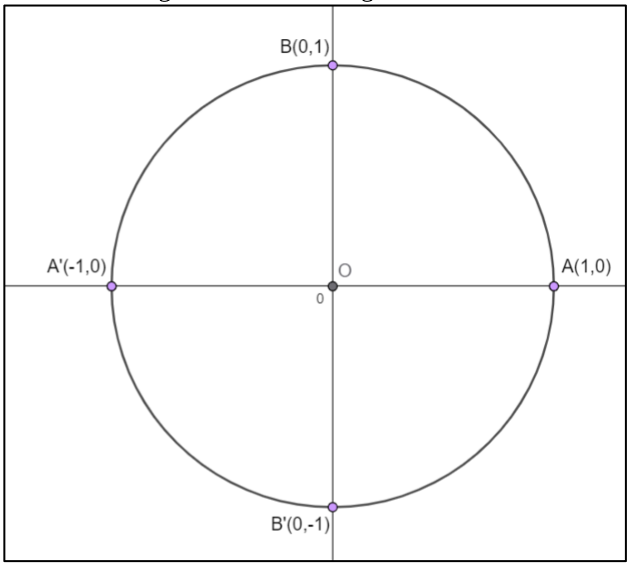
$$\frac{5}{12} = \frac{x}{20}$$

$$x \approx 8{,}3\ m$$

3.2 Ciclo trigonométrico

Num plano, consideremos uma circunferência de raio unitário, cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal. Essa estrutura, com as convenções a seguir, é chamada de ciclo trigonométrico.

Figura 3.4 – Ciclo trigonométrico



Fonte: Autoria própria

- O ponto A (1,0) é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.
- Se um arco for medido no sentido horário, então, ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal negativo.
- Se um arco for medido no sentido anti-horário, então, ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal positivo.
- Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas quadrantes. Esses quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do ponto A, conforme a figura anterior.

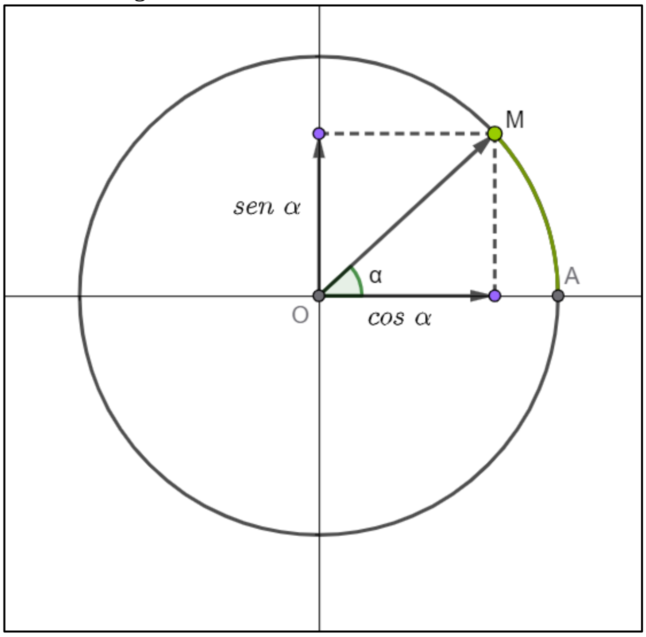
Como o raio é unitário, as hipotenusas dos triângulos medem uma unidade e assim, o seno e o cosseno correspondem às medidas das suas projeções sobre os eixos do plano. Dessa forma, podemos fazer uma correspondência entre os ângulos centrais e os arcos correspondentes determinados por estes ângulos.

3.3 Seno e cosseno de um arco trigonométrico

3.3.1 Seno de um arco

Dado um arco AM de medida α, chamam-se seno e cosseno de α, a ordenada e a abscissa da extremidade M, respectivamente.

Figura 3.5 – Seno e cosseno de um arco



Fonte: Autoria própria

Assim, na circunferência trigonométrica representada pela figura 3.4, podemos nos referir ao eixo das abscissas como eixo dos cossenos, e ao eixo das ordenadas como eixos dos senos.

3.3.2 Função seno

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos $\operatorname{sen} x$) a ordenada OP_1 do ponto P. Assim, chama-se função seno a função:

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada real x o real $OP_1 = \operatorname{sen} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Note que a definição associa cada número real x a outro número real que é seno de x, ou seja, $f(x) = \operatorname{sen} x$, para qualquer x real. Além disso, temos para a função seno:

1ª) A imagem da função seno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, para todo x real.

É imediata a justificativa, pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a 1.

2ª) A função seno é periódica e seu período é 2π.

É imediato que, se $\sin x = OP_1$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = OP_1$, pois x e $x + 2k\pi$ tem a mesma imagem P no ciclo. Temos então, para todo x real:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$$

E, portanto, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $2k\pi$, isto é, 2π.

3.3.3 Gráfico

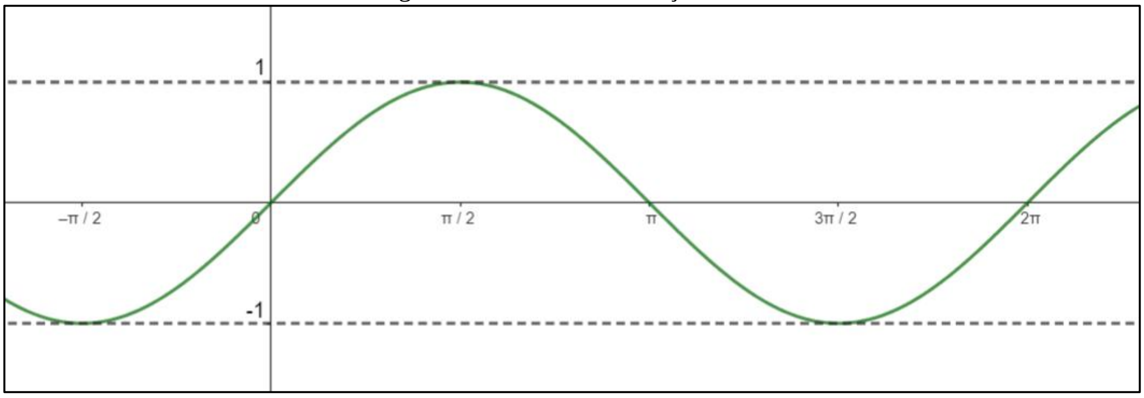
Fazendo um diagrama com x em abscissas e $\sin x$ em ordenadas, podemos construir o gráfico da função (Figura 3.6), denominado senóide, que nos indica como varia a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, conforme a tabela abaixo.

Figura 3.6 – Tabela com o seno de alguns arcos

x	$y = \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Fonte: Autoria própria

Figura 3.7 – Gráfico da função seno



Fonte: Autoria própria

Observemos que, como o domínio da função seno é ℝ, o gráfico continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0.

3.3.4 Função cosseno

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa OP_2 do ponto P. Assim, chama-se função cosseno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada real x o real $OP_2 = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.

Note que a definição associa cada número real x a outro número real, que é cosseno de x, ou seja, $f(x) = \cos x$, para qualquer x real. Além disso, temos para a função cosseno:

1ª) A imagem da função cosseno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo x real.

2ª) A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

3.3.5 Gráfico

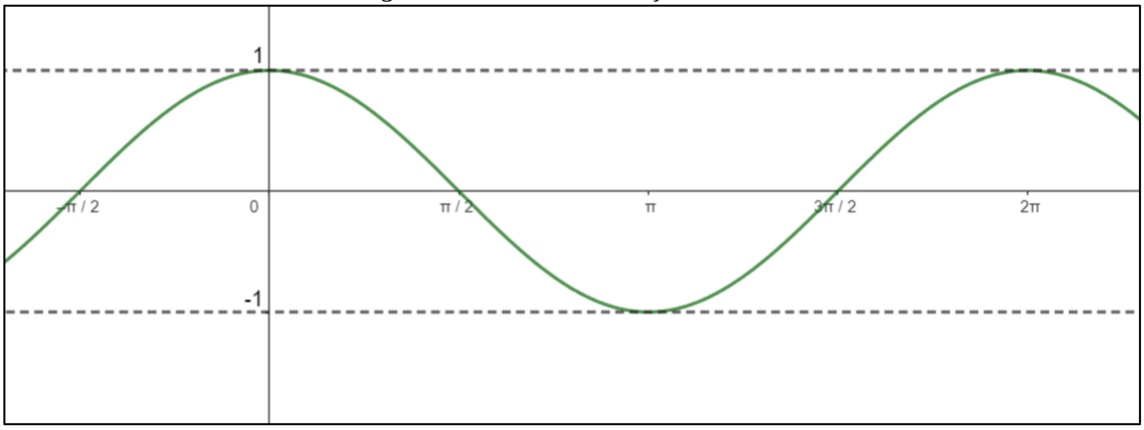
Fazendo um diagrama com x em abscissas e $\cos x$ em ordenadas, podemos construir o gráfico da função, denominado cossenóide, que nos indica como varia a função $f(x) = \cos x$.

Figura 3.8 – Tabela com o cosseno de alguns arcos

x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Fonte: Autoria própria

Figura 3.9 – Gráfico da função cosseno



Fonte: Autoria própria

Observemos que, como o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$, o gráfico continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0.

3.3.6 - Periodicidade das funções seno e cosseno

Definição: Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica de período T, se existe uma constante positiva T tal que $f(x) = f(x + T)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação: Se uma função é periódica de período T, então, f também é periódica de período nT, onde $n \in \mathbb{N}$, já que $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + 3T) = \cdots = f(x + nT)$.

Demonstração: Vamos usar indução sobre n, sendo $n \in \mathbb{N}$.

i) Passo base $(n = 1)$

Sabemos que $f(x + T) = f(x)$.

Então a propriedade vale para $n = 1$.

ii) Passo indutivo

Considere que para $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$f(x + kT) = f(x)$$

Precisamos mostrar que

$$f(x + (k + 1)T) = f(x)$$

Note que

$$f(x + (k + 1)T) = f((x + kT) + T)$$

$= f(x + kT)$ (hipótese de periodicidade)

$= f(x)$ (pela hipótese indutiva)

Dessa forma, concluímos que $f(x + (k + 1)T) = f(x)$, então a propriedade vale para $k + 1$. Logo, $f(x + nT) = f(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exemplo: As funções $f(t) = \text{sen}(t)$ e $g(t) = \cos(t)$ são periódicas de período 2π.

3.3.7 – Determinação do período das funções seno e cosseno

Obtemos o período da função $y = a + b \cdot \text{sen}(mx + q)$ ou da função $y = a + b \cdot \cos(mx + q)$, em que $\{a, b, m, q\}$ ⍰ ℝ, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa da circunferência trigonométrica. Por exemplo, quando essa medida assume os valores de 0 a 2π, temos:

$$0 \leq mx + q \leq 2\pi$$

$$0 - q \leq mx \leq 2\pi - q$$

I) Se m > 0:

$$-q \leq mx \leq 2\pi - q$$

$$\frac{-q}{m} \leq x \leq \frac{(2\pi - q)}{m}$$

Assim, o período p da função é a diferença entre o maior e o menor valor obtidos para x, nessa ordem, isto é:

$$p = \frac{(2\pi - q)}{m} - \left(\frac{-q}{m}\right)$$

$$p = \frac{2\pi}{m}$$

II) Se m < 0:

$$-q \leq mx \leq 2\pi - q$$

$$\frac{-q}{m} \geq x \geq \frac{(2\pi - q)}{m}$$

Calculando o período p:

$$p = \frac{-q}{m} - \frac{(2\pi - q)}{m}$$
$$p = \frac{-2\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$p = \frac{2\pi}{|m|}$$

3.3.8 - Funções pares e funções ímpares

Definição: Uma função f: A → B é denominada função par se, e somente se:

$$f(x) = f(-x), \forall x \in A.$$

Isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos o mesmo valor para a função.

Exemplos:

1º) A função $f(x) = |x|$ é uma função par, visto que $f(x) = |-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

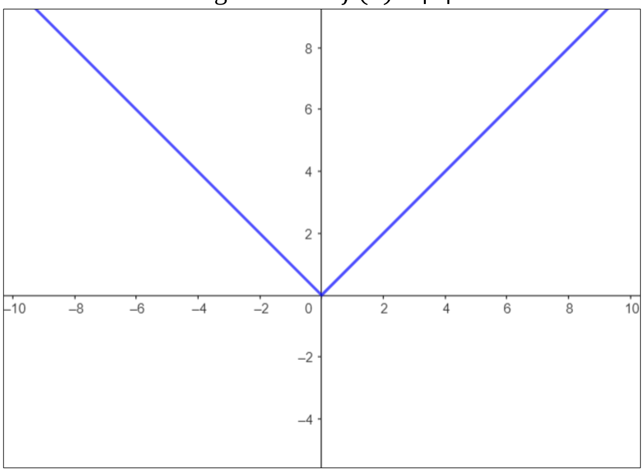
2º) A função $f(x) = x^2$ é uma função par, pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

Da definição, decorre que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y, pois:

$$(x, y) \in f \rightarrow (-x, y) \in f$$

Tomando a função modular, graficamente temos:

Figura 3.10 – $f(x) = |x|$



Fonte: Autoria própria

Definição: Uma função f: A → B é denominada função ímpar se, e somente se:

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in A.$$

Isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos valores simétricos para a função.

Exemplos:

1º) A função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar, pois $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

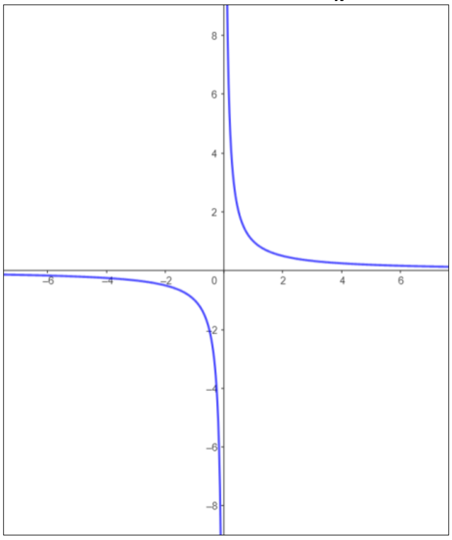
2º) A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função ímpar, pois $f(-x) = \frac{1}{(-x)} =$ - $\frac{1}{x}$,$\forall x \in \mathbb{R}^*$

Da definição, decorre que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano, pois:

$$(x, y) \in f \to (-x, -y) \in f.$$

Tomando a função recíproca, graficamente temos:

Figura 3.11 – $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Autoria própria

Analisando agora o ciclo trigonométrico, lembre-se que para cada α > 0 representando o comprimento de um arco, a ele fazemos corresponder um único ponto P sobre o ciclo, cujas coordenadas são $P(\cos(\alpha), sen(\alpha))$. Agora, considerando o número – α (onde α > 0), a ele corresponde o Ponto P', cujas coordenadas são $P'(\cos(-\alpha), sen(-\alpha))$.

Como P' é o simétrico de P em relação ao eixo x (ver figura 3.11), temos que $P'(\cos(\alpha), -sen(\alpha))$. Dessa forma, temos:

$$(\cos(-\alpha), sen(-\alpha)) = (\cos(\alpha), sen(-\alpha)),$$

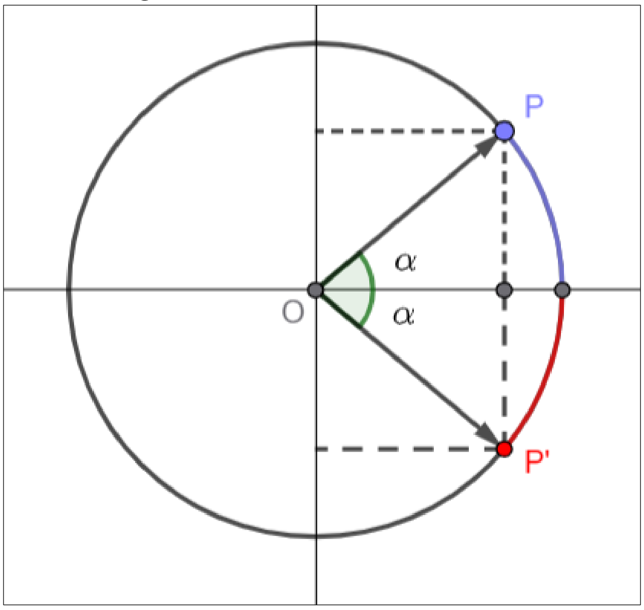
ou seja,

$$\cos(-\alpha) = cos(\alpha)$$

$$\text{sen}(-\alpha) = -sen(\alpha)$$

As últimas igualdades acima significam que $cos(\alpha)$ é uma função par e $sen(\alpha)$ é uma função ímpar.

Figura 3.12 – Arcos de medida α e $-\alpha$



Fonte: Autoria própria

Observando a figura 3.12, observamos que as projeções de P e P' no eixo dos cossenos coincidem, enquanto suas projeções no eixo dos senos são simétricas em relação à origem. Já, analisando suas respectivas representações gráficas, o gráfico de $\cos(x)$ é simétrico em relação ao eixo y, enquanto o de $\operatorname{sen}(x)$ é simétrico em relação à origem.

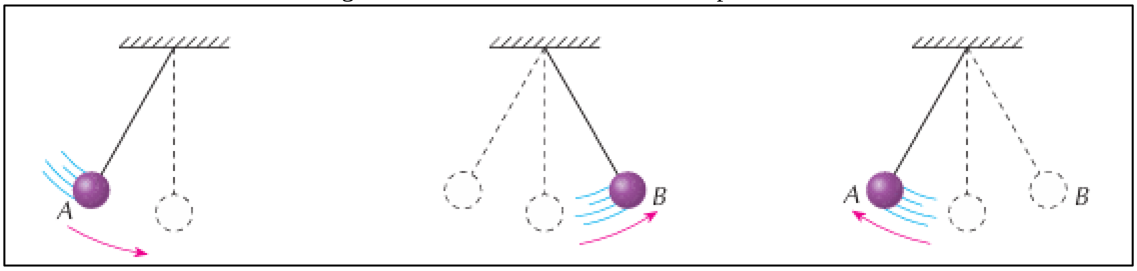
4 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

4.1 Movimentos periódicos

Um fenômeno é periódico quando se repete identicamente em intervalos de tempos iguais. O período T é o menor intervalo de tempo para a repetição do fenômeno.

Desprezada a resistência do ar e forças dissipativas em geral, o pêndulo da figura 4.1 oscila da posição A até a B e retorna à A, repetindo a oscilação. O fenômeno é periódico, pois se repete em intervalos de tempos iguais. O período T é o intervalo de tempo para o pêndulo ir de A até B e retornar novamente à A.

Figura 4.1 – Pêndulo em movimento periódico



Fonte: Ramalho, 2009

Nos fenômenos periódicos além do período T considera-se outra grandeza: a frequência f. Chama-se frequência o número de vezes em que o fenômeno se repete na unidade de tempo.

O período T e a frequência f se relacionam da seguinte forma:

Intervalo de tempo		**nº de vezes em que o fenômeno se repete**
(período) T	$\rightarrow$	1(vez)
(unidade de tempo) 1	$\rightarrow$	f (vezes) (frequência)

Por regra de três simples, temos:

$$fT = 1 \rightarrow f = \frac{1}{T} \text{ ou } T = \frac{1}{f}$$

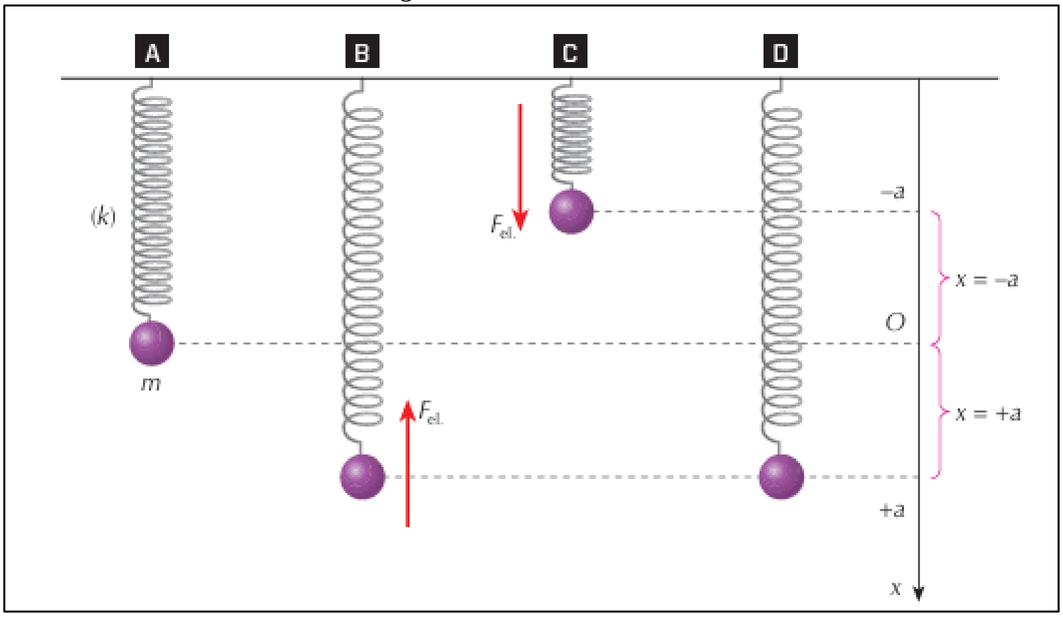
A unidade de frequência no Sistema Internacional de Unidades (ciclos por segundo) é denominada hertz (símbolo: Hz).

4.2 Movimento harmônico simples (MHS)

Diz-se que um ponto material efetua movimento harmônico simples, que indicaremos por MHS, quando, numa trajetória retilínea, oscila periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio sob a ação de uma força cuja intensidade é proporcional à distância do ponto à posição de equilíbrio (Figura 4.2). Essa força é sempre orientada para a posição de equilíbrio e chama-se força restauradora.

O movimento de um oscilador harmônico é um MHS, no qual a força elástica $F = -kx$, é a força restauradora. A esfera suspensa verticalmente (Figura 4.2) à mola efetua MHS quando se desprezam forças dissipativas. Como o MHS é um movimento de trajetória retilínea, a posição do móvel é dada pela abscissa x, medida por um eixo orientado a partir da posição de equilíbrio (O). A amplitude a é a distância da posição de equilíbrio até o extremo da oscilação. Nos extremos da oscilação, a abscissa é $x = +a$ (Figura 4.2 – b) ou $x = -a$ (Figura 4.2 – c). Nesses extremos, há inversão de sentido do movimento, ou seja, a velocidade é anulada.

Figura 4.2 – Esfera em MHS



Fonte: Ramalho, 2009

A esfera suspensa à mola efetua um MHS (desprezada a ação do ar): (A) a esfera está na posição de equilíbrio; (B) puxamos a esfera e a abandonamos; (C e D) a esfera oscila, efetuando MHS de amplitude a em torno da posição de equilíbrio O. No MHS o período T é o intervalo de tempo para o fenômeno se repetir: na figura 4.2, ele é o intervalo de tempo para a esfera, abandonada na posição B, retornar a essa mesma posição. Em outro intervalo igual a T o fenômeno se repete.

4.3 O movimento harmônico simples e o movimento circular

O MHS e o movimento circular uniforme (MCU) estão relacionados, de modo que um pode ser estudado por meio do outro. Esse estudo possibilita-nos chegar às equações cinemáticas do MHS.

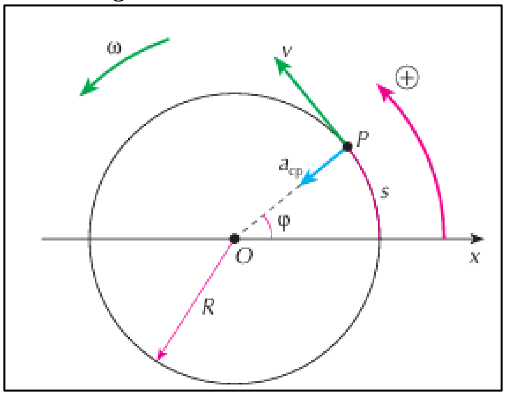
Assim, seja o ponto P em MCU na circunferência de raio R. Os espaços s são medidos na própria circunferência (figura 4.3) e os espaços angulares φ são os ângulos centrais que determinam os arcos s. O ponto descreve a circunferência com velocidade escalar v e velocidade angular ω; a aceleração centrípeta a é orientada para o centro. Se os ângulos φ estão em radianos, temos:

$$s = \varphi R \qquad v = \omega R \qquad a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Considere que no instante inicial $t = 0$, o espaço inicial seja s_0 (e φ_0, o espaço angular inicial), conforme figura 4.4. A função horária do MCU é:

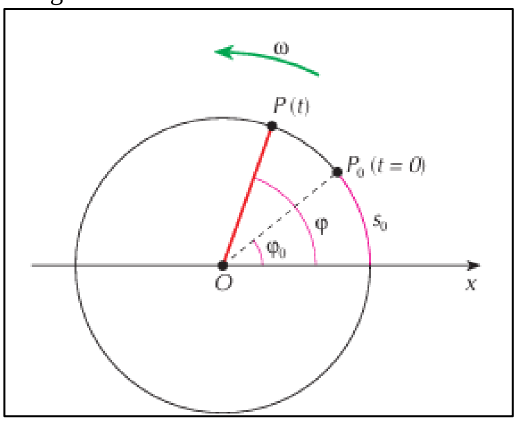
$$s = s_0 + vt \quad \text{ou} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t \text{ (na forma angular)}$$

Figura 4.3 – Ponto P em MCU



Fonte: Ramalho, 2009

Figura 4.4 – Ponto P em MCU no instante t



Fonte: Ramalho, 2009

4.4 Função horária do MHS

Seja, agora, o ponto Q a projeção ortogonal de P no eixo orientado Ox (figura 4.5). Enquanto o ponto P descreve a circunferência em MCU, o ponto Q se move num e noutro sentido do diâmetro horizontal orientado Ox. A posição de Q no eixo Ox é dada pela abscissa x, que pode ser obtida no triângulo destacado OPQ pela definição do cosseno: $x = R \cdot \cos\varphi$

Sendo $R = a$, isto é, o raio da circunferência igual à amplitude a, temos: $x = a \cdot \cos\varphi$.

O ângulo φ é o espaço angular do ponto P que realiza MCU.

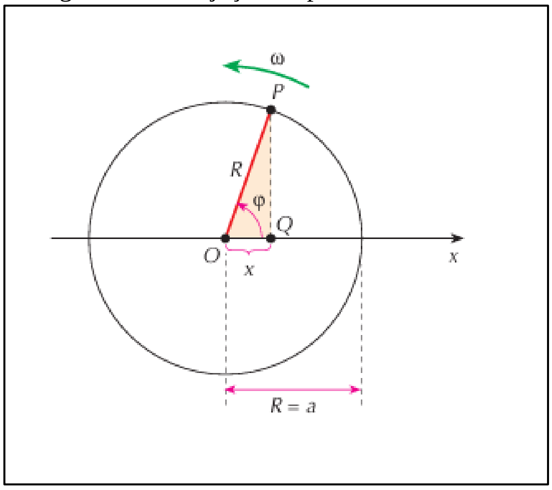
Sendo $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, resulta:

$$x = a \cdot \cos\varphi$$

$$x = a \cdot \cos(\varphi_0 + \omega t)$$

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Figura 4.5 – Projeção do ponto P no eixo Ox



Fonte: Ramalho, 2009

A abscissa x, que define a posição do ponto Q, é chamada elongação.

Enquanto P descreve um MCU, o ponto Q oscila no diâmetro com um movimento não uniforme, cuja função horária é cossenoidal. Movimentos com função horária idêntica à anterior são movimentos harmônicos simples.

Assim, P descreve a circunferência com MCU e Q oscila em torno de O com MHS. A velocidade angular ω do MCU é, no MHS, denominada pulsação ou frequência angular e expressa em radianos por segundo (rad/s). O período T do MCU é o mesmo do MHS, pois a cada volta completa de P na circunferência corresponde a uma oscilação completa de Q no diâmetro horizontal. Podemos, então, escrever:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ou } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Analisando cada um dos parâmetros da função, matematicamente, segue que:

A função oscila verticalmente entre -$|a|$e $|a|$. Quanto à frequência angular, representada por ω, tem a função de alterar a rapidez da oscilação. Graficamente, isso significa que quanto maior for o valor de ω, mais comprimida é a onda. Já φ_0, que fisicamente representa a fase da função, na representação gráfica indica o deslocamento horizontal no eixo x. Ou seja:

Se $\varphi_0 > 0$, o deslocamento será para a esquerda. Se $\varphi_0 < 0$, o deslocamento será para a direita.

4.5 Função da velocidade escalar do MHS

A velocidade de Q em MHS pode ser obtida a partir da velocidade de P em MCU (figura 4.6). No triângulo destacado ABP da figura 4.6, a velocidade v de Q é a projeção da velocidade do ponto $P(v_p)$ no eixo Ox. Como o sentido dessa velocidade é contrário ao sentido positivo de Ox, acrescentamos o sinal negativo.

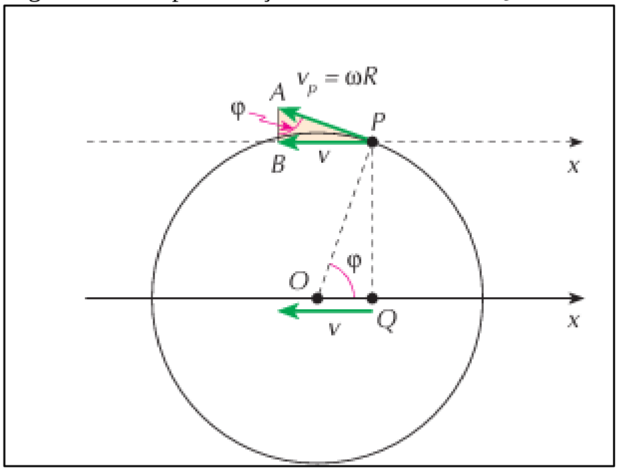
$$v = -v_p \cdot \sin\varphi$$

Com $v_p = \omega \cdot R$ ou $v_p = \omega \cdot a$ e $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, obtemos:

$$v = -\omega a \cdot \sin(\varphi_0 + \omega t)$$

$$v = -\omega a \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Figura 4.6 – Representação da velocidade de Q em MHS



Fonte: Ramalho, 2009

Quando o ponto Q passa pela posição de equilíbrio O, podemos ter:

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad (figura 4.7); como ($\sin\frac{\pi}{2} = 1$), vem:

$$V = -\omega \cdot a$$

- $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ rad (figura 4.8); como ($\sin\frac{3\pi}{2} = -1$), vem:

$$V = \omega \cdot a$$

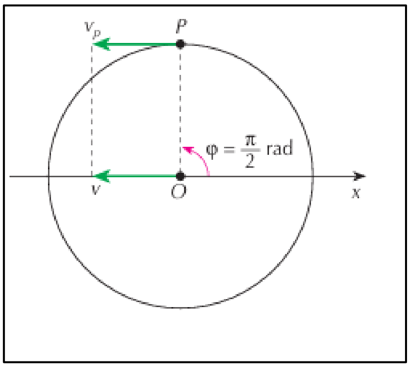
Portanto, em O, a velocidade escalar assume os valores:

$$V = \pm\,\omega \cdot a$$

Na posição O, o módulo da velocidade é máximo:

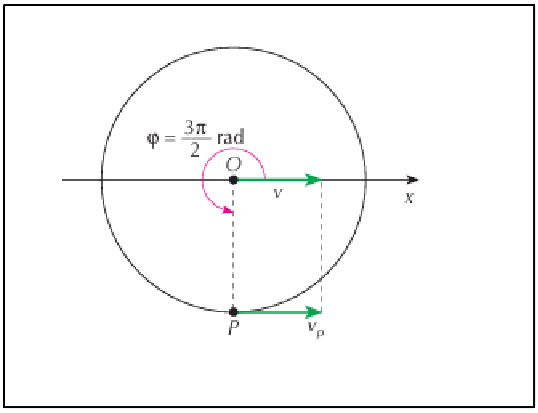
$$|v| = \omega \cdot \mathrm{a}$$

Figura 4.7 – Ponto Q na posição de equilíbrio O, sendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad



Fonte: Ramalho, 2009

Figura 4.8 – Ponto Q na posição de equilíbrio O, sendo $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ rad



Fonte: Ramalho, 2009

5 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este item tem o objetivo de sugerir uma sequência didática que visa aplicar o conceito de funções trigonométricas, utilizando o estudo de MHS para compreender a função horária e da velocidade de um objeto que percorre uma trajetória circular. Para o desenvolvimento deste trabalho, foi tomado como base o livro de Ramalho, Nicolau e Toledo, intitulado Os fundamentos da física: volume 2 e Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica, de Halliday, Resnick e Walker.

A sequência será constituída de cinco momentos:

- Questionário investigativo – 1 aula
- Conceito de movimentos periódicos e MHS – 2 aulas
- Dedução da função horária de um objeto em MHS – 2 aulas
- Dedução da função da velocidade escalar do MHS e atividade para reforçar o que foi abordado – 2 aulas
- Discussão dos resultados e avaliação final – 2 aulas

OBJETIVOS

Objetivo Geral

Proporcionar aos alunos do Ensino Médio uma compreensão mais ampla e prática das aplicações de funções trigonométricas, mais precisamente no estudo de MHS, com o intuito de promover a interdisciplinaridade entre a matemática e a física.

Objetivos Específicos

- Compreender o conceito de movimentos periódicos e de situações em que o mesmo se faz presente, além de caracterizar tal movimento e as grandezas envolvidas no mesmo;
- Reconhecer os sistemas que realizam MHS, bem como estabelecer relações com o MCU quando o objeto estiver descrevendo uma trajetória circular;
- Relacionar as equações que descrevem a posição e a velocidade de um objeto em MHS, com as suas respectivas funções trigonométricas;

- Associar as equações de posição e velocidade com suas respectivas representações gráficas;
- Fomentar a discussão e a troca de conhecimentos e habilidades entre os alunos durante a exposição das aulas, promovendo, assim, um aprendizado mútuo e conjunto;
- Solucionar situações problema sobre MHS.

Conteúdo trabalhado: Movimentos periódicos e MHS
Público-alvo: Alunos do Ensino Médio
Tempo estimado: 9 aulas
Material: Questionário investigativo, quadro de acrílico, pincéis, data-show, lista de exercícios contextualizada.

Desenvolvimento:

1ª Aula:

Primeiramente, será solicitado aos alunos que respondam um questionário, cuja função, é servir de base e suporte para o desenvolver de todo o trabalho seguinte. E a partir dele, já teremos uma ideia dos seus conhecimentos prévios sobre funções trigonométricas e suas particularidades.

QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO

01- Você já viu ou ouviu falar de funções trigonométricas sendo usadas fora da matemática? Onde?

____

____

02- Você consegue pensar em algum fenômeno físico que possa ser descrito por funções trigonométricas?

____

____

03- Definimos como função periódica:

a) Uma função que cresce indefinidamente conforme o tempo aumenta.

b) Uma função que assume sempre valores positivos.

c) Uma função que possui um valor máximo constante.

d) Uma função cujos valores se repetem em intervalos regulares.

e) Uma função que tem domínio finito.

04- Qual das funções abaixo é periódica?

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = lnx$

d) $f(x) = \cos x$

05- Qual a diferença entre as funções seno e cosseno? Elas possuem o mesmo gráfico?

____

____

06- Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cdot \cos(kt)$, em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função *P(t)* obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

a) $\mathrm{P(t)} = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $\mathrm{P(t)} = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $\mathrm{P(t)} = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $\mathrm{P(t)} = 99 + 21\cos(t)$

e) $\mathrm{P(t)} = 78 + 42\cos(t)$

2ª e 3ª Aula:

Após a aplicação do questionário, será feita uma análise das informações obtidas para identificar as possíveis dificuldades dos alunos, bem como dos conceitos que foram até então consolidados por eles. Assim, partindo dos conhecimetos prévios da turma e reforçando conceitos essenciais, a aula poderá ser organizada em dois momentos.

1º Momento:

Nesse instante, será bastante relevante fazer um comentário e discussão de alguns tópicos do questionário, com o objetivo de reforçar e valorizar o conhecimento já adquirido dos alunos sobre o tema. Cabe aqui promover uma participação ampla da turma, exigindo que exponham suas opiniões, dúvidas e, assim, o professor possa promover uma abordagem mais direcionada.

Esse instante inicial deve ser cuidadosamente observado, afim de que o professor possa identificar as dificuldades iniciais acerca do assunto e, dessa forma, recorrer aos problemas do questionário para solucioná-lo e erradicar qualquer dúvida. Caso os alunos demonstrem uma maior dificuldade no último problema, visto que os alunos devem dispor de uma maior habilidade para solucioná-lo, o mesmo deverá discuti-lo de maneira mais minuciosa e clara.

2º Momento:

Inicialmente, será definido o que são movimentos periódicos, de forma a estimular a curiosidade dos alunos e citando exemplos por meio de imagens para facilitar a compreensão dos mesmos. Mostrando, assim, que tais situações estão muito presentes no cotidianos deles. Após esse primeiro instante, se dará a definição de período com o auxílio da representação do movimeto de um pêndulo, para o aluno compreender visualmente tal situação.

Na sequência, será apresentado outro exemplo visual para fixar a ideia de movimento periódico. Nesse caso, o professor poderá utilizar a imagem de um oscilador harmônico, no qual um bloco está preso a uma mola. Faz-se necessário aqui, destacar todos os elementos e condições essenciais para que tal movimento seja periódico. É necessário explorar ao máximo a imagem.

Além disso, será apresentado aos alunos as grandezas fundamentais para o estudo de tais conceitos, que são período e frequência e como ambas se relacionam.

Por fim, será definido o conceito de MHS com o auxílo de uma imagem que representa uma esfera presa a uma mola, cujo movimento também é periódico.

Objetivos e avaliação

O objetivo fundamental dessas aulas é abordar os conceitos chave de movimentos periódicos e MHS, afim de que o aluno possa identificar tal movimento em qualquer situação do dia a dia, bem como interpretar representações como as exemplificadas.

A avaliação se dará durante todo o processo da abordagem, levando em conta todas as colocações e inferências dos alunos.

Ao término da aula, espera-se que os alunos estejam mais familiarizados com os conceitos e termos expostos, bem como possam compreender e lidar com quaisquer representações em MHS, para que, assim, o seguimento da sequência didática possa ser assimilado em sua totalidade.

4ª e 5ª Aula

Após a abordagem do conceito de movimentos periódicos, será possível associar o MHS com o movimento circular, possibilitando assim a obtenção das equações cinemáticas do MHS. Para isso, pode-se fazer uso das imagens representadas pelas figuras 4.3 e 4.4.

Faz-se necessário explorar ao máximo as figuras, afim de promover uma compreensão precisa de todos os elementos envolvidos, bem como distinguir a velocidade escalar da angular e relacioná-las.

Por fim, através da figura 4.5, deduzir a função horária do MHS por meio da projeção do ponto P sobre o eixo das abscissas e, dessa forma, utilizando razões trigonométricas, obter a função desejada. Nesse momento, é oportuno já fazer a associação com a função trigonométrica correspondente e destacar os elementos que a constituem.

É interessante que o professor explore ao máximo dos alunos a associação da função horária obtida com as funções trigonométricas, bem como sua representação gráfica. A avaliação se dará durante toda a abordagem, levando em conta a participação da turma e a observação durante cada tópico apresentado.

6ª e 7ª aula

Agora, recorrendo à figura 4.6, é possível demonstrar a função da velocidade escalar do MHS. Aqui, cabe ao professor destacar bem a relação que existe entre os triângulos destacados na figura e, assim, também por meio das razões trigonométricas, obter a função da velocidade.

Verificar também com os alunos a representação da função velocidade quando o ponto Q (projeção de P sobre o eixo das abscissas) passa pela posição de equilíbrio O (centro da circunferência) e definir quando que o módulo da velocidade do ponto P é máximo.

A partir da obtenção da função da velocidade, questionar aos alunos com que função ela se assemelha, identificar e nomear os elementos que a compõem, bem como representar seu gráfico no plano cartesiano.

A partir desses questionamentos e discussões com a turma, os alunos podem obter diferentes pontos de vistas e construir novas compreensões, tornando o aprendizado mais significativo e fornecendo autonomia para mensurar, construir, analisar e argumentar sobre o tema, e também sobre situações reais em que o conhecimento se faz presente.

Dessa forma, esse momento se fará oportuno para o professor identificar e ajustar algumas lacunas sobre a abordagem do tema, possibilitando, assim, uma melhor e mais ampla abordagem pedagógica, e que venha atender às necessidades dos alunos.

A avaliação nessa etapa ocorrerá de maneira contínua, observando todas as etapas da abordagem e exposição do tema, bem como a colocação, inferências e discussões com a turma. Além disso, será analisado a dedicação e empenho dos alunos na resolução da atividade, levando em conta as habilidades e competências utilizadas no momento que estiverem solucionando-a.

ATIVIDADE

01- O que é um movimento periódico?

___

___

02- Um ponto material realiza um MHS sobre um eixo Ox, sendo sua função horária dada por:

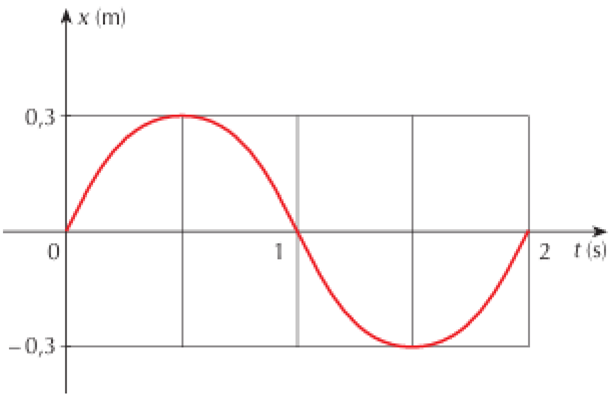
$$x = 0{,}2\cos(\pi t + \frac{3\pi}{2})$$

para x em metros e t em segundos. Determine:

a) a amplitude, a pulsação, a fase inicial e o período do movimento;

b) a função da velocidade escalar.

03- A elongação de uma partícula em MHS varia com o tempo segundo o gráfico abaixo.

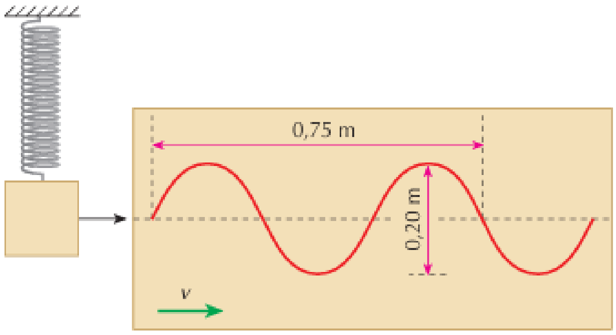


Determine:

a) a amplitude, o período e a pulsação do movimento;

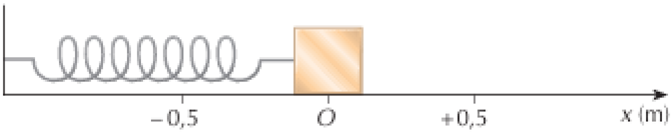
b) a função horária do movimento.

04- Um corpo de massa $2kg$ oscila livremente, suspenso a uma mola helicoidal de massa desprezível. As posições ocupadas pelo corpo são registradas por meio de um estilete preso a ele em uma fita de papel vertical, que se desloca horizontalmente, com velocidade constante $v = 0{,}20\ m/s$.



Nessas condições, qual a frequência e a amplitude do movimento do corpo?

05- Na figura representam-se os pontos de inversão do MHS que um bloco realiza. O período do movimento é 2 s.



Qual a amplitude, a pulsação do movimento e a velocidade escalar máxima do bloco?

8ª e 9ª aula

Numa sequência didática, a análise de resultados e avaliação final são aspectos bastante importantes para que o professor possa, de fato, mensurar o que foi consolidado pelos alunos sobre o conhecimento trabalhado durante todo o processo. Durante esse momento, será priorizado os resultados obtidos durante as atividades propostas, bem como as discussões feitas.

Primeiramente, serão analisadas e discutidas as respostas do questionário utilizado no início da aula. Esse momento tem a finalidade de verificar os conhecimentos que os alunos já possuem, bem como identificar as deficiências e, a partir delas, estabelecer definições e esclarecimentos mais precisos para não comprometer o seguimento da sequência didática e, assim, os alunos não venham a ampliar tais dificuldades.

A partir dessa análise, será feita uma discussão conjunta com a turma, visando o grau de importância de tal estudo e de sua presença no contexto diário. Dessa forma, o professor estará incentivando a participação dos alunos e despertando interesse pelo objeto de estudo. Além de instigá-los a compartilhar seus conhecimentos e saberes, promovendo, assim, uma discussão bastante ampla.

A avaliação final terá papel essencial para verificar a compreensão dos alunos acerca do conteúdo desenvolvido. Terá ainda a função de determinar a forma como os conceitos foram assimilados, bem como identificar as dificuldades e lacunas que ainda perduram e, em suma, verificar o progresso individual de cada docente.

Dessa maneira, essa etapa do processo fornece suporte ao professor para planejar suas próximas ações, rever métodos ou aprofundar alguns tópicos que não ficaram claros. E, por fim, promover uma reflexão e análise de todo o processo que se desenvolveu, com o objetivo de aprimorar ainda mais sua prática docente.

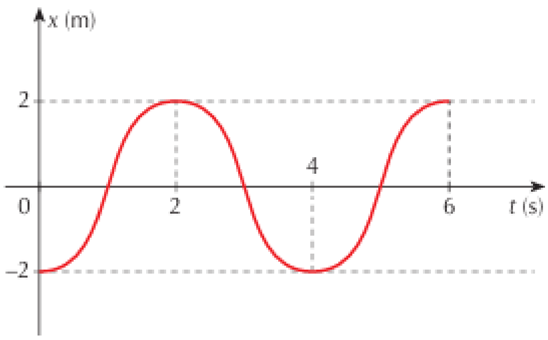
ATIVIDADE FINAL

01- Um pêndulo possui oscilações com movimentos regulares. Que tipo de função Matemática melhor representa esse movimento? Por quê?

___

___

02- O gráfico abaixo mostra a elongação em função do tempo para um movimento harmônico simples.



A alternativa que contém a equação horária cor respondente, no SI, é:

a) $x = 4 \cdot \cos\ [(\frac{3\pi}{2}) \cdot t + \pi\ ]$

b) $x = 4 \cdot \cos\ [(\frac{\pi}{2}) \cdot t + \frac{3\pi}{2}\ ]$

c) $x = 2 \cdot \cos \pi t$

d) $x = 2 \cdot \cos\ [(\frac{\pi}{2}) \cdot t + \pi\,]$

e) $x = 2 \cdot \cos\ [\pi t + \frac{\pi}{2}\,]$

03- Um corpo realiza um movimento harmônico simples descrito pela equação:

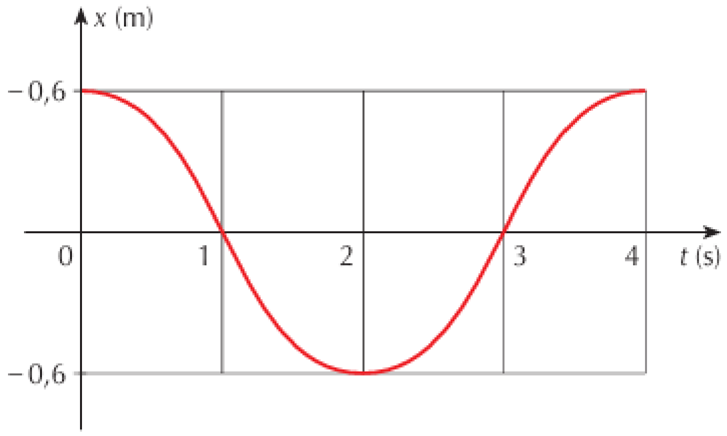
$$x(t) = 5\cos(2\pi t).$$

Onde $x(t)$ está em centímetros e t em segundos. Nessas condições:

a) Qual é a amplitude, o período e a frequência desse movimento?

b) Em que posição o corpo estará no instante $t = 0{,}25\ s$?

04- A elongação x de um ponto material em MHS varia com o tempo segundo o gráfico a seguir.



Observando o gráfico, determine a amplitude, a pulsação e a velocidade escalar máxima do ponto material.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

São inúmeras as adversidades que os professores enfrentam no ensino da Matemática. Nota-se que o estudo das funções seno e cosseno geram uma resistência e desinteresse muito grande pelos alunos, seja pela sua complexidade ou até mesmo pela forma como ela é trabalhada, visto que não há o foco de sua aplicabilidade no dia a dia.

Fazer essa associação entre áreas distintas é fundamental para tornar a Matemática mais atrativa e demonstrar ao aluno que ela é essencial para modelar problemas, representar situações e constatar fatos.

Este trabalho tem o objetivo de dar um maior suporte ao professor, no qual ele poderá explorar os conceitos apresentados por meio de uma sequência didática objetiva, prática. E dessa maneira, o ensino das funções poderá ser visualizado como um recurso capaz de modelar fenômenos periódicos e, assim, despertar uma maior curiosidade nos estudantes.

Assim, a prática docente será bastante enriquecedora do ponto de vista interdisciplinar, já que a proposta dessa sequência didática é justamente promover a relação entre as duas ciências e gerar uma abordagem mais enriquecedora, no aspecto científico e pedagógico.

REFERÊNCIAS

AZAMBUJA, Monique Teixeira de. *O uso do cotidiano para o ensino de Matemática em uma escola de Caçapava do Sul*. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Exatas) – Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Caçapava do Sul, 2013.

BENEVIDES, Fabrício Siqueira. *Material teórico – Redução ao primeiro quadrante e funções trigonométricas: paridade das funções seno e cosseno.* Revisão: Antonio Caminha M. Neto. Portal da Matemática OBMEP, 16 fev. 2019. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br. Acesso em: 01 out. 2025.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2006.

CABRAL, Natanael Freitas. *Sequências didáticas: estrutura e elaboração*. Belém, PA: SBEM-PA, 2017.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 2.

IEZZI, Gelson. *Matemática elementar: trigonometria*. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 3.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *A Matemática do ensino médio*: *volume 1*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais.* Coleção PROFMAT. 1a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

MAGALHÃES, Ricardo Sérgio Medeiros. *Aplicações da trigonometria ao ensino de ondulatória utilizando o GeoGebra*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, São Luís, 2018.

MENDES, Iran Abreu. *Tendências Metodológicas no Ensino de Matemática*. Belém PA: Editora da UFPA, 2008.

PAIVA, Manoel; PAIVA, Ewerton; PAIVA, Beto. *Matemática Paiva: volume II*. 2. ed. São Paulo: Moderna Plus, 2024. v. 2.

PAIVA, Manoel Rodrigues; *Matemática Paiva 2*. ed. 1. São Paulo: Moderna, 2009.

PIETROCOLA, Maurício. A Matemática como estruturante do conhecimento físico. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 19, n. 1, p. 93-114, 2002.

PINHEIRO, Teresinha de Fátima; PIETROCOLA, Maurício; ALVES FILHO, José de Pinho. Modelização de variáveis: uma maneira de caracterizar o papel estruturador da

Matemática no conhecimento científico. *In*: PIETROCOLA, Maurício (Org.). *Ensino de Física*: *conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora.* Florianópolis: UFSC, 2001. p. 33-52.

RAMALHO, Fernando; NICOLAU, Antônio; TOLEDO, Paulo. *Os fundamentos da física: volume 2*. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Souto de (Orgs.). *Análise de Fourier*: *um livro colaborativo*. Porto Alegre: UFRGS, 2022.

ZABALA, Antoni. *A prática educativa: como ensinar*. Tradução de Ernani F. da Rosa. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.