UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARIA IARA BRITO E SILVA

INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO NEGATIVO: UMA PROPOSTA DE TAREFAS NO CONTEXTO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

TERESINA – PI
2025

MARIA IARA BRITO E SILVA

INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO NEGATIVO: UMA PROPOSTA DE TAREFAS NO CONTEXTO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Piauí (UESPI), como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa.
Coorientador: Prof. Me. Lucas Vieira Lemos.

TERESINA – PI

2025

S586 Silva, Maria Iara Brito e.
Introdução do conceito de número negativo: uma proposta de tarefas no contexto do ensino desenvolvimental / Maria Iara Brito e Silva. - 2025.
95f.

Dissertação (mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Estadual do Piauí, 2025.
"Orientação: Prof.ª Dr.ª Valdirene Gomes de Sousa".
"Coorientação: Prf. Me. Lucas Vieira Lemos".

1. Ensino Desenvolvimental. 2. Número Negativo. 3. Atividade de Ensino. 4. Atividade de Estudo. I. Sousa, Valdirene Gomes de . II. Lemos, Lucas Vieira . III. Título.

CDD 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
ANA ANGELICA PEREIRA TEIXEIRA (Bibliotecário) CRB-3ª/1217

MARIA IARA BRITO E SILVA

INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO NEGATIVO: UMA PROPOSTA DE TAREFAS NO CONTEXTO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Estadual do Piauí como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Defesa em: 30/09/2025

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
VALDIRENE GOMES DE SOUSA
Data: 21/10/2025 21:22:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa - Orientadora
PROFMAT/UESPI

gov.br Documento assinado digitalmente
ELOIR FATIMA MONDARDO CARDOSO
Data: 23/10/2025 09:14:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Eloir Fátima Mondardo Cardoso – Examinadora Externa
UNESC/SC

gov.br Documento assinado digitalmente
ARNALDO SILVA BRITO
Data: 23/10/2025 10:12:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Examinador Interno
PROFMAT/UESPI

Dedico esse trabalho a Deus e a minha família, em especial minha mãe, que foram o suporte nos momentos que mais precisei e acreditaram na concretização desse momento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, que em sua infinita bondade, me encorajou e me ajudou em cada passo até aqui. E a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para esse estudo.

A minha orientadora, professora Dra. Valdirene Gomes de Sousa;

Ao meu co-orientador, professor Me. Lucas Vieira Lemos;

Aos professores membros da banca, Dra. Eloir Fátima Mondardo, Dr. Arnaldo Silva Brito e Dr. Afonso Noberto da Silva;

Aos professores e funcionários do programa de pós graduação;

A minha família, meu pai João Tudes e Silva Neto, mãe Leonisa de Sousa Brito, irmão Francisco Eliomar Brito e Silva, irmã Benedita Eliomara Brito e Silva e sobrinho Miguel Eliomar Araújo e Silva;

Aos meus amigos e colegas de mestrado, Flávio, Aristofanes, Alexsandro, Itaércio, Antonio Neto e Helinalda.

Aos meus amigos, Antonia Alves, Valéria Lopes, Geovane Silva e Simone Ribeiro;

Aos integrantes do GEHFOP/UESPI - Grupo de Estudos e Pesquisas Histórico-Culturais em Formação de Professores e Práticas Pedagógicas;

A Universidade Estadual do Piauí (UESPI);

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro para a realização da pesquisa em forma de bolsa de estudos.

Ao ensino orientado cabe produzir na criança novas formações psíquicas, isto é, produzir novas necessidades e motivos que irão paulatinamente modificando a atividade principal dos alunos e reestruturando os processos psíquicos particulares. (Davídov, 1988).

RESUMO

O presente estudo teve como objetivo analisar, à luz da proposta do Ensino Desenvolvimental (sistema Elkonin-Davídov), possibilidades de organização do ensino de número inteiro negativo com base em tarefas propostas que possibilitem avanços quanto a tentativas de superação daquelas reconhecidamente tradicionais. Entende-se que esse conceito matemático, introduzido formalmente no sétimo ano do Ensino Fundamental, constitui um conceito complexo para alunos e professores, o que exige a transição do pensamento empírico para o pensamento teórico, condição indispensável para o avanço em conceitos posteriores. Como metodologia, utilizou-se a pesquisa qualitativa, na modalidade bibliográfica, fundamentada em autores, dentre os quais Vigotski (2001; 2014), Davídov (1982; 1987; 1988), Búrigo (2015), Freitas (2016) e Búrigo e Damazio (2016). Essa opção permitiu reunir diferentes perspectivas sobre a organização do ensino, com ênfase na atividade de ensino e de estudo, no papel da escola e da formação docente, bem como nos limites de abordagens pedagógicas que, apesar de difundidas como inovadoras, muitas vezes não favorecem a apropriação efetiva do conceito de número negativo. Os resultados da análise indicaram que a predominância de exemplos cotidianos e fragmentados conduz a uma aprendizagem restrita e superficial, o que dificulta o desenvolvimento do raciocínio matemático abstrato. Destacou-se ainda a influência das escolhas curriculares, da formação docente e dos materiais didáticos manipuláveis na manutenção dessas dificuldades. Conclui-se que o objetivo foi alcançado, ao problematizar o ensino de número negativo, apontar a necessidade de propostas que inter-relacionem, no contexto da atividade de ensino, situações concretas à sistematização teórica e a elaboração de tarefas particulares que podem auxiliar na introdução desse conceito. Como limitação, ressalta-se a ausência de investigação empírica na proposta de tarefas, o que sugere pesquisas futuras de natureza prática que testem, em sala de aula, a eficácia dessas tarefas e a capacidade em promover aprendizagem.

Palavras-chave: Ensino Desenvolvimental; número negativo; atividade de ensino; atividade de estudo.

ABSTRACT

The present study aimed to analyze, in light of the Developmental Teaching proposal (Elkonin-Davídov system), possibilities of organizing the teaching of negative integers based on proposed tasks that enable advances in attempts to overcome those recognized as traditional. It is understood that this mathematical concept, formally introduced in the seventh year of Elementary School, constitutes a complex concept for students and teachers, which requires the transition from empirical thinking to theoretical thinking, an indispensable condition for progress in later content. As a methodology, qualitative research was used, in the bibliographic modality, based on authors, among which Vygotsky (2001; 2014), Davídov (1982; 1987; 1988), Búrigo (2015), Freitas (2016) and Búrigo and Damazio (2016). This option allowed us to bring together different perspectives on the organization of teaching, with an emphasis on teaching and study activities, the role of schools and teacher training, as well as the limits of pedagogical approaches that, despite being disseminated as innovative, often do not favor the effective appropriation of the concept of negative numbers. The results of the analysis indicated that the predominance of everyday and fragmented examples leads to restricted and superficial learning, which hinders the development of abstract mathematical reasoning. The influence of curricular choices, teacher training and manipulable teaching materials in maintaining these difficulties was also highlighted. It is concluded that the objective was achieved, by problematizing the teaching of negative numbers, pointing out the need for proposals that interrelate, in the context of teaching activity, concrete situations to theoretical systematization and the elaboration of particular tasks that can help in the introduction of this concept. As a limitation, the lack of empirical research in the proposed tasks stands out, which suggests future research of a practical nature that tests, in the classroom, the effectiveness of these tasks and their ability to promote learning.

Keywords: developmental teaching; negative number; teaching activity; study activity.

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

GEHFOP - Grupo de Estudos e Pesquisas Histórico-Culturais em Formação de Professores e Práticas Pedagógicas

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SPAECE - Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará

TCC - Trabalho de Conclusão de Curso

UESPI – Universidade Estadual do Piauí

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No processo de ensino e aprendizagem de matemática, comumente são identificadas dificuldades, por parte dos alunos e professores, em relação a muitos conceitos. A exemplo, o conceito de número negativo frequentemente é citado como um deles. Nesse cenário, a realidade vivenciada como professora, nesta área do conhecimento, nos permite observar relatos, tanto dos nossos pares quanto da parte dos alunos, que reiteram, ano após ano, o enfrentamento das dificuldades em relação à compreensão desse objeto de conhecimento. Diante disso, entendemos que essa é uma questão que, além de ter implicações diretas no percurso escolar do estudante, também nos revela que "isso decorre de dificuldades que têm permeado essa área do conhecimento, que nega a muitos estudantes a possibilidade de apropriação de seus conceitos em um nível que ultrapassa o saber cotidiano" (Sousa; Damazio, 2025, p. 2).

Com base nessa compreensão, buscamos neste estudo uma discussão que objetiva a superação de correntes teóricas, que, aparentemente, se apresentam como proposta de avanço na educação escolar, dentre elas, o construtivismo. No entanto, tais correntes têm direcionado o trabalho docente para uma perspectiva de esvaziamento do conceito na prática pedagógica pelo excesso de abstrações (Duarte, 2004). Um exemplo nítido é o ensino de número negativo, introduzido no 7º ano do Ensino Fundamental. Esse é um momento marcante na vida estudantil, pois trata-se de um conceito considerado "totalmente novo", ou seja, os alunos tomam conhecimento da existência de novos números, além dos positivos e do zero, que compõem o conjunto dos números naturais.

Nesse contexto, nos deparamos com algumas inquietações que divergem de certezas até então consideradas e que, de certa forma, ainda regem o nosso fazer docente. Dito de outro modo, a nossa compreensão se orienta na ideia de que mesmo reconhecendo que esse contato inicial com o conceito é relevante, o que ainda está em jogo é: mas como fazer esse contato? Isso se justifica, pois, a partir desse momento, o estudante necessita desse conhecimento como pré-requisito para a aprendizagem de outros conceitos ao longo da sua vida estudantil, a exemplo de equações e inequações, radiciação e potenciação, sistema de coordenadas cartesianas, funções e uso da reta numérica para exploração dos conjuntos numéricos. Nessa linha de pensamento, o que orienta a nossa compreensão sobre o processo de ensino e aprendizagem em matemática ainda são concepções pedagógicas intimamente ligadas aos princípios didáticos tradicionais.

Para Davídov[1] (1987, p. 145-146), em referência a tais princípios, “[...] Eles se converteram no alfa e ômega do pensamento pedagógico e nos parecem completamente naturais e plenos de sentido comum”. Diante disso, o autor complementa: “Quem negará a necessidade da “sucessão” no ensino ou o papel da “experiência sensorial” na formação dos conceitos? [...] Há que ensinar e somente se pode ensinar ao aluno aquilo que lhe é ‘acessível’”. No bojo da discussão, de modo a contrapô-los, questiona: “Entretanto, aqui surge uma dúvida: que sabedoria contém estes princípios se eles são a expressão de ideias tão triviais?”

Tecidas essas considerações, é importante destacar, ainda com base no que nos alerta Davídov (1988), de que todo ensino escolar desenvolve as capacidades intelectuais dos estudantes, dando-lhes conhecimentos calculados que definirá um tipo de pensamento. Tal afirmativa, o encaminha a questões que se encontram centrais em sua discussão, dentre as quais, aquela que busca esclarecer: para que tipo de pensamento – empírico ou teórico – a escola tradicional, atualmente, está organizada?

Nessa direção, coadunamos com Candiotto, Spacek e Cardoso (2021), ao afirmarem que, em geral, predomina a ideia de que, dentre os elementos que se apresentam no processo de organização do currículo escolar, especificamente em Matemática, está o modo de organização do ensino, o que implica o método (como concepção) que tem influência direta na escolha do que ensinar e nas metodologias de ensino. Assim, no sétimo ano do Ensino Fundamental, a novidade do conceito “números inteiros negativos”, somada a abordagem didática que, mesmo considerada contextualizada, predominantemente parte de exemplos isolados do cotidiano do aluno, com resoluções imediatas. Com isso, não se evidencia uma diferença qualitativa dos conceitos cotidianos em relação aos conceitos científicos. Particularmente, em relação ao conceito de número, predomina o caráter empírico em detrimento do teor científico. Por conseguinte, obstaculiza a capacidade de desenvolver o pensamento teórico e, portanto, limita-se no desenvolvimento do pensamento em nível empírico (Davídov, 1988).

A despeito desta problemática, se faz necessário contribuir com reflexões acerca das fragilidades conceituais em educação matemática apresentadas por alunos que seguem o ano letivo e chegam a outros níveis de ensino sem ter entendido, conforme exposto, o conceito em referência. Nessa direção, é oportuno pontuar aqui o processo linear que tem como ponto de partida os números naturais e perpassa, de forma fragmentada, pelos racionais, inteiros, irracionais e reais. Portanto, a proposta de ensino que rege o currículo escolar no Brasil, segue

[1] Nome do autor, cuja Teoria do Ensino Desenvolvimental se baseia em suas ideias. No decorrer deste trabalho, esse nome pode apresentar variações, a depender das obras citadas. Quando o nome do estudioso não estiver relacionado a citações, será escrito como Davýdov.

o movimento do particular para o geral. Além disso, a base "[...] no ensino de cada campo numérico são situações do dia-a-dia dos estudantes, da realidade imediata em que são utilizados tais conceitos" (Rosa, 2012, p. 26). Diante disso, nos questionamos: Quais as implicações de tais dificuldades conceituais para os alunos, à medida que seguem em outros níveis de ensino, se apresentamos esses "novos" números e suas respectivas localizações na reta numérica? Como, em geral, as escolas têm enfrentado tais barreiras, considerando que há uma prática comum de associá-los a situações do cotidiano vivenciado pelos alunos? Essa ação, provavelmente, se dá por entenderem que assim há garantia de aprendizagem do conceito pelos alunos. Mas se assim agem os professores, no contexto das escolas, o que justifica então as dificuldades comumente apresentadas por esses alunos com o referido conceito?

Diante do exposto, encontram-se nossas inquietações que nos levam à inter-relação com o entendimento de que, ao organizar o ensino, os professores, intencionalmente, precisam possibilitar o desenvolvimento do pensamento do aluno em nível mais elevado. Para tanto, entendemos que isso seja decorrente da atividade de ensino ao buscar alcançar seu principal objetivo, que é a aprendizagem. Esta compreendida por Moura (2001) como a capacidade de resolver problemas do ponto de vista matemático e da construção social do conhecimento humano. Para que isso ocorra, "a ação primeira do educador é transformar o ensino em atividade significativa. E fazer isto, é dar a oportunidade para que o aluno tome a ação de aprender como uma necessidade para integrar e ter acesso a novos conhecimentos" (Moura, 2001, p. 6).

No cenário educacional brasileiro, é possível destacar que a apresentação dos números inteiros, especificamente quando se trata dos negativos, evidencia uma transição importante na trajetória do estudo de conceitos matemáticos pelo aluno. Entretanto, em relação a tal especificidade, antes de ser apresentada aos estudantes, a organização do ensino se limita a dar conta dos Inteiros não negativos, classificados como Naturais, que têm característica mais intuitiva, como a contagem de objetos soltos e a resolução de operações básicas. O contato do estudante com os números negativos exige uma ampliação sobre o que é número e como ele se comporta, tanto em localização na reta numérica, quanto em operações. Nesse sentido, demanda um esforço que dê conta da complexidade desse conceito. Para tanto, se faz necessário que o ensino seja organizado de modo a superar a articulação de "[...] situações do cotidiano de base empírica com o teor teórico do conceito de número inteiro relativo" (Damazio, 2001 *apud* Búrigo; Damazio, 2016, p. 204). Conforme alertam Búrigo e Damazio (2016), mesmo aquelas propostas que se apresentam inovadoras, mantém sua essência em uma base conceitual empírica. Por extensão, é esse mesmo tipo de pensamento - nível empírico - que será desenvolvido nos estudantes.

Vale ressaltar que o ensino das operações com negativos é comumente associado à tabela do "jogo de sinais"[2] devido à sua aparente simplicidade de memorização. No entanto, embora parte dos alunos consiga reproduzir mecanicamente essa técnica, ainda assim, frequentemente, esses mesmos alunos apresentam dificuldades ao resolver situações propostas nas tarefas escolares, o que nos leva a refletir sobre a afirmativa de Davýdov (1982), ao criticar a escola que propõe mudança de método, mas insiste em permanecer com a essência do conceito fundamentado em uma base empírica. Como exemplo, à operação 8 – 5 = 3, se o professor acrescenta um sinal (+ 8 – 5), o aluno "parece se confundir" em conceitos, até então, aparentemente, considerados pelos professores como já consolidados, a saber: + 8 – 5 = – 3.

Consoante a essa problemática, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, o aluno aprende que 8 – 5 = 3. No entanto, com a representação do sinal mais (+) - indicativo de que o número 8 é positivo - e do sinal menos (–) - representando o número – 3 como negativo, em geral, os professores orientam o estudante a aplicar o "jogo de sinais". Este, então, infere que "mais com menos"[3] é menos e, empiricamente, conclui que o resultado da referida operação seja, portanto, negativo. Diante desse e de tantos outros cenários que a este se assemelham, se faz urgente a necessidade de lutarmos por uma escola que possibilite, a todos os estudantes, a apropriação de conceitos científicos, ou seja, como defende Davýdov (1982), a mudança se faz necessária em método e conteúdo.

Com base no exposto, é oportuno destacarmos que o uso do "jogo de sinais", ao priorizar o resultado, traz limitações ao próprio processo de apropriação conceitual. Isso nos leva a pensar que o aluno não compreende o porquê das regras, limitando-se a repetir passos por ele memorizados. Como consequência, em situações em que os sinais aparecem de forma diferente do esperado, erros são cometidos e a dificuldade em operar se potencializa. Esses casos, frequentemente, são considerados mais complexos e ocorrem, por exemplo, quando se faz necessária a interpretação dos números negativos, a exemplo de situações que envolvem funções, gráficos ou contextos financeiros.

---

[2] O jogo de sinais é uma expressão usada no ensino de Números Inteiros para efetuar as operações de números que apresentam sinais diferentes (positivos e negativos). Essa ação é feita ao realizar operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

[3] Nesse contexto, o "mais com menos" representa uma regra do jogo de sinais em uma operação entre um número positivo e um número negativo. Nas operações de multiplicação e divisão. Essa regra permite determinar se o resultado da operação será um número positivo (maior que zero) ou negativo (menor que zero). Ex.: +2 x (-3) → mais com menos é **menos**, então o resultado será um número **negativo** [+2 x (-3) = –] . Agora é só efetuar a operação, multiplicando os dois números. → 2 x 3 = 6 e ficará - 6. Alguns alunos conseguem estender essa regra para as operações que não têm multiplicação e divisão (Ex.: + 7 – 5 =), nesse caso, o "jogo de sinais", é usado por alguns alunos para compreender se deve somar os números ou subtraí-los, "mais com menos" é menos, então subtrai 7 – 5 = 2 "e coloca o sinal do maior" (o maior ao qual se referem é o número de módulo maior), no exemplo dado seria o sinal do 7, que é "+".

Dessa forma, é possível evidenciar que o conhecimento dessa regra do jogo de sinais (mais com menos é menos) é insuficiente para a realização de todas as operações envolvendo números de sinais diferentes (positivos e negativos), resultando, muitas vezes, em dificuldades na resolução de problemas envolvendo o referido conceito. Isso se dá pelo fato de não se aplicar a todas as situações, visto que em adição e subtração, a regra só vale para sinais que estão lado a lado, ou seja, um dos sinais pertence à operação (soma ou subtração) e o outro ao número (positivo ou negativo). Enquanto isso, nas operações de multiplicação e divisão, leva-se em consideração apenas os sinais dos números envolvidos nas operações.

Diante disso, é comum ouvirmos relatos de nossos pares que atuam em diferentes séries/anos da Educação Básica, sobre as dificuldades manifestadas pelos alunos ao se depararem com situações problemas, particularmente, que tratam de números negativos. Em alguns casos, nos faz parecer, à primeira vista, que os alunos compreenderam o teor conceitual apresentado, pois conseguem revelar alguns indícios de resposta correta. Porém, durante o processo de finalização do cálculo, aparecem erros conceituais relacionados às operações com esses números. Diante de situações como essa, nos questionamos: o que representam esses indícios de resposta? Será que a compreensão fica no nível daquilo que se manifesta visualmente? Como então podemos compreender os nexos essenciais do conceito? Como isso pode refletir na necessidade de operar com números negativos durante o processo de resolução de situações envolvendo, por exemplo, equações do 1º e 2º grau, expressões algébricas, operações com racionais e reais, localização de números racionais na reta, dentre outros?

Essas dificuldades podem ser percebidas ainda mais evidentemente nos resultados de avaliações de matemática elaboradas e aplicadas pelos professores, haja vista que apresentam resultados insatisfatórios. De forma extensiva a esse contexto, com frequência, lidamos também com resultados dos índices obtidos nas avaliações externas - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) -, abaixo das metas estabelecidas, tanto pela escola, quanto pelos demais órgãos gestores de educação.

Além dos dados quantitativos, o impacto dessas dificuldades também pode ser observado em aspectos qualitativos, como a postura do aluno em relação à matemática. Muitos deles apresentam desinteresse nas aulas e até mesmo aversão à disciplina, o que pode ocasionar sensação de fracasso e frustração ao lidar com conceitos que não foram assimilados. Tal sensação não se limita, entretanto, aos estudantes, pois, para muitos professores, essa situação gera inquietações que são compartilhadas em conversas durante os intervalos e reuniões pedagógicas, a saber: Como entender os resultados obtidos, se, em geral, são apresentadas situações contextualizadas, envolvendo a própria vivência dos alunos? Por que eles, comumente, não atendem às perspectivas almejadas, se as aulas buscam atender às orientações de propostas consideradas “inovadoras”? Como explicar, se mesmo após revisões e uso de diferentes abordagens, com a tentativa de simplificar o conteúdo e torná-lo acessível, a compreensão fica na superficialidade, embora o aluno expressa ter “entendido” a partir de exemplos com situações singulares?

Essas e outras indagações, frequentemente, são discutidas entre professores e a gestão escolar, incluindo a coordenação pedagógica. Como sugestão, em geral, são apontadas questões metodológicas adotadas, tanto como possíveis causas do problema como também de possíveis meios para amenizar tal problema, ou quiçá, resolvê-lo.

Como professora, no contexto diário da docência, compartilhei com meus pares essas mesmas inquietações. E, dentre tantos outros motivos, foram as angústias oriundas dessa experiência que me motivaram a ingressar no Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Piauí (UESPI). Ao cursar a disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso (TCC), para elaboração do Projeto de Pesquisa, tivemos a oportunidade de conhecer a proposta davydoviana que me possibilitou novas indagações sobre aquilo que, no momento, mais me angustiava - as dificuldades dos estudantes sobre números inteiros negativos. Esse primeiro contato foi essencial para que viéssemos aceitar o convite para participar dos estudos no Grupo de Estudos e Pesquisas Histórico-Culturais em Formação de Professores e Prática Pedagógica (GEHFOP). Com as leituras e discussões possibilitadas nesse contexto formativo, passamos a refletir e considerar a seguinte hipótese: considerando o contexto relatado, o desafio não estava apenas na dificuldade do aluno na resolução de operações que envolvem números negativos, mas também na apropriação do teor conceitual desses números.

Atualmente, também compreendemos que a organização curricular, por exemplo da Matemática, se dá subsidiada por concepções - filosófica, psicológica e pedagógica - que as orientam. Assim, nos ancoramos em Candiotto, Spacek e Cardoso (2021, p. 307) para entendermos que “A escolha de conceitos matemáticos e metodologias está intimamente ligada às concepções pedagógicas [...] de mundo, homem e sociedade [...]”. Então, se há uma tendência, na estruturação das disciplinas escolares, em trabalhar os conceitos de forma fragmentada e, portanto, que dificulta a integração desses conceitos ao longo da formação do aluno, podemos entender que as concepções da escola têm sido sustentadas pelos princípios didáticos tradicionais.

Estes, nas próprias palavras de Davídov (1987, p. 144), “[...] aseguram a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade”. Conforme explicita, tal orientação limita-se a fazeres cotidianos, ou seja, “[...] é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo em direção à realidade”. Portanto, de acordo com Davídov (1987, p. 154), na contramão do que defendem estes princípios, “[...] a escola futura, perspectiva que consiste em formar nos estudantes, [...] do fundamento do pensamento teórico como capacidade importante de uma personalidade criativa desenvolvida multilateralmente”. Por isso, é necessário um olhar mais atento ao conteúdo e método de ensino que desenvolva o pensamento, em nível que supere o empírico, e promova a autonomia do aluno. Com isso, é possível propiciar sua formação no nível mais alto de consciência, possibilitando contrapor a manutenção do *status quo*, como defende a sociedade capitalista.

Ao nos depararmos com resultados insatisfatórios e inúmeras situações em sala de aula que demonstram as dificuldades dos alunos com a compreensão de números negativos, temos ainda nos inquietado. No entanto, perspectivamos a escola do futuro, com base nos princípios do Ensino Desenvolvimental, conforme defende o autor supramencionado. Com isso, novas perguntas são geradas, que tomam outra dimensão, tais como: por que a escola persiste na defesa da sucessão no ensino, em sua estrutura curricular? Como superar a ideia de que o bom ensino é aquele que à medida em que os alunos avançam na escolaridade básica, é suficiente aumentar o volume de conhecimentos e investindo na forma de ensiná-los?

Buscamos fundamentos em Davídov (1987), para entendermos que isto pode até ser justo, mas não é suficiente, pois se faz necessário uma análise detalhada das mudanças internas do conteúdo e da forma dos conceitos. A partir dessa compreensão, o aluno seria capaz de mudar a visão que demonstra atualmente em situações semelhantes como a citada anteriormente em que o aluno interpreta erroneamente a regra “mais com menos é menos” (+ 8 – 5 = - 3, porque pela regra, “mais com menos” é menos) ao acrescentar o sinal de mais? Se sim, como poderíamos analisar então as relações dessas dificuldades enfrentadas pelos alunos? Ou ainda, como nossos pares receberiam uma proposta cuja defesa supera a questão metodológica como único fator a ser considerado para compreensão desse problema? Que tipo de pensamento a escola tem, de fato, possibilitado desenvolver no aluno? A que sociedade tal formação atende?

Diante desses questionamentos, é preciso entender as raízes dessas dificuldades, conforme nos alerta Davýdov (1982) e ratificado por Búrigo e Damazio (2016, p. 204). Nas palavras desses autores, é preciso propor “[...] uma organização de ensino totalmente distinta - tanto em método quanto em conteúdo”. O Ensino de número negativo vai além de um conceito curricular, ele representa uma etapa importante no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, o que impacta diretamente na capacidade dos estudantes de interpretar situações reais, resolver problemas e progredir nos demais níveis de ensino. Buscar superar esse é um compromisso que os professores devem ter não apenas para a melhoria do desempenho escolar, mas para a formação integral dos estudantes.

A necessidade inicial de realizar possíveis estratégias, nos levou a desenvolvermos esse trabalho que tem como objeto de estudo a organização do ensino de números inteiros negativos com vistas à aprendizagem a partir da proposta do Ensino Desenvolvimental. Com base neste objeto e na problemática exposta, delineamos o seguinte problema de pesquisa: Como redirecionar a organização do ensino de números inteiros negativos, a partir do lugar que ocupamos como professores e pesquisadores, de modo que as tarefas propostas possibilitem avanços quanto às tentativas de superação daquelas que reconhecemos como tradicionais?

Com base no esforço empreendido até aqui, tomamos como ponto de partida e de chegada para a superação da lógica tradicional de ensino a própria tarefa de estudo, como objeto de análise. Para tanto, definimos como objetivo geral: analisar, à luz da proposta do Ensino Desenvolvimental, possibilidades de organização do ensino de número inteiro negativo com base em tarefas propostas que possibilitem avanços quanto a tentativas de superação daquelas reconhecidamente tradicionais. Para tanto, elencamos os seguintes objetivos específicos: a) Identificar, na elaboração da tarefa que envolve o conceito de número negativo, elementos que se aproximam da lógica tradicional de ensino; b) Reconhecer, na elaboração e resolução de tarefa sobre o ensino de número negativo, elementos substanciais que revelam o movimento em direção à superação da lógica tradicional; c) Apresentar possibilidades de organização do ensino de número negativo, a partir do que propõe a Teoria do Ensino Desenvolvimental.

No que tange aos aspectos metodológicos, ressaltamos que neste estudo, conforme salientado, ao propormos uma análise, à luz do Ensino Desenvolvimental, sobre as possibilidades de organização do ensino de número inteiro negativo, utilizamos a pesquisa qualitativa, de natureza bibliográfica. Essa escolha se deu por entendermos que a pesquisa de abordagem qualitativa, conforme Triviños (2015, p. 130), vai “[...] além de uma visão relativamente simples, superficial, estética”. Para além disso, como complementa o autor, ela possibilita ao pesquisador investigar a fundo o seu objeto de estudo, “[...] as raízes deles, as causas de sua existência, suas relações, num quadro amplo do sujeito como ser social e histórico [...]” (Triviños, 2015, p. 130).

Sobre a escolha pela pesquisa de natureza bibliográfica, coadunamos com a compreensão de Marconi e Lakatos (2010) ao definirem esse tipo de pesquisa como não repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, neste caso número inteiro negativo, mas estudos que propiciam a sua análise sob novo enfoque e, com isso, traz possibilidades de chegar a novas conclusões.

Como produto educacional, apresentamos uma sequência didática para uso das tarefas particulares elaboradas e apresentadas neste trabalho. Essas tarefas são embasadas nas tarefas particulares proposta por Búrigo (2015) à luz do Ensino Desenvolvimental para introdução do conceito de Número Negativo com uso do conceito de deslocamento e relações entre grandezas vetoriais, relações essenciais para compreensão do conceito de número.

Para fins de organização, estruturamos este texto em cinco seções, ao incluirmos a introdução e as considerações finais. Assim, na seção introdutória, apresentamos nossa justificativa e motivos que nos encaminharam à realização da pesquisa, além do objeto de estudo, problema e objetivos que orientaram na sua operacionalização.

Na segunda seção, "Teoria Histórico-Cultural e o processo de ensino e humanização", discutimos acerca das bases epistemológicas que sustentam a referida teoria, a compreensão sobre o processo de humanização que decorre da realização de atividades, com ênfase na discussão sobre a atividade de ensino, inerente ao trabalho docente.

Na terceira seção, "Ensino de número negativo na relação com o método dialético", pontuamos os fundamentos que orientam a concepção materialista histórica e dialética sobre o homem e a realidade; o surgimento e aspectos conceituais de número negativo, bem como refletimos, com base nos fundamentos filosóficos que sustentam este estudo, sobre possibilidades de superação de obstáculos na aprendizagem de número negativo.

Na quarta seção, "Prática pedagógica e aprendizagem matemática: caminho para a Teoria do Ensino Desenvolvimental", trazemos os dados analíticos que foram produzidos com base no referencial teórico e nas tarefas particulares criadas. Assim, essa seção traz a discussão sobre a introdução ao conceito de número à luz das contribuições do Ensino Desenvolvimental, bem como discute sobre o processo ensino e aprendizagem com ênfase no conceito de número negativo, o que possibilita um mergulho epistemológico sobre a relação do motivo com o fim da atividade de estudo no contexto da prática pedagógica em matemática e, especificamente, sobre a organização do ensino a partir da criação de tarefas particulares do conceito analisado como condições criadas intencionalmente para possibilitar a introdução do referido conceito.

Na última seção, apresentamos as considerações finais do estudo, orientadas pelos objetivos a que nos propomos alcançar, e estes inter-relacionados aos fundamentos teóricos que embasaram a discussão acerca do nosso objeto de estudo, a saber, a organização do ensino de números inteiros negativos com vistas à aprendizagem a partir da proposta do Ensino Desenvolvimental.

2 TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL E O PROCESSO DE ENSINO E HUMANIZAÇÃO

Nesta seção, abordamos questões que consideramos relevantes para a compreensão do nosso objeto de estudo, a saber, a organização do ensino de números inteiros negativos com vistas à aprendizagem a partir da proposta do Ensino Desenvolvimental. Nesse sentido, trazemos alguns apontamentos e reflexões acerca das bases epistemológicas da Teoria Histórico-Cultural desenvolvida por Lev Vigotski e seus colaboradores. Para tanto, discorremos sobre o Materialismo Histórico-Dialético como meio para enfatizar a acepção do método direcionada à busca de compreensão da concepção de homem e mundo a partir dessa perspectiva. Assim, é possível resgatar as bases que vão nos possibilitar compreender a importância do meio social e da cultura no desenvolvimento da consciência e no processo de humanização, por entendermos que o método em referência sustenta as atividades humanas ancoradas na Teoria Histórico-Cultural, a exemplo da atividade de ensino. Alinhado a esse entendimento, trazemos ainda nesta seção algumas reflexões acerca da atividade do sujeito, e, particularmente, do papel da escola com destaque para a atividade de ensino, por entendermos, com base na Teoria do Ensino Desenvolvimental, que esta constitui a atividade principal do professor.

2.1 A TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL E SUAS BASES EPISTEMOLÓGICAS

Discutir acerca da Teoria Histórico-Cultural, ao mesmo tempo em que não se constitui tarefa fácil, é, sem dúvida, necessária. Primeiro, por reconhecermos a complexidade do pensamento de Lev Seminovicht Vigotski e seus colaboradores. Segundo, discutirmos suas ideias é o que nos aproxima de uma tentativa de compreensão sobre o desenvolvimento humano e, por extensão, da própria realidade em que o homem está inserido. Nesse sentido, entendemos que suas ideias nos possibilitam um olhar criterioso no campo da educação e, particularmente, da educação matemática, a que nos propomos estudar. Em outras palavras, na busca de compreensão da prática pedagógica em Matemática, a partir dessa perspectiva teórica, se faz necessário entender o homem, sua natureza, e o seu desenvolvimento dentro de contextos históricos e socioculturais. A teoria busca responder a questões sobre o que se faz necessário para o desenvolvimento do homem, como isso ocorre e quais as condições necessárias para o seu desenvolvimento, a partir de uma concepção clara de mundo e do homem, ambos essencialmente históricos.

De acordo com Vigotski (2001; 2014), o desenvolvimento humano, especialmente na infância, não pode ser compreendido como uma simples transferência de características de um adulto para uma criança. Ele defende que a criança não é um “adulto em miniatura”, mas um ser em processo de formação, com características particulares de sua fase de vida. Nesse sentido, a criança se desenvolve não apenas em relação ao seu crescimento biológico, mas esse desenvolvimento também acontece de acordo com sua inserção no mundo sociocultural e nas interações com os outros. Portanto, o desenvolvimento infantil, não é um processo uniforme e previsível ou de maneira isolada, mas se caracteriza pelas transformações individuais que ocorrem por meio da interação da criança no ambiente em que está inserida.

Consoante a essa compreensão, Vigotski e Luria (2014) explicam que o desenvolvimento da criança ocorre em um ritmo surpreendentemente rápido quando ela é integrada em um ambiente adequado. O mundo ao seu redor, que é organizado de acordo com as necessidades dos adultos, cria as condições necessárias para que a criança se desenvolva. Esse processo é, sem dúvida, essencial para que a criança se aproprie das diferentes formas de cultura, práticas e dos significados produzidos pela humanidade ao longo da história. Ao mesmo tempo, Luria (2014, p. 25) ressalta: “Mas o homem não é apenas um produto de seu ambiente, é também um agente ativo no processo de criação deste meio”.

Nesses termos, a concepção de desenvolvimento na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, nos encaminha a uma compreensão do homem “[...] naquilo que ele é e naquilo que ele pode vir a ser” (Asbahr; Nascimento, 2013, p. 419). Com isso, entendemos a relevância que tem o papel do adulto, pois é esse sujeito que busca criar as condições para que as crianças se desenvolvam no mundo que foi organizado de acordo com suas necessidades. A criança interpreta essas relações e fenômenos de acordo com seu nível de entendimento, que se modifica de acordo com seu desenvolvimento.

Conforme salientam Asbahr e Nascimento (2013), as questões educacionais são base e finalidade das investigações no campo da Teoria Histórico-Cultural, pois, para essa perspectiva, é por meio do ensino (intencional ou não) que ocorre o desenvolvimento especificamente humano. Não à toa, nas palavras de Vigotskii (2014, p. 114), “o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento”. Assim, o processo de ensino e aprendizagem deve ir além do imediato e do empírico, e deve promover a apropriação dos conhecimentos culturais e científicos, capazes de levar a criança a um nível superior de aprendizagem. Ou melhor, a escola precisa permitir a cada estudante se formar de acordo com as máximas possibilidades de desenvolvimento produzidas historicamente pela humanidade.

Vigotskii (2014) defende a ideia de que a aprendizagem na infância se dá através da mediação feita por um adulto. No contexto escolar, o professor é sujeito do processo de ensino e aprendizagem. Ele estabelece relação com a criança, organiza, intencionalmente, as condições em que se realizarão as atividades de ensino e de estudo. Portanto, são essas atividades que assumem, na relação pedagógica, o papel de mediação entre professores e alunos. Conforme afirmam Asbahr e Nascimento (2013, p. 424):

> O educador, portanto, é sujeito do processo de ensino e de aprendizagem, sujeito que organiza a atividade de ensino, esta sim, assumindo o papel de mediação entre os dois polos da relação, ou seja, buscando estabelecer a relação entre o imediato (os conhecimentos empíricos que os educandos trazem de suas vidas) e o mediato (os conhecimentos teóricos que o professor quer ensinar para os estudantes).

Com base no exposto, é possibilitado ao aluno ter acesso a práticas culturais, e essas condições, posteriormente, transformam as práticas em conhecimentos científicos e gerais. Nesse contexto, é essencial a relação entre professor e aluno, no qual o professor organiza tarefas que são mediadas por símbolos, signos e significados históricos, bem como propõe ao aluno que interprete essas tarefas e, por extensão, ocorre a apropriação dos conhecimentos científicos e gerais.

Assim, com base nos dizeres das autoras supracitadas, entendemos que o professor não pode ser visto como o mediador do processo ensino e a aprendizagem, mas como um dos polos dessa relação a ser mediada. Com isso, para que haja a aprendizagem, o professor cria intencionalmente um ambiente de ensino que possibilite ao estudante o contato com os conceitos, sem restringir-se às abordagens imediatas e experiências do cotidiano que podem limitar o processo de apropriação conceitual, em nível científico.

Esse desenvolvimento intelectual é destacado por Vigotskii (2014), através do conceito de zona de desenvolvimento real (ZDR) que trata-se do que a criança é capaz de fazer sem o intermédio de outras pessoas e a zona de desenvolvimento proximal (ZDP), que indica a diferença entre aquilo que o aluno pode fazer sozinho (zona de desenvolvimento real) e aquilo que ele pode alcançar com a ajuda do professor ou colega mais experiente) chamado de zona de desenvolvimento potencial (ZDP). Para que o ensino cumpra o seu propósito, ou seja, que ocorra a aprendizagem, o professor busca expandir a zona de desenvolvimento do aluno, conduzindo-o do nível em que ele já consegue atuar, de forma independente, para um nível de aprendizagem mais avançado, que ele não seria capaz de atingir sem apoio.

Nesse sentido, conforme sustenta Vigotskii (2014), a escola tem papel fundamental no desenvolvimento do aluno, ao organizar, por meio de mediações intencionais, as condições para que ele se aproprie dos conhecimentos que foram históricos e culturalmente acumulados pela humanidade.

2.2 O PROCESSO DE HUMANIZAÇÃO

Nascemos humanos ou nos tornamos humanos? Essa é uma pergunta que, por vezes, parece sem sentido. Como não nascemos humanos, se temos todas as características biológicas que nos definem? Para a Teoria Histórico-Cultural, porém, tais características não são suficientes para que, de fato, sejamos humanos. Em outras palavras, o que nos torna humano é o próprio desenvolvimento da consciência. A esse respeito, Leontiev (1978, p. 73) afirma que "A passagem à consciência humana, assente na passagem a formas humanas de vida e na atividade do trabalho que é social por natureza". E complementa: "No mundo animal, as leis gerais que governam as leis do desenvolvimento psíquico são as da evolução biológica; quando se chega ao homem, o psiquismo submete-se às leis do desenvolvimento sócio-histórico" (p. 73).

Portanto, não podemos ignorar aquilo a que Vigotski denomina a chave da anatomia humana, ou seja, a sua consciência. Esta se constitui na forma de expressão mais superior do psiquismo humano. Pela consciência há a compreensão do mundo social pelo homem e sua interiorização, não de forma direta, pois não se trata de copiar outras pessoas, mas de criar sua própria identidade.

Vigotski busca, nos fundamentos do materialismo histórico-dialético, as bases para explicar o desenvolvimento do homem concreto, humanizado, ou melhor, aquele que é resultado de sua relação com o mundo e, portanto, nela se constitui. Como bem definido por Marx (2011, p. 54), o homem concreto é "unidade na diversidade", é síntese da sua relação com o mundo, pois ele tem e produz história, assim como, ao mesmo tempo em que produz a realidade, produz-se a si mesmo.

Portanto, para a Teoria Histórico-Cultural, a defesa da tese de que não nascemos humanos, mas nos tornamos humanos, é ancorada na explicação de que é nas relações sociais que encontramos os meios que possibilitam ou não o nosso desenvolvimento. Nessa discussão, Vigotski apoia-se na tese marxista de que não é a consciência que determina a vida, mas a vida que determina a consciência. Com isso, ressalta que "[...] são os homens que desenvolvendo a sua produção material e as suas relações materiais mudam sua realidade, mudam também o seu pensamento e os produtos do seu pensamento" (Marx; Engels, 2002, p. 26).

Marx afirma que de acordo com a concepção materialista histórica e dialética, a construção da vida social do homem é feita por relações sociais, independentes de sua vontade, porém necessária. É através das relações de produção que são determinadas pelas condições históricas e econômicas em que vivem, a exemplo da relação patrão e empregado, que são base para uma superestrutura jurídica e política (leis, instituições políticas e formas de pensamento) o que correspondem a formas de consciência social determinadas (crenças e ideologias). Com isso, é possível entender que não é a consciência do homem que forma o seu ser, mas as relações sociais no meio em que ele está inserido é que formam a sua consciência.

A consciência e a atividade estão, portanto, intimamente ligadas, pois a consciência que se produz nessa relação homem-mundo se dá ancorada na atividade do sujeito, o que nos leva a entender que a atividade é a base material da consciência humana. Diante disso, a atividade humana tem caráter social, o que permite ao homem a compreensão do mundo social por intermédio da linguagem, necessidade e condição para o desenvolvimento social e individual, pois é através dela que há a comunicação, o compartilhamento de ideias, sentimentos e conhecimento.

Como vimos, homem e realidade não se encontram separados. O que o homem é, ou poderá vir a ser, é resultado de causas e determinações sociais e históricas. Nesse sentido, é pela atividade concretizada que os seres humanos se constituem e se desenvolvem. Diferentemente dos demais animais, o homem não se contenta com as condições a que é submetido naturalmente e busca transformar e evoluir social e intelectualmente, ou seja, seu instinto não está ligado apenas a questões de sobrevivência, mas também para sua existência cultural. Assim, na busca de satisfazer suas necessidades ele cria princípios e preceitos através de sua consciência que norteia suas ações. Nessas necessidades criadas pelo homem, de forma intencional, em sua relação com a natureza, ocorre uma transformação mútua que é tão importante quanto a sobrevivência, que deixa de ser chamada de necessidade biológica e é vista como necessidade histórico-cultural.

O homem, com o seu trabalho, consegue criar necessidades que o permite dominar a natureza através de ações criadas pela consciência, que cria ideias modificando o seu cunho psicológico, permitindo-o dominar a natureza e controlar seu comportamento. Nesse processo, o homem singular passa a fazer parte do gênero humano e ter objetivações humanas, que são características desenvolvidas e concretizadas ao longo das gerações, e, somente quando ele se apropria dessas objetivações, torna-se sujeito ativo e participante das transformações do meio em que vive.

Ao considerarmos a educação, conforme Duarte (2004), como uma das mais importantes atividades realizadas no curso da evolução humana, entendemos que as ações humanas têm nela implicações diretas. Logo, se faz necessário que, no processo pedagógico e, especificamente, na atividade de ensino, consideremos o professor o responsável pela organização do ensino e condução dessa atividade. Ao mesmo tempo, precisamos nos questionar: quais as condições que têm sido produzidas para a realização dessa atividade? Como essa atividade tem sido compreendida pelos professores? Essas e outras questões perpassam pela necessidade de refletirmos o trabalho docente, considerando sua organização e seu propósito, qual seja, que os conhecimentos desenvolvidos historicamente pela humanidade sejam apropriados pelos alunos.

Nessa perspectiva e em busca de respondermos à primeira questão desta seção – nascemos humanos ou nos tornamos humanos? – recorremos a Leontiev (1978) quando afirma que a educação é caracterizada como a principal forma de apropriação da história social humana. Para esse autor, todos nascem candidatos a se tornarem seres humanos, porém isso só acontece através da apropriação cultural que se dá quando o indivíduo entra em contato com os objetos do mundo através da relação com outros e pela comunicação.

Davídov (1988) tenta mostrar que a aprendizagem e a educação influenciam no desenvolvimento psíquico do homem. E mais, entendemos, a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, que a relação homem e mundo não é dada ou naturalizada, mas se constitui a partir de processos históricos e sociais. Por extensão, se consideramos que a consciência humana é resultado dessa relação, mediada por determinadas condições, então corroboramos da defesa de que, no coletivo, é possível pensarmos em possibilidades concretas de promoção da atividade de ensino e de estudo que garanta à aprendizagem de todos os estudantes.

2.3 A ATIVIDADE DE ENSINO

Nesta subseção, discutimos inicialmente acerca da atividade do sujeito, para, em seguida, tecermos algumas considerações sobre o papel da escola e, de modo específico, da atividade de ensino. Esta se dá embasada na Teoria do Ensino Desenvolvimental, enquanto fundamento pedagógico da Teoria Histórico-Cultural, que é primordialmente psicológica, visto que busca compreender o desenvolvimento humano e a condição da psiqué baseando-se em fatores sociais, culturais e históricos, ancorando-se na mediação cultural, na interação social e na linguagem. Dito isso, é oportuno pontuarmos que nossa discussão se dá ancorada nas ideias de teóricos, dentre os quais Vigotski (2001; 2009; 2014), Leontiev (1987; 1978) e Davídov (1982; 1988) que fundamentam a base dos pressupostos da referida abordagem.

Ao considerarmos que o ser humano se constitui e se desenvolve pela atividade que exerce, recorremos à Leontiev (1987, p. 68) para explicitar o conceito de atividade, a partir da composição de sua estrutura geral. Então, para esse autor, a atividade indica "os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo".

Como vimos, nas palavras de Leontiev (1987), não é qualquer processo que podemos considerar como atividade. Para que isso ocorra, na relação com o mundo, o homem manifesta necessidades e, por conseguinte, busca satisfazê-las por meio de uma atividade. Quando nos referimos à atividade de ensino, buscamos bases teóricas que nos ajudam a compreendê-la e que nos direcionam para a unidade dialética constituída por seus componentes externos e internos. Tal unidade, nos dizeres de Lemos e Damazio (2014, p. 2), "revela a dimensão da consciência do professor". Nesse sentido, como o professor se apropria de sua atividade?

Essa questão não diz respeito apenas à atividade de ensino. Em toda atividade humana, conforme Leontiev (1987), a consciência se forma pelas relações que se estabelecem entre os sujeitos da atividade e as finalidades historicamente desenvolvidas no coletivo, que justificam a razão da existência da atividade. Para o autor, o impulso inicial para o surgimento da atividade e, por consequência, da consciência humana, se constitui na necessidade humana. Necessidade esta que não responde mais aos instintos primitivos da espécie, mas aos impulsos da vida social que move e orienta o sujeito a agir. Assim, as necessidades e finalidades da atividade se tornam necessidade e finalidade sua, motivo que determina e impulsiona sua atuação. Quanto mais se envolve com os objetos de sua atividade, quanto mais compreende as finalidades para onde se orienta, quanto mais sentido expressa suas ações e operações, mais consciente está o sujeito sobre a atividade que realiza.

Para Sousa e Damazio (2025, p. 2), entre os defensores da Teoria Histórico-Cultural, "existe uma coesa concordância de que o saber escolar, em seu nível científico, é uma necessidade de ordem histórico-social inerente à formação humana". Nesse sentido, os estudos de Vigotski (2014) e Davídov (1982; 1988), por exemplo, foram voltados para o papel da escola, espaço formal para o desenvolvimento do conhecimento de maneira consciente. Em outras palavras, buscaram entender como o ensino pode proporcionar ao ser humano o acesso ao conhecimento científico. Para tanto, consideram que essa instituição possibilita a apropriação dos bens culturais e contribuem para o desenvolvimento psíquico. Consoante a essa compreensão, corroboramos com o pensamento de Duarte (2013, p. 9) quando afirma que “em suas relações com o social, com as objetivações humano-genéricas, o homem se apropria da cultura e o homem se constitui na história”.

Para entendermos então o papel da escola na relação homem-sociedade, recorremos mais uma vez a Sousa e Damazio (2025, p. 2). A esse respeito, os autores assim se posicionam:

> [...] a existência da escola se justifica pela possibilidade de apropriação, por parte das novas gerações, do conhecimento produzido pelo gênero humano em outras instâncias da vida social, fora dessa instituição. Para quem concebe a escola com atribuição de tal finalidade, não tem como deixar de questionar toda e qualquer forma de secundarização ou negação de seu acesso a todo e qualquer indivíduo.

Nesses termos, corroboramos com as reflexões propostas pelos referidos autores acerca do papel da escola, em termos gerais, ao mesmo tempo em que lançam um olhar crítico sobre a especificidade do ensino da matemática, o que também coaduna com a nossa área de interesse. Diante disso, apontam as dificuldades que têm se constituído a organização do ensino e aprendizagem dos conceitos científicos da matemática. Por conseguinte, acaba negando a muitos estudantes o acesso àquilo que, de fato, se constitui como papel essencial da escola: a apropriação do conhecimento em nível que supera o cotidiano.

Ainda sobre a função da escola, Paro (2001) destaca dois pontos: primeiro, a preparação para a cidadania e, segundo, possibilitar, às novas gerações, sua atualização histórica. Para o autor, como não é possível trabalhar todo o saber, faz-se necessário uma seleção do que para quem cria a matriz curricular considera como indispensável para a formação do cidadão, ou seja, aquilo que a sociedade espera em termos de preparação de um indivíduo por meio da educação formal, como aprender a ler, escrever e calcular, representando a base desse conhecimento formal. Em decorrência disso, ao longo do tempo, são discutidos a inserção e/ou exclusão de alguns conceitos da matriz curricular definidos, no Brasil, pelo Ministério da Educação (MEC) ao observar as necessidades atuais no momento da decisão.

Em vista dessa reflexão teórica, Davídov (1988) destaca alguns aspectos que nos levam a estabelecer relações com a referida discussão. Ao mesmo tempo em que entende a educação e o ensino como formas universais de desenvolvimento intelectual das crianças, ressalta que o ensino, na execução da atividade docente, pode possibilitar aos estudantes, por meio da apropriação dos conceitos científicos, o desenvolvimento das capacidades humanas que foram formadas historicamente. No entanto, como temos tratado ao longo deste estudo, os indícios de predomínio do ensino tradicional na escola, ao mesmo tempo em que subestima "[...] tanto a natureza histórica concreta das possibilidades do estudante como as ideias sobre o verdadeiro papel que a educação desempenha no seu desenvolvimento" (Damazio; Rosa; Euzébio, 2012, p. 214), revela o não cumprimento da verdadeira função social da escola. Ou seja, na realização da atividade de ensino, a seleção dos conceitos a serem aprendidos, em geral, não extrapola a condição empírico-utilitária

Portanto, ao professor cabe organizar o ensino para possibilitar aos estudantes a apropriação dos conhecimentos de todas as ciências elaboradas historicamente pela humanidade em nível que permita a eles "[...] se desenvolver em condições de entender o mundo com base teórica, em vez de empírica" (Búrigo; Damazio, 2016, p. 204). Nesses termos, na perspectiva que assumimos, entendemos que a atividade realizada pelo professor - intencional e sistemática - não se limita a promover a aquisição de objetos de conhecimento e/ou habilidades específicas, mas a possibilitar o desenvolvimento das capacidades psíquicas dos indivíduos. Nesse sentido, ela não é isolada, resumindo-se ao que é planejado, ao que tem que fazer, às tarefas para aplicar e ao que foi executado. Em outras palavras, ao garantir a presença do conhecimento em nível que supera o cotidiano, o professor favorece ao estudante a compreensão acerca de sua ação e, dessa forma, permite que, na sua atividade, motivo e objeto coincidam. Importa destacarmos que a construção do motivo de aprender, pelo estudante, é uma função que decorre da atividade de ensino, portanto, do professor (Rigon; Asbahr; Moretti, 2016). A esse respeito, ao considerar sua complexidade, é salutar afirmar que "[...] embora o professor tenha limites de atuação, criar condições para que o estudante queira aprender deve ser um dos objetivos de sua atividade de ensino" (p. 36).

Moura (2006), embasado em Leontiev, especifica que os conhecimentos das diferentes disciplinas são produtos da atividade humana que são compreendidos como a resolução de um problema humano. Então, para que haja a aprendizagem, o aluno precisa estar em atividade de estudo, encontrar um motivo e agir para alcançar seu objetivo, pois, só assim, ele participa ativamente, tornando-se sujeito da atividade.

Em síntese, na educação, a atividade de ensino e de estudo têm relação direta com as ações do professor e do aluno. O foco de uma atividade não está na tarefa, mas no sujeito da atividade e para quem a atividade é dirigida. Ela causa em cada um desses sujeitos um confronto entre si e com o outro para assim realizar o que tem que ser feito e esse confronto é a fonte do desenvolvimento do pensamento, a exemplo, dois alunos podem manifestar as mesmas ações descritivamente, porém a origem e a essência dessas ações podem diferenciá-las.

Para Davídov e Slobódchikov (1991), a atividade de estudo inicia no ingresso da criança na escola. Para tanto, o estudante precisa experimentar uma necessidade interna e uma motivação, ambos gerados no processo de apropriação de conceitos científicos. Diante disso, é essencial a organização da atividade de ensino que deve gerar necessidade nos estudantes para que eles entrem em atividade de estudo e, assim, se tornem sujeitos conscientes dessa atividade. Pois só quando o aluno é sujeito da atividade de aprendizagem, ele se apropria do conhecimento científico, gerando assim, o desenvolvimento do pensamento teórico.

No bojo dessa discussão, é oportuno pensar no processo de organização do ensino, atividade intencional realizada sob a responsabilidade do professor. No entanto, nem toda aula planejada gera, no aluno, a necessidade e o motivo para realizar a atividade de estudo, ou seja, motivo e objeto - aprendizagem - não coincidem. A esse respeito, como exemplo, importa destacarmos o que afirma Davídov (1987) sobre o ensino tradicional. O autor nos chama a atenção, ao criticar esse ensino por seus métodos utilitários e empíricos, próprios da prática cotidiana. De acordo com Davídov (1987, p. 144), esses métodos são suficientes para a realização de atividades do cotidiano, mas insuficientes para a aprendizagem, conforme afirma:

> Tal orientação é indispensável para fazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras, porém é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo face à realidade.

O autor explica que exemplos do cotidiano, empregado no ensino tradicional, são importantes quando se trata de ensino de atividades laborais, mas que não funcionam bem quando se trata da aquisição de conhecimentos científicos.

Como anunciado pelo autor, a estrutura para formação do pensamento teórico se constitui com base no conhecimento científico. Este tipo de conhecimento, objetivo principal da atividade de ensino, é o que possibilita ao aluno compreender e expressar a realidade por meio de um conceito. Em outras palavras, isso só é alcançado quando o aluno tem domínio daquele conceito, ou seja, se apropria de todos os conhecimentos sobre os objetos a que se refere o conceito.

Enquanto o pensamento empírico tem caráter externo e imediato, gerado no contexto da escola tradicional, o pensamento teórico opera com os próprios conceitos, pois eles, como afirma Davýdov (1982, p. 308-309), “reproduzem o desenvolvimento, o processo formativo do sistema, da integridade, do concreto e somente dentro desse processo revelam as peculiaridades e conexões dos objetos singulares”. Nesse sentido, entendemos que os conceitos permitem ao estudante reproduzir o objeto idealizado, considerando o seu sistema de relações, ou melhor, a sua essência. Além disso, esse tipo de pensamento está ligado à criatividade, pois possibilita que o ser humano crie novas ideias e soluções para os desafios da realidade.

Dado que o objetivo da escola é desenvolver o pensamento psíquico, sabendo que isso só é possível através do desenvolvimento do pensamento teórico, a escola precisa mudar os princípios didáticos, a exemplo, na matemática precisa mudar o ensino reprodutivo, superficial que acontece por meio da memorização mecânica, para um ensino do conhecimento científico tornando o aluno sujeito do conhecimento e isso deve ser feito, segundo Davydov, desde os primeiros anos escolares.

Em sua crítica ao ensino tradicional, Davídov (1988) discute o ensino do conceito de número e afirma que a ênfase se dá na busca de resolver um determinado tipo de problema, no qual são propostos vários problemas similares. Em geral, o aluno identifica o problema e aplica o método resolutivo que havia sido ensinado previamente. Diante disso, o pesquisador diz que há uma identificação de problema e não uma resolução, pois essa ação de recordar e reproduzir é repetitiva, de forma mecânica e não precisa de análise, o que leva à limitação do processo de desenvolvimento do pensamento.

Nessa perspectiva defendida pelo autor, e da qual corroboramos, o ser humano se desenvolve por meio das relações que estabelece com o mundo, e esse desenvolvimento acontece principalmente através do seu pensamento. Quando a pessoa interage com o mundo utilizando a matemática como uma ferramenta para organizar e estruturar seu raciocínio, ela não apenas aprende matemática, mas também aprimora suas habilidades intelectuais. Ou seja, o uso do conhecimento matemático ajuda a expandir a forma como a pessoa pensa, raciocina e resolve problemas, contribuindo para seu crescimento cognitivo e intelectual.

Com isso, Davydov (1999) afirma que o desenvolvimento da potencialidade do indivíduo se dá pela apropriação dos conhecimentos teóricos matemáticos que acontece por inter-relações do externo com o interno, totalidade, aparência e essência, original e derivado, com isso, entendemos que o pensamento da criança deve partir da observação das aparências para a detecção de características de identidade ou similaridade.

Porém, a estratégia de ensino pelos princípios que regem o ensino tradicional não busca essas inter-relações. A exemplo, temos o conceito de número que é comumente ensinado às crianças, desde a pré-escola, expondo-as a uma quantidade de objetos. Elas devem observar a quantidade de objeto do mesmo conjunto e caracterizar aquele conjunto por meio do uso de signo numérico ou palavra numérica. Assim, formam conceitos em nível empírico, sem relações abstratas, uma condição importante para começar o domínio da matemática (Davýdov, 1982).

O pesquisador também destaca que esta forma de ensino não traz conhecimento novo e trata-se apenas da repetição de algo que já foi ensinado fora da escola. No entanto, ressalta que o papel da escola é ensinar o novo, ou seja, ensinar conceitos baseados no conhecimento científico.

Para organizar o ensino, Davýdov diz que deve partir de teses gerais que busquem a essência do conceito e não situações particulares, como o que é visto no ensino tradicional. Portanto, o modelo de organização do ensino sugerido por Davýdov, com base nos fundamentos psicológicos orientadores da Teoria Histórico-Cultural, ao propor que o ensino do conceito de número seja feito de cima para baixo, dos reais para os naturais; e não da forma que é habitualmente feita, no qual cada conjunto numérico é inserido no plano curricular em diferentes etapas, iniciadas pelos naturais e finalizada pelos irracionais e reais.

No ensino tradicional, em séries iniciais, são apresentados às crianças o conceito de números naturais, primeiramente relacionado à contagem de objetos. Depois, elas aprenderão a efetuar as operações e, ao longo dos anos, passam a conhecer os conjuntos numéricos mais abrangentes, como: racionais positivos. Anos depois, no 7º ano do Ensino Fundamental é introduzido o conceito de número negativo, em particular, é apresentada a existência dos inteiros negativos.

3 ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO NEGATIVO NA RELAÇÃO COM O MÉTODO DIALÉTICO

O ensino de número negativo apresenta desafios conceituais desde o seu surgimento, quando, na criação desses novos números, grandes matemáticos enfrentaram dificuldades na compreensão de sua definição, operação e aceitação de suas aplicações. Entretanto, esses desafios não remetem apenas ao passado, mas se estendem aos dias atuais, a exemplo do que é comumente relatado por professores que atuam no contexto do 7º ano do Ensino Fundamental, ao se reportarem às dificuldades de compreensão conceitual apresentadas por estudantes do referido ano escolar.

No âmbito dessa discussão, é oportuno recorrermos às bases teóricas que fundamentam o processo de ensino e aprendizagem e, particularmente, o modo de organização do ensino de Matemática. Para tanto, ao mesmo tempo em que reiteramos a nossa opção pela Teoria do Ensino Desenvolvimental, enquanto desdobramento didático dos fundamentos psicológicos da Teoria Histórico-Cultural, esclarecemos que a base filosófica que sustenta tais teorias é o Método Materialista Histórico Dialético. Nesse sentido, explicitamos por onde caminhamos e, sobretudo, evidenciamos que nossas escolhas profissionais e acadêmicas estão alicerçadas teoricamente.

Feitas essas considerações, ressaltamos que nesta seção analisamos a relação entre o referido método e as possibilidades geradas para o ensino de número negativo. Inicialmente, abordamos sobre o Método Materialista Histórico Dialético, destacando sua relevância para analisar a realidade e transformar o pensamento. Em seguida, discutimos acerca do surgimento e evolução do número negativo, bem como seus aspectos conceituais. Por fim, exploramos o papel do conflito cognitivo na aprendizagem desses números desde o seu surgimento, além de apresentarmos como a dialética pode auxiliar na superação de dificuldades e na consolidação desse conhecimento matemático.

3.1 A CONCEPÇÃO MATERIALISTA HISTÓRICA E DIALÉTICA E O MÉTODO DIALÉTICO: FUNDAMENTOS PARA A ANÁLISE DA REALIDADE

Neste processo investigativo, consideramos a concepção materialista histórica e dialética, por entendermos a necessidade de compreensão do fenômeno estudado à luz de tal concepção. Isto pressupõe reconhecer sua relevância, pois ao orientar o movimento do pensamento na busca de apreensão da essência dos fenômenos, cria condições para analisar a realidade e transformá-la.

Em seus estudos, Davídov (1988) explicitou a sua compreensão sobre a atividade humana, ancorada na dialética materialista, onde especifica que o homem que observa e compreende o mundo, não o aceita como é e modifica sua realidade. Ao partirmos dessa concepção filosófica, homem e realidade não se apresentam de forma dicotomizada. Ademais, há o entendimento de que são as determinações sociais e históricas (e não sobrenaturais) que têm implicações diretas no que somos e no que podemos vir a ser. Portanto, homem e realidade não são estáticos, mas encontram-se permanentemente em movimento. Tal compreensão se sustenta nos dizeres de Marx e Engels (2002, p. 26) ao afirmarem que "[...] são os homens que desenvolvendo a sua produção material e as suas relações materiais mudam sua realidade, mudam também o seu pensamento e os produtos do seu pensamento".

Nessa perspectiva, ou seja, do método materialista histórico-dialético, a própria busca do homem pela compreensão e explicação do objeto que almeja conhecer, não se limita a sua aparência, mas possibilita-o compreender o movimento de pensamento, ou melhor, como chegou a superar o modo antecessor de pensar. Nisso está implicada, para além da necessidade inerente ao homem de buscar, de inquirir, a busca pela essência do objeto a ser conhecido, o que somente é possível a partir do seu desvelamento. Tal movimento se dá, com base na linha de pensamento que rege o referido método, em um emaranhado de contradições, que na verdade, é que permite o sujeito "[...] desvendar, interpretar e explicar os fenômenos, a partir da própria dialética dos fatos e não do foro íntimo, preferências e opiniões pessoais [...]" (Ferreira, 2017, p. 60).

No que se refere ao desenvolvimento humano, é salutar destacarmos que, na perspectiva vigotskiana, que sustenta este estudo, o social tem grande relevância. Com isso, Vygotski (1995, p. 151) defende que "o desenvolvimento não se orienta para a socialização, mas fundamentalmente para a conversão das relações sociais em funções psíquicas". Em outras palavras, o desenvolvimento ocorre em decorrência das relações sociais, que resultam nas reproduções de propriedades, capacidades e procedimentos de conduta formados ao longo da história e da forma de organização social e política.

São, portanto, essas relações (internas e externas) que precisam ser analisadas para que se possa entender a atividade humana, pois elas mediatizam a inter-relação do homem com o mundo. Marx (1994) banaliza, portanto, o conhecimento como contemplação do objeto exterior como reflexo ou com ações abstratas, pois entende que o conhecimento se dá pela relação do homem com a natureza, com o social, com o mundo, através das práticas humanas, ou seja, o conhecimento só é possível na práxis, na relação da atividade teórica e prática. Por isso, na perspectiva materialista dialética, o que se considera é a matéria como a base da realidade, mas enfatiza que a história é impulsionada pelas contradições sociais e econômicas. Com isso, é possível entender que a essência de um fenômeno não se apresenta de forma imediata, mas através da mediação feita na forma abstrata.

A matemática, sob primeira ótica, pode parecer apenas um conjunto de ideias abstratas, porém essas abstrações não aparecem sem motivos, elas foram criadas para descrever e representar a realidade objetiva, ou seja, o mundo concreto. Como visto, o conhecimento dialético tem como objeto de conhecimento as relações, e em sua atuação na matemática, Prado Jr (1952, p. 15) afirma que "a Matemática tem por objeto essencialmente relações, ou seja, é uma ciência das mais favoráveis ao ensino do pensar por relações".

A relação dialética entre o lógico e o histórico tem sua relevância na elaboração e execução em procedimentos de ensino, pois ela implica no "provimento dos meios necessários para que os alunos não apenas assimilem o saber objetivo enquanto resultado, mas apreendam o processo de sua produção, bem como as tendências de sua transformação" (Saviani, 2003, p. 9). Como resultado, esse saber objetivo representa a lógica do produto, ou seja, o seu objetivo está apenas no resultado final, em que o conhecimento é tratado como algo pronto e, nessa lógica, é proposto um ensino reduzido a fórmulas, com ênfase na aprendizagem através da memorização mecânica.

A lógica do produto, portanto, esconde a lógica do processo. Essa se constitui como a síntese dos aspectos históricos essenciais que definem o produto conceitual matemático a ser apropriado pelo aluno através da organização do ensino. Pela investigação histórica surgem elementos essenciais para entender a lógica do produto final que podem estar sendo negligenciados, que representa esconder a lógica do processo.

O conhecimento empírico se reduz ao conhecimento sensorial, aos sentidos e, por isso, não é suficiente para entender a realidade de forma profunda, pois para conhecer a realidade não é suficiente apenas o que está sendo visto, tocado, ouvido ou percebido diretamente. Com base nessa compreensão, entendemos a necessidade de compreensão profunda da realidade, o que é possível com a articulação de suas múltiplas dimensões, suas relações internas (não só sua aparência). Desse modo, funcionam as abstrações, cada abstração se torna um ponto de partida, novos imediatos, que serão abstraídos novamente, ou seja, compreendido mais profundamente, superando o conhecimento anterior.

3.2 O SURGIMENTO E OS ASPECTOS CONCEITUAIS DE NÚMERO NEGATIVO

A introdução do conceito de números relativos (ou negativo) foi um processo muito lento que teve início há, aproximadamente, 1500 anos (da época de Diofantes) e se estende até hoje. Por muitos anos os povos faziam uso apenas dos números naturais e racionais positivos e não entendiam a necessidade do uso de números negativos. Ao quantificar grandezas discretas e contínuas foi percebido que esses números não eram suficientes. No período de transição da Idade Média para a Idade Moderna, houve um grande avanço no comércio e, concomitante a isso, ocorreram muitas mudanças econômicas, políticas e sociais, o que gerou também o desenvolvimento da matemática (Guelli, 2002).

Na Europa Ocidental, segundo Guelli (2002), com o renascentismo, além do avanço na arte e na cultura, houve também o desenvolvimento científico e, por conseguinte, exigia-se a linguagem matemática que viesse expressar os fenômenos naturais estudados. As necessidades enfrentadas com os problemas científicos cada vez aumentavam e, com isso, os números já conhecidos não eram suficientes para atender às demandas apresentadas. Então, foi nesse período que surgiu a ideia de criar novos números que foram chamados, a princípio, de "números absurdos".

Para os chineses, a criação dos novos números não causou muita dificuldade, pois eles eram trabalhados intuitivamente com o uso do ábaco. As barras vermelhas representavam os números positivos, enquanto as barras pretas, correspondiam aos negativos. Dessa forma, era possível a realização de operações entre números positivos e negativos. Durante o século XVI, surgiram muitos trabalhos voltados para a álgebra. Um dos trabalhos de grande relevância foi o de Michael Stifel, conhecedor das propriedades dos negativos. Stifel fez as aplicações desses números em radicais, potências, além de difundir os símbolos de + e – ao recusar-se a aceitar os números negativos, chamados por ele de "*numeri absurdi*", como raízes de equações (Guelli, 2002).

Essa recusa também ocorreu entre os chineses e matemáticos famosos do referido século, como Gerônimo Cardano, François Viète e Simón Stevin. Este último, considerava os negativos apenas como artifícios de cálculos. Porém, no século XVII, os números negativos se fizeram muito presentes em trabalhos científicos e apresentavam eficácia nos cálculos, mas até esse período os eruditos não sabiam dar explicações satisfatórias sobre esses números. Foi somente no século seguinte, que Colin MacLaurin (apud Glaeser, 1981), em seu Tratado de Álgebra (1748), os caracterizou como "longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real que sua espécie em quantidade positiva, ela é tomada em um sentido oposto".

Mesmo com tanto desenvolvimento do conceito desses novos números, ainda no século XVIII, o uso dos números negativos não era feito entre os homens comuns, a exemplo dos comerciantes da época. Em suas anotações para diferenciar débito e crédito, eles faziam anotações separadas com uso de setas, indo em sentidos contrários, bem como realizavam os cálculos separadamente, até ser feito o balanço contábil.

Conforme Salienta Glaeser (1981), no mesmo século foi dado início ao uso dos números negativos na escala termométrica, mas somente um século depois o povo se habituou à expressão “temperaturas abaixo de zero”. Nesse período também surgiu a reflexão da ciência europeia sobre as equações com raízes negativas e, somente no século XIX, Hermann Hankel, em seus trabalhos, conseguiu dar um grau de importância aos números negativos, tanto quanto aos positivos.

Glaeser (1981) ressalta ainda que Hankel (1867) defendia que as pessoas iam entender o conceito de número negativo quando conseguissem observar a matemática longe do que fosse apenas perceptível, quando afirmou que a “condição para construir uma aritmética universal é construir uma matemática puramente intelectual, desligada de toda percepção” (Hankel apud Glaeser, 1981). Ele destacava que o caminho seria não procurar na natureza exemplos práticos que os explicassem, pois os números negativos não se tratava de algo que estivesse encoberto e que precisasse descobrir, mas de números criados de acordo com necessidades encontradas. Com isso, buscava mostrar a importância do abandono do ponto de vista concreto e a defesa de um pensamento em uma perspectiva mais formal.

3.3 SUPERAÇÃO DE OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM DE NÚMERO NEGATIVO COM BASE NO MATERIALISMO HISTÓRICO DIALÉTICO

O estudo do conceito de número negativo se estende por muitos séculos. Mesmo após ser estudado e aprimorado por muitos estudiosos, o conceito dos Números Inteiros ainda apresenta lacunas que são discutidas na contemporaneidade.

É fato que muitos alunos apresentam dificuldades ao realizar operações com números não positivos por não conseguirem realizar corretamente o “jogo de sinais”. Muitas vezes, os professores acreditam que essa dificuldade se dá não pela introdução do novo conceito, mas pela deficiência na aprendizagem de conceitos matemáticos anteriores a essa fase, o que provoca problemas de aprendizagem não somente em relação ao número negativo, mas em qualquer outro.

Merece atenção o fato de que essas dificuldades, historicamente, têm se apresentado no contexto escolar, desde o período em que grandes matemáticos buscavam compreender esses novos números e suas operações. Diante de tais dificuldades, alguns trabalhos, a exemplo do estudo realizado por Hans Freudenthal, foram dedicados na busca de compreendê-las. Em sua obra clássica, esse autor dedicou 160 páginas a discutir esse assunto. O que se observa é que, mesmo sendo considerado, hoje em dia, ainda o maior empecilho da aprendizagem de Número Negativo, o "jogo de sinais" nem sequer é mencionado pelo autor nessa extensa lista de dificuldades. Ao que se observa, esse ponto parece ter passado despercebido pelo autor, o que pode ser considerado por ele uma questão não tão problemática no processo de aprendizagem dos números (Glaeser, 1981).

No entanto, nessa época, os matemáticos não sentiam a dificuldade percebida atualmente na realização de operações matemáticas (momento em que é necessária a utilização do "jogo de sinais"). Essa talvez seja uma explicação que possa justificar a ausência desse tópico no livro de Freudenthal.

É oportuno ressaltar alguns apontamentos feitos por Glaeser (1981) ao discutir acerca de alguns empecilhos para a aprendizagem da matemática. Em seus estudos, ele observou que os matemáticos encontraram algumas dificuldades na compreensão do conceito de números negativos, a saber, as dificuldades em: entender os números de forma independente; dar um sentido a quantidades negativas isoladas; localizar números na reta numérica[4]; entender ambiguidade dos dois zeros[5] (absoluto e como origem); compreender as estagnações no estágio das operações concretas[6].

Schubring (2007) mostra exemplo de calorosos debates acadêmicos ocorridos na comunidade de professores de matemática. Tais debates revelam certa hesitação no tratamento aos números negativos, o que podem revelar, à época, dificuldades de compreensão por essa comunidade. A esse respeito, Schubring (2007, p. 17) traz um trecho dos escritos de Hoffmann (1884) ao postar um cenário de horror e consequências drásticas para o ensino da matemática, em situações em que os professores precisavam dizer aos alunos que a regra de sinais é uma convenção: "Eu temerei ver os olhos de surpresa e de espanto dos alunos. Alunos inteligentes sobreviveriam com perguntas: Isso é verdadeiramente arbitrário? Não se pode demonstrar?"

No entanto, em 1896, o francês Carlo Bourlet em uma tentativa de superação da visão defendida por Hoffmann, apresentou um manual que orientava o ensino de números relativos. Sobre

[4] Compreende-se por reta numérica a justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos.
[5] O zero absoluto é a representação do nada e os números negativos estavam abaixo do nada (o que os caracterizou como "absurdos"). Por outro lado, o "zero como origem" era usado convencionalmente para a sequência com negativos.
[6] Para compreender as operações é necessário ir além de experiências do mundo real e do desejo de um modelo unificador com repetidas adições para representar a multiplicação, já que isso ~~o que~~ não é possível quando se trata ~~no caso~~ de produto entre negativos.

esse manual, Glaeser (1981, p. 343) pontua: “Nele ele apresenta as propriedades aditivas dos números relativos baseados sobre o modelo comercial e sobre a referência de um ponto sobre um eixo. Contudo, no capítulo seguinte, a multiplicação logo se mostra dogmática”.

Apesar da aceitação do conceito de número negativo e suas operações, na comunidade dos matemáticos profissionais, após a publicação de Hankel, na comunidade de professores esse debate ainda perdurou por muito tempo. A resistência dos professores em aceitar que a regra de sinais para a multiplicação de dois números negativos não pode ser provada e que precisa ser “mais” para preservar o formalismo matemático já existente foi um fator de destaque no percurso histórico da aceitação da regra de sinais.

Como relato de experiência para as dificuldades enfrentadas na época, Glaeser (1981) destaca ainda a história de Henri Beyle, como adolescente, ao falar sobre seus primeiros contatos com esse novo conceito integrado à matemática e sua busca por compreender a origem do jogo de sinais. Em uma carta escrita por ele, Beyle explica que durante as aulas, nem seus professores compreendiam o conceito. Além disso, não faziam esforços para compreender e, por extensão, para conseguir explicar aos alunos. Quando indagados sobre a fundamentação para tais regras, respondiam que se tratava de um costume e, sem questionamentos, todos admitiam essa explicação.

Além da compreensão dos números inteiros relativos (positivos, negativos e o zero) ou inteiros relativos, outro desafio era a operação entre eles, principalmente no jogo de sinais, atribuído a Diofantes de Alexandria. Apesar de não fazer referência aos negativos, ele tentava compreender o produto de duas coisas em falta, assim explicado por ele: "O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta" (apud Glaeser, 1981).

Simon Stevin, um dos matemáticos que tentava justificar a aritmética e a álgebra, se limitava em dizer que "Número é aquilo pelo qual se explica a quantidade de alguma coisa". Dessa forma, ele não se estendeu a trabalhar com negativos isolados por não quantificar alguma coisa. Além disso, não os aceitava como raízes de equações. Para tanto, usava como estratégia, quando os resultados eram negativos, reconsiderar a equação alterando seus coeficientes. Por exemplo: se -2 é raiz de x2 – px = q, significa que +2 é raiz de x2 + px = q. o que era chamado de sintoma de evitação, que se trata da estratégia usada por um indivíduo para evitar situações, nesse caso, aceitar os negativos de forma isolada (Glaeser, 1981).

Situações como essa, segundo Glaeser (1981), foram vistas até o final do século XVIII, quando os números negativos ainda não tinham status de número e os sábios sempre buscavam forma de livrar-se deles. Como exemplo, temos: Pierre de Fermat, propôs um método que consistia a partir de uma raiz falsa (negativa) que obtivesse soluções aceitáveis (positivas); René Descartes, no sistema de coordenadas cartesianas, nunca construiu o eixo das abscissas de – a + infinito. Ele considerava separadamente duas semirretas indo em sentidos opostos. Na busca de evitar os números negativos, as curvas que traçou foram localizadas no primeiro quadrante, mostrando uma insegurança com o uso dos números negativos, bem como foi dedicado grande parte do seu livro de geometria, a evitar o uso desses números como raízes de equações. Na época, o surgimento de uma raiz negativa indicava não uma solução, mas uma indicação de que se tratava de uma questão mal formulada.

É salutar destacarmos ainda que situações como as citadas anteriormente também podem ser vistas no texto de d'Alembert, intitulado Negativos. Nele o autor cita os negativos não se tratando de números abaixo do nada, conforme afirmava, e que as soluções negativas das equações eram quantidades reais, porém deviam ser associadas a uma ideia diferente. Ele relata ainda um exemplo particular, ao afirmar que o número X, quando somado a 100, resulte em 50 ($x + 100 = 50$). Um exemplo claro que $x = -50$, mas ele diz que $x=50$, e a equação está escrita trocada, pois ao invés de somar a 100, x deve ser retirado ($100 – x = 50$) e o verdadeiro enunciado deveria citar a retirada do valor. Desse modo, o valor negativo não subsistiria.

Anos depois, Maclaurin (1748 *apud* Glaeser, 1981) apresenta as quantidades negativas como

> Longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que quanto a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor.

Conforme exposto, Maclaurin apresenta situações que despertaram a necessidade da criação de negativos e os classifica dando a ideia de vetor que vai a um sentido oposto, e esse sentido oposto surge da comparação entre informações, ou seja, grandeza deslocamento.

De acordo com Glaeser (1981), o matemático Euler também buscou operar com os números relativos sem muita propriedade e mostra suas argumentações em três situações:

> 1- A multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma dívida de 3a escudos. Logo b x (-a) = -ab. 2- Por comutatividade, Euler deduz daí que (-a) x b = -ab. 3- Resta determinar o que é (grifo nosso) o produto (-a) por (-b). — É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se, portanto, de decidir

> entre +ab e -ab. Como (-a) x b já vale -ab, a única possibilidade restante é de que (-a) x (-b) = + ab. (!!!)

D'Alembert (1748) também fala sobre o produto com negativos afirmando que -a por -b é +ab, mas o sinal de – antes de a e b se dá porque há algum erro tácito na hipótese do problema ou da operação. Se o problema fosse bem enunciado, essas quantidades a e b deveriam estar com o sinal + [...] o enunciado simples e natural do problema deve ser, não de multiplicar -a por -b e, sim, +a por +b, o que dá o produto +ab. D'Alembert acreditava que essa fosse a explicação mais clara e exata para essa operação (Glaeser, 1981).

Ainda conforme Glaeser (1981), o matemático francês Laplace também apresenta algumas dificuldades na compreensão dessa operação. Para tanto, usou como demonstração o uso do produto de -a por +b, visto que é a soma repetida b vezes da parcela -a, logo temos que -a por (b-b) um resultado nulo, já que b-b é nulo e o produto de qualquer valor por zero é nulo, logo -a por -b é oposto ao produto de -a por +b, mostrando que é positivo.

Glaeser (1981) acredita que um dos principais obstáculos enfrentados no desenvolvimento dos conceitos de negativos que foi a estagnação nas operações, poderia ser reduzido, se houvesse um modelo que satisfizesse as seguintes condições: a) explicar simultaneamente a adição e a multiplicação dos números relativos, bem como as interações dessas operações; b) basear-se em operações internas; c) ser suficientemente familiar aos que ainda ignoravam os números relativos.

Ao longo do estudo sobre número negativo e suas operações, pode ser percebido que os matemáticos citados, por confiarem tanto em suas intuições, assumiam como certas suas teorias e concepções, o que acabavam por negligenciar as explicações com base em conhecimento científico, o que contribuía para equívocos conceituais. Ao se depararem com a necessidade de explicar às outras pessoas seus pensamentos, surgiam suas primeiras dúvidas sobre o conceito, o que mostrava uma dificuldade até então não identificada e que, portanto, não havia sido solucionada.

Gaston Bachelard explica que a opinião sobre um conceito não é algo suficiente e, que por si só, não explica nada, mas ela traduz a necessidade de conhecimento que o indivíduo busca de forma imediata, pois quando se trata de algo que não se compreende, o espírito científico proíbe de formular opiniões concretas e de usá-la como base para fundamentações. Antes é necessário observar os problemas com uma definição clara do que está sendo investigado, pois esses problemas não surgem de forma aleatória, mas é preciso um esforço consciente para identificar e formular o problema. A esse respeito, conforme afirma Bachelard

(2005, p. 18), “para um espírito científico, o conhecimento é uma resposta a uma questão. Se não houver questão, não pode haver conhecimento científico. Nada anda sozinho. Nada é dado. Tudo é construído".

Quando o referido autor cita que se faz necessário existir questões para que haja uma resposta, ou seja, o conhecimento, ele não se refere a questões com respostas imediatas, as quais não se faz necessário o raciocínio. Ao contrário, como pode ser visto, os matemáticos acreditavam entender sobre números negativos e realizar suas operações, mas quando se fazia necessário explicar seus pensamentos, eles observavam suas reais dificuldades. O que pode ser visto em muitas situações, nos dias atuais, é que os alunos são submetidos a resolver exercícios, que não se faz necessário raciocínio e, em muitos casos, respostas como “sim” e “não” são suficientes, o que não permite identificar suas dificuldades.

Alguns estudiosos procuram entender as dificuldades dos alunos com relação ao número negativo. Fischebein (1987), citado por Nascimento (2004, p. 2), acreditava que algumas dificuldades tinham origem no conhecimento prévio dos alunos e o conflito que surge entre o “[...] significado prático de magnitude ou associação de quantidades com número anterior ao ensino de aritmética e o conceito de número negativo”.

Geralmente, na introdução do conceito de negativos e, ao longo de seu estudo, é feita a sua relação com situações do cotidiano, tais como, variações de temperatura, diferença de altitude, transações bancárias. Esses são exemplos de situações comumente usadas, porém a associação feita a esses casos particulares limita a compreensão do aluno. Em alguns casos, há ainda a impossibilidade em produzir significado para algumas situações, a exemplo, o produto entre dois números negativos. De acordo com Maranhão, Machado e Coelho (2004, p. 10), precisamos ficar atentos para o fato de que o “[...] entendimento matemático não é apenas uma questão de fundar conceitos em experiências familiares do dia-a-dia. Ele também exige desenvolver fundamentos conceituais para fazer distinções abstratas gerais e claras”.

A introdução desse conceito e suas operações, em geral, são feitas diretamente pelo jogo de sinal, como é visto sempre em sala de aula, o que não contribui para que os alunos compreendam o conceito de número negativo, em particular, os inteiros como uma extensão dos naturais e acabam por confundir com frequência as regras de adição e subtração com as de multiplicação e divisão.

Essa confusão pode ocorrer pela ênfase que é dada pelos professores logo no início da introdução desse conceito quando a tabela do jogo de sinais é apresentada e rapidamente memorizada. Porém, os alunos “absorvem” essa informação e até utilizam as regras como afirmações que não precisam ser justificadas, sendo o suficiente para ser aplicada. Depois da apresentação, o professor dá início ao seu uso em aplicações de exemplos práticos, como, por exemplo: (-3) . (+4), sem que haja uma busca por mostrar o porquê daquela operação ter aquele resultado, em particular, aquele sinal.

Entendido a regra de sinais como certa, de forma automatizada, em todas as situações o aluno deseja aplicá-la, mesmo que em adição ou subtração, mostrando que ele não compreendeu nem sequer como reproduzir (forma que lhe foi instruído), ou seja, não identifica os casos em que a regra é aplicável.

Em alguns casos os professores optam por ensinar dessa forma por considerarem mais simples, em alguns casos suficientes (entendendo que a não compreensão é uma dificuldade do aluno) ou por que o professor mesmo não sabe, como citado por Pontes (2010). Uma pesquisa de Angelo (2007) realizada com alunos do primeiro semestre de um curso de licenciatura em matemática, na disciplina de Laboratório de Matemática 1, na qual foi aplicada uma avaliação diagnóstica, dentre as questões, aparecia a pergunta "por que (-1) x (-1) = (+1)?". Dos 48 alunos que responderam ao diagnóstico, 37 argumentaram com o uso da regra do jogo de sinais, 2 com situações do cotidiano, 2 responderam que não sabiam, 3 responderam errado e 5 não responderam, o que mostra que muitos estudantes chegam à graduação sem compreender a operação com números negativos.

Diante dessas respostas, a professora criou uma discussão sobre o assunto em uma abordagem histórica, estabelecendo um paralelo entre os obstáculos enfrentados pelos antigos matemáticos no surgimento dos números negativos e as dificuldades enfrentadas pelos alunos. Depois, os estudantes da graduação responderam a uma nova avaliação que possuía a mesma pergunta, e apenas 10 utilizaram em suas respostas os novos conhecimentos desenvolvidos na discussão, enquanto os demais apresentavam respostas semelhantes às do primeiro diagnóstico.

A interpretação para o fato da maioria dos estudantes continuarem com as mesmas respostas é de que a aquisição de novos conhecimentos não foi verificada por eles. É possível que ensinar número negativo, no futuro, esteja em suas práticas como professores de matemática, sendo esse, um conceito que não foi aprendido durante o ensino básico, nem no início da graduação, o que nos leva a entender que será um conceito, cuja forma de trabalhar, se assemelhe a forma como esses professores aprenderam, uma simples aplicação de uma regra dada como certa sem entender suas causas, formando novos alunos aprenderam sobre número negativo.

O reflexo desse problema no ensino de número negativo foi alvo da pesquisa de doutorado realizada por Pontes (2010), na qual realizou um comparativo das dificuldades enfrentadas pelos alunos da educação básica/superior e alguns matemáticos no período de criação dos números relativos. Em sua pesquisa, aponta as dificuldades e observa suas possíveis causas, quando faz referência às dificuldades dos alunos em dar sentido a quantidades negativas isoladas. Com isso, o estudo aponta que os alunos sentiam dificuldades em observar situações que se fazia necessário o conhecimento sobre número negativo, justificada pelo fato de os alunos não conseguirem ampliar o conjunto dos números naturais para os negativos.

Quando observamos essa dificuldade de identificar contextos que se faz necessário o uso de números negativos, isso mostra que os alunos não conseguem entender a necessidade do uso de números relativos que vai contra a perspectiva epistemológica que defendemos neste estudo. A título de esclarecimentos, entendemos que os conceitos surgem historicamente como uma resposta a problemas concretos e assim devem ser trabalhados com os alunos, de modo a colocá-lo em situação da necessidade, que se assemelhe a situações que levaram a criação daquele conceito.

Outras dificuldades apresentadas por alunos da educação básica na pesquisa, foram: a não compreensão do zero como origem e determiná-lo como zero absoluto (característica aprendida no estudo dos naturais) e não conseguirem posicionar os números negativos na reta numérica. Assim, escrevem os números da esquerda para a direita em ordem decrescente seguidos do zero, mostrando que não compreendem sua localização, ou ainda, colocando em sentidos corretos, porém com espaçamentos diferentes. Isso revela a falta de domínio da ideia de módulo de um número, o que poderia ser melhor compreendido no estudo dos negativos na proposta de quantidade orientada. Essa abordagem permite aos alunos compreenderem os negativos como formas específicas de uma mesma ação que os positivos, mas em sentidos diferentes, como proposto por Davídov (1988) e evidenciado no estudo de Búrigo (2015).

As estagnações no estágio das operações concretas foi outra dificuldade apontada no referido estudo. Nele, os alunos apresentavam falas que associavam os sinais de mais e menos como operacionais e que em nada alterava os valores dos números, ou seja, havia alunos na pesquisa que acreditavam que números positivos e negativos eram os mesmos e que os sinais apareciam para a realização das operações.

Consoante a nossa compreensão fundamentada na perspectiva teórica que sustenta nosso estudo, isso é resultado de um ensino que enfatiza a reprodução mecânica, a exemplo de quando o professor dá início às operações apresentando a regra do jogo de sinais, mas sem compreender a natureza relacional e orientada dos números negativos. Uma forma de superar esses obstáculos, é oferecer um ensino que crie condições de apropriação conceitual em nível que supera o empírico, pois “a formação de conceitos é um processo de caráter produtivo e não reprodutivo, que um conceito surge e se configura no curso de uma operação complexa voltada para a solução de algum problema” (Vygotsky, 2001, p. 156).

Também podemos pressupor que as dificuldades enfrentadas no estudo de número negativo podem ser reflexo dos alunos não conseguirem ampliar seus conhecimentos de números naturais, dado que o aluno aprendeu que o zero é ausência de algo, sendo difícil dar sentido a valores negativos. Além disso, há também a associação de sinais de mais e menos apenas como operatório. Esses conhecimentos consolidados com o estudo dos naturais nos anos iniciais, quando associados, por exemplo, a contagem de objetos, bem como a ampliação desses conhecimentos (alterando algo já consolidado) se apresenta como algo difícil de ser entendido. Por isso, Davídov (1988) defende o estudo dos conjuntos numéricos não como um processo gradativo e nivelado, mas como complementares e integrados. Para esse autor, o ensino do conceito de número, desde os anos iniciais, deve contemplar a relação entre grandezas associando à ideia de medida, de número real, não separadamente por seus subconjuntos. Deve ser uma aprendizagem corretamente organizada, pois isso é que resulta no desenvolvimento mental e põe em movimento diversos processos de desenvolvimento (Vygotsky, 2007).

Em síntese, como defendido por Moura (2004), o aluno deve ser colocado em situações da necessidade, abstrações e generalizações que se assemelham às vividas pelo homem ao longo da história, sendo papel do ensino criar situações em que o aluno reviva simbolicamente essa trajetória histórica, sendo uma estratégia que proporciona ao aluno entrar em atividade de estudo e, com isso, ocorrer a aprendizagem e, por extensão, seu desenvolvimento.

4 O ENSINO DESENVOLVIMENTAL E A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO: POSSIBILIDADES PARA A APRENDIZAGEM DE NÚMERO NEGATIVO

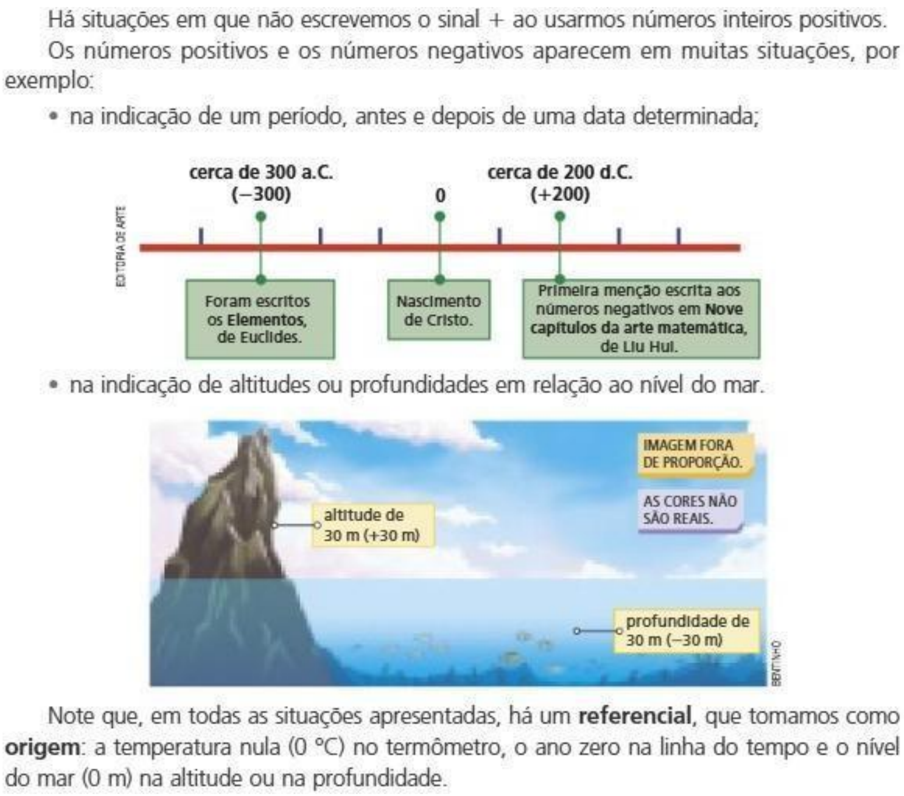
O Ensino Desenvolvimental, fundamentado nas ideias de Davídov (1988), propõe uma abordagem que se difere no ensino do conceito de número - contrapondo às abordagens consideradas tradicionais -, sobretudo pela importância que atribui ao desenvolvimento do pensamento teórico do estudante. Orienta suas proposições para a compreensão dos princípios matemáticos com base nas relações essenciais dos conceitos, desde os anos iniciais da criança na escola. Diferente do ensino tradicional, que prioriza a memorização pautada na repetição mecânica dos conhecimentos, num movimento que decorre de situações particulares associadas ao cotidiano. Em contrapartida, o Ensino Desenvolvimental busca o desenvolvimento do estudante em sua capacidade de abstração, generalização e argumentação lógica, num movimento intencionalmente orientado para a compreensão dos conhecimentos a partir de seus aspectos gerais. Isso possibilita ao estudante apropriar-se dos conceitos matemáticos a partir das relações que se estabelecem com objetos de conhecimento, mediados pelo conteúdo que expressa a lógica histórica do seu desenvolvimento. Esse movimento se orienta para o desenvolvimento do pensamento teórico matemático do estudante (Davídov, 1988; Rosa, 2012).

Nesse sentido, como evidencia Rosa (2012), um dos desafios que se apresentam para os pesquisadores e professores na elaboração de situações desencadeadoras de aprendizagem é identificar a expressão do movimento lógico-histórico do conceito nas tarefas de estudo. Não se trata apenas de negar o ensino tradicional, por não apresentar o movimento lógico-histórico no desenvolvimento dos conceitos escolares e, prontamente, substituí-lo por uma abordagem que considera tal movimento. Mas, de identificar nessa abordagem "nova" elementos que levem ao caminho da superação da lógica tradicional de ensino. Desse modo, buscamos, nas produções fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural, alguns elementos substanciais que contribuem para a elaboração de tarefas orientadas ao estudo de número negativo. Entendemos que, a partir dessas produções - por exemplo, Rosa (2012), Búrigo (2015) e Freitas (2016) - nos dirigimos para a elaboração de tarefas de forma mais consciente acerca dos fins para onde ela se orienta, o que não ocorre em nossa prática atual.

Na contramão desse movimento, no âmbito comum vigente da prática escolar ao qual fizemos parte, observamos que há uma tendência de que as ações estejam enraizadas aos moldes tradicionais de ensino. Ao realizarmos um breve levantamento sobre "sugestões de ensino de número negativo”, percebemos uma dominância das características que expressam esse modelo pedagógico: relações predominantemente aritméticas que reduzem o conceito de número negativo à números inteiros opostos aos naturais, conhecidos como posição na reta numérica. Isso fica evidente quando nos orientamos para a introdução do conceito de número negativo para as crianças. Frequentemente reduzimos o conceito a situações particulares, como o saldo de gols de um time em um campeonato, a variação de temperatura acima e abaixo de zero, os andares de um edifício, considerando o subsolo, a diferença de altitude, considerando o nível do mar, a relação de saques e depósitos, gastos e ganhos em contas bancárias, períodos históricos (antes e depois de Cristo).

Identificamos esse mesmo movimento em livros didáticos, em particular, caracterizado como introdução do conceito de número inteiro. Nesse caso, as tarefas são exclusivamente orientadas a considerar apenas o número inteiro negativo a partir da relação com o seu oposto positivo na reta numérica. Como exemplo, tomamos a coleção A conquista da matemática (Giovanni Jr, 2022) que em seu livro do sétimo ano, apresenta alguns desses exemplos para introduzir o conceito de número inteiro:

Figura 1: Situações representativas de números negativos e positivos no livro didático brasileiro


Há situações em que não escrevemos o sinal + ao usarmos números inteiros positivos.

Os números positivos e os números negativos aparecem em muitas situações, por exemplo:

- na indicação de um período, antes e depois de uma data determinada;

- na indicação de altitudes ou profundidades em relação ao nível do mar.

Note que, em todas as situações apresentadas, há um **referencial**, que tomamos como **origem**: a temperatura nula (0 °C) no termômetro, o ano zero na linha do tempo e o nível do mar (0 m) na altitude ou na profundidade.

Fonte: Giovanni Jr, (2022).

Nestas duas situações observamos que o conceito de número negativo é apresentado e definido a partir de uma situação particular que leva a associá-lo como um número oposto ao positivo localizado na reta numérica. Esses exemplos são sugeridos pelo autor como prático e de melhor compreensão na introdução do conceito de número inteiro, em particular, os negativos, por se tratar de situações de contextos conhecidos pelos alunos. O primeiro exemplo orienta para a representação de um período histórico, tomando como ponto de origem o nascimento de Cristo, destacados em uma reta horizontal para a localização dos anos. No segundo exemplo, aborda a diferença de altitude, identificado como origem o nível do mar com os números posicionados em uma reta vertical, de acordo com sua altitude ou profundidade.

Nessa forma de introdução do conceito, identificamos que não há tarefas que levem os estudantes à compreensão e a construção do lugar de posição dos números apresentados, tendo em vista a expressão do movimento que se estabelece na relação das grandezas tomadas como referência. Entendemos se tratar de um método tradicional de ensino por limitar a abstração do conceito ao movimento escalar da grandeza apenas no campo visual de sua identificação nas retas, sem estabelecer relações de comparação entre elas, conforme Rosa (2012), aspecto que constitui a relação genética do conceito de número. Essa abordagem não gera na criança a necessidade de investigar e não a leva a perceber o que há de efetivamente novo no conteúdo de aprendizagem e suas possíveis generalizações. Assim, a abstração ocorre apenas com base no que ela já conhece, sem promover uma real ampliação conceitual, como a inversão de direção e sentidos, implícitas nas tarefas apresentadas.

Nos exemplos, comumente, são apresentados esses novos números para o estudante, em seguida, surgem suas representações na reta numérica, onde todos os números são localizados a uma distância da origem, definida pelo número zero. Os números podem se distanciar do zero para a direita e para a esquerda ou para cima e para baixo, na expressão de grandezas escalares, associadas a uma condição dada no contexto da tarefa (tempo histórico, andar de um edifício, temperatura acima e abaixo de 0º, entre outras). Ao continuar o estudo da reta numérica se estabelece o valor desse número com base na posição que ele ocupa. Quanto mais distante do zero para cima e para a direita, maior o seu valor, quanto mais distante de zero para baixo e para a esquerda, menor o seu valor. Esse movimento de abstrair o conceito impõe ao aluno uma forma convencional de memorizar o que é o número negativo na contraposição do positivo, sem partir da necessidade de reflexão acerca da grandeza que está sendo tratada. Toma como referência apenas o resultado como um valor aritmético absoluto sem relacionar esse valor ao movimento que ocorre na relação entre grandezas, direções e sentidos possíveis, como foi visto nos exemplos anteriores.

A partir dessas reflexões, concluímos que em nossas ações de ensino (nas tentativas de elaborar tarefas envolvendo o estudo de número negativo) também se revelam essa tendência. Diante disso, surge para nós as seguintes questões em torno dos objetivos e do problema desta pesquisa: 1- como redirecionar a organização do ensino, a partir do lugar que ocupamos como professores e pesquisadores, de modo que as tarefas propostas possibilitem avanços quanto às tentativas de superação daquelas que reconhecemos como tradicionais? Em que consiste a superação da lógica tradicional na elaboração de uma tarefa escolar? Com base no exposto até aqui, tomamos como objeto de análise, como ponto de partida e de chegada para a superação da lógica tradicional de ensino, a própria tarefa de estudo.

Compreendemos que a tarefa de estudo revela, tanto as limitações acerca do processo de ensino e suas fragilidades, quanto o que pode expandir e potencializar a atividade do estudante. Nesse sentido, direcionamos esforços para pensar o ensino do conceito de número negativo a partir da organização de tarefas de estudo colocadas em análise com base nos elementos substanciais que identificamos nos estudos de Rosa (2012), Búrigo (2015) e Freitas (2016), com destaque para: a) relação de multiplicidade e divisibilidade reconhecendo a grandeza como elemento essencial (conceito de número); b) necessidade de ordem conceitual e pedagógica acerca do ensino de número negativo (especificação de módulo e sentido e a ideia de superar o movimento apenas escalar com a comparação de vetores a partir da introdução da grandeza deslocamento); c) o motivo e a finalidade da organização da tarefa de estudo com o foco no desenvolvimento do pensamento teórico do estudante, o que requer a formação de abstrações e generalizações que expressam a lógica histórica dos conceitos.

Para tanto, na sequência realizamos um estudo envolvendo questões mais gerais do ensino de matemática, seguido de um estudo sobre a introdução ao conceito de número segundo a proposta de Davydov, destacando os pontos e estratégias que favorecem o desenvolvimento do conhecimento matemático de forma estruturada e intencional. Posteriormente, fizemos algumas reflexões sobre ensino e a aprendizagem de número negativo, com destaque para o que se difere do método tradicional comparado ao método davydoviano. Por fim, como referência principal para a produção e análise dessa tarefa, apoiamo-nos em Búrigo (2015), que apresenta uma leitura sobre a introdução do conceito de número negativo.

4.1 PRÁTICA PEDAGÓGICA E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: CAMINHO PARA A TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

A epistemologia educacional trata do estudo do conhecimento em educação envolvendo a natureza, origem, validade e apropriação do conhecimento. Se orienta para a investigação dos processos de aprendizagem, dos métodos de ensino, avaliação, dentre outros objetos que auxiliam a compreensão de como as crenças e concepções sobre as ações do ser humano na relação com a natureza se transformam em conhecimento. Nesse sentido, essa área de estudo e investigação produz condições para os educadores desenvolverem práticas pedagógicas com base nas necessidades que surgem em cada situação de aprendizagem. Determinadas pelas bases teóricas sob as quais são tomadas as concepções de ensino, se produzem as ações escolares, a organização do currículo, a relação com o saber, dentre outros aspectos que envolvem a compreensão sobre como se organiza o ensino.

Como concepção psicológico-pedagógica, a Teoria Histórico-Cultural defende que o desenvolvimento do ser humano ocorre a partir da aprendizagem que o impulsiona (Vigotski, 1993). Embora compreenda que a aprendizagem e o desenvolvimento do ser ocorre desde o início da vida da criança, o que começa muito antes de sua entrada na escola, para essa perspectiva é na escola que ela entra em contato com os saberes que conduzem seu desenvolvimento determinado por relações mais complexas, ao estabelecerem relação com os conhecimentos científicos (Vigotski, 2018; Davídov, 1988). Isso "pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam" (Vigotski, 2007, p. 59).

A prática pedagógica orientada pelo viés do conhecimento científico promove um tipo de aprendizagem que não ocorre espontaneamente nas relações imediatas do senso comum, mas num processo sistematizado e intencional de situações pedagógicas (com ações e tarefas) que possibilitam à criança entrar em atividade de estudo pelo envolvimento com os objetos dessa atividade (Davídov, 1988). Essa proposição de ensino prevê a colaboração do professor pela organização e orientação das tarefas de estudo, que levam os estudantes a estabelecerem mediações com os conhecimentos. Dentre os conteúdos dessas mediações, estão os métodos de estudo. De acordo com Rosa (2012, p. 34), as crianças "não chegam à escola sabendo estudar, ao contrário, isso ocorre mediante um processo de apropriação, previamente organizado".

Para a teoria vygotskiana, uma condição essencial da prática pedagógica é a finalidade de colocar o estudante em atividade de estudo (Davídov, 1988). Ao entrar em atividade surge para o sujeito a possibilidade de desenvolver capacidades para responder aos desafios que se apresentam durante sua interação com o meio externo. Para Luria e Leontiev (2003), o ser humano é mais do que o produto do meio, pois este se caracteriza como um agente ativo na transformação deste meio e, por consequência, da formação de sua consciência ao atuar em sua atividade prática. Assim, ao resolver uma tarefa de estudo que de fato coloca o estudante em atividade, surge para ele a necessidade de buscar elementos que possibilitem criar condições para solucionar os problemas que lhe são apresentados, diferente do que ocorre com as tarefas do senso comum, que não são necessariamente concretizadas pela criança (Vigotski, 1993).

As tarefas do dia a dia doméstico da criança, por exemplo, que se caracterizam por sua espontaneidade, apresentam como conteúdo apenas as relações imediatas que se expressam nas operações que ela realiza ao reproduzir (imitar) os movimentos do adulto. O que não consegue realizar sozinha não se expressa para ela como um problema a resolver. As finalidades para onde se orientam essas tarefas (ajudar os pais na organização da casa, no preparo de alimentos, entre outras, em torno de sua vida concreta) não estão ligadas aos fins das atividades principais que a criança assume como sua (brincar e estudar), mas com uma atividade do adulto. Nas tarefas escolares, que tem base na aprendizagem decorrente do contato com os conhecimentos científicos, surge para a criança uma condição nova: agora, ela precisa encontrar soluções para resolver o problema proposto pelo professor na busca de atingir um objetivo de sua atividade principal: o estudo (Davídov, 1988). Estas tarefas são substancialmente diferentes das tarefas domésticas, em forma e conteúdo.

Vygotski (1993) apresenta duas características da educação escolar que se referem a transição de atividades da criança ao entrar na escola: a sistematização dos conhecimentos e a interação com os sujeitos escolares. Referente à primeira, o conhecimento não surge mais de forma predominantemente espontânea, como ocorre nas relações extraescolares. Na escola, ao contrário, predominam as múltiplas relações de interdependência entre conceitos. Tais relações necessariamente compõem a organização do ensino de modo que a apropriação de um conceito surge como possibilidade de compreensão de outro, num sistema mais complexo, comparado ao modo de compreender a realidade pelos conhecimentos de senso comum.

Referente à segunda, a interação com os professores e colegas de classe não têm mais as mesmas características expressas na interação com pais e familiares, embora apresentem traços parecidos. Enquanto nas tarefas domésticas a criança busca reconhecimento e afeto dos pais (adultos de suas relações), nas escolares, pouco a pouco os sujeitos em torno da criança, sobretudo os professores, aparecem com uma nova característica para ela. Estes se tornam responsáveis por organizar as tarefas de estudo (a sistematização), de modo que ela (sob as determinações que surgem ao se reconhecer como estudante) experimente as necessidades ligadas aos objetos da atividade de estudo. De acordo com Búrigo (2015, p. 35), “são as necessidades e os motivos de estudo que orientam os estudantes no processo de aquisição do conhecimento”.

Para Vygotsky (1993, p. 240), “o desenvolvimento que parte da colaboração mediante a imitação é a fonte de todas as propriedades especificamente humanas da consciência”. Essa condição, para o autor, se torna um aspecto central da “psicologia da instrução”, pois a colaboração do professor possibilita elevar o desenvolvimento intelectual da criança a um grau superior, devido à natureza do conteúdo escolar e as formas de transmiti-los. Em suas palavras, “a possibilidade de passar com ajuda da imitação do que a criança é capaz de fazer ao que não é capaz. Nisto se baseia toda a importância da instrução no desenvolvimento e isso é o que constitui na realidade o conteúdo do conceito de zona de desenvolvimento proximal” (Ibidem, p. 240). A prática pedagógica, que tem como objeto a instrução do sujeito para o sujeito, segue essencialmente essa característica própria do ser humano. Historicamente, essa prática, que se tornou uma atividade específica do homem, evoluiu a ponto de superar as condições de imitação primárias, que o diferencia do animal, para relações cada vez mais complexas.

Quanto mais profundas são as relações com os conhecimentos acerca da realidade, mais elaborados devem ser os processos de instrução. Essa necessidade impulsiona a evolução histórica que diferencia os modos de transmitir o conhecimento cotidiano (que se orienta para o desenvolvimento do pensamento empírico) dos modos de ensino do conhecimento científico (que se orienta para o desenvolvimento do pensamento teórico) (Davídov, 1982). “Na escola a criança não aprende a fazer o que é capaz de realizar por si mesma, mas a fazer o que é, todavia, incapaz de realizar, mas que está a seu alcance em colaboração com o professor e sob sua direção” (Vygotsky, 1993, p. 240).

A concretude desse movimento se revela, como dito anteriormente, no conceito de zona de desenvolvimento proximal – ZDP (Vygotsky, 2007). Na prática, esse conceito expressa o movimento que ocorre na relação entre o que a criança consegue realizar sozinha, sem o auxílio do adulto (zona de desenvolvimento real), e aquilo que ela realiza com ajuda (zona de desenvolvimento potencial). Decorre disso que o modo de inserção social da criança, as interações com o outro na resolução de problemas, o tipo de orientação que recebe, entre outros aspectos, não apenas interferem na formação, mas determinam o curso do seu desenvolvimento intelectual. Esses determinantes, quando ligados aos modos de organização do ensino na lógica tradicional, não são suficientes para levar o estudante ao máximo potencial de desenvolvimento do pensamento matemático (Rosa, 2012).

Segundo Vygotsky (2007), o ensino escolar tem papel essencial no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, capacidades mais elevadas do psiquismo do ser humano: a memorização, a atenção, a imaginação, o planejamento, a ação com intencionalidade, a representação simbólica, o pensamento abstrato, a capacidade de resolver problemas, a formação de conceitos e o uso da linguagem. Essas funções que se desenvolvem pelas determinações sociais e culturais em que o sujeito está inserido, ganham profundidade com a inserção do sujeito na escola. As vivências escolares, a partir da evolução dos processos de instrução, promovem mudanças na interpretação da realidade, pois buscam compreendê-la para além de seus aspectos imediatos. Para Davídov (1988), isso ocorre pelo contato que a criança passa a ter com os objetos da atividade de estudo. Por isso, este contato não pode apenas ser a reprodução da relação com os objetos extraescolares.

Como defendido por Vigotski (2018, p. 537), "o desenvolvimento mental da criança não se caracteriza só por aquilo que ela conhece, mas também pelo que ela pode aprender". Essa compreensão é a chave que abre o caminho para um ensino que desenvolve, contrapondo aqui as concepções que supõem a ocorrência primeiro do desenvolvimento como condição para a aprendizagem. Ao contrário, pensar no ensino que desenvolve é orientar-se para a organização da prática pedagógica com o foco na aprendizagem de conceitos científicos. Ocorre, com isso, uma transformação no modo de interação com o meio social e no desenvolvimento mental do estudante que passa a compreender o mundo pelo viés dos conceitos científicos. Não se trata de abandonar os significados que ele possui acerca da realidade e trocar por um novo significado, mas de uma reestruturação das formas como busca enxergá-la e de uma ressignificação do conteúdo de sua atuação na mesma realidade.

Segundo Vigotski (2018, p. 540), "o conceito científico, obtido na escola, caracteriza-se pelo fato de que a criança o emprega facilmente em resposta a uma pergunta do professor, ou seja, voluntariamente". Assim, os conhecimentos prévios dos alunos são considerados, uma vez que são eles que expressam aquilo que a criança consegue realizar sozinha e o que está em potencial. A partir disso, a problematização, os questionamentos, as informações, todo o conteúdo da organização das tarefas de estudo que o professor propõe ao estudante, revela o novo lugar que ele pode chegar com ajuda e, posteriormente, de forma autônoma.

A aprendizagem, para Vygotsky (2007), quando organizada adequadamente, resulta em desenvolvimento mental, colocando em movimento vários processos que seriam impossíveis de acontecer, não fosse por meio dela. Como exemplo, podemos pensar acerca da aprendizagem da álgebra. Quais os limites do desenvolvimento do pensamento matemático sem a inserção da álgebra nos processos de aprendizagem, ou em sua inserção equivocada? Moretti, Virgens e Romeiro (2021, p. 1461) apontam:

> A ênfase do ensino da álgebra no seu simbolismo lógico-formal, pressupondo a aritmética como pré-requisito [...] tende a valorizar mais a memorização de regras e a reprodução mecânica de algoritmos e técnicas, do que o desenvolvimento de uma forma de pensamento que reconheça, por meio da generalização, os padrões, o movimento, a variação de grandezas e as relações funcionais.

Em vista disso, a aprendizagem que tem base nos conceitos científicos é condição para o desenvolvimento profundo do sujeito escolar. Não apenas porque possibilita o movimento de apropriação de elementos essenciais do conceito (determinados por seus aspectos biológicos, físicos, sociais e culturais), expressos na realização das tarefas de estudo. Mas, porque essas relações surgem como conteúdo presente na consciência do estudante, como meio que o torna capaz de atuar na realidade integralmente, não somente apoiado numa ou noutra capacidade. As estruturas mentais se transformam gradativamente, possibilitando ao estudante organizar melhor sua atividade mental, aperfeiçoá-la e solidificar o conteúdo do pensamento (Vygotsky, 2007). Isso gera equilíbrio entre aspectos da inteligência, afetividade e socialização, pois além de se compreender em atividade, ele percebe mais eficácia na realização de suas ações e operações (Leontiev, 1978).

Portanto, podemos dizer que o ensino que promove a aprendizagem científica qualifica o processo de formação da consciência, uma vez que o estudante passa a vivenciar as relações internas da atividade de estudo por um contato mais amplo e profundo com seus objetos (Davídov, 1988). Essa condição que refletimos até aqui - a passagem do contato com objetos de conhecimento de senso comum aos objetos de conhecimento científico - se caracteriza como via de possibilidade ao caminho do ensino que, intencionalmente, se orienta para o desenvolvimento do estudante. Decorrente dessa condição, surge outra: a possibilidade do estudante entrar em atividade de estudo. Para Leontiev (1978), a formação da consciência está ligada ao desenvolvimento do psiquismo, que ocorre por meio da inserção do sujeito na atividade, determinado pelas relações sociais e pelo lugar que ele ocupa nessas relações.

Essa compreensão parte da seguinte premissa do materialismo histórico: “não é a consciência que determina a vida, mas a vida que determina a consciência” (Marx; Engels, 2011). Isso é importante para pensar nos processos pedagógicos conforme a perspectiva vigotskiana. O modo como o professor organiza o ensino é determinado pela forma como ele compreende as relações que envolvem a atividade do estudante e o processo que gera o seu desenvolvimento. O conceito de atividade está relacionado ao desenvolvimento do sujeito a partir das relações mais vitais que se apresentam para ele. Estas relações surgem inicialmente como necessidade e posteriormente como motivo em cada uma das fases de sua vida (Leontiev, 1978).

Conforme Davídov (1988), essas fases se expressam de forma geral em três atividades principais do ser humano: 1) a atividade de jogo (período de desenvolvimento da criança, em que o foco é a brincadeira); 2) a atividade de estudo (período de desenvolvimento dos jovens, em que o foco é o conhecimento e o autodesenvolvimento); 3) a atividade de trabalho (período de desenvolvimento do adulto, em que o foco é a concretização de suas objetivações, ou seja, sua produção). A escola, nesse sentido, se caracteriza como o lugar onde ocorre a transição da atividade da criança para a atividade do adulto.

Existem outras atividades que também são consideradas principais em fases anteriores do desenvolvimento humano. Por exemplo, a comunicação emocional que é desenvolvida nos bebês logo nas primeiras semanas de vida. Essa comunicação ocorre de forma direta com as pessoas, sendo a mais significativa para o desenvolvimento. Por meio dela se formam as ações orientadoras e sensório-motoras de manipulação. No decorrer do desenvolvimento, a atividade manipuladora passa a ser a nova atividade principal, enquanto a comunicação emocional passa a ser uma atividade subsidiária (Elkonin, 1987).

Estas atividades antecedem a atividade de jogo na criança pré-escolar. O movimento de transição de uma atividade a outra se revela novamente com a chegada da criança na escola. No período escolar, a atividade de estudos na vida da criança e do adolescente dirige o movimento do seguinte modo: primeiro se torna o principal meio de orientar as transformações que ocorrem no psiquismo da criança; segundo, na adolescência, subsidia a comunicação com os pares; terceiro, na idade avançada, se torna um meio de orientação e de preparação dos jovens ao trabalho profissional. Assim, quando o professor compreende o sujeito em atividade surge para ele elementos determinantes para a organização do ensino. Isso porque cada tarefa que propõe ao estudante carrega a forma e o conteúdo da aprendizagem (entendida aqui como finalidade e motivo da atividade de estudo).

A atividade, diz Leontiev (1978, p. 296), se caracteriza “por uma meta a que o processo se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é o motivo”. Sua estrutura se caracteriza por duas dimensões: a orientação e a execução. Na orientação, surge a razão da atividade e o objeto para qual ela se dirige. Esta, compõe a unidade entre necessidades, motivos e finalidades, que movem o sujeito a agir. Na dimensão executora são consideradas as ações e operações que compõem a realização da atividade. Para Davídov (1988), isso ocorre por meio de tarefas que o sujeito executa para atingir seus objetivos (finalidades). Nessa dimensão, os objetivos se relacionam com as ações e as condições com as operações.

Com base nisso, refletimos: ao organizar tarefas de estudo, o professor cria condições para que o estudante entre em contato com os objetos de conhecimento e, a partir desse contato, se oriente para atingir as finalidades das operações que realiza em sua ação de estudo. A razão que põe o estudante a agir como base na relação com os objetos se expressa como motivo da atividade. Se pensarmos no estudo considerando a avaliação como expressão última de uma sequência de ensino, inicialmente, esse motivo se caracteriza pela nota que o professor atribui à realização da tarefa. Mas, se o contato com os objetos de conhecimento propiciar a apropriação dos conceitos de forma adequada, ao realizar a tarefa que o professor propõe, o estudante experimenta a possibilidade de aprender e se desenvolver.

Assim, a aprendizagem, que surge num primeiro momento como finalidade do estudo e se revela como um motivo apenas compreensível, se torna um motivo eficiente da atividade. Como diz Leontiev (1978), um motivo que leva de fato o sujeito a agir. Portanto, a organização do ensino adequada é aquela que põe o estudante em atividade de estudo, transformando o motivo “aprendizagem” que se revela de início de modo apenas compreensível, em um motivo eficaz. Ocorre que o objeto da atividade passa a ser o gerador do motivo que coloca o sujeito a agir. Aqui está a importância de um modo de organização do ensino que, intencionalmente, coloque o estudante em atividade de estudo (movido pelas razões próprias de sua atividade).

A atividade de estudo, em diferentes níveis de formação, surge como caminho condutor do estudante ao inseri-lo em um processo de aprendizagem tornando-o sujeito capaz de atuar de maneira autônoma em seu ambiente. Uma tarefa de estudo bem elaborada promove mediações do estudante com os conhecimentos de tal modo que ele passa a reconhecer a necessidade e a importância destes conhecimentos. Esse movimento de conexão entre o motivo e a finalidade da atividade é o que gera sentido para o estudante em sua prática (Leontiev, 1978). Além de contemplar os componentes estruturais da atividade, que são dirigidos a um conteúdo objetal específico, em vista do princípio criativo e transformador, a organização do processo didático e educativo prevê um adequado tratamento da necessidade. Isso requer dos estudantes a experimentação com o material de estudo e do professor a atenção ao cumprimento pleno das ações e operações realizadas (nesse caso, cada tarefa executada possibilita uma nova condição, emergindo uma nova necessidade). Parafraseando Davídov e Slobódchikov (1991), Búrigo (2015, p. 35) descreve que “o estudante somente assimila algum conceito na atividade de estudo quando ele experimenta uma necessidade interna e uma motivação para tal”.

A atividade de estudo, conforme proposta por Davídov (1988), organiza-se com uma estrutura de ações que visam um modo de agir cientificamente sobre o conteúdo, com o objetivo de formar no estudante a capacidade de dominar o procedimento geral que constitui o objeto estudado. Tão importante quanto o conceito adquirido é a forma de sua aquisição. Ao ser apropriado, um conceito pode ser utilizado na aquisição de outros. O ensino de matemática, pela forte relação de interdependência dos seus conhecimentos, necessita desse movimento.

No que se refere à teoria do Ensino Desenvolvimental, compreender esse processo surge como uma possibilidade. Nele se formam as bases para o pensamento teórico e criativo, para a capacidade de análise, de reflexão e de planejamento mental dos estudantes. A tarefa de estudo organizada com o objetivo de colocar o estudante em atividade, necessariamente com base nos conhecimentos científicos, gera um movimento em que o estudante, ao realizá-la, não apenas se apropria mecanicamente dos significados verbais referentes ao conceito. Mas, se põe a resolver problemas que exigem dele novos conhecimentos e métodos. Surge para ele a necessidade de buscar novas formas de representação, uma vez que, as representações que conhece não são mais suficientes para expressar a realidade. A tarefa de estudo, nesse sentido, tem papel essencial na ocorrência da zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky, 1993), pois é por ela que o professor pode "ajustar a distância" entre o nível real e potencial da aprendizagem e do desenvolvimento do estudante.

Davídov (1988), ao desenvolver a Teoria do Ensino Desenvolvimental, evidencia a importância do ensino que orienta para a compreensão dos conceitos essenciais relacionados aos objetos de conhecimento. A partir das teses de Vigotski, o autor defende nas proposições para o ensino de matemática, que o desenvolvimento do pensamento teórico é uma finalidade desde os anos iniciais. Isso exige do professor o envolvimento da criança (por meio das tarefas de estudo) em situações que o levem a reflexões e análises de modo que se evidencie para ela, na realização da tarefa, aspectos da origem dos conceitos matemáticos, seus nexos essenciais e a lógica histórica do seu desenvolvimento. Essa organização direciona o estudante a refletir, generalizar e abstrair o conteúdo novo, que se torna conteúdo concreto de seu pensamento.

Nesse sentido, surge a necessidade de rever o papel do estudante e do professor no processo de aprendizagem, em vista de superar as práticas pedagógicas que colocam o sujeito como um mero receptor de informações. O processo de ensino e aprendizagem exige a inserção do estudante em situações orientadas de estudo que o coloquem a pensar mediante a elaboração de hipóteses, visando desenvolver sua capacidade de análise. Nesse contexto, a atividade de estudo passa a ser compreendida como um processo dinâmico, em que o estudante se apropria dos conceitos por meio de ações e operações (mediadas e intencionais) que realiza, como um sujeito ativo no processo. Ou seja, não aprende apenas pela significação posta pelo professor na explicação de um ou outro conceito, mas pela necessidade de colocar tal conceito (ainda que não o conheça plenamente) numa situação conhecida no contexto de sua tarefa. Entendemos que assim, as significações abstraídas passam a fazer sentido na atividade do estudante.

O conceito de atividade, elementar na organização do ensino por essa perspectiva, se torna central em qualquer análise direcionada ao sujeito escolar. Tanto para a compreensão de situações particulares, como as dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo da matemática (busca inicial deste trabalho), quanto para se pensar de forma mais geral no processo de aprendizagem matemática (para onde este trabalho se orienta). Vale salientar que ambos os aspectos são entendidos em unidade. Essa unidade nos orienta para a aprendizagem matemática como ponto de partida e de chegada em nossas reflexões. No caso, uma tentativa de buscar alternativas para superar nossas próprias práticas que consideramos sob o viés tradicional de ensino.

A partir dessa reflexão, apontamos outra possibilidade que leva ao caminho da teoria do Ensino Desenvolvimental: a Atividade Orientadora de Ensino (AOE). Esta perspectiva surge no cenário brasileiro como uma unidade formativa do professor e do estudante (Moura, 2006). Compreende a atividade de ensino e estudo na unidade da atividade pedagógica que coloca o professor como agente do ensino e o estudante do estudo, considerando, apesar de ocuparem posições substancialmente diferentes nas relações escolares, que se orientam para objetivos que convergem ao mesmo fim: o desenvolvimento do sujeito pelas relações escolares. A Atividade Orientadora de Ensino como perspectiva de educação, tem como conteúdo os objetos de ensino e métodos referente ao conhecimento escolar (científico), com sua base nas relações essenciais que expressam objetos e métodos da atividade humana, sobretudo, da formação da consciência.

Segue os princípios da Teoria Histórico-Cultural, tendo em uma de suas expressões a Teoria da Atividade. Com base nesses fundamentos entende a organização de ensino como elemento central na educação escolar ao menos em dois aspectos: 1) como motivo revela a possibilidade de passar a experiência social da humanidade de geração em geração, com objetivos ligados à cultura, de modo que se torne experiência do sujeito; 2) como objeto revela o conhecimento teórico historicamente produzido. A relação entre o motivo e o objeto, se dá pela necessidade social de formação da personalidade humana. Ou seja: em última análise, essa perspectiva compreende que a escola se orienta para a formação da personalidade. Sem nos atermos de forma profunda sobre o desenvolvimento da personalidade a partir do conhecimento escolar, com base em Leontiev (1978), destacamos apenas a importância do conhecimento científico na formação do sujeito concreto. Ora, qual a concretude sobre as relações e conteúdo da realidade, tem acesso o sujeito que se desenvolve sob a base do conhecimento apenas de senso comum, comparado ao sujeito que se desenvolve sob a base do conhecimento científico?

4.2 A INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE NÚMERO À LUZ DAS CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

O sistema de ensino brasileiro apresenta, por meio de programas de validação e escolha de livros didáticos, como o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) (PNLD), um denso material disponível aos professores para o ensino dos componentes curriculares, dentre eles, a matemática. O PNLD realiza a seleção, avaliação e distribuição de obras didáticas a escolas públicas de educação básica, com base em critérios pedagógicos, metodológicos e alinhamento à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). Nestes materiais se expressam diversas metodologias de ensino do conceito de número, principalmente nos anos iniciais da criança na escola, com predominância na contagem de forma memorística, reproduzindo os números naturais associados diretamente a objetos, dentre outros aspectos que caracterizam o ensino na lógica tradicional.

Numa breve observação em alguns livros didáticos - Infâncias: Literacia e Numeracia (Silvana Rossi Júlio, 2020); Da escola para o mundo (Rodrigo Pessota, 2021); Matemática e Realidade (Gelson Iezzi, 2022) - identificamos os referidos princípios de contagem desde os anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino de número até os anos finais, quando surge nestes livros números fracionários e os negativos. As tendências de ensino de matemática expressas nestes materiais, com base em Damazio e Rosa (2013), não apresentam subsídios necessários para a superação do que Davídov (1988) chama de lógica tradicional de ensino. Na busca pela superação desses princípios, de acordo com esses autores, torna-se necessário o reconhecimento da perspectiva Histórico-Cultural como tendência em educação matemática.

Como referência, Davydov e seus colaboradores elaboraram e desenvolveram, em sala de aula, durante vinte e cinco anos, uma proposta de ensino a partir dos pressupostos dessa perspectiva. A proposta consiste na reestruturação curricular que envolve, além da metodologia a ser utilizada, a reorganização dos conceitos a serem formados. Ocorre uma transformação no movimento da atividade de ensino e de estudo, em sua forma e conteúdo.

Para Davýdov (1982), Rosa (2012) e Búrigo (2015), nessa proposta, a organização do ensino tem o objetivo de desenvolver o pensamento teórico dos estudantes. O que ocorre por meio da apropriação dos conceitos científicos, quando o estudante supera o desenvolvimento do pensamento empírico, pelo contato mais amplo e mais profundo que se estabelece com os conhecimentos. Contato este, intencionalmente orientado pelo professor, com a finalidade de levar o estudante a um nível mais avançado de apropriação dos conceitos. Esse movimento contrapõe a ideia de levar ao estudante apenas o conhecimento empírico e utilitário que, conforme Rosa (2012), ao invés de promover o desenvolvimento do pensamento teórico, cria obstáculos para atingi-lo.

De acordo com Davýdov (1982), a organização do ensino não pode limitar-se a oferecer apenas fatos ou informações sobre os conhecimentos. O ensino escolar pressupõe levar o estudante a desenvolver capacidade de se orientar na informação científica e em outros conhecimentos de forma independente (pela compreensão dos aspectos gerais dos conceitos envolvidos). A aprendizagem dos conceitos científicos, pela compreensão de seus aspectos gerais, constitui a base para a aprendizagem escolar e, consequentemente, sua aplicação em situações específicas.

O autor propõe que a escola organize o ensino de forma que coloque o estudante em atividade de estudo. Parte do princípio que ele participa ativamente no processo de aprendizagem, ao estabelecer relação entre as razões e os fins das tarefas que realiza na prática com os objetos de sua atividade. Essa participação ocorre quando a tarefa desperta seu interesse a partir da necessidade de entender cada passo da tarefa que leva à formação dos conceitos. A organização da atividade de estudo, que estrutura a prática pedagógica centrada nos conceitos científicos, tem base nas necessidades de assimilação dos conhecimentos científicos, condição para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Ao contrário da proposta modernista para a introdução do conceito de número, em que o estudante é submetido a tarefas que o levam a estabelecer relações biunívocas entre dois tipos de conjuntos, como a relação de quantidade e o signo numérico, essa proposta visa instigá-lo a refletir e buscar a essência do conceito, com abstrações que revelam o conteúdo substancial que o constitui (Davydov, 1985). Assim, o ensino do conceito de número é formado por meio da criação de necessidades que se assemelham às vividas pela humanidade durante seu surgimento (sua lógica histórica). O papel da escola, portanto, visa criar condições para que a criança se aproprie dessa lógica: no caso do conceito de número, a comparação entre as grandezas.

Essas condições são geradas por meio de tarefas que levam à comparação de objetos por tamanho ou quantidade de forma não imediata, orientando o estudante a observar um método geral para resolver o problema. Esse movimento possibilita à criança aprender a medir e contar, assimilando o movimento expresso nessas operações com grandezas ao conceito de número. A partir do primeiro ano do Ensino Fundamental se introduz o conceito de número por meio da comparação com grandezas, correlacionando aritmética, geometria e álgebra. Os estudantes realizam tarefas que os levam a representar os números nas três formas descritas. Entendemos que a álgebra liberta o pensamento das dependências numéricas concretas e eleva a um nível mais abstrato e generalizado (Vigotsky, 2000). A introdução do conceito de número por essa interconexão se revela do seguinte modo: “aritméticas (sequência numérica concreta, numerais...), algébricas (variável, expressão algébrica...) e geométricas (reta numérica, segmento de reta, ponto...) do conceito de número em Davydov” (Rosa, 2012, p. 227).

O Ensino Desenvolvimental se destaca em duas formas diferentes: 1- forma de tratar os fundamentos matemáticos na organização do ensino; 2- modo de abordar as atividades de estudo. Se embasa em categorias para a compreensão do método dialético para a organização do ensino de matemática, visando: a não tricotomia entre conceitos aritméticos, geométricos e algébricos (Rosa, 2012); o movimento de ascensão do abstrato ao concreto do pensamento (Freitas, 2016); e as necessidades pedagógicas e conceituais por (Búrigo, 2015).

Rosa (2012) mostra como, tradicionalmente, o ensino de número natural começa com a contagem e a memorização de sequências numéricas, o que pode levar a uma compreensão superficial dos conceitos matemáticos. Davydov (1985) propõe que a introdução aos números não comece com os naturais, mas com a ideia de quantidade e relações entre grandezas. Isso significa que, em vez de aprender números isoladamente, os alunos devem compreender a necessidade dos números como representações de relações quantitativas. Por exemplo, deixar de apresentar os números naturais apenas pela contagem e explorar situações geométricas (como comparação de grandezas comprimento, área, volume, entre outras) e algébricas (relações entre quantidades).

Desse modo, o papel do professor, no ensino, visa a transformação do conteúdo teórico que se expressa nas tarefas de estudo, bem como, o seu movimento. Diferente do modo de ensino tradicional, que ocorre com base no uso de relações imediatas (concretas e/ou empíricas), nas tarefas de estudo organizadas a partir das necessidades conceituais (em que uma tarefa leva a necessidade de realizar outra, que se dirige para a formação do conceito), a aprendizagem se orienta para o desenvolvimento das capacidades de estabelecer relações entre os conceitos, observação, análise e síntese.

A possibilidade de superação dos modos tradicionais de elaboração de tarefas de estudo, para essa perspectiva (Davídov, 1988; Rosa, 2012), está na organização de ensino que se efetiva por meio de seis ações de estudos: 1) transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado. Nessa ação, ocorre a análise no plano objetal-sensorial do conteúdo. Os alunos são colocados em situações que revelam as necessidades dos conceitos teóricos de número, onde ocorrem as transformações dos dados objetais da tarefa de estudo.

2) Modelação da relação universal na unidade das formas literal, gráfica e objetal. Visa estabelecer a relação universal e essencial que possibilita análises posteriores. O seu conteúdo estabelece as propriedades internas do conceito, por representação literal, gráfica e objetal. Trata-se: a) das expressões matemáticas e equações; b) dos desenhos, diagramas ou tabelas; c) do uso de materiais concretos (objetais), como blocos, recortes de papel, recipientes, réguas ou balanças. isso fixam as características que não podem ser percebidas diretamente e, por isso, "os modelos de estudo constituem o elo interno imprescindível no processo de assimilação dos conhecimentos teóricos e dos procedimentos generalizados de ação" (Davídov, 1988, p. 182). A modelação construída por meio de símbolos ou de signos e suas relações, é um aspecto da idealização e implica na elaboração de modelos visuais com uma estrutura que remete à estrutura do objeto estudado).

3) Transformação do modelo da relação universal para estudar suas propriedades em forma pura; É a experimentação com o modelo com o intuito de estudar minuciosamente as propriedades da relação geral antes observada, permitindo identificar padrões e regularidades. Quando exposto a tarefa e diante de seus dados, os alunos não conseguem enxergar a relação universal do objeto que não se pode ver pelas suas circunstâncias acessórias. Mas com o modelo, a relação universal aparece e ocorrem as transformações, o que possibilita ao aluno estudar suas propriedades e perceber as conexões internas do objeto. Ao fim dessas três ações, o aluno já consegue desenvolver uma generalização do objeto e aplicá-lo a vários casos particulares, algo importante para a próxima ação.

4) Dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral. Na realização das ações de estudo, os alunos concretizam a tarefa inicial e se apropriam de um procedimento geral de resolução e, com isso, convertem-se na diversidade de tarefas particulares que podem ser resolvidas pelo modelo único.

5) Controle da realização das ações anteriores. Assegura que o procedimento geral da ação, tenha todas as operações indispensáveis para a resolução da diversidade de tarefas concretas particulares. Para isso, mantém a coerência operacional das outras ações conforme foram executadas.

6) Avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada. O professor avalia se os alunos internalizaram o conceito e o procedimento matemático. A avaliação não se limita à resposta correta, mas verifica se o aluno compreende

a lógica por trás da solução e o nível de compreensão e se consegue realizar os procedimentos nas tarefas práticas.

Essas ações possibilitam os alunos vivenciarem o processo e entenderem as condições pelas quais foram formados os conceitos. Revelam o movimento da apropriação dos conceitos de modo que em cada tarefa realizada o estudante, por si mesmo, forma o conceito “ainda que sob a orientação sistemática do professor (ao mesmo tempo, o caráter dessa direção muda paulatinamente, e cresce, também paulatinamente, o grau de autonomia do escolar)” (Davídov, 1988, p. 184). Esse movimento leva ao desenvolvimento da capacidade de refletir, analisar e compreender a realidade de forma profunda e articulada.

Na pesquisa de Freitas (2016), os conceitos primordiais para o desenvolvimento do pensamento se revelam nas categorias: concreto e abstrato; análise e síntese; essência e fenômeno; abstração e generalização. Esses conceitos contribuem para o movimento do pensamento que foi investigado pela autora como unidade de análise de tarefas: movimento de redução, do concreto ao abstrato; e movimento de ascensão, do abstrato ao concreto Davydov (1982). Esses movimentos revelam o processo de internalização dos conceitos, na forma de abstração, e sua exteriorização, na forma pensamento concreto, quando se manifesta o que foi apropriado. Ancorado em Davydov, ela destaca que o conceito de essência e fenômeno ocorre quando o objeto de estudo é apresentado em toda sua diversidade, o que se expressa nos dois movimentos.

No ensino de números fracionários, Freitas (2016) defende o uso de medidas de grandezas e define que fração é uma forma de medição, a exemplo, a quantidade de vezes que uma determinada medida cabe em outra ou quantas vezes precisa de uma medida para alcançar outra medida, estabelecendo a relação de multiplicidade e divisibilidade. Diferentemente da abordagem tradicional, que prioriza a repetição de regras e procedimentos mecânicos, essa proposta enfatiza a formação conceitual das frações a partir da compreensão das relações entre grandezas e da necessidade real dos alunos em representar quantidades não inteiras. Esse método busca desenvolver o pensamento teórico, possibilitando a compreensão das frações como um sistema conceitual interligado à relação entre grandezas.

A autora também discute como as tarefas particulares sugeridas por Davydov favorecem a internalização do conceito de fração ao promoverem situações-problema que exigem a análise e a generalização de relações matemáticas. Essas tarefas estimulam o movimento do pensamento dos alunos, levando-os a perceber as frações não apenas como partes de um todo, mas como operadores e medidas de grandezas variáveis. Assim, o ensino fracionário, nessa perspectiva, não se limita à aplicação de algoritmos. Ao contrário, por meio da apropriação da lógica histórica dos conceitos e de suas relações gerais, leva os estudantes a manifestarem a apropriação dos elementos gerais dos conceitos (expressas em modelos) em situações particulares, na busca pelo desenvolvimento do pensamento teórico do estudante.

No que se refere ao conceito de número, Búrigo (2015), em sua dissertação busca entender quais as necessidades que se apresentam na atividade de ensino e estudo através das tarefas particulares na proposta davydoviana para o ensino de número negativo. Em seu estudo, analisa o ensino em duas categorias, sendo a primeira a necessidade de ordem conceitual e a segunda a necessidade pedagógica. O autor define a necessidade como a falta de algo sendo a precursora para a realização de toda atividade humana. Assim, como necessidade conceitual as significações de negativos como a ideia de oposto dos positivos, que são ensinados através do uso de grandezas escalares e nessa proposta para o ensino dos negativos há a necessidade da mudança de grandeza para a grandeza vetorial.

Ao se orientar para a investigação acerca da organização do ensino, Búrigo (2015) aponta o uso da grandeza vetorial nas tarefas particulares para a introdução do conceito de número negativo e sua localização na reta numérica. Aponta o conceito de deslocamento como essencial, a partir do qual gera a ideia de módulo direção e sentido. Esses conceitos, inerentes à inclusão do vetor nas tarefas de estudo, mostram os sentidos do deslocamento, expressando como surge a necessidade do número negativo em contraposição ao positivo. As tarefas usadas nessa parte introdutória permitem ao aluno perceber que os números já conhecidos, sendo eles os positivos não são suficientes para satisfazer a necessidade proposta pela tarefa, a exemplo, quando em uma subtração tem minuendo menor que o subtraendo ou subtrações sucessivas que precise ultrapassar o zero na reta numérica.

Diante dessa forma de introduzir o conceito de negativo, Búrigo (2015) explica que essa proposta não se diferencia do ensino tradicional apenas nessa etapa do ensino, pois enquanto no ensino tradicional as tarefas se diferenciam pelo nível de complexidade, na proposição davydoviana existe uma grande articulação entre as tarefas particulares, e esse vínculo gera, ao aplicar uma tarefa, pelo menos duas necessidades a emergência da próxima tarefa e a indicação do novo conceito a ser trabalhado. Fica evidente a relação de interdependência entre os conceitos matemáticos.

A princípio, pode ser vista na proposta davydoviana sobre a introdução do conceito de número e estudada pelos três pesquisadores referenciados, uma relação através do modelo universal, a comparação entre grandezas: a medição quando a unidade cabe inteiras vezes no objeto no conceito de números naturais (Rosa, 2012); subdivisão da unidade básica e criação de medidas intermediárias para números fracionários (Freitas, 2016) e necessidade de novo método de medição para grandezas vetoriais para números negativos (Búrigo, 2015), não de ordem cronológica ou de níveis, porém, apresentam-se com uma relação de complemento.

Em vista disso, a proposta davydoviana para o ensino de número negativo, analisada por Búrigo (2015), fundamenta-se na relação entre grandezas vetoriais e escalares, rompendo com abordagens tradicionais que priorizam os números naturais. O estudo destaca como a mediação de conceitos como vetor, módulo e sentido cria condições para a compreensão teórica da relatividade numérica (positivo/negativo), alinhando-se aos princípios da Teoria Histórico-Cultural (Davýdov, 1982; Rosa, 2012).

A transição das grandezas escalares para as vetoriais é um marco na proposta. Enquanto grandezas como comprimento e massa são medidas por números positivos, o deslocamento vetorial — com direção e sentido — introduz a necessidade de números que expressam oposição. Essa mudança é exemplificada em tarefas que envolvem movimentos em retas orientadas, nas quais a ultrapassagem do ponto zero demanda novos significados numéricos (Búrigo, 2015). Assim sendo, conforme o autor, o vetor surge como um conceito-chave, representando não apenas magnitude, mas também orientação. Sua comparação exige a análise de módulo (comprimento) e sentido (direção), o que leva à formulação de número negativo quando os vetores têm sentidos opostos. Por exemplo, um deslocamento para a esquerda em uma reta numérica pode ser representado por um número negativo, enquanto o mesmo módulo para a direita é positivo.

As tarefas analisadas evidenciam uma progressão didática cuidadosa. Inicialmente, os estudantes trabalham com grandezas escalares familiares (como medir segmentos) para, em seguida, aplicarem o mesmo método a vetores. Essa transição é mediada por problemas que exigem a comparação de deslocamentos em sentidos contrários, gerando a necessidade de um sistema numérico ampliado. A subtração sucessiva em uma reta numérica é uma das estratégias utilizadas para introduzir os números negativos. Ao subtrair valores de um ponto inicial, os estudantes são levados a ultrapassar o zero, confrontando-se com a impossibilidade de representar tais resultados com números positivos. Essa limitação motiva a formalização dos negativos como soluções para problemas até então sem resposta.

Outro eixo central apontado por Búrigo (2015) é a resolução de equações que demandam números negativos, como *x + 356 = 178*. Tarefas desse tipo expõem as lacunas do sistema numérico conhecido pelos estudantes, reforçando a necessidade de um novo conceito. A abordagem davydoviana evita definições abstratas, preferindo situações concretas que evidenciem a utilidade dos negativos. A representação dos números negativos na reta numérica é consolidada por meio de tarefas que exploram vetores opostos. Por exemplo, o vetor *-b* (oposto a *b*) é associado a um número negativo, mantendo o módulo, mas invertendo o sentido. Essa modelagem gráfica vincula a ideia de "oposto" à operação matemática, tornando compreensiva a simetria entre positivos e negativos (Búrigo, 2015).

Ainda no que se refere à superação das representações abstratas, o zero, nessa proposta, não é apenas a ausência de quantidade, mas um ponto de referência para a relatividade numérica. Sua posição central na reta destaca seu papel como origem para os sentidos positivo e negativo, superando visões restritivas que o associam apenas ao "nada". Desse modo, conforme Búrigo (2015), o número zero também surge de uma relação de necessidade conceitual que se expressa em uma tarefa particular. Longe de ser um simples marcador de ausência, o zero assume o papel de ponto de referência para a construção da simetria entre positivos e negativos. Essa abordagem contrasta com métodos tradicionais, onde o zero é introduzido de forma isolada, sem conexão com a ideia de relatividade numérica. Ao situá-lo como centro de uma estrutura orientada, a proposta davydoviana reforça sua função como origem de dois sentidos opostos.

As dificuldades históricas e epistemológicas relacionadas ao número negativo são abordadas de forma contextualizada. Obstáculos como a rejeição a quantidades "abaixo de zero" são superados mediante tarefas que vinculam os negativos a grandezas vetoriais, como deslocamentos e temperaturas, dando significado concreto a conceitos abstratos. A articulação entre conceitos matemáticos e princípios pedagógicos é um diferencial da proposta. Ao priorizar o pensamento teórico, a abordagem davydoviana evita a memorização de regras, enfatizando a compreensão das relações entre grandezas. Isso se reflete na seleção de tarefas que exigem análise, comparação e generalização (Davýdov, 1988; Rosa, 2012).

As tarefas analisadas por Búrigo (2015) revelam uma estrutura cíclica: cada nova necessidade conceitual surge da resolução de problemas anteriores, criando um fluxo contínuo de aprendizagem. Por exemplo, a comparação de vetores leva à definição de opostos, que por sua vez demanda a representação numérica dessas relações. A proposta davydoviana rejeita a abordagem fragmentada (naturais → inteiros → racionais), defendendo que a relação entre grandezas deve ser o eixo unificador desde os anos iniciais. Assim, a formação do conceito de número negativo na abordagem davydoviana é marcada por uma ruptura com a visão estática do número como mero indicador de quantidade discreta, sobretudo de um número inteiro positivo. Ao invés disso, os números são apresentados como relações entre grandezas discretas e contínuas, em que o negativo surge da necessidade de expressar oposição ou inversão em contextos vetoriais.

As tarefas propostas evidenciam uma cuidadosa progressão didática. Partindo de situações concretas (como deslocamentos em retas), os estudantes são conduzidos a generalizações graduais, evitando saltos abruptos para o formalismo matemático. Por exemplo, antes de trabalhar com operações entre negativos, exploram-se comparações de vetores, garantindo que o conceito esteja ancorado em significados tangíveis. A noção de "oposto" é central no processo. Enquanto na matemática tradicional o oposto é apresentado como uma regra (-a é o oposto de + a), na proposta davydoviana ele emerge da manipulação de vetores com sentidos contrários. Essa construção visual e cinestésica facilita a internalização de propriedades como -(-a) = a, que deixam de ser meras convenções para se tornarem conclusões lógicas (Búrigo, 2015).

A integração entre aritmética, álgebra e geometria é outro diferencial. Problemas que envolvem equações são resolvidos tanto numericamente quanto por representações gráficas, reforçando a conexão entre as diferentes linguagens matemáticas. Essa tríade possibilita aos estudantes transitar entre o concreto e o abstrato, desenvolvendo flexibilidade de pensamento (Rosa, 2012). A eficácia da proposta davydoviana reside na coerência entre seus fundamentos teóricos e sua operacionalização. Ao tratar os números negativos como relações e não como entidades isoladas, ela oferece uma alternativa robusta às limitações do ensino tradicional, pavimentando o caminho para uma aprendizagem significativa.

4.3 ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE NÚMERO NEGATIVO À LUZ DA PROPOSTA DAVYDOVIANA: DESAFIOS E POSSIBILIDADES NA ELABORAÇÃO DE TAREFAS

Com base nos princípios da Teoria Histórico-Cultural mencionados até aqui - o desenvolvimento humano a partir da aprendizagem que ocorre nas interações sociais, sobretudo as escolares; a linguagem como elemento essencial para assimilação e apropriação da cultura produzida pela humanidade; a atividade humana como condição para o surgimento e formação da consciência; entre outros -, direcionamos nossa análise para a formação humana pelo viés do processo de organização do ensino. Para tanto, nos colocamos na tentativa de elaborar tarefas de estudo envolvendo o conceito de número negativo a partir das reflexões realizadas acerca do Ensino Desenvolvimental. Entendemos que ao experimentar como se operacionaliza a atividade de ensino pela elaboração de uma tarefa de estudo, se revela o conteúdo substancial que orienta ou não o estudante à atividade de estudo.

Essa análise tem o propósito de identificar possibilidades para o ensino do conceito de número negativo, bem como, encontrar caminhos que levem à superação da lógica tradicional de ensino. Como evidenciado anteriormente, entendemos a Teoria do Ensino Desenvolvimental como uma possibilidade. Mas, como a correta organização das tarefas de estudo se torna um determinante essencial para a orientação da atividade do estudante, de sua compreensão acerca dos conhecimentos historicamente produzidos e, consequentemente, do seu desenvolvimento? Refletimos acerca dessas questões por duas vias: I) sob o olhar da atividade humana; II) sob o olhar da formação do conceito.

Por meio destas duas vias, que compõe nossa unidade de análise acerca da tarefa de estudo, estabelecemos as seguintes categorias de análise, já expostas anteriormente: a) a relação de multiplicidade e divisibilidade reconhecendo a grandeza como elemento essencial (conceito de número); b) necessidade de ordem conceitual e pedagógica acerca do ensino de número negativo (especificação de módulo e sentido e a ideia de superar o movimento apenas escalar com a comparação de vetores a partir da introdução da grandeza deslocamento); c) o motivo e a finalidade da organização da tarefa de estudo com o foco no desenvolvimento do pensamento teórico do estudante, o que requer a formação de abstrações e generalizações que expressam a lógica histórica dos conceitos.

O primeiro desafio que surgiu, antes mesmo de nos colocarmos na elaboração da tarefa de estudo envolvendo número negativo, diz respeito à contextualização. Atribuir ludicidade para a tarefa, tendência que identificamos aparecer com certa predominância quando se pensa no ensino dirigido à criança em idade escolar, surge como um desafio, uma vez que as relações conceituais podem ficar submersas ao contexto da tarefa, ou até mesmo serem extintas. Isso não quer dizer que o lúdico não seja importante. De acordo com Davídov (1988) a atividade de jogo antecede a atividade de estudo, o que torna conveniente utilizar elementos dela na transição à atividade de estudo. Contudo, o lúdico pelo lúdico não gera formação do conceito nem coloca por si mesmo o estudante em atividade, por mais atraente que seja a elaboração da tarefa. Desse modo, o desafio maior não está em criar o contexto mais adequado à realidade do estudante, mas, estabelecer nesse contexto as relações conceituais mais adequadas.

Inicialmente, ao refletirmos acerca do contexto da tarefa, percebemos que nossas ideias sobre a introdução do conceito de número negativo estavam "fixadas" apenas no uso da grandeza escalar, reproduzindo o conteúdo que havíamos criticado nos modos tradicionais. Isso nos levou à conclusão de que nossa prática atual reproduz esse modo de ensino. Observamos a seguinte situação, compatível ao nosso pensamento inicial:

> *Duas formigas saem de seus formigueiros em busca de comida. A formiga X andou 10 passos à direita até chegar ao lugar onde estava localizada a lixeira.*

> *A formiga Y, que estava no formigueiro à esquerda de X, andou 15 passos para chegar à mesma lixeira. Analise a situação e responda:*
> *Qual formiga estava mais perto da comida?*
> *Qual a diferença de distância entre as formigas?*
> *Se a formiga X está na posição 0, qual a posição da formiga Y?*

Façamos agora o esforço para pensar a mesma situação num contexto mais elaborado, prevendo que as crianças darão nome às formigas, que será desenhada uma reta numérica no chão da sala de aula e demarcada a posição dos formigueiros, entre outros atributos ao contexto da situação, que a tornem mais atrativa. A tarefa vai permanecer substancialmente escassa de conteúdo teórico se os problemas relacionados aos conceitos essenciais não forem resolvidos. Para Rosa (2012), a relação genética (essencial) do conceito de número está na comparação entre as grandezas. Observamos que se a tarefa não orienta a criança a refletir sobre a comparação entre o tamanho dos passos das formigas, mais do que isso, se ela induz que considerem de mesma proporção, numa lógica de grandeza discreta (aritmética) compatível com a ideia de número natural, a criança (estudante) permanece no mesmo nível de compreensão que chegou.

Posteriormente, a ideia de número negativo será introduzida para a criança na mesma lógica. Os conceitos, necessariamente, serão atribuídos por uma definição (para a esquerda na reta, tomando como referência o 0 como origem, o número será negativo, para a direita, positivo). Podemos dizer, com base em Freitas (2016) e Davídov e Slobódchikov (1991), que o modo de organização do ensino (expresso nessa tarefa) se mantém na lógica tradicional. Isso porque não há indícios de ocorrência de uma substituição do princípio do caráter sucessivo pelo princípio do caráter científico. A tarefa não gera na criança a necessidade de investigar, não revela o que há de efetivamente novo no conteúdo de aprendizagem, nem suas possíveis generalizações. Ela abstrai o conteúdo a partir do que conhece. Essa forma de abstração revela, conforme a autora, uma forma de ensino que se embasa no princípio da acessibilidade da lógica tradicional. Este não é substituído pelo princípio da educação que desenvolve. A tarefa não possibilita à criança o acesso, por prospecção, aos conceitos que ainda não conhece, por exemplo, a ideia de direção e sentido, a não ser pela definição do professor.

Conforme a autora, tal definição caracteriza o princípio do caráter consciente da lógica tradicional, que não é substituído pelo princípio da atividade, que leva a criança a associar essa tarefa a uma próxima, a partir da necessidade gerada nela. Uma vez que a tarefa se encerra na definição do professor, o estudante não tem a necessidade de entrar em atividade de estudo, mas de fazer uso da memorização mecânica para conceituar a partir do significado atribuído ao conceito. Por fim, a tarefa expressa o princípio do caráter visual, em que a sensibilidade da criança se torna o atributo principal para a significação dos conceitos. Esse, para a perspectiva davydoviana, tem que ser substituído pelo princípio do caráter objetal. No caso, as relações sensoriais concretas propostas nas tarefas são mediatizadas pelas relações gerais do conceito novo que a criança vai aprender. Para Freitas (2016), parafraseando Davídov (1987), a tarefa leva a criança a encontrar o conteúdo geral do conceito, para depois fazer uso em análises de situações particulares.

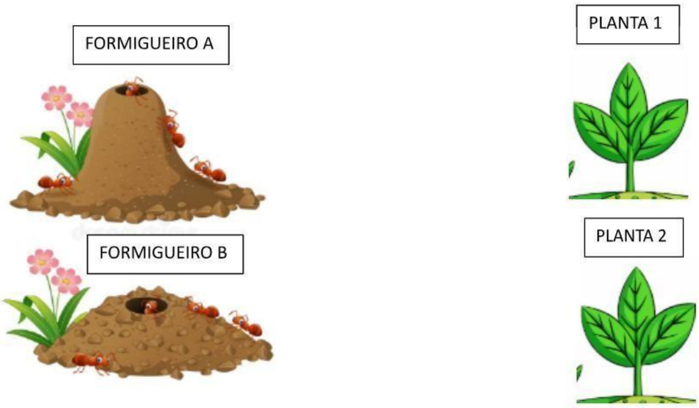
A partir disso, podemos dizer que a criança que compreende minimamente o conceito de número (a ideia de número racional, por exemplo) pode perguntar: e se o passo da formiga X for maior do que o passo da formiga Y? Como a tarefa não direciona para que isso ocorra, nem prevê tal situação, resta ao professor conter o espírito investigativo despertado na criança. Essa é uma peculiaridade da necessidade pedagógica que compõe a tarefa. Essa reflexão sobre a organização da tarefa de estudo é posta nesse momento para compreendermos a importância de considerar o estudante em atividade. Somente por meio da realização de tarefas movidas e orientadas ao desenvolvimento pela aprendizagem é que se alimenta o motivo do estudante estar e permanecer em atividade de estudo. Para tanto, conforme Búrigo (2015), as tarefas de estudo devem apresentar necessidades conceituais e pedagógicas de modo que os motivos da atividade de estudo se tornem fortes, pelas necessidades que surgem referente ao novo conceito que a tarefa possibilita.

Embora já houvéssemos compreendido sobre as mudanças necessárias quanto ao modo de ensino, o contato com o objeto (nesse caso, a elaboração da tarefa) nos apresentou um universo maior de dificuldades. Se revela a necessidade de se apropriar mais do conteúdo que compõe a tarefa de estudo nessa perspectiva que projeta o ensino para o desenvolvimento do pensamento teórico. Definitivamente, não se trata de algo simples. Ao aprofundarmos os estudos sobre as bases do Ensino Desenvolvimental, começam a se tornar evidentes as necessárias mudanças que devem ocorrer na organização de uma tarefa de estudo, quando esta é pensada a partir de nexos essenciais do conceito. Nesse contexto, apresentamos a primeira tentativa de organizar uma tarefa intencionalmente orientada por determinações teóricas, embasadas em estudos anteriores sobre a formação de um conceito (Rosa, 2012; Búrigo, 2015).

Nosso objetivo aqui não é discutir sobre um sistema completo de tarefas, como fazem muito bem alguns pesquisadores que têm como objeto o Ensino Desenvolvimental, mas, mostrar como aparece na organização da tarefa de estudo a necessidade de evoluir e se aproximar a esse sistema, a partir de uma tarefa realizada com base nos princípios gerais da formação de um conceito. Nesse sentido, observamos a seguinte proposição direcionada para a introdução do conceito de número negativo:

Tarefa 1

Em um jardim existem dois formigueiros vizinhos. No formigueiro A vive a operária Ana e no formigueiro B vive Bea. As duas operárias estão responsáveis por buscar alimento para suas rainhas. Ao explorarem o jardim ao redor do formigueiro, encontram duas plantas nutritivas, planta 1 e planta 2, que são boas para o consumo e de fácil acesso.



a) *Quais os possíveis trajetos feitos por Ana e Bea para buscar alimento e levá-lo aos seus respectivos formigueiros?*
b) *Em quais trajetos as formigas precisam percorrer uma distância maior para buscar alimento?*
c) *Considerando os trajetos encontrados no item anterior, a ida a planta e o retorno ao formigueiro, determine os deslocamentos das formigas que apresentam as seguintes características:*

Mesma direção

Mesmo sentido

Mesma distância

Sentidos opostos

Dúvida exposta pela professora: *seria possível acrescentar uma nova planta localizada ao lado esquerdo do formigueiro ou colocar os formigueiros de lados opostos ao das plantas?*

Tarefa 2

Observe a sequência: 6,5 5 3,5 ...

a) *Qual número ocupa a quinta posição na sequência?*

b) *Anote e marque na reta numérica os 10 primeiros números desta sequência.*

Destacamos nessa proposição, primeiro, a ideia de zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky, 1993). A elaboração de uma narrativa, que gira em torno de um contexto familiar para o estudante, envolvendo deslocamento de formigas em busca de alimentos, se caracteriza como um problema para ele. Não porque ele tem uma ideia formada sobre como as formigas buscam o alimento, mas porque o problema que a professora propõe abre um caminho potencial para a compreensão de novos conceitos que estão ao seu alcance, a partir do conceito de deslocamento: sentido, direção, módulo e vetor. Conceitos estes, conforme aponta Búrigo (2015), essenciais para a aprendizagem de número negativo.

Segundo, destacamos a ampliação do campo de possibilidades para a professora dar sequência na elaboração de novas tarefas, com o acesso aos nexos essenciais dos conceitos atribuídos. A narrativa da situação desencadeadora de aprendizagem pode ser transformada conforme ela percebe a possibilidade de inserir o novo conceito, necessário para o andamento das tarefas. Embora se caracterize como uma tarefa aberta no campo de atuação do estudante, se torna fechada ao direcionamento que a professora vai atribuir no rumo da compreensão do novo conceito. A dúvida exposta pela professora ao elaborar a tarefa 1 surge como indicativo de como ela está pensando a tarefa pelo viés dos conceitos essenciais. Percebe que ao colocar os objetos em diferentes posições, possibilita a identificação de deslocamentos diferentes pelo estudante, gerando mais condições para formação do conceito de direção e sentido.

Entendemos, com base em Freitas (2016), que essa ideia inicial de proposição substitui alguns princípios da lógica tradicional pela lógica desenvolvimental. Isso porque a tarefa não prevê apenas os conhecimentos prévios do estudante, mas os conhecimentos novos que a realização da tarefa deve gerar para ele. Ela não prevê que o estudante chegará em uma dada situação sensorial, em que receberá um significado para o conceito, mas, uma situação em que envolve um conceito novo que necessita ser representado e significado pelo estudante. Mesmo assim, entendemos que essa sequência ainda não dá conta de introduzir o conceito de número negativo. Ao partir para a tarefa 2, sem uma conexão bem definida, a professora força uma situação para que o número negativo apareça e seja definido a partir do que foi realizado na tarefa 1. Mas, por que isso ocorreu, se a professora estava no caminho de dar sequência para a segunda tarefa a partir de uma necessidade gerada na primeira?

Esse talvez seja um dos pontos principais de nossa reflexão sobre, em particular, pensar na organização do ensino de matemática no contexto brasileiro sob as determinações gerais do Ensino Desenvolvimental. Isso se torna o principal desafio. Ao colocarmo-nos na tentativa de criar situações desencadeadoras de aprendizagem orientadas ao nosso contexto escolar, a partir de estudos nessa perspectiva, estamos cientes (ou pelo menos deveríamos estar) que algumas etapas desse modo de ensino foram puladas na educação escolar das crianças. Rosa (2012) mostra que o ensino de matemática nessa perspectiva se orienta para o desenvolvimento do pensamento teórico desde o primeiro ano da criança na escola. Nessa fase ela já aprende a fazer comparações, estabelecer relações, representar de forma aritmética, geométrica e algébrica, entre outras características do estudo de matemática que passam a fazer parte de sua conduta.

Búrigo (2015, p. 65), ao analisar a primeira tarefa introdutória sobre número negativo do livro didático (Горбов et al., 2006), mostra uma das orientações no decorrer da tarefa, em que o estudante deve representar a situação que envolve um deslocamento em forma de imagem. "No que se refere a um modo para representar o deslocamento de um ponto a outro, correspondente à situação e, Горбов et al. (2006) consideram que o deslocamento de um ponto A para um ponto B se indica da seguinte forma: "$\bar{A}\bar{B}$". Posteriormente, mostra a figura geométrica de segmento orientado de A para B como representação geométrica. O autor segue com a análise: "Tal representação é algo realizável pelos estudantes, pois lhes é familiar. Sua introdução ocorre no primeiro ano no contexto do ensino da adição e subtração" (Búrigo, 2015, p. 66).

Isso difere substancialmente no andamento da tarefa em que a professora pensa na organização do ensino desse modo, pela primeira vez, em um 7º ano, para o ensino do conceito de número negativo. Há de se compreender que as aprendizagens que pressupõe o conteúdo referente aos anos anteriores podem não ter ocorrido. A criança, nesse caso, não apresenta em seu desenvolvimento real (Vygotsky, 1993) os hábitos e atitudes de estudo que a tornam em potencial para as novas aprendizagens, pois algumas relações não são familiares para ela. Se para essa perspectiva a realidade está em constante transformação, se a evolução ocorre por meio de contradições e, se os conflitos internos entre formas de pensar se tornam impulsores do desenvolvimento, se evidencia nesse momento para a professora, não apenas o direcionamento do conflito que a tarefa vai gerar na criança, mas um conflito interno de sua própria atividade.

Ao mesmo tempo em que se orienta para a formação do novo conceito, na contramão, a professora tem a necessidade de pensar em como incluir na organização da tarefa de estudo os elementos necessários para gerar condição potencial para a nova aprendizagem, uma vez que não está posta. Ignorar e seguir pressupondo que o estudante apresenta esse potencial não é uma opção para solucionar o problema. Nesse sentido, resolver o conflito interno da própria atividade de ensino surge como uma possibilidade de transformação da atividade de estudo. Não conseguimos pensar em outra forma de superar a fragmentação do ensino, senão, pela retomada de sua integralidade. Nessa perspectiva, a criança consegue empregar conhecimentos em ações concretas ao se apropriar de seus elementos mais gerais, quando consegue estabelecer generalizações mais profundas. Assim sendo, a organização da tarefa de estudo sugere que ela oriente o estudante ao caminho dessa generalização.

Ao propor para o estudante uma situação em que se faz necessário observar os trajetos, o deslocamento e as grandezas, surge para ele a necessidade de compreensão do espaço e o movimento em suas contradições, o que pode gerar um conflito cognitivo que impulsiona a reorganização do pensamento, conforme Búrigo (2015). Se percebemos que esse movimento está para além de sua condição potencial (porque não conhece as grandezas, não tem o hábito de representar em abstrações, não se reconhece em atividade de estudo, entre outros aspectos gerais da atividade humana), entendemos que a organização do ensino deve ser retomada e reorganizada ao nível potencial dessa compreensão. Isso, com base nos mesmos princípios que apontamos até aqui, porém, tendo como referência a falta de todo esse conceito, a partir do lugar que ocupa o estudante. Nas palavras de Vygotsky (1993), a partir do seu nível de desenvolvimento real.

Desse modo, voltamos à questão inicial desta dissertação: a busca por entender melhor as dificuldades dos estudantes. Evoluímos ao ponto do problema, quando nos direcionamos para a organização das tarefas de estudo, que nos leva a compreensão de que é necessário correlacionar as dificuldades do estudante com as dificuldades do professor. Isso porque, como aponta Davídov (1988), o conteúdo da atividade do estudante (o conhecimento teórico) resulta da assimilação que ocorre pela resolução das tarefas escolares. Compreender como o conteúdo que tem base nos conhecimentos teóricos passa a compor a tarefa de estudo e, posteriormente, pela assimilação que ocorre em sua realização, se torna conteúdo teórico do pensamento do estudante, faz da teoria do Ensino Desenvolvimental uma possibilidade para o professor pensar o ensino.

Como uma expressão da busca de como os conhecimentos teóricos compõem as tarefas de estudo, a pesquisa de Búrigo (2015) se torna possibilidade para pensar o ensino de número negativo. Na análise do sistema de tarefas davydovianas, o autor detalhou como elas podem gerar necessidades conceituais aos estudantes. Assim, retomamos o estudo de Búrigo (2015) e, a partir das reflexões geradas até aqui, retornarmos para a elaboração de novas tarefas (nosso ponto de partida e de chegada neste trabalho). Vale destacar novamente algumas condições apontadas pelo autor como necessárias para a aprendizagem de número negativo: situações em que o uso dos números naturais é insuficiente para a representação, evidenciando a necessidade de ampliação do sistema numérico; a passagem do uso das grandezas escalares para grandezas vetoriais; a ideia de oposto.

Buscamos, agora, elaborar um contexto de tarefa que contribua para o ensino de número negativo, ao mesmo tempo em que refletimos acerca das necessidades conceituais apresentadas por Búrigo (2015). O objetivo passa a se orientar para a organização de tarefas que revelem necessidades conceituais aos estudantes, levando em consideração as diferentes realidades, para que tenhamos um novo ponto de partida para pensar o ensino de número negativo no 7º ano do Ensino Fundamental. O autor, em sua análise das tarefas, mostra alguns conceitos essenciais que devem aparecer no decorrer da sequência de ensino como base para a formação do conceito de número negativo. Primeiro ele compreende a necessidade de colocar os leitores a par do contexto que introduz o conceito de **vetor**. Analisa as três primeiras tarefas particulares do sistema davydoviano e enfatiza a ideia de **deslocamento**. Conforme Búrigo (2015), essas tarefas apresentam os conceitos de **módulo**, **direção** e **sentido**. A orientação *a* e *b* da elaboração da tarefa que planejamos mais adiante, expressa essa intencionalidade.

No seguinte bloco de três tarefas o autor dá início a análise de tarefas que se aproximam do conceito de número negativo por meio do movimento na reta, com o deslocamento para ambos os sentidos, tomando como referência a origem e evidenciando a ideia de sentidos opostos. A partir dessa ideia, projetamos a orientação *c* e *d*. Posteriormente, nas tarefas 7 e 8 que o autor analisa, ocorre o movimento para as medidas de vetores. De acordo com Caraça (2010) e Rosa (2012), para medir grandezas, faz-se necessário comparar duas grandezas de mesma espécie. Assim, a tarefa que elaboramos visa a orientação para as medidas de grandezas vetoriais. Isso ocorre de forma implícita na orientação da tarefa, quando introduzimos outras grandezas que remetem à ideia de grandeza vetorial. Por exemplo, a relação do deslocamento com o tempo e com a intensidade da força aplicada no movimento contra a correnteza do rio (orientação *e* e *g*).

Com base na análise das tarefas 9 e 10 realizada por Búrigo (2014), em que atribui o zero na relação de comparação entre opostos, com a existência de um número que possui como oposto ele mesmo, criamos a orientação *f*, que aponta para o surgimento do instante zero de deslocamento. Por fim, a partir das análises das tarefas 11, 12 e 13, em que o autor mostra o surgimento dos números positivos no âmbito genérico dos números negativos, por meio de dois conjuntos de vetores opostos a uma mesma unidade, criamos as *orientações h, i* e *j*, que abrem margem para se pensar no processo das operações com números negativos.

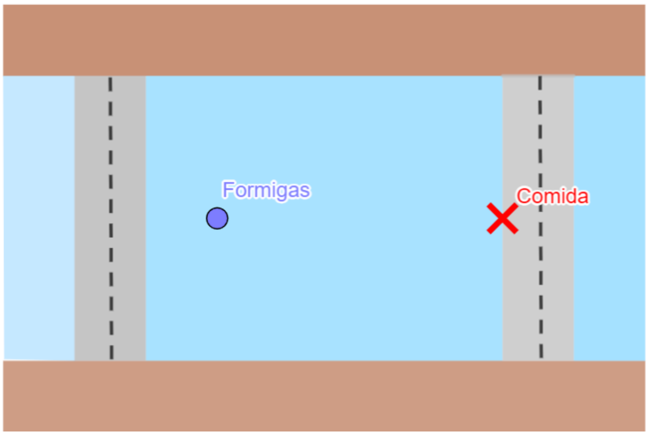
Essas orientações se trata de proposições iniciais de tarefas de estudo para o ensino e aprendizagem de número negativo, a partir dos estudos realizados sobre conceitos que são considerados essenciais no movimento de formação do conceito de número negativo. A seguir, apresentamos a proposição de uma tarefa e suas orientações acerca de uma ideia inicial de movimento orientado ao ensino do conceito de número negativo (produto dessa dissertação)[7], acompanhado de algumas reflexões.

Tarefa proposta: Os desafios de Ana e Bea na busca por alimento

O Rio Acaraú é um largo rio que atravessa a cidade de Sobral. Para atravessá-lo, foram construídas duas pontes, José Euclides Ferreira Gomes Junior e a Ponte Estaiada. Entre essas duas pontes e dentro do rio, há uma pequena ilha e no meio desta ilha encontra-se um formigueiro, cheio de formigas. Dentre elas, estão as irmãs formigas, Ana e Bea, que vivem felizes lá. Elas gostam deste lugar e se divertem muito com as coisas que encontram ao redor do formigueiro. Mas, as irmãs enfrentam muitas dificuldades para buscar alimentos. Devido à ilha ser muito pequena, não dispõe de plantas fortes e nutritivas para a alimentação das irmãs que, muitas vezes, precisam se aventurar e buscar alimentos fora dela. Certo dia, enquanto procuravam por comida nas redondezas, de longe avistaram, na ponte José Euclides, que atravessa o Rio Acaraú, uma lixeira cheia de restos de comida, perfeitos para a alimentação do formigueiro. Ao verem a quantidade de alimentos, elas começaram a imaginar formas de chegar até essa lixeira para pegar o máximo possível de alimentos. Mas, os primeiros obstáculos começaram a aparecer, pois a ponte se encontra no lado contrário à correnteza, como mostra a figura:

Figura 2: Representação da localização da ilha com relação às duas pontes.

[7] Produto educacional desta pesquisa.



Fonte: Figura do Autor

Analise a situação e, com o objetivo de auxiliar as formigas na busca por alimentos, leia com atenção as questões que seguem, e encontre possibilidades de resolver os desafios que surgem para as formigas chegarem até a comida e trazê-la para casa:

a) *Trace possíveis caminhos que as formigas possam construir para chegar até a lixeira.*

b) *Quais percursos são mais distantes?*

c) *Quais as vantagens e desvantagens de cada percurso?*

d) *Em uma situação, as formigas decidiram remar em linha reta contra a correnteza que estava muito forte. Tão forte que, em alguns momentos, as irmãs percebem que a correnteza as arrastava. Depois de muitos esforços, elas percebem que estão a uma distância de 5 metros da ilha. Em qual lugar as formigas se encontram?*

e) *Ana e Bea continuam a remar enfrentando a correnteza. Depois de três horas e meia (3,5h) percebem que já haviam concluído ⅕ do percurso:*

- *Seguindo o mesmo ritmo no remo, com quanto tempo as irmãs chegariam à ponte?*
- *Como elas remam com a mesma força, podemos dizer que, sozinha, cada formiga representa "1 força" (1f). Mas na metade do percurso, Ana machuca uma das perninhas e a impossibilita de remar. O que vai acontecer na busca das formigas para chegar até a ponte? O que elas podem fazer para conseguir chegar até a lixeira?*

f) *Bea resolve voltar (rema em sentido oposto ao anterior) e deixar a irmã para se recuperar e decide remar sozinha. Ela percebe que mesmo depois de uma hora remando, ela não conseguiu se deslocar e encontra-se próximo a ilha.*

- *Explique por que Bea não consegue se deslocar e, represente, em forma de desenho, essa situação.*
- *Se Bea continua a remar por mais tempo, em três horas e meia (3,5h), qual seria a localização dela?*

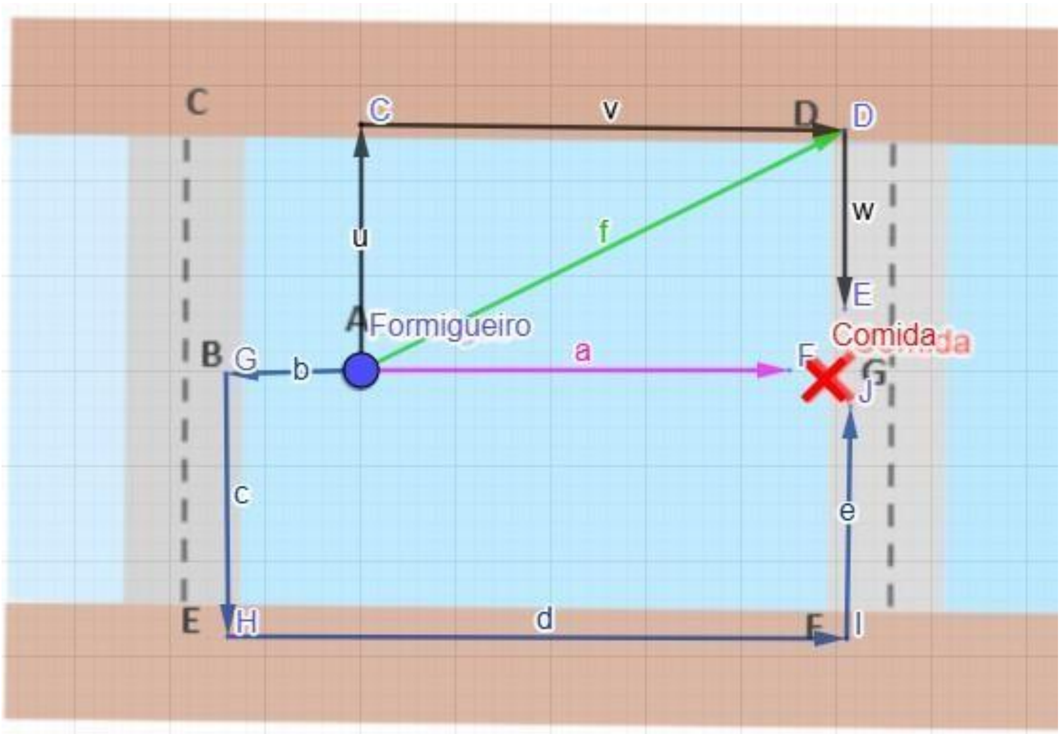
g) *Depois de algum tempo tentando e já começando a se cansar, resolve descansar e pensar no que pode ser feito no dia seguinte. Ao acordar, Bea se levanta e vai para a borda da ilha e, ainda sem saber o que fazer, de longe vê suas amigas formigas Cora e Dani se aproximando, e resolve pedir ajuda na sua busca por alimento na ponte. Para o bem do formigueiro e em nome da amizade, rapidamente elas decidem ajudá-la. Desse modo:*
- *O que mudará com a presença das novas formigas?*
- *Após três horas e meia (3,5h), quanto do percurso as formigas já terão percorrido? Qual a relação com o item e quando havia apenas duas formigas remando?*
- *Se Bea tivesse encontrado mais 2 amigas (Ema e Flora) que pudessem lhe ajudar, além de Cora e Dani, como ficaria o deslocamento ao final das três horas e meia (3,5h)? Mais uma vez, explique a relação entre o remo com as novas formigas e o remo das irmãs Ana e Bea.*
- *Quanto tempo cada grupo teria levado para chegar até a lixeira?*
  Bea - Cora - Dani:
  Bea - Cora - Dani - Ema - Flora:

h) *Juntas as 5 formigas conseguiram chegar até a ponte e viram que a quantidade de alimento era grande e que quanto mais alimentos elas conseguissem levar, melhor seria para o formigueiro.*
- *Pensando em levar mais alimentos, o que as formigas poderiam fazer?*
- *Dividir as formigas em grupo pareceu uma boa ideia! Quantos grupos poderiam ser formados e quantas formigas iriam compor cada grupo?*

i) *As formigas perceberam que construir novos barcos e dividi-las em 5 barquinhos iguais, parecia a melhor solução, pois esta garantia levar a maior quantidade de alimentos possível. Porém, um novo problema surgia, já estava chegando a noite e as formigas temeram remar no escuro, pois a ilha é muito pequena e o rio fica muito escuro impossibilitando a visão, com isso, elas poderiam errar o percurso e, desse modo, passar direto ou se perderem do formigueiro, foi quando elas perceberam que poderia ser melhor formar grupos maiores. Bea lembrou que quando remava* *com a irmã, Ana, e esta machucou uma das patinhas, ela teve que remar sozinha na volta pra casa. A força da maré, nessa situação, ajudava Bea a voltar mais rápido, ainda assim, Bea demorou a retornar à ilha de onde estava. Levando em consideração levar a maior quantidade de alimentos para o formigueiro e considerando que elas sairiam de volta para casa às 12h e depois das 18h30 ficaria muito escuro. Qual a melhor organização de grupo das formigas?*

j) *As formigas se organizam em grupos diferentes: Bea e Cora cuidam de um barquinho e Dani e as outras duas formigas (Ema e Flora) se responsabilizam pelo outro. Na volta pra casa, devido o cansaço de dois dias remando, depois de 3,5 horas de remo (15h30), Bea sente-se mal e não consegue mais remar. Cora se desespera e não pode pedir ajuda, já que o outro barco com as três formigas já ia na frente. A noite se aproxima e ela vê que não pode parar de remar e continua remando.*
   - *Quanto do percurso falta para cumprir? Você acha que a partir de agora, Cora remando sozinha, elas conseguirão chegar à ilha antes das 18h30?*
   - *Sem que se percam, qual o novo horário previsto para as irmãs chegarem ao formigueiro?*
   - *Às 18h30, o tempo escureceu muito e Bea e Cora ainda não tinham chegado à ilha. O medo tomou conta e as formigas se desesperam e não conseguem mais encontrar o formigueiro. Cora continua remando seguindo o sentido da correnteza, quando percebe que já tinha ultrapassado o tempo estipulado para chegar ao formigueiro e vê que já são 22h30. Qual distância Cora remou com a irmã e qual distância remou sozinha? Onde se localiza o barco nesse momento?*
   - *Represente em linha de coordenadas a localização do barquinho em relação ao formigueiro no horário que Cora começou a remar sozinha às 15h30 e quando está à noite às 22h30.*
   - *As irmãs percebem que já passaram pelo formigueiro, o cansaço toma conta e elas veem que não adianta tentar voltar, devido estar muito escuro e a melhor opção é descansar. No dia seguinte, com o nascer do sol (5h30), elas despertam e tentam voltar rio acima. Acrescente à linha de coordenadas do ponto anterior, a nova localização das formigas.*

No item *a*, ao solicitar que os alunos tracem os possíveis caminhos que levem as formigas até a lixeira que se encontra na ponte que está contrária à correnteza da água, existem diferentes possibilidades de percursos. Alguns podem acreditar na possibilidade das formigas irem contra a correnteza e chegar até a ponte, no entanto, outros podem acreditar que tal possibilidade seja inviável devido a força da água, fazendo-se necessário criar novas possibilidades, tais como: ir pela diagonal (AD) onde a força da água não seria tão intensa, ou seguir o fluxo do rio e chegar até a outra ponte, e por meio dela, chegar até a lixeira num percurso em terra firme.



Fonte: Figura do Autor

Ao propor que a formiga siga a correnteza e chegue à outra ponte para seguir por terra firme, é possível formar a ideia de sentidos contrários, quando comparados à possibilidade de enfrentar a força da água e seguir diretamente para a lixeira. Esse comparativo entre os sentidos, só é possível, porque os segmentos (deslocamentos) se encontram na mesma direção (Búrigo, 2015, p. 69). Tais percursos representam deslocamentos diferentes, que para (Búrigo, 2015, p. 65) o deslocamento de um ponto A até um ponto B é representado pela notação AB, sendo expresso através de um segmento com orientação definida, nesse caso, alguns percursos apresentam mais de um deslocamento, mas que requerem uma orientação definida, especificando sua direção e sentido.

Nesses percursos, em cada deslocamento, é necessário identificar dois pontos extremos — o de partida e o de chegada — o que, implicitamente, envolve a noção de sentido e de direção, conforme (Búrigo, 2015, p. 66), “o deslocamento entre dois pontos é uma grandeza vetorial”. Assim, percebe-se que esse tipo de grandeza se distingue daquelas sugeridas para serem introduzidas no primeiro ano escolar, como o comprimento, a área, o volume e a massa (Búrigo, 2015, p. 66).

No item *b*, quando solicitado que o aluno identifique quais os maiores percursos, de forma implícita, estão sendo trabalhada a ideia de módulo que para (Búrigo, 2015, p. 69) significa “[...] o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados [...]”, pois com a junção dos módulos dos segmentos referentes aos deslocamentos, é possível fazer o comparativo e identificar quais trajetos são maiores.

Quando identificado os módulos, direção e sentido, pode ser feita a classificação como vetor, pois, de acordo com Búrigo (2015), vetor é compreendido como a característica comum a todos os deslocamentos que possuem o mesmo módulo, direção e sentido, ou seja, um único vetor representa qualquer deslocamento que apresenta essas três características em comum é “o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado AB, que foi dado” (Búrigo, 2015, p. 70).

A classificação de equipolência entre dois segmentos orientados ocorre quando ambos “tiverem as mesmas características, isto é, o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido” (Búrigo, 2015, p. 71). Logo, ambos são equipolentes e podem ser representados pelo mesmo vetor.

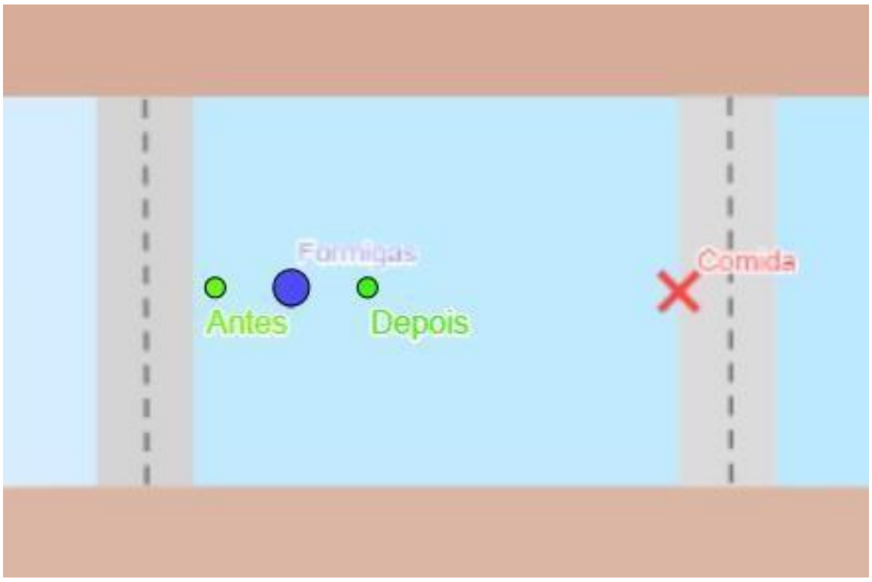
Ao analisar os prováveis deslocamentos, nos diferentes percursos que podem ser realizados pelas formigas até a chegada à lixeira, a análise dos sentidos, direção e módulo tornam-se uma possível forma de introduzir o conceito de vetor e, a partir disso, seguir com a sugestão de tarefas particulares que criem necessidades da introdução do conceito de número negativo, pois esta é a proposta de Búrigo (2015) que as primeiras tarefas estabeleçam fundamentos que justifiquem e favoreçam a introdução do conceito de número negativo.

Na proposta davydoviana para o ensino de número negativo, a grandeza vetorial é vista como um elemento essencial na construção do pensamento relacionado a esse conceito. Por isso, é preciso dar um novo significado à ideia de grandeza e, com isso, incluir o conceito de vetor (Búrigo, 2015, p. 75).

No item *c*, a proposta de identificar as vantagens e desvantagens de cada percurso tem como intuito levar em consideração cada trajeto, pois cada caminho a ser seguido apresenta seus prós e contras, porém, sem essa análise, alguns alunos podem considerar apenas os pontos positivos de um percurso e negativos de outro e não se permitirem fazer o estudo de cada trajeto.

Ao observar as vantagens do trajeto AG, por ter uma distância bem menor quando comparado aos outros trajetos, a atenção do aluno pode ser concentrada apenas nessa perspectiva, impedindo o aluno de explorar as outras possibilidades. Enquanto a análise das vantagens dos demais percursos permite ao aluno despertar interesse em analisar as outras possibilidades, que é o objetivo da tarefa, pois na análise de cada trajeto é trabalhada uma parte diferente do conceito explorado.

No item *d*, no remo das formigas, deve-se levar em consideração que elas tenham tido força suficiente para superar a correnteza e se aproximarem da ponte onde está a lixeira, mas também há a possibilidade das formigas não terem força suficiente e serem arrastadas pela correnteza, se aproximando da ponte Estaiada ficando cada vez mais distantes da lixeira. Nesta última, ao considerar a ilha onde se encontra o formigueiro como origem, ao se aproximarem da ponte Estaiada, as formigas atingem a parte anterior à origem. Considerando o deslocamento em linha reta, existem duas possibilidades de localização das formigas com relação à origem (formigueiro) segundo o conceito de grandeza vetorial de deslocamento, isso ocorre como resultado da inversão do sentido dessa grandeza.



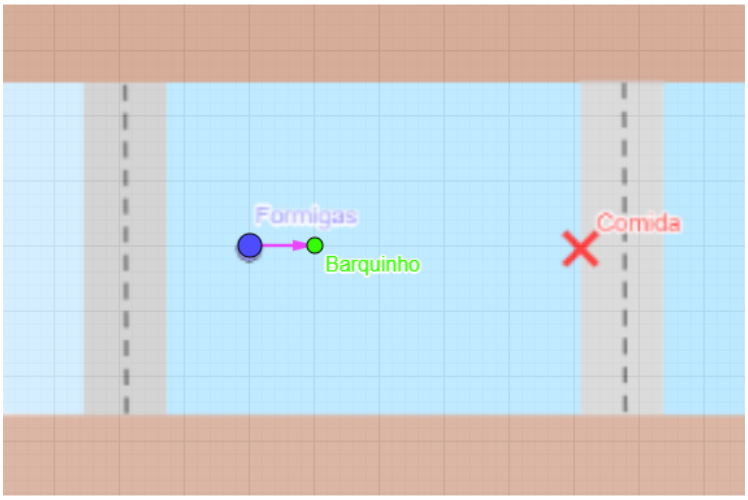
Fonte: Figura do Autor

A representação do deslocamento em uma reta pode ser associada ao contexto histórico de como o conceito de número negativo se desenvolveu. Pois esses números só passaram a ser aceitos quando os geômetras entenderam que eles poderiam ser interpretados geometricamente, como deslocamentos em direções opostas sobre a reta numérica (Búrigo, 2015, p. 76). Essa foi a representação fundamental para mudar o pensamento inicial sobre os números negativos, visto que, por muito tempo, eles foram considerados "números impossíveis" ou "sem sentido prático". Assim, a representação do deslocamento na reta, proposta na tarefa, possibilita a compreensão do conceito, mas também estabelece um vínculo com a trajetória histórica de sua aceitação no campo matemático.

Ao observar a aceitação dos números negativos, está associada a ideia de sentidos opostos, pois os sentidos dependem do deslocamento seguir uma direção, que é a reta numérica, e módulo, que é o seu comprimento. Essas são características que determinam uma grandeza vetorial, mostrando que o conceito de número negativo está associado a essa grandeza (Búrigo, 2015). Com isso, é possível concluir que a busca da formiga por alimento e suas diferentes possibilidades de percursos evidencia que é necessário recorrer ao uso da grandeza vetorial, deslocamento, que permite acessar a parte esquerda da reta em relação à origem, ou seja, possibilita alcançar a região que antecede a origem na reta.

Ao analisar as duas possibilidades de localização das formigas após um tempo de remo, pois estas podem se encontrar antes da origem, ao lado esquerdo do formigueiro, ou à direita, superando a força da correnteza, cria-se a necessidade de ver a localização das formigas, o que é sugerido na nova tarefa no item *e* quando mostra a capacidade de deslocamento das formigas contra a correnteza.

No item *e*, mostra que as formigas apresentam capacidade de enfrentar a correnteza e seguir contra o fluxo do rio. Como proposto no enunciado, não se trata de uma tarefa fácil já que em três horas e meia, juntas, elas conseguiram cumprir um quinto ($\frac{1}{5}$) do trajeto, desse modo, deve ser percebido pelos alunos que seguindo o mesmo ritmo de remo, ainda falta quatro vezes a mesma quantidade de tempo para chegar até a ponte e alcançar a comida na lixeira.



Fonte: Figura do Autor

No segundo item, com o lançamento do novo conflito em que uma das formigas se machuca e não consegue remar, surge uma nova problemática que estimulará aos alunos a reorganizar as estratégias, o que permite promover um engajamento teórico, ou seja, com esse conflito cria-se um novo motivo que deixa de ser apenas ajudar as formigas a chegar até a lixeira seguindo algum dos percursos. Nesse momento, o motivo será levar as formigas até a lixeira por esse percurso, enfrentando a correnteza. As estratégias a serem pensadas são para superar essa necessidade, com isso, espera-se que os alunos surjam com novas ideias.

Uma das estratégias a ser pensada, seria de Bea, a formiga que não está machucada, enfrentar a correnteza e ir em busca de alimentos sozinha, o que sugere a introdução da tarefa no item *f*, quando a formiga começa a remar sozinha e não possui força suficiente para enfrentar o rio, porém tem força suficiente para não ser arrastada. Pedir que seja explicada essa situação, permite que seja compreendida a ideia das forças que atuam sobre o barco em que está a formiga e quando este não se move, isso implica que as forças atuantes são grandezas vetoriais que possuem mesma intensidade, porém têm sentidos contrários, ou seja, quando se juntam, elas se anulam e resultam em um vetor de magnitude zero.

Nesse momento fazemos o estudo do número zero, cujo oposto é ele mesmo, na forma de vetor. O vetor zero para Winterle (2000) *apud* Búrigo (2015, p.90) "corresponde a um ponto qualquer do espaço com as seguintes características: 1) sua origem coincide com sua extremidade e, consequentemente, ele representa que não houve deslocamento; 2) não possui sentido e direção definidos".

Ao solicitar a representação da situação, é um convite para a reflexão dos alunos para perceber que o oposto do vetor nulo ou zero, é ele mesmo, pois ele representa o não deslocamento, ou seja, ele não exerce nenhum sentido e a formiga permanece no mesmo lugar.

E qualquer deslocamento que ela fizesse, seja enfrentando ou sendo arrastada pela correnteza, para antes ou depois da origem, tomando um sentido, este deslocamento já caracterizaria outro vetor diferente de zero (as forças opostas já não possuíam a mesma intensidade e por qualquer variação que houvesse em um deles, não se anulariam), o que pode ser inferido que o vetor zero não é nem positivo nem negativo (Búrigo, 2015, p. 91).

Quando solicitado saber qual a posição da formiga após três horas e meia, levando-se em consideração a multiplicação pelo vetor nulo, não importa o tempo que passe esse deslocamento não mudará, pois o zero não representa uma quantidade mensurável. Na representação da multiplicação do vetor nulo por um escalar não representará outro vetor, ou seja, não faz sentido perguntar quantas vezes o zero "cabe" em outro valor. Do ponto de vista aritmético e algébrico, isso fere a lógica da divisibilidade, que é base para o conceito de número. Em termos matemáticos, isso resultaria numa situação proibida, pois envolveria uma divisão por zero, o que não é admitido na Matemática (Búrigo, 2015).

Essa tarefa busca suprir a

> necessidade da existência de um único número que se admite como sendo oposto de si, o zero. Trata-se, então, de uma exceção, uma vez que os demais números também admitem somente um simétrico, que não são os próprios. Por exemplo, um número negativo também tem um único número oposto, que é o valor que, na reta, está localizado a tantas unidades quanto ele em relação ao zero, em sentido oposto. (Búrigo, 2015, p. 91)

A análise dessa tarefa permite ver que enfrentar a correnteza, remando sozinha, ainda que por horas consecutivas, não levará Bea a nenhum lugar, não haverá deslocamento, pois a força do remo de uma formiga é igual a força da correnteza. Na sequência da história, ainda com a irmã machucada e na busca de enfrentar a correnteza, a nova possibilidade é recorrer a mais formigas, que traz a necessidade da tarefa do item *g* que requer retomar o que foi visto nos itens *e* e *f*, sobre a força que cada formiga exerce sobre o barco e o resultado da união dessa força que é o deslocamento feito pelas formigas remando por três horas e meia.

Com a análise da tarefa dos itens *e* e *f* e com os seus conhecimentos, o aluno perceberá que a presença de novas formigas fará com que, juntas, elas consigam chegar mais rápido até a lixeira. Quando solicitado no segundo ponto identificar quanto do percurso já haverá sido percorrido após três horas e meia, esperamos que o aluno recorra às informações vistas anteriormente que indicam o resultado da força exercida no remo de uma formiga só (não há deslocamento) e duas formigas juntas ($\frac{1}{5}$ do percurso) durante esse período de tempo, ou seja, esse resultado pode ser representado por um vetor. No desenvolvimento da problemática com a ausência de uma formiga e a chegada de outras duas amigas, temos a força de três formigas atuando sobre o barco, o que pode ser interpretado que a força de uma formiga corresponde a força da correnteza e a força da segunda formiga leva as formigas a percorrer ⅕ do caminho, de igual modo, a força da terceira formiga também leva a percorrer ⅕ do percurso. Temos nessa situação 4 forças atuando sobre o barquinho 3 f (forças das 3 formigas) e - 1 f (força da correnteza) que tem a mesma intensidade da força da formiga, mas em sentido oposto.

Compreendendo que com duas formigas remando temos o deslocamento de ⅕ do percurso e com três formigas remando, ressaltando que a força de uma formiga é anulada pela força da correnteza, temos o dobro do deslocamento no mesmo intervalo de tempo, o que pode ser compreendido que há uma ampliação do vetor que representa a distância percorrida, pois ele foi multiplicado pelo escalar dois.

Na segunda pergunta do segundo ponto quando pedida a relação entre as duas situações, esperamos que o aluno identifique que uma é o dobro da outra. Aqui temos o processo comparativo entre as grandezas expressando a relação de multiplicidade, que segundo Freitas (2016, p. 81), é essa relação que representa o conceito de número, pois número é o "resultado da medição que se obtém a partir da relação de multiplicidade e divisibilidade entre unidade e a grandeza a ser medida".

O mesmo pode ser identificado no terceiro ponto com a chegada de novas formigas, além das três amigas Cora e Dani. Nesse ponto teremos cinco formigas remando e juntas elas conseguem realizar um deslocamento quatro vezes maior que a das irmãs, Ana e Bea, durante o mesmo tempo. Mais uma vez, podemos ver que está sendo trabalhado o mesmo conceito de número através da relação de multiplicidade, como o ponto anterior, mas com valores diferentes.

No quarto ponto, ao solicitar que seja identificado o tempo gasto para chegar até à lixeira em cada situação, assim como nos demais problemas da tarefa no item *g,* também pode ser vista a relação essencial de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas, que segundo Rosa (2012, p. 178), é processo de concretização do conceito de número.

> O processo de concretização do conceito de número continua, com o acréscimo da correlação entre as unidades de medida e os números que resultam desse processo. Ou seja, eles surgem das variações do resultado da medida, sua expressão singular, em dependência da unidade na relação de multiplicidade e divisibilidade entre variáveis dependentes e independentes.

No item *g*, temos, além de trabalhar com a relação de multiplicidade e divisibilidade, quando solicitado que faça um comparativo entre os deslocamentos realizados por duas, três e cinco formigas num mesmo intervalo de tempo, também podemos destacar a comparação entre vetores do mesmo sentido, que, segundo Búrigo (2015), por si só, não garante o estudo de número negativo, o caminho é esse, mas com a necessidade de ampliar o estudo e introduzir a comparação entre vetores opostos. O que pôde ser observado nas tarefas dos itens *f* e *g*, a presença de forças atuantes sobre um mesmo objeto, mas em sentidos opostos abre a oportunidade do estudo do zero e dos números negativos.

No item *h*, na volta das formigas da ponte para o formigueiro, surge uma nova problemática: levar a maior quantidade de alimento possível para o formigueiro. Uma das ideias dos alunos seria dividir as formigas em barcos diferentes, assim haveria uma quantidade maior de barcos, possibilitando o transporte de mais comida. Essa divisão poderia ser em cinco barcos (uma formiga em cada barco), quatro barcos (um barco com duas formigas e os demais com uma), três barcos (um com três formigas e os demais com uma ou dois barcos com duas formigas e o outro com uma), dois barcos (um barco com quatro formigas e o outro com uma ou um com três e o outro com duas) e um barco (com as 5 formigas).

A organização das formigas nos barcos pode ser representada como opção mais favorável a de dividir o grupo em cinco e cada formiga assume um barco diferente, desse modo, elas estariam levando a maior quantidade de comida possível, mas é quando surge a problemática do próximo item. No item *i,* o horário já está um pouco avançado e, logo chegará a noite, talvez, organizar as formigas uma em cada barco, elas poderão não chegar antes das 18h30, horário que impossibilita a visão, logo cria-se a necessidade de analisar o tempo que cada organização de grupo levará para que todas cheguem até a ilha.

Nos itens anteriores pode ser percebido que a força da correnteza corresponde a força de uma formiga remando. Como pôde ser visto na análise dos itens *e* e *f,* quando duas formigas estão remando, a força de uma era anulada pela força da correnteza e quando juntava à força de outra, era equivalente a percorrer ⅕ do percurso em 3,5 horas, logo, duas formigas remando chegariam ao fim do percurso em 17,5 horas. Desse modo, pode ser interpretado que a força da correnteza, sem força contrária atuando sobre ela, consegue mover o barco, no mesmo intervalo de tempo, uma distância igual a percorrida no remo de duas formigas contra a correnteza, ou seja, somente com a força da correnteza, seguindo a direção e o sentido certo, um barquinho cumpriria ⅕ do percurso em 3,5 horas e chegaria ao formigueiro em 17,5 horas.

Em uma situação em que uma formiga rema a favor da correnteza, temos duas forças atuando sobre o barquinho, levando no mesmo sentido, logo em 3,5 horas, uma formiga teria cumprido ⅖ do percurso, nessa mesma sequência e em 3,5 horas, 2 formigas teriam cumprido ⅗, 3 formigas ⅘ e 4 formigas chegariam ao formigueiro.

Temos neste item, a continuação com o trabalho de multiplicidade e divisibilidade, além de mostrar que quando estão sendo aplicadas forças no mesmo sentido, o resultado dessa força trata-se da união de todas as forças, que leva o objeto no sentido que a força é aplicada.

No item *j*, quando tudo parecia estar resolvido e as formigas, bem organizadas, chegariam com alimento e antes de escurecer, surge um novo problema, após 3,5 horas de remo Bea não consegue mais remar, o que muda no tempo de retorno para casa. Enquanto as duas remavam, junto a força da correnteza, havia três forças atuando sobre o barco, impulsionando no mesmo sentido, o que pelo visto no item anterior fez com que em 3,5 horas, juntas, elas tivessem cumprido 3/5 do percurso e restasse ainda 2/5 até chegar ao formigueiro. Com a perda da força de uma formiga o que antes levaria menos de 3 horas, agora, com duas forças aplicadas sobre o barco (a correnteza e o remo de Cora), para chegar até o formigueiro levará 3,5 horas, o que ultrapassa as 18h30 e leva as formigas a perderem o formigueiro de vista.

No segundo ponto, ao compreender, mesmo que intuitivamente que as irmãs não chegariam ao formigueiro antes do escurecer, o aluno deverá calcular a parte que falta para chegar ao formigueiro e o tempo que isso levaria para acontecer, sendo que agora há uma força menor atuando sobre o barquinho, o que permite seguir o trabalho de multiplicidade com redução da força, diferindo dos pontos anteriores que sempre ampliava a força.

No próximo ponto , a formiga continua a remar e quando percebe já são 22h30. Pelo cálculo do ponto anterior, as formigas deveriam chegar ao formigueiro às 18h30, mas como perdem o formigueiro de vista, o aluno perceberá que em 3,5 horas a formiga percorria uma distância de 2/5 do percurso, logo em 7h (2 x 3,5), ela teria percorrido o dobro que equivale a percorre 4/ 5 do percurso, ou seja, esse remo a mais levou a formiga a passar da origem (formigueiro) seguindo o percurso da correnteza e nesse horário ela se localiza à mesma distância que as 15h30, mas no outro lado do formigueiro.

No quarto ponto, ao pedir que representem em linhas de coordenadas as duas distâncias nos dois horários, o aluno observará que são distâncias iguais, porém em lados opostos, essa tarefa toma como indicador a expressão de uma relação de medida entre dois vetores. O que pode ser observado o modelo universal de número o vetor que representa a distância às 22h30 possui comprimento igual ao vetor que representa a distância às 15h30 com os sentidos opostos. Podemos inserir a ideia de sinal para mostrar a diferença entre as localizações, “quando os dois vetores possuem sentidos opostos, é indicado com o sinal de menos ‘-’, mas caso eles tenham o mesmo sentido, é representado por outro sinal, o de mais ‘+’” (Búrigo, 2015, p. 93).

Nessa tarefa também podemos dar início ao conceito de módulo, pois em termo de distância (módulo) eles representam o mesmo valor,

> em outras palavras, mesmo que na comparação de dois vetores eles tenham sentidos opostos, a restrição para somente o módulo desses vetores, isto é, os seus comprimentos, significa que será obtido apenas um número positivo, ou seja: a quantidade de vezes que o vetor unidade cabe naquele a ser medido, independente dos sentidos. [...] Assim sendo, essa tarefa supriu a necessidade de revelar as duas características dos vetores que originam os números positivos. A essencial é o módulo; mas também o módulo e o sentido com uma condição: os sentidos dos vetores serem os mesmos, pois, se forem opostos o número da comparação é o negativo, e não o positivo (Búrigo, 2015, p. 94).

Ao referente as representações das localizações do barquinho nos dois horários, ambas não podem ser representadas por $\frac{2}{5}$, pois ao colocar na linha de coordenadas, observamos que elas se localizam em sentidos contrários e faz-se a necessidade de utilização do sinal de “-” ($-\frac{2}{5}$) para indicar que os sentidos estão contrários.

No último ponto, ao repousarem, nenhuma força das formigas atua sobre o barco, porém a força da correnteza continua agindo e levando-o para mais distante do formigueiro. A ideia de multiplicidade poderá continuar sendo trabalhada na redução de forças atuantes, observando que ao retirar a força da formiga, em 7h o percurso feito pelo barquinho sendo arrastado pela correnteza, é correspondente ao percurso feito em 3,5h quando as forças da formiga e da correnteza agiam sobre ele, podendo ser comparado os vetores representando as distâncias percorridas em diferentes intervalos de tempo, de acordo com as forças atuando sobre o barco.

O conceito de módulo também poderá continuar sendo trabalhado ao indicar que o barquinho se localiza a uma distância cada vez maior. O uso do símbolo “-” deve continuar sendo utilizado, representado que essa distância é oposta às distâncias iniciais, antes de chegar ao formigueiro.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise deste trabalho permitiu identificar que a problemática central relativa às dificuldades no ensino e na aprendizagem de número negativo foi devidamente explorada, alcançando o objetivo proposto de refletir sobre alternativas teóricas que possam favorecer a superação dos impasses observados. A discussão mostrou-se pertinente, sobretudo porque evidenciou que as limitações recorrentes enfrentadas pelos alunos nesse campo não se restringem a dificuldades individuais, mas podem estar associadas a uma organização histórica e metodológica do ensino da matemática que, muitas vezes, compromete a construção de um conhecimento sólido e estruturado.

Ao retomarmos ao ponto inicial, em que se destacou a complexidade do ensino de número negativo como um conceito de difícil compreensão por parte dos alunos, a literatura revisitada confirmou essa constatação. Portanto, os estudos que subsidiaram esta investigação apontam que a compreensão desse objeto matemático tem se constituído um obstáculo recorrente, especialmente porque os estudantes, frequentemente, vinculam o referido conceito às concepções empíricas derivadas de sua experiência cotidiana. Esse diagnóstico, portanto, mostra a relevância da proposta dessa pesquisa.

Foi possível perceber que o objetivo de discutir alternativas teóricas para o enfrentamento dessas dificuldades também se cumpriu, à medida que autores como Davídov, Duarte, Sousa e Damazio contribuíram para fundamentar a crítica a práticas pedagógicas que reduzem a aprendizagem a exemplos empíricos ou ao uso de metodologias que, embora inovadoras em aparência, esvaziam-se de conteúdo. A crítica ao ensino tradicional, por exemplo, não foi feita no intuito de negar completamente seus pressupostos, mas sim de problematizar a maneira como sua aplicação restritiva pode limitar o ensino de conceitos abstratos como o de número negativo. Essa reflexão mostra sua importância ao abrir espaço para uma discussão mais ampla sobre o modo do ensino de matemática nas escolas.

A análise indicou, ainda, que o desafio da introdução ao conceito de número negativo se dá não apenas na forma de apresentação inicial, mas sobretudo no tipo de pensamento que se deseja formar no estudante. Ao enfatizar a distinção entre pensamento empírico e pensamento teórico, Davídov mostrou que a organização pedagógica desempenha papel determinante na qualidade da aprendizagem. Assim, constatou-se que, quando a escola prioriza situações imediatas do cotidiano sem avançar para uma sistematização conceitual, priva o aluno da possibilidade de compreender o conteúdo em sua totalidade, comprometendo aprendizagens futuras que dependem desse domínio.

Outro ponto a ser destacado é que o objetivo de refletir sobre o impacto curricular também foi atingido. Verificou-se, com apoio de Candiotto, Spacek e Cardoso, que as escolhas metodológicas não são neutras, mas influenciam diretamente no tipo de raciocínio desenvolvido. Se a organização curricular continuar ancorada apenas em exemplos fragmentados e pouco articulados, dificilmente os estudantes conseguirão construir uma base conceitual sólida para avançar em conteúdos posteriores, como equações, funções e coordenadas cartesianas, que dependem desse conhecimento. Essa constatação reforça a necessidade de um planejamento didático mais rigoroso e atento ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Ao responder se o objetivo da pesquisa foi alcançado, pode-se afirmar que sim, pois não apenas foram identificadas as dificuldades recorrentes, como também se discutiram alternativas teóricas para superá-las. Em sua análise, pode ser observado uma professora/pesquisadora buscando alternativas de ensino para que ocorra a aprendizagem de seus alunos, ao mesmo tempo em que enfrenta a dificuldade de desenraizar o método tradicional que fez parte de sua formação e se faz presente ao longo de sua atuação enquanto profissional.

Ao analisar as tarefas expostas, é necessário reconhecer que em sua construção houve uma melhoria significativa nas propostas apresentadas, ao explorar e comparar, podem ser vistas superações da lógica tradicional ao se tratar de tarefas que não preveem apenas os conhecimentos prévios dos estudantes, mas os conhecimentos novos que ela pode gerar através dos conceitos que necessitam ser representados e significados, guiando os alunos para o caminho da generalização. Apesar da ausência de uma investigação empírica, o que impossibilita a análise de práticas concretas em sala de aula e de como os estudantes reagem a essa proposta metodológica. Esse reconhecimento não enfraquece o trabalho, mas indica caminhos possíveis para aprofundamentos posteriores.

Nesse sentido, uma das principais contribuições deste estudo é justamente apontar para a necessidade de pesquisas que testem, experimentalmente, propostas de ensino de número negativo que conciliam situações contextualizadas com a exigência de abstração teórica. Futuras pesquisas poderiam, por exemplo, abranger essas tarefas para as operações e investigar como podem impactar no desempenho e na compreensão dos alunos.

Outro aspecto que merece ser aprofundado em trabalhos futuros é o papel da formação docente. Embora este estudo tenha destacado relatos de professores sobre as dificuldades enfrentadas, não se avançou na análise sobre como a formação inicial e continuada prepara (ou não) os educadores para lidar com conceitos abstratos e desafiadores como o de número negativo. Uma investigação nesse campo poderia contribuir para o desenho de políticas de formação mais ajustadas às necessidades reais da prática docente.

É igualmente importante considerar a influência dos materiais didáticos, uma vez que livros e apostilas desempenham papel central na forma como o conceito é apresentado em sala de aula. Estudos futuros poderiam analisar criticamente como os números negativos aparecem nesses materiais, identificando se há predominância de exemplos empíricos, se existe progressão conceitual adequada e de que modo as propostas dialogam com a aprendizagem real do estudante. Essa análise permitiria compreender se as dificuldades relatadas têm origem, em parte, em limitações dos próprios recursos utilizados pelos professores.

Um aspecto que deve ser levado em consideração, é a diversidade dos estudantes e os diferentes ritmos de aprendizagem. Trabalhos futuros poderiam investigar de que maneira as dificuldades com os números negativos se distribuem entre diferentes perfis de alunos, considerando variáveis como faixa etária e a seriação que esse conceito é trabalhado. Essa análise seria fundamental para propor intervenções pedagógicas mais eficazes.

Outro ponto que merece ser destacado é que, ao longo da discussão, ficou evidente a necessidade de superar uma visão simplista que reduz as dificuldades a fatores individuais, como desatenção ou falta de interesse dos alunos. O estudo mostrou que as barreiras também são estruturais e estão relacionadas à organização curricular, às metodologias adotadas e às concepções pedagógicas vigentes. Reconhecer essa dimensão coletiva é essencial para propor possíveis melhorias na forma de ensino e, consequentemente, na aprendizagem.

Do ponto de vista teórico, este trabalho reforçou a importância da Pedagogia Histórico-Crítica e da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davídov como referenciais que podem orientar práticas mais consistentes. Tais abordagens oferecem ferramentas para compreender a centralidade da formação do pensamento teórico e, nesse sentido, apontam caminhos promissores para o ensino de número negativo.

Dessa forma, conclui-se que o objetivo do estudo foi alcançado ao identificar, discutir e problematizar as dificuldades no ensino e aprendizagem de número negativo, apresentando alternativas teóricas que podem orientar mudanças pedagógicas. Entretanto, também se reconhece que a proposta, por si só, não esgota o tema e deve ser entendida como ponto de partida para investigações mais abrangentes e aplicadas, que contemplem a realidade concreta das salas de aula.

Por fim, ao evidenciar a relevância do tema e ao apontar caminhos para futuras pesquisas, este trabalho contribui para ampliar o debate sobre a formação matemática escolar, reforçando a necessidade de repensar metodologias, currículos e práticas docentes. Mais do que propor respostas definitivas, buscou-se abrir espaço para novas indagações e para a construção coletiva de alternativas que efetivamente garantam aos estudantes o direito de se apropriar do conhecimento matemático em sua forma mais elaborada, superando barreiras históricas que têm limitado o desenvolvimento intelectual de gerações.

Este trabalho apresenta como produto de sua pesquisa uma sugestão de sequência didática direcionada a professores de matemática. A sequência conta com um grupo de tarefas particulares denominadas como *Os desafios de Ana e Bea na busca por alimentos*, sendo direcionada para o trabalho com turmas de 7° ano, especificamente na introdução do conceito de número negativo.

REFERÊNCIAS

ANGELO, C. L. Concepções de futuros professores sobre a multiplicação de números inteiros. In: **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte: ENEM, 2007, p. 1-9. CD ROM.

ASBAHR, F. da S. F. **A Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky**: contribuições para a prática pedagógica. In: Reunião Anual Da ANPED, 36., 2013, Goiânia. Anais [...]. Goiânia: ANPEd, 2013. Disponível em: http://www.anped.org.br. Acesso em: 14 de mar. 2025.

ASBAHR, F. da S. F.; NASCIMENTO, C. P. Criança não é manga, não amadurece: conceito de maturação na Teoria Histórico-Cultural. **Psicologia, Ciência e Profissão**. 2013, n. 33. v. 2, p. 414-427.

BACHELARD, Gaston. **A formação espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

BÚRIGO, L. S. M. **Necessidades emergentes na organização do ensino davydoviano para o número negativo**. 2015. 153f. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2015.

BÚRIGO, L. S. M.; DAMAZIO, A. O número negativo na proposição de ensino davydoviana: necessidades para a sua introdução. **Revista Eletrônica de Educação**, [S. l.], v. 10, n. 2, p. 203–218, 2016. Disponível em: https://reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/1455. Acesso em: 2 fev. 2025.

CANDIOTTO, W. C.; SPACEK, I. K.; CARDOSO, E. F. M. Possibilidades de objetivação dos princípios didáticos que embasam uma aprendizagem desenvolvimental para a organização de um currículo na área da Matemática. **Obutchénie. Revista de Didática e Psicologia Pedagógica.** Uberlândia, MG. v. 5. n. 2. p. 304-327. mai./ago. 2021. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/61403.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradativa, 1951.

CLOT, Y. **A Função Psicológica do Trabalho**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2006.

CLOT, Y. Entrevista. **Cad. Psicol. Soc. Trab.** [online]. São Paulo, vol. 9, n. 2. 2006. Disponível em: http://www.revistasusp.sibi.usp.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S151637172006000200008&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 15 mai. 2025.

COSTA, M. A. A evolução histórica da noção de número. In: COSTA, M. A. (Org.). **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios**. 3. ed. São Paulo: Convívio, 1981. p. 217-224.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E. da.; EUZÉBIO, J. da S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática em Pesquisa**. São Paulo, v. 14, n. 1, p. 209-231, 2012.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, p. 143-155, 1987.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare. Moscú: Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. **La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en la educación y la enseñanza**: una mirada al futuro. Moscou: Progresso, 1991, p. 118-144.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo
y Educación, 1982.

DAVYDOV, V. V.; RADZIKHOVSKII, L. A. Vygotsky's theory and the activity-oriented approach in psychology. In: WERTSCH, J. V. (Ed.). **Culture, communication, and cognition**: Vygotskian perspectives. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. p. 35–65.

DAVYDOV, V. V. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. **Revista de Pedagogía**, Santiago, n. 403, p. 147-150, jun. 1998.

DAVYDOV, V. V. What is real learning activity? In: HEDEGAARD, M.; LOMPSHER, J. (Ed.). **Learning activity and development**. Aarhus: Aarhus University Press, 1999. p. 123-166.

DUARTE, N. Prefácio. In: FACCI, M. G. D. **Valorização ou esvaziamento do trabalho do professor?**: um estudo crítico-comparativo da teoria do professor reflexivo, do construtivismo e da psicologia vigotskiana. Campinas, SP: Autores Associados, 2004.

DUARTE, N. **A individualidade para si**: contribuição a uma teoria histórico-crítica da formação do indivíduo. 3. ed. Rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2013.

FREITAS, D. de. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares propostas por Davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2016.

GIOVANNI, J. R. Jr. **A conquista da Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GLAESER, G. Epistemologie des nombres relatifs. **Recherche en Didactique des Mathematiques 2.3**, 1981. p. 303-346.

GORBOV, S. F.; ZASLAVSKY, V. M.; ZAKHAROV, O. A.; MOROZOV, A. V.; TABACHNIKOVA, N. L. **Matemática**: livro didático. 6 ano (Sistema D.B. Elkonin – V.V. Davydov). 2. ed. Moscou: Vita-Press, 2007.

GUELLI, Oscar. Contando a história da Matemática – A invenção dos números. 9a Ed. Editora Ática, 2002.

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2002.

LEMOS, L. V.; DAMAZIO, A. Uma análise sócio-histórica do conteúdo e estrutura da atividade de estudo. **Revista Línguas & Letras** - Unioeste - V. 15. n. 31, 2014, p. 1-17.
LEONTIEV, A. N. **Atividad, conciencia e personalidad**. Havana: Editorial Pueblo y Educación. 1983.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Nova horizonte, 1987.

LIBÂNEO, J. C. **Didática e epistemologia**: para além do empirismo. 2013.

MACLAURIN, C. **Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer**. Paris: C.A. Jombert, 1753.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. Projeto: o que se entende por álgebra? In: **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife-PE. CD-ROM, 2004.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MARX, K.; ENGELS, F. **A Ideologia Alemã**. Trad. José Carlos Bruni e Marco Aurélio Nogueira. São Paulo: HUCITEC, 1989.

MARX, K.; ENGELS, F. **A ideologia alemã**. São Paulo: Boitempo, 2011.

MARX, K. Posfácio à segunda edição. **O capital**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

MARX, K. O Capital. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1994.

MOURA, M. O. de. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formativa. In: BARBOSA, R. L. **Trajetórias e perspectivas na formação de educadores**. Marília: Editora da Unesp, 2004. p. 257-284.

MOURA, M. O. de. Saberes pedagógicos e saberes específicos: desafios para o ensino de Matemática. In: **Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino**, 13., 2006, Recife. Anais... Recife: UFPE, 2006. p. 489-504.

PARO, V. H. **Escritos sobre educação**. São Paulo: Xamã, 2001.

PONTES, M. de O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade**: a polêmica multiplicação de números inteiros. 2010. 158 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. da S. F.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. In: MOURA, M. O. de. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2016. p. 15-50.

ROSA, J. E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

SAVIANI, D. **Pedagogia histórico-crítica**: primeiras aproximações. Campinas: Autores Associados, 2003.
SOARES, J. R.; AGUIAR, W. M. J. de. A dialética essência/aparência da atividade do professor: em busca do real da atividade realizada. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 45, n. 155, p. 56–75, jan./mar. 2015. DOI: 10.1590/198053142818.

SOUSA, V. G. de.; DAMAZIO, A. Estudo de uma proposição de ensino de Matemática: manifestações de necessidades e motivos docentes. Revista Paranaense De Educação Matemática, 2025,14 (33), 01–23. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/9704

TALÍZINA, N. F. **Manual de Psicologia Pedagógica**. Trad. Yulia V. Solovieva; Luís Quintanar Rojas. San Luis de Potesí: Editora da Universidade de San Luis de Potesí. 2000, p.216- 244.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. 1. ed. 23. reimpr. São Paulo: Atlas, 2015.

VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 12. ed. São Paulo: Ícone, 2014.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKI, L. S. **Psicologia Pedagógica**. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2018.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escondidas II**: incluye pensamiento y lenguage conferencias sobre psicologíal. Tradução de José María Bravo. Madrid: Visor, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente***:* o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. 2000.