UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
CAMPUS TORQUATO NETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

DANIEL ARAUJO ALVES DA SILVA

**Resolução de Problemas Combinatórios:** Uma Abordagem Estratégica Baseada no Método de Polya para o Ensino Médio

Teresina-PI
2025

Daniel Araujo Alves da Silva

**Resolução de Problemas Combinatórios:** Uma Abordagem Estratégica Baseada no Método de Polya para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Piauí como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.(a), Dr.(a) Lilane de Araujo Mendes Brandão.

Teresina-PI

2025

S586r Silva, Daniel Araujo Alves da.
Resolução de problemas combinatórios: uma abordagem estratégica baseada no Método de Polya para o ensino médio / Daniel Araujo Alves da Silva. - 2025.
42 f.: il.

Monografia (graduação) - Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Piauí, 2025.
"Orientadora: Prof.ª Dra. Lilane de Araujo Mendes Brandão".

1. Ensino de matemática. 2. Método de George Polya. 3. Problemas combinatórios. 4. Dificuldade de Aprendizagem. I. Brandão, Lilane de Araujo Mendes . II. Título.

CDD 511.6

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
Francisca Carine Farias Costa (Bibliotecário) CRB-3ª/1637

Daniel Araujo Alves da Silva

**Resolução de Problemas Combinatórios:** Uma Abordagem Estratégica Baseada no Método de Polya para o Ensino Médio

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso Licenciatura Plena em Matemática.

Local: Universidade Estadual do Piauí - Campus Poeta Torquato Neto, 02 de dezembro de 2025.

Coordenação do Curso

**Banca examinadora**

Prof.(a) Dr.(a) Lilane de Araujo Mendes Brandão
Orientadora

Prof. Pedro Paulo Alves Oliveira (UESPI)
Membro

Prof. Igor Fontenele do Amaral (UESPI)
Membro

Teresina, 2025.

# RESUMO

A Análise Combinatória é frequentemente apontada por professores do Ensino Médio como a parte da Matemática mais difícil de se ensinar. Estudos revelam que os estudantes quando se deparam com problemas combinatórios apresentam dificuldades na compreensão do problema e na escolha adequada das técnicas de contagem. Diante desse cenário, este trabalho teve como objetivo investigar a contribuição do Método de George Polya como estratégia para a resolução de problemas de análise combinatória no Ensino Médio. A metodologia usada na pesquisa foi qualitativa, de caráter teórico-analítico, baseada em uma revisão bibliográfica e análise de problemas selecionados do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Os problemas selecionados foram solucionados seguindo as etapas do método e em seguida foi feita uma análise geral dessa aplicação. Os resultados apontam que as indagações adaptadas em cada etapa do método contribuíram não só para uma melhor compreensão do problema, mas também contribuíram para evitar a escolha de conceitos e estratégias não aplicáveis aos problemas. Com isso, conclui-se que o Método de George Polya é promissor para a melhoria da compreensão e resolução de problemas combinatórios.

**Palavras-chave**: Método de George Polya; Problemas Combinatórios; Dificuldades.

# ABSTRACT

Combinatorial Analysis is often pointed out by High School teachers as the most difficult part of Mathematics to teach, and studies reveal that students, when faced with combinatorial problems, have difficulties in understanding the problem and in the appropriate choice of counting techniques. Given this scenario, this work aimed to investigate the contribution of George Polya's Method as a strategy for solving combinatorial problems in High School. A qualitative, theoretical-analytical research was carried out, based on a literature review and the analysis of selected problems from the Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM - National High School Exam). The selected problems were solved following the steps of the method, and then a general analysis of this application was performed. The results indicate that the adapted inquiries in each step of the method contributed not only to a better understanding of the problem, but also helped to avoid the choice of concepts and strategies not applicable to the problems. Thus, it is concluded that George Polya's Method is promising for the improvement of the understanding and resolution of combinatorial problems.

Keywords: George Polya's Method; Combinatorial Problems; Difficulties.

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

"A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições" (HAZZAN, 2013, p.1). Os problemas que envolvem os conceitos desse ramo exigem do estudante bem mais que a identificação da "fórmula correta", exigem uma certa dose de investigação. O que torna a ligação entre os problemas combinatórios e a metodologia de George Polya natural.

Essa área da matemática apresenta uma gama de métodos de contagem, tornando inviável a análise de todas elas. Dessa forma, este estudo tem o foco nos conceitos introdutórios abordados no Ensino Médio, como: princípio aditivo e multiplicativo, permutações, arranjos e combinações.

Este estudo busca responder à seguinte questão: "Como a aplicação do Método de George Polya pode contribuir para a melhoria da compreensão e da resolução de problemas combinatórios no Ensino Médio". Acredita-se que essa investigação pode mensurar a contribuição do método quando aplicado em problemas combinatórios.

Para alcançar esse objetivo, o estudo aborda, de forma teórica e analítica, a importância da resolução de problemas, apresenta o Método de George Polya e suas quatro etapas, além de introduzir a Análise Combinatória no Ensino Médio. Busca-se investigar as principais dificuldades dos alunos em problemas combinatórios, selecionar e classificar esses problemas, aplicar o Método de Polya nos casos escolhidos e refletir sobre como essa aplicação pode contribuir para a superação dos obstáculos.

Essa parte da matemática é apontada por professores do ensino médio como a parte da matemática mais difícil de se ensinar (MORGADO *et al*, 1991), refletindo diretamente na aprendizagem dos estudantes. A experiência em aulas de matemática como professor de reforço permitiu observar que os alunos do Ensino Médio quando estavam dispostos a solucionar um problema de combinatória apresentavam dificuldades em compreender o enunciado e elaborar uma estratégia para solução do problema.

A partir daí, este pesquisador conhecendo o Método de George Polya buscou investigar as contribuições da aplicação desse Método para solução de problemas combinatórios, uma vez que o método possibilita um fortalecimento do pensamento crítico e do raciocínio lógico (PONTES, 2019).

# 2 REFERENCIAL TEÓRICO

## 2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

> A resolução de problemas é uma forma de atividade mental caracteristicamente criativa e que exige engenhosidade na concepção ou reflexão. Os objetivos da resolução de problemas na matemática escolar são os fins mais importantes do currículo de matemática e também meios para os fins do desenvolvimento de conceitos e habilidades. (C. Edwin McClintock, 1982, p.9, tradução nossa).

Para Nunes (2010) apesar dos problemas serem encontrados no currículo escolar de civilizações antigas, como a babilônica, a egípcia, a chinesa e a grega, a importância dada à resolução de problemas no ensino da matemática é bem recente e somente nas últimas décadas do século XX os educadores matemáticos reconheceram que essa metodologia merecia ser mais estudada. Tal abordagem surge como contraponto ao ensino tradicional do século XX, no qual se caracteriza por um ensino tecnicista baseado na reprodução de regras, memorização de propriedades e repetição (ONUCHIC, 1999 apud Nunes, 2010). O professor era concebido como único detentor do conhecimento e portanto ele transmitia os conteúdos através de uma aula expositiva e cabia ao aluno um papel passivo nessa relação.

A partir dessa mudança de paradigma, a resolução de problemas passa a ser entendida não só como meio para treinar ou aplicar conhecimentos já adquiridos, mas também como metodologia que estimula o desenvolvimento do raciocínio e o espírito investigativo nos alunos. De acordo com McClintock (1982),

> A apresentação de problemas em uma sala de aula de matemática tem o potencial de motivar e empolgar alunos relutantes. O sentido de novidade e o desafio de uma dificuldade que evoca engenho estabelecem um tom positivo para a sala de aula. Em essência, os alunos podem sentir que suas mentes estão sendo desenvolvidas, que o iniciador da atividade de resolução de problemas valoriza o engenho deles!. (C. Edwin McClintock, 1982, p.9, tradução nossa).

Essa perspectiva reforça o papel do professor não mais como detentor do conhecimento, mas como mediador, cuja função é propor situações que estimulem o pensamento do aluno, para que eles próprios elaborem suas estratégias. Dessa forma, a atividade de resolver problemas torna-se instrumento para uma aprendizagem mais ativa e significativa.

Reconhecendo a importância da resolução de problemas no ensino da matemática, faz-se necessário evidenciar a diferença entre exercício e problema. Segundo Dante (2011), exercício é uma atividade que tem o objetivo de fazer com que o aluno exercite ou identifique determinado algoritmo, fórmula ou definição, conforme pode-se verificar no Exemplo 1.

Exemplo 1: Resolva a seguinte equação do primeiro grau com uma incógnita:

$$x + 10 = 90.$$

Solução do exemplo 1: Para resolver essa equação, basta simplesmente pensar em um número que somado com 10 resulte em 90. Outra possibilidade seria subtrair ambos os lados da igualdade por 10. Assim, obtém-se: $x = 80$.

Percebe-se que a partir do enunciado o exercício direciona o leitor a uma ação imediata, o que tornou a solução do exemplo de maneira direta, não havendo a necessidade de um esforço maior para sua solução. Apesar disso, segundo Temaj (2024) os exercícios apresentam funções importantes na aprendizagem de matemática, pois contribuem para aquisição de novos conceitos, desenvolvimento de habilidades, aumento da confiança, melhoria da motivação e atitude positiva e aumento do engajamento dos alunos, propiciando um ambiente de aprendizagem apropriado.

O conceito de problema é discutida por diversos autores. Para George Polya (1995) ter um problema significa buscar conscientemente uma maneira de alcançar um objetivo que não pode ser alcançado de imediato. Com esse mesmo direcionamento Dante (2011) define que problema "é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo" (Dante, 2011, p. 9) . Segundo Moura (2023):

> Um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações desconhecidas e a invenção de estratégias de demonstração e análise do resultado. Para isso, o indivíduo ou o grupo deve entender o problema, inventar estratégias, criar soluções intermediárias, analisar os fatos decorrentes do processo de solução até que a solução final seja encontrada (Moura, 2023, p.15).

Apesar dos autores apresentarem diferentes definições para o termo problema, todas convergem na ideia que o ato de resolver problemas não se trata de um processo mecânico, que de imediato se obtém uma resposta, mas de um processo cognitivo mais amplo.

Embora Dante (2011) defina o que é um problema, o autor completa sua concepção ao afirmar: “O que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro” (Dante, 2011, p. 9). Assim, a resolução de problemas em matemática não deve ser vista como um processo uniforme, pois cada aluno apresenta diferentes níveis de facilidade ou dificuldade ao enfrentar esse tipo de atividade. Alguns estudantes podem encontrar mais obstáculos do que outros, dependendo de diversos fatores. Nesse sentido, D’Ambrósio (2009) ressalta que “a educação em geral depende de variáveis que se aglomeram em direções muito amplas: a) o aluno […], b) sua inserção na sociedade […], c) as estratégias […], d) os agentes […], e) o conteúdo […]”.

Seguindo esse direcionamento, o documento normativo que estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais que os estudantes do Brasil devem desenvolver ao longo da educação básica, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), reforça que no Ensino Médio, é fundamental que os estudantes desenvolvam habilidades de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas conectados ao mundo real. “Consequentemente, quando a realidade é referência, é preciso levar em conta as vivências dos estudantes do Ensino Médio” (BNCC, 2018, p. 528).

Essa orientação mostra que o objetivo do ensino da matemática é desenvolver a cognição de cada aluno, considerando as suas experiências extra-escolares, para que sejam capazes de elaborar análises e estratégias para resolver problemas conectados à realidade. Com isso, observa-se uma convergência entre o documento normativo e as concepções de autores como McClintock, George Polya, Dante e Moura, que defendem a resolução de problemas como uma estratégia eficaz para promover uma aprendizagem matemática mais significativa. Diante dessa sintonia teórica e normativa, torna-se pertinente apresentar, a seguir, o método de resolução de problemas proposto por George Polya, cuja abordagem busca desenvolver a autonomia dos estudantes e estruturar seu raciocínio matemático de forma progressiva e consciente.

## 2.2 O MÉTODO DE GEORGE POLYA

George Pólya foi um matemático húngaro que nasceu no ano de 1887. George inicialmente começou seus estudos na área do direito seguindo os passos do seu pai que era advogado e a seguir dedicou-se ao estudo de outras áreas do conhecimento como línguas e literatura, posteriormente estudou filosofia, física e finalmente matemática. Foi na área da matemática que Polya qualificou-se como doutor no ano de 1912 e fez contribuições importantes no mundo acadêmico (FRANK, 2020).

Em 1945 publicou um dos seus livros mais famosos: *"How to Solve it",* que foi traduzido para o português em 1977 pela editora Interciência com o título "A arte de resolver problemas". Nele o autor apresenta uma metodologia baseada em quatro etapas: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e retrospecto. Essa metodologia ficou conhecida como o Método Polya. Veja a seguir de forma detalhada cada etapa do método.

### 2.2.1 Etapas de resolução

#### *2.2.1.1 Compreensão do problema*

Essa etapa parece óbvia e vaga, claro que se deve compreender o problema para solucioná-lo, mas há alunos que "resolvem" o problema sem que haja uma análise, o solucionando de forma mecânica. Essa prática é nociva, pois na maioria das vezes o problema não é solucionado.

> É uma tolice responder uma pergunta que não foi compreendida. É triste trabalhar para o fim que não se deseja. Essas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. (Polya, 1995, p.4).

Segundo Polya (1995) essa etapa exige do aluno a habilidade de identificar os elementos principais da situação problema, os dados conhecidos, a incógnita e as condições envolvidas no problema. Nesse sentido, Polya (1995) orienta que o professor faça as seguintes indagações: Qual a incógnita? O que se quer? Quais dados foram fornecidos no enunciado? Qual a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

Polya (1995) afirma que a finalidade dessas indagações é focalizar a atenção do aluno na incógnita. Assim, ao propor tais questionamentos inicia-se uma operação mental, na qual o aluno irá estruturar o problema e construir um entendimento mais claro acerca do problema. Para Polya (1995) há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir aos alunos uma indagação, o primeiro é auxiliá-lo a resolver o problema e o segundo é capacitá-lo a resolver os problemas seguintes de maneira independente, fazendo ele próprio as indagações mentamente.

#### *2.2.1.2 Desenvolvimento do plano de execução*

Nessa etapa o aluno deverá elaborar uma estratégia para chegar a resolução. De acordo com Polya (1995) o caminho que vai da compreensão do problema até o estabelecimento de plano de execução pode ser longo e tortuoso. Para ele, isso acontece porque o principal feito na resolução de um problema é possuir a ideia de um plano, mas nem sempre essa idéia irá surgir de imediato, às vezes ela poderá surgir depois de várias tentativas. De acordo com Polya (1995), a construção de uma boa ideia está relacionada com o quanto se sabe acerca do assunto e considera ser difícil se pouco se sabe sobre o assunto, ou seja, para estabelecer um bom plano é necessário que se tenha algum conhecimento prévio.

Nesse contexto, as indagações não são abandonadas, e são apresentadas da seguinte forma: Conhece algum problema semelhante ou já viu algum problema que tenha a mesma incógnita?; Conhece algum teorema ou propriedade que relaciona os dados com a incógnita?. Essas indagações podem ajudar na concepção de um plano, mas ainda que não sejam suficientes George Polya orienta que pode-se fazer uma uma reformulação do problema para um caso mais simples e, posteriormente, uma generalização.

Após tais indagações e colocações, espera-se que o aluno tenha a idéia de um plano de execução. Essa idéia pode não ser a solução definitiva, mas constrói um caminho a ser testado. A expectativa é que o aluno tenha a concepção de um plano plausível fundamentado nos seus conhecimentos prévios e raciocínio lógico. Assim o estudante terá as ferramentas para aplicar na próxima etapa do método.

*2.2.1.3 Execução do plano de ação*

Nessa etapa o aluno coloca em prática as estratégias estabelecidas na etapa anterior. Segundo Polya (1995) o plano é apenas um roteiro e que é preciso que o aluno esteja convicto que os detalhes estejam de acordo, e que para isso deve ser feito um exame passo a passo até que fique claro que não restam detalhes escondidos que foram negligenciados na etapa anterior. Em certos casos pode-se fazer a seguinte indagação: É possível perceber claramente que o passo está correto? (POLYA, 1995). Dessa forma, a execução do plano não se resume a aplicar os procedimentos estabelecidos no plano, mas também refletir acerca do plano que foi elaborado.

*2.2.1.4 Retrospecto*

A fase de retrospecto é o momento em que será feita uma análise do problema como um todo. Apesar de ter sido feita uma resolução verificando cada passo sempre é possível que se tenha cometido algum erro, como um erro de cálculo. Dessa forma, George Polya considera essencial para uma taxa maior de sucesso que seja verificado o resultado ou argumento se possível.

Segundo Polya (1995), o retrospecto é algo que até alunos com bom desempenho costumam negligenciar, uma vez que chegam a solução do problema avançam para outra atividade. O que segundo o autor não é benéfico, já que o aluno perde a oportunidade de consolidar o seu conhecimento e sua habilidade em resolver problemas.

Para Polya (1995), problema algum fica completamente esgotado. Assim ele sugere que nessa etapa, sejam feitas as seguintes indagações: Há alguma forma mais simples de chegar ao resultado? Há um outro caminho que poderia ser seguido? É possível utilizar esse resultado ou método em algum outro problema?. A partir dessas indagações fica evidente que na fase de Retrospecto busca-se mais do que verificar o resultado, busca-se também que o aluno reflita tanto acerca da trajetória que o levou a determinado resultado, quanto como ele poderia aperfeiçoar a resolução do problema.

Após tal reflexão, o aluno ao se deparar com um problema semelhante, ele será capaz de elaborar um plano tão bom quanto o plano feito anteriormente

(POLYA, 1995). Dessa forma, a fase de retrospecto se consolida como uma etapa fundamental desse método de resolução de problemas.

## 2.3 INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Este capítulo apresenta uma visão geral da Análise Combinatória no ensino, abordando conceitos introdutórios, exemplos, soluções e as dificuldades de aprendizagem. Os conceitos, exemplos, deduções de fórmulas e pesquisas apresentadas neste capítulo tem como objetivo contextualizar e facilitar o entendimento em todos os aspectos deste trabalho. As definições e exemplos apresentados neste capítulo são baseadas nos autores: Hazzan (2013); Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991); Santos, Mello e Murari (2007).

### 2.3.1 Visão geral

A Análise combinatória é um conteúdo fundamental, no qual é trabalhado conceitos como permutação, arranjo, combinação, binômio de newton, triângulo de pascal, entre outros. De acordo com Hazzan (2013), o objetivo da Análise Combinatória é desenvolver métodos que auxiliem na contagem de elementos de um conjunto, uma vez que essa essa contagem seria quase impossível, se o número de elementos envolvidos na contagem for grande.

De acordo com Morgado *et al* (1991), a busca por técnicas de contagem está intimamente ligada à história da matemática e às primeiras vivências com essa disciplina. As crianças são exemplos disso, já que a primeira técnica matemática aprendida é contar, e as operações aritméticas são introduzidas a partir de problemas de contagem.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na área de “Matemática e suas Tecnologias”, na competência específica 3, ressalta a relevância desse ramo ao propor, por meio da habilidade de código EM13MAT310, que o estudante seja capaz de “resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenados ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (BNCC, 2018, p. 537).

Essa orientação, evidência a relevância do raciocínio combinatório para o desenvolvimento da capacidade do aluno em aplicar conhecimentos para a solução de problemas, sempre analisando de maneira crítica os resultados obtidos. Tal valorização reflete nos exames nacionais, pois através de uma busca feita no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), foi observado que nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), realizadas no período entre os anos de 2010 e 2024, a aparição recorrente de questões de análise combinatória. Por meio da análise dessas questões foi observado que as questões exigem do aluno não só habilidade de aplicar as fórmulas dessa disciplina, mas também exigem a habilidade em interpretar o enunciado e em elaborar estratégias.

A análise combinatória, portanto, além de estar presente na origem da matemática, ela desempenha uma função importante no ensino. Dessa forma, se faz necessário compreender os conceitos introdutórios deste ramo da matemática, como: princípio aditivo, princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação.

### 2.3.2 Conceitos Introdutórios

**Definição 1 - Princípio aditivo:** Se $A$ e $B$ são dois conjuntos disjuntos com, respectivamente, $p$ e $q$ elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

**Exemplo 2.** Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Carlos tenha dinheiro para assistir apenas 1 evento. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?

**Solução do Exemplo 2:** Se Carlos tem dinheiro para assistir a apenas 1 evento, então ou Carlos assiste ao Filme 1, ou ao Filme 2, ou ao Filme 3, ou à Peça 1, ou à Peça 2. Portanto, ao todo são 5 opções diferentes de programas.

**Definição 2 - Princípio Multiplicativo:** Se um evento $A$ pode ocorrer de $m$ maneiras diferentes e, se para cada uma dessas $m$ maneiras possíveis de $A$ ocorrer, um outro evento $B$ pode ocorrer de $n$ maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento $A$ seguido do evento $B$ é $m \cdot n$. Em linguagem de conjuntos, se $A$ é um conjunto com $m$ elementos e $B$ é um conjunto com $n$ elementos, então o conjunto $A \times B$ (A cartesiano B) dos pares ordenados $(a, b)$, tais que $a$ pertence a $A$

e $b$ pertence a $B$, tem cardinalidade $m \cdot n$.

**Exemplo 3:** Numa padaria há 3 sabores de pizza e 2 tipos de sucos. Suponha que Maria vá à padaria e possa comer um salgado e tomar um suco. Quantos pedidos diferentes Maria pode fazer?

**Solução do Exemplo 3:** Seja *P* = Pizza e *S* = Suco, iremos enumerar os casos possíveis:

| | |
|---|---|
| *P1* e *S1* | *P2* e *S2* |
| *P1* e *S2* | *P3* e *S1* |
| *P2* e *S1* | *P3* e *S2* |

Portanto Maria pode fazer 6 pedidos diferentes.

No exemplo, como os conjuntos de pizza e sucos possuem uma pequena quantidade de elementos, é possível listar todos os casos possíveis manualmente. Entretanto, se os conjuntos possuem muitos elementos, essa estratégia deixa de ser prática se quisermos apenas a quantidade de possibilidades. Nessas situações, é mais prático aplicarmos o princípio multiplicativo para obtermos o número de combinações possíveis em vez de listar todas elas.

**Exemplo 4:** Em uma sorveteria há 50 sabores de sorvetes e 10 tipos de casquinha. Suponha que Alice deseja comprar um sabor de sorvete e um tipo de casquinha. Quantas pedidos diferentes Alice poderá fazer?

**Solução do Exemplo 4:** Pode-se tomar como evento $A$ a escolha do sabor de sorvete (com um total de 50) e como evento $B$ a escolha do tipo de casquinha (com um total de 10). Portanto Alice pode fazer $50 \cdot 10 = 500$ pedidos diferentes.

**Definição 3 – Permutação Simples:** Uma permutação de $n$ objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que o número de permutações simples de $n$ objetos distintos é representado por $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Observação: $0! = 1$

**Exemplo 5:** Quantos são os anagramas da palavra SAPO?

**Solução do Exemplo 5:** Cada anagrama da palavra SAPO é apenas um agrupamento ordenado das letras S, A, P e O. Dessa maneira, o número de anagramas da palavra SAPO é $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

**Definição 4 – Arranjo simples:** Arranjos simples de m elementos tomados $r$ a $r$, onde $(1 \leq r \leq m)$, são todos os agrupamentos de $r$ elementos distintos, que diferem na entre si pela ordem e pela natureza dos $r$ elementos que compõem cada grupo. Notação: $A_{m,r}$.

**Fórmula do número de arranjos:**

Seja $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos $m$ elementos tomados $r$ a $r$, onde $(1 \leq r \leq m)$. Este é um problema equivalente a termos $m$ elementos com os quais queremos preencher $r$ lugares. O primeiro lugar pode ser ocupado de $m$ maneiras. O segundo lugar pode ser ocupado de $(m - 1)$ maneiras, já que o primeiro lugar foi ocupado por um dos $m$ elementos. Após a ocupação do segundo lugar, teremos $(m - 2)$ maneiras de ocupar o terceiro lugar e assim por diante. Dessa forma, pelo princípio multiplicativo as $r$ posições podem ser preenchidas de $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot ... \cdot [m - (r - 1)]$ maneiras diferentes. Portanto $A_{m,r} = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot ... \cdot [m - (r - 1)]$. Multiplicando a expressão por $\frac{(m-r)!}{(m-r)!}$, obtemos $A_{m,r} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ... \cdot [m-(r-1)] \cdot (m-r)!}{(m-r)!}$. Simplificando temos que $A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$.

Observação: Para o caso que $m = r$ teremos o caso da permutação de $m$ elementos tomados $m$ a $m$, veja: $A_{m,m} = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = m!$.

**Exemplo 6:** Quantos palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

**Solução do Exemplo 6:** A solução pode ser feita através da fórmula do arranjo simples ou através do princípio multiplicativo. Perceba que deve-se escolher 3 elementos distintos dentre os 26 elementos disponíveis. Dessa forma tem-se um arranjo de 26 elementos tomados 3 a 3, isto é, $A_{26,3} = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = \frac{26\cdot25\cdot24\cdot23!}{23!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ palavras.

**Definição 5 – Combinação Simples:** Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de combinações dos $m$ elementos, tomados $r$ a $r$, aos subconjuntos de M constituídos de $r$ elementos. Notação $C_{m,r}$.

**Fórmula do número de combinações:**

Pela definição tem-se que combinações simples são todas as escolhas não ordenadas de $r$ dos $m$ elementos. Sabe-se que, o conceito de Arranjo a ordem dos elementos na escolha, o conceito a ser trabalhado é Arranjo, no qual o número de arranjos de $r$ elementos entre $m$ elementos é dado por:

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Esse valor corresponde ao número de maneiras de escolher e ordenar $r$ elementos entre $m$. Perceba que, para cada subconjunto de $r$ elementos, exitem $r!$ formas diferentes de ordená-los. Por exemplo: Se fossem escolhidas duas pessoas (Daniel e Ana) para formar um grupo (a ordem não importa), obtém-se apenas uma combinação. Entretanto, se fosse utilizado arranjo, serão contados os seguintes elementos: (Daniel, Ana) e (Ana, Daniel), isto é, as permutações dos dois elementos. Logo, seja $C_{m,r}$ o número de combinações de $r$ elementos dentre $m$ distintos, tem-se que:

$$C_{m,r} = \frac{A_{m,r}}{r!} = \frac{\frac{m!}{(m-r)!}}{r!} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

**Exemplo 7:** Deseja-se formar um grupo com 3 alunos e dispõe-se de 18 alunos. Quantos grupos podem ser formados?

**Solução do Exemplo 7:** Note que no grupo não importa a ordem dos membros. Assim o número de grupos é $C_{18,3} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{3! \cdot 15!} = \frac{4896}{6} = 816$ grupos diferentes.

**Definição 6 – Permutação com Elementos Repetidos:** A Permutação com elementos repetidos é um caso particular de permutação dos $n$ elementos de um conjunto finito $A$, em que nem todos os $n$ elementos são distintos.

**Fórmula do número de Permutações com Elementos Repetidos**

Considerando a palavra ASA, seus anagramas são: (ASA), (AAS), (SAA). Fazendo a aplicação da permutação simples, obtém-se $P_3 = 3! = 6$ anagramas. No entanto, na realidade tem-se apenas 3. Isso ocorre pelo fato de que quando se aplica-se permutação simples é considerado que os elementos são todos distintos, como se as letras “A” fossem distintas entre si. Essas 6 permutações seriam:

$$A_1\ S\ A_2$$
$$A_2\ S\ A_1$$
$$S\ A_1 A_2$$
$$S\ A_2\ A_1$$
$$A_1\ A_2\ S$$
$$A_2\ A_1\ S$$

Na realidade os dois “$A$” são iguais, e, por isso, surgem vários anagramas iguais. São eles: $A_1\ S\ A_2$ e $A_2\ S\ A_1$, $S\ A_1 A_2$ e $S\ A_2 A_1$, $A_1\ A_2\ S$ e $A_2\ A_1\ S$. Note que cada par apenas permutou a letra $A$, mas é a mesma palavra. Assim há $2! = 2$ formas de permutar a letra $A$ e não gerar uma palavra nova. Dessa forma, se dividido o total de 6 anagramas pelo número de repetições da letra “A” $(2!)$, obtém-se o resultado de 3 anagramas distintos.

Generalizando tem-se que se um conjunto possui $n$ elementos dos quais possui $n_i$ elementos iguais ($i \in N$), o número de permutações distintas será dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

**Exemplo 8:** Quantos anagramas possui a palavra BANANA?

**Solução DO Exemplo 8:** A palavra BANANA possui 6 letras, em que a letra A aparece 3 vezes, a letra N aparece 2 vezes e a letra B apenas uma vez. Portanto o número de anagramas é $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 60$ anagramas.

**Definição 7 – Arranjo com Elementos Repetidos:** Seja $M$ um conjunto com $m$ elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos arranjo com repetição dos $m$ elementos, tomados $r$ a $r$, toda r-upla ordenada formada com elementos de $M$ não necessariamente distintos.

**Fórmula do número de arranjos com elementos repetidos**

Caso repetições sejam feitas, pelo princípio multiplicativo o número total de maneiras de se retirar, levando em conta a ordem, $r$ entre os $m$ elementos, distintos ou não, é igual a $(AR)_{m,r} = m^r$, pois o primeiro elemento pode ser escolhido de $m$ maneiras, o segundo também $m$ maneiras e assim sucessivamente até a escolha do último elemento.

**Exemplo 9** Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida, outra bola é extraída e observada sua cor. Quais são as possíveis sequências de cores observadas?

**Solução do Exemplo 9:** Cada extração pode resultar em qualquer uma das 3 cores e como a bola é reposta, as possibilidades não se alteram. Logo o número de sequências possíveis é $(AR)_{3,2} = 3^2 = 9$.

### 2.3.3 Dificuldades de Aprendizagem

Segundo Morgado *et al* (1991), a Análise Combinatória é frequentemente apontada por professores como o ramo da matemática mais complicado de ensinar aos alunos. O autor aponta, que apesar dessa disciplina conter problemas capazes de motivá-los, os mesmos apresentam dificuldades em escolher a fórmula correta para cada problema. Dessa forma, foram analisadas duas pesquisas que estudam o porquê dessas dificuldades, uma foi realizada sob o olhar dos professores e outra sob o olhar dos alunos.

De acordo com o estudo de Pinheiro (2007), muitas das dificuldades apresentadas têm origem no modo que os conceitos são apresentados nos livros didáticos e nas aulas, onde as fórmulas são apresentadas de forma isolada, sem uma análise de onde as fórmulas surgem. Essa prática tende a limitar o ensino da Análise Combinatória à memorização de procedimentos, não favorecendo o entendimento da lógica matemática em torno dos conceitos desse ramo.

Nesse sentido, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, apud Costa *et al,* 2024), observam que o uso excessivo de fórmulas constrói um obstáculo à aprendizagem, uma vez que os alunos acreditam que ao identificarem a fórmula correta, o problema será solucionado. Sobre isso, Morgado *et al* afirma que:

> Por outro lado, se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (Morgado *et al*, 1991, p.2).

Essa crítica reforça que um ensino baseado na repetição de procedimentos e na aplicação de fórmulas pode levar os alunos a desenvolverem a percepção, de que, para se obter sucesso nesta disciplina, é suficiente decorar as fórmulas e saber quando utilizá-las.

Nesse cenário, tal abordagem revela conduzir o estudante para o caminho oposto ao desenvolvimento da sua própria autonomia na resolução de problemas e contra a BNCC, uma vez que o objetivo do ensino não é desenvolver a capacidade dos alunos em reproduzirem de forma mecânica fórmulas e procedimentos.

Ainda sobre essa questão, Pinheiro (2007), em estudo com professores do Ensino Médio, identificou que as dificuldades dos alunos vão além da memorização das fórmulas. No questionário respondido, $80\%$ dos docentes afirmaram que a maior dificuldade dos alunos é em diferenciar os problemas que envolvem apenas o produto das combinações, dos problemas que envolvem a soma de combinações. Além disso, os docentes destacaram que os alunos apresentam dificuldade de diferenciar problemas de arranjo dos problemas de combinação.

Complementando a visão dos professores, um estudo feito sobre a aprendizagem de análise combinatória no Ensino Médio, realizado por Costa *et al* (2024) com alunos do 3° ano do ensino médio, constatou que apesar da variedade de metodologias pedagógicas disponíveis, as aulas dessa disciplina seguem o modelo tradicional. O estudo também revelou, por meio de uma lista de questões respondidas pelos alunos, que os maiores índices de erros estão associados a problemas relacionados à permutação simples, princípio multiplicativo e à combinação.

Assim, com base nos estudos apresentados, fica evidente que as dificuldades apresentadas pelos alunos não estão associadas apenas à teoria ou à memorização das fórmulas, mas na compreensão dos problemas. De acordo com Handaya (2017, apud Costa *et al,* 2024), a maior parte das dificuldades apresentadas pelos alunos em relação à Análise Combinatória se dá pela dificuldade destes em ler e interpretar os problemas, principalmente se possuírem textos longos.

Dadas as dificuldades apresentadas nos estudos há a necessidade de metodologias de ensino que valorizem a reflexão e planejamento, como é o caso do Método de Polya que será abordado a seguir com o foco em problemas combinatórios.

## 2.4 O MÉTODO DO GEORGE POLYA COMO ESTRATÉGIA PARA PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Diante das dificuldades apresentadas por docentes e discentes no processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, fica evidente a necessidade de metodologias que ajudem a superar os obstáculos que foram encontrados. Não se trata apenas de decidir qual fórmula usar, mas raciocinar em maneiras de solucionar o problema. Como afirma Morgado (1991):

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem

> atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. (Morgado, 1991, p.2).

Essa reflexão reforça a idéia de que o ensino da análise combinatória precisa favorecer a compreensão e a análise das situações problemas. Nesse contexto, segundo Gazzoni e Ost (2008, apud Pontes, 2019) o método de George Polya organiza as ideias e melhora a compreensão do problema com mais facilidade do que não usando o método, principalmente naqueles que apresentam um maior nível de dificuldade. Além do que a possibilidade do método em analisar problemas análogos para contribuir para a concepção de um plano para o problema, torna mais claro a estratégia para sua resolução (Gazzoni e Ost, 2008, apud Pontes, 2019).

Apesar de George Polya não ter desenvolvido o método especificamente para problemas combinatórios, acredita-se que teoricamente o método se apresenta como metodologia ideal para resolução de problemas combinatórios, pois esse método possibilita tanto ao professor facilitador quanto ao aluno desenvolver o raciocínio lógico e o pensamento crítico (PONTES, 2019), que são habilidades essenciais para se resolver problemas combinatórios.

Segundo Polya (1995) as indagações sugeridas no método são gerais, porém o autor incentiva o uso de perguntas que auxiliem o estudante a explorar o problema. Assim, as indagações para cada etapa foram adaptadas para o contexto da análise combinatória com base nos obstáculos mais recorrentes encontrados nos estudos de  PINHEIRO, 2007 e COSTA et al, 2024.

Na primeira etapa, a compreensão do problema, as indagações propostas por Polya (1995) auxiliam o aluno no início do processo de reflexão do problema. Com isso, é possível considerar adicionar indagações voltadas especificamente para problemas combinatórios, tais como: “A ordem dos elementos importa?”, “É permitido repetições ou cada elemento só pode ser usado uma vez?”, “Quantos elementos estão disponíveis e quantos podem ser escolhidos?”, “Há alguma restrição?”, “O que deve ser contabilizado e o que não deve ser contabilizado?” e “Pode-se construir um esquema visual (tabela ou diagrama de árvore)?”. O objetivo dessas indagações é desconstruir o problema, atacando diretamente uma das principais dificuldades dos alunos segundo os estudos de PINHEIRO, 2007 e

COSTA et al, 2024 a compreensão do enunciado.

Na segunda etapa, o desenvolvimento do plano, é coerente considerar indagações específicas, já que nessa etapa o aluno deve elaborar uma estratégia combinatória a ser utilizada, como: “Conhece algum problema correlato?”, “Conhece algum conceito que possua as mesmas características identificadas no problema (Permutação, Arranjo, Combinação e etc)?” e “Há restrições que possibilitam dividir o problema em casos?”. Tais indagações, buscam combater o uso indiscriminado de fórmulas, uma prática comum entre os alunos segundo Costa *et al* (2024).

A terceira etapa, execução do problema, as indagações: “O cálculo condiz com o que foi planejado?”, “Cada etapa do cálculo tem justificativa na teoria da Análise Combinatória?”, visão combater a prática identificada no estudo de Costa *et al* (2024), o erro de os estudantes aplicarem mecânicamente as fórmulas.

Na quarta e última etapa, o retrospecto, é uma etapa muito importante na resolução de um problema (POLYA, 1995). E indagações, como: “O resultado é coerente?”, “O resultado se encontra entre as alternativas?”, “Respeitei todas as restrições?”, “O caminho escolhido foi eficiente?” e “Existe outra estratégia aplicável?” permitem verificar se a solução está correta e se é possível aprimorá-la.

Essa abordagem estratégica baseada nas indagações propostas não visão recriar ou substituir o método, mas aperfeiçoá-lo com enfoque nas dificuldades dos alunos em Análise Combinatória, uma vez que a estrutura do método não mudou e as ferramentas heurísticas estão alinhadas com a obra “A Arte de Resolver Problemas”.

# 3 METODOLOGIA

## 3.1 TIPO DE PESQUISA

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, de caráter teórico-analítico, que tem como finalidade investigar a contribuição do Método de George Polya para a resolução de problemas combinatórios no Ensino Médio.

## 3.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia será desenvolvida em três etapas:

1) Levantamento Teórico: Foi realizado uma busca na literatura sobre as principais dificuldades dos alunos ao solucionar um problema combinatório segundo (PINHEIRO, 2007; COSTA et al., 2024), fundamentos para a resolução de problemas em acordo com (DANTE, 2011; MOURA, 2023), estrutura e contribuições do Método de George Polya pelo próprio autor (POLYA, 2015; PONTES, 2019).

2) Seleção e Classificação de Problemas Combinatórios: Foram selecionados três problemas que contenham os tipos de estruturas combinatórias que os alunos mais apresentam dificuldades. Deu-se preferência aos problemas apontados nos ultimos anos do ENEM.

3) Análise e resolução dos problemas com base no Método de Polya: Cada problema foi rigorosamente analisado e solucionado utilizando as quatro etapas do método a fim de demonstrar na prática como a utilização do método contribui para evitar erros e organizar o pensamento combinatório.

## 3.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para a coleta de dados foi utilizado um computador com internet para a busca de: Artigos relevantes para este trabalho, Questões do ENEM no Banco de dados do INEP; Computador, mouse, teclado e o aplicativo LibreOffice Writer para resolução dos problemas.

## 3.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise foi qualitativa e interpretativa. Para cada problema, os resultados reproduziram uma solução baseada no método e uma análise comparativa relacionando as dificuldades que os alunos apresentam com as soluções realizadas.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 APRESENTAÇÃO DOS PROBLEMAS SELECIONADOS.

Após realizar um levantamento sobre as principais dificuldades dos alunos ao se deparar com um problema combinatório, foi identificado por meio dos estudos de PINHEIRO, 2007 e COSTA et al., 2024, que as dificuldades são principalmente em:

a) Diferenciar os problemas de arranjo dos problemas de combinação (identificar se a ordem dos elementos é relevante).

b) Saber se deve aplicar o princípio aditivo ou o princípio multiplicativo.

c) Compreender o enunciado do problema.

Com base nas dificuldades listadas foram selecionados no acervo de questões do INEP três problemas atuais do ENEM, conforme a seguir:

**Problema 1.** (ENEM-digital 2020) Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

Figura 1 - Problema 1


Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo. Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

a) $4^5 - 4^4 - 4^3$

b) $4^5 + 4^4 + 4^3$

c) $4^5 \cdot 4^4 \cdot 4^3$

d) $(4!)^5$

e) $4^5$

**Problema 2.** (ENEM 2022) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

• naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;

• naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;

• naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

a) $9 \cdot \frac{6!}{(6-2)!}$

b) $9 \cdot \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!}$

c) $9 \cdot \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}$

d) $9 \cdot \frac{2!}{(2-2)! \cdot 2!}$

e) $9 \cdot \left(\frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} - 1\right)$

**Problema 3.** (ENEM 2024) Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

a) $\frac{7!}{4!} \cdot \frac{6!}{4!}$

b) $\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}$

c) $\frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{6!}{2! \cdot 4!} + \frac{5!}{1! \cdot 4!}$

d) $\left(\frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{6!}{2! \cdot 4!}\right) \cdot \left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} + \frac{6!}{1! \cdot 5!}\right) \cdot \left(\frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{6!}{0! \cdot 6!}\right)$

e) $\left(\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}\right) + \left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!}\right) + \left(\frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{0! \cdot 6!}\right)$

## 4.2 SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS VIA MÉTODO DE GEORGE POLYA

### 4.2.1 Solução do Problema 1

1° etapa (Compreensão do problema):

- Qual a incógnita?

Resposta: Qual das alternativas contém a expressão que representa o número total de códigos existentes.

- A ordem dos elementos importa?

Resposta: Sim, por exemplo a senha (1,2,3,4) é diferente da senha (2,3,1,4).

- É permitido a repetição dos elementos?

Resposta: Sim, pois de acordo com o enunciado os toques podem ser feitos livremente.

- Há alguma restrição?

Resposta: Sim, pois o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

2° etapa (Desenvolvimento do plano de execução):

- Conhece algum problema correlato?

Resposta: Sim, problemas que um elemento pode ser selecionado de n-maneiras diferentes.

- Conhece algum conceito que possua as mesmas características identificadas no problema?

Resposta: Como a ordem dos elementos importa um conceito poderia ser arranjo ou princípio fundamental da contagem.

- Há restrições que possibilitam dividir o problema em casos?

Resposta: Sim, pois pode-se escolher tocar nas regiões 3 vezes ou 4 vezes ou 5 vezes.

Conclusão: Como pode-se escolher tocar nas regiões de três maneiras distintas deve-se calcular a quantidade de senhas para 3 toques, 4 toques e 5 toques. E ainda pode-se considerar que cada maneira representa conjuntos disjuntos, ao calcular cada maneira separadamente ao final será aplicado o princípio aditivo. Quando a tela for tocada 3 vezes, tem-se 4 possíveis regiões para o primeiro toque, para o segundo toque e terceiro também 4 possíveis regiões. Logo como são tomadas decisões sucessivas será utilizado o princípio multiplicativo para o cálculo da quantidade de senhas para três toques na tela. De forma semelhante para 4 e 5 toques.

3° etapa (Execução do plano de ação):

- Com três toques: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ senhas

- Com quatro toques: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$ senhas

- Com cinco toques: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ senhas

Total: $4^3 + 4^4 + 4^5$

- O cálculo condiz com o que foi planejado?

Resposta: Sim, foi seguido todo o planejamento.

- Cada etapa do cálculo tem justificativa na teoria da Análise Combinatória?

Resposta: Sim.

4° etapa (Retrospecto):

- O resultado é coerente?

Resposta: Sim o número é alto, pois são muitas sequências possíveis.

- O resultado se encontra entre as alternativas?

Resposta: Sim, alternativa b)

- Respeitei todas as restrições?

Resposta: Sim, pois a ordem dos elementos importa e o usuário toca 3, 4 ou 5 toques ao todo. Não sendo permitidos quantidades de toques superiores a 5 e nem quantidades inferiores a 3 toques.

- O caminho escolhido foi eficiente?

Resposta: Provavelmente sim, uma vez que tentar descrever todas as possibilidades seria inviável.

- Existe outra estratégia aplicável?

Resposta: Utilizar arranjo com repetição.

- É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema?

Resposta: Sim, problemas formação numérica de senhas.

### 4.2.2 Solução do problema 2

1° etapa (Compreensão do problema):

-Qual a incógnita?

Resposta: Quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher dois desses apartamentos levando em consideração as condições desejadas.

- A ordem dos elementos importa?

Resposta: Não, pois escolher o apartamento 11 e 18 é a mesma escolha que o apartamento 18 e 11.

- É permitido a repetição dos elementos?

Resposta: A pessoa deseja adquirir dois apartamentos. Portanto não se pode escolher o mesmo apartamento duas vezes.

- Quantos elementos existem?

Resposta: São 9 andares, onde cada andar possui 8 apartamentos.

- Há alguma restrição?

Resposta: Sim, a pessoa deseja comprar dois desses apartamentos em um mesmo andar e que em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã. Dessa forma, os apartamentos selecionáveis são os que cuja a unidade seja 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

2° etapa (Desenvolvimento do plano de execução):

- Conhece algum problema correlato?

Resposta: Sim, problemas que dos m elementos disponíveis escolhe-se n dos elementos.

- Conhece algum conceito que possua as mesmas características identificadas no problema?

Resposta: Sim, combinação simples, pois a ordem de seleção dos apartamentos não importa e um apartamento não pode ser selecionado duas vezes.

- Há restrições que possibilitam dividir o problema em casos?

Resposta: A pessoa deve selecionar apartamentos de um mesmo andar. Com isso, pode-se calcular de quantas maneiras a escolha pode ser feita em cada andar.

Conclusão: Para calcular a quantidade de maneiras que os apartamentos podem ser selecionados será calculado a quantidade de escolhas em cada andar. Como em cada andar há 6 apartamentos selecionáveis e deve-se escolher apenas dois, em que a ordem de seleção não importa, a quantidade de maneiras para cada apartamento é dada pela combinação simples de 6 elementos tomados 2 a 2. E ainda como as escolhas em cada andar independe da escolha dos outros andares ao final será aplicado o princípio aditivo. Como a quantidade de maneiras de escolher os apartamentos é igual, basta multiplicar pela quantidade de andares.

3° etapa (Execução do plano de ação):

Para um andar: $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ maneiras

Total: $9 \cdot 15 = 135$ maneiras diferentes.

- O cálculo condiz com o que foi planejado?

Resposta: Sim.

-Cada etapa do cálculo tem justificativa na teoria da Análise Combinatória?Resposta: Sim.

4° etapa (Retrospecto):

- O resultado é coerente?

Resposta: Se retirada as restrições do sol pela manhã o número de maneiras de escolher dois apartamentos seria 9 vezes uma combinação simples de 8 elementos tomados dois a dois que resulta em 252 maneiras. Logo como há essa restrição o número de maneiras diminuiu, o que é compreensível.

- O resultado se encontra entre as alternativas?

Resposta: Sim, apesar de estar representado de outra forma. Alternativa b).

- Respeitei todas as restrições?

Resposta: Sim.

- O caminho escolhido foi eficiente?

Resposta: Sim.

- Existe outra estratégia aplicável?

Resposta: Calcular o total de maneiras distintas de escolher dois apartamentos em um mesmo andar e retirar a quantidade de maneiras distintas de escolher dois apartamentos que em pelo menos um dos quartos não receba sol na parte da manhã.

- É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema?

Resposta: Sim, problemas de formação de equipes que de um total de n elementos apenas uma quantidade k é selecionável.

### 4.2.3 Solução do Problema 3

1° etapa (Compreensão do problema):

- Qual a incógnita?

Resposta: A expressão numérica representa o número máximo de maneiras distintas de formar uma equipe com 5 médicos.

- A ordem dos elementos importa?

Resposta: Não, pois a equipe (Cardiologista 1, Cardiologista 2, Cardiologista 3, Neurologista 1, Neurologista 2) é a mesma equipe ( Neurologista 1, Neurologista 2, Cardiologista 1, Cardiologista 2, Cardiologista 3).

- É permitido a repetição dos elementos?

Resposta: Não, pois um médico só pode entrar na equipe uma vez.

- Quantos elementos existem?

Resposta: Existem 13 médicos, dos quais 7 são cardiologistas e 6 são neurologistas.

- Há alguma restrição?

Resposta: Sim, a equipe deve ter pelo menos 3 cardiologistas.

2° etapa (Desenvolvimento do plano de execução):

- Conhece algum problema correlato?

Resposta: Sim.

- Conhece algum conceito que possua as mesmas características identificadas no problema?

Resposta: Sim, combinação simples.

- Há restrições que possibilitam dividir o problema em casos?

Resposta: Sim, pode-se calcular a quantidade de equipes com exatamente 3, 4 ou 5 cardiologistas separadamente.

Conclusão: Será calculado a quantidade de equipes com exatamente 3, 4 ou 5 cardiologistas separadamente. Os conjuntos que representam a quantidade de maneiras diferentes de formar equipes com exatamente 3, 4 ou 5 cardiologistas são disjuntos. Assim, quando contabilizar cada conjunto deverá ser aplicado o princípio aditivo. O conjunto das equipes com exatamente 3 cardiologistas possui obrigatoriamente 3 cardiologistas e 2 neurologistas. Assim como a ordem não importa e não há repetição de elementos será feita uma combinação simples de 7 elementos tomados 3 a 3 $vezes$ uma combinação simples de 6 elementos tomados 2 a 2. O cálculo da quantidade de maneiras diferentes de formar equipes com exatamente 4 ou 5 cardiologistas será de maneira análoga.

3° etapa (Execução do plano de ação):

Quantidade de maneiras diferentes de formar equipes com exatamente 3 cardiologistas:

$$C_{7,3} \cdot C_{6,2} = \frac{7!}{3!(7-3)!} \cdot \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

Quantidade de maneiras diferentes de formar equipes com exatamente 4 cardiologistas:

$$C_{7,4} \cdot C_{6,1} = \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!}$$

Quantidade de maneiras diferentes de formar equipes com exatamente 5 cardiologistas:

$$C_{7,5} \cdot C_{6,0} = \frac{7!}{5!(7-5)!} \cdot \frac{6!}{0!(6-0)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{0! \cdot 6!}$$

Total: $\left(\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}\right) + \left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!}\right) + \left(\frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{0! \cdot 6!}\right)$

- O cálculo condiz com o que foi planejado?

Resposta: Sim.

-Cada etapa do cálculo tem justificativa na teoria da Análise Combinatória?Resposta: Sim.

4° etapa (Retrospecto):

- O resultado é coerente?

Resposta: Sim, todas as possibilidades com pelo menos 3 cardiologistas foram incluídas.

- O resultado se encontra entre as alternativas?

Resposta: Sim, na alternativa e)

- Respeitei todas as restrições?

Resposta: Sim, não foi calculado a quantidade de maneiras distintas de formar equipes com um número inferior a 3 cardiologistas ou superior a 5 cardiologistas.

- O caminho escolhido foi eficiente?

Resposta:

- Existe outra estratégia aplicável?

Resposta: Contabilizar a quantidade de maneiras diferentes de formar as equipes sem restringir a quantidade de cardiologistas e então subtrair as equipes que tem 0,1 ou 2 cardiologistas.

- É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema?

Resposta: Sim, problemas que possuem na incógnita o termo “pelo menos”.

## 4.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Através da aplicação do método em problemas combinatórios do ENEM, identificou-se que a cada problema solucionado ao se deparar com o próximo já existia a ideia do que se fazer, como um roteiro guiando o sujeito durante todo o processo de resolução do problema. Dessa maneira, não houve a sensação de não saber por onde começar, ao se deparar pela primeira vez com o problema.

Foi observado também que as indagações adaptadas foram as perguntas-chaves para a tomada de decisões na resolução dos problemas, possuindo função semelhante a de um filtro de pesquisas, já que a cada indagação respondida eliminava um conceito ou estratégia.

A aplicação da primeira etapa do método nos problemas proporcionou uma melhor compreensão do problema, fazendo *jus* ao nome da etapa. As indagações feitas permitiram uma extração e análise precisa das informações do enunciado, como: Incógnita, identificação se a ordem é relevante, se a repetição dos elementos é permitida e restrições. O que deve contribuir para a superação de uma das principais dificuldades apontadas na literatura, a compreensão do enunciado.

As indagações da primeira etapa já fornecem a idéia de qual conceito aplicar, mas é através da etapa de planejamento que se evitou aplicar as fórmulas de maneira mecânica, permitindo a elaboração de uma estratégia lógica e embasada nos conceitos da Análise Combinatória. Apesar de não ter sido aplicado outras heurísticas do método, como tentar resolver um problema mais simples e posteriormente fazer uma generalização, certamente são heurísticas poderosas que podem contribuir para a resolução de outros problemas.

Possuído o plano para a solução dos problemas, a aplicação da terceira etapa do método de Polya permitiu a execução consciente do plano, buscando não só aplicá-lo, mas investigar se cada etapa do plano possui justificativa teórica.

Já a quarta etapa proporciona uma revisão geral da solução dos problemas e maturidade conceitual, por meio da análise de aspectos, como: Se a resposta está de acordo, se é possível responder o problema através de outra estratégia é se a estratégia utilizada poderia ser usada em outro tipo de problema. Em particular a indagação “É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema?” conecta diretamente com a aplicação da segunda etapa em outros problemas, mas especificamente com a heurística “conhece um problema correlato?”. De acordo com Polya, “é difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já tenha sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel” (POLYA,1995, p.36). Dessa forma, a prática de resolver problemas combinatórios utilizando o método de Polya fica a cada interação mais eficiente.

É intrínseco reconhecer que o método possui limitações, a aplicação do método nos problemas combinatórios não garante que a solução estará correta, uma vez que é também necessário o sujeito possuir uma base conceitual. Ademais, a aplicação do método pode ser vista como trabalhosa, uma que já na primeira etapa o aluno pode conceber um princípio de um plano e ir direto para os cálculos, não percebendo a necessidade e importância de cada etapa.

O estudo feito é teórico sem a observação direta ou experimentação dos seus efeitos na prática e a análise foi baseada em apenas três problemas combinatórios, uma aplicação mais vasta pode gerar ainda mais resultados. Apesar disso, essa abordagem estratégica através do método de George Polya apresenta potencial para superação das dificuldades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória.

## 5 CONCLUSÃO

Este estudo teve como objetivo investigar como o Método de Polya pode contribuir para a melhoria da compreensão e resolução de problemas combinatórios no ensino médio. Procuramos apresentar a importância da resolução de problemas no ensino, o método de resolução de problemas de George Polya, os conceitos introdutórios da Análise Combinatória que são utilizados para o ensino dessa disciplina no ensino médio e a aplicação do método como estratégia de resolução de problemas combinatórios.

A educação em geral depende de muitos fatores, porém acreditamos que essa abordagem contribui como alternativa didática para a superação das dificuldades mais comuns dos alunos nesse ramo, promoção da autonomia e desenvolvimento do raciocínio combinatório. As indagações sugeridas se apresentaram como fator importante para a solução dos problemas, já que por meio delas erros foram evitados, como escolher conceitos e estratégias não aplicáveis aos problemas.

Com base nas observações realizadas nesse estudo, acredita-se que uma proposta interessante para trabalhos futuros seja a aplicação dessa abordagem em sala de aula, observando suas limitações e desafios.

Assim conclui-se que a aplicação do método de Polya e das indagações direcionais adaptadas com base nas dificuldades dos alunos é promissora para a melhoria da compreensão e resolução de problemas combinatórios.

# REFERÊNCIAS


BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

COSTA, Ronaldo Matheus Castro da; GIORDANO, Cassio Cristiano; KISTEMANN JUNIOR, Marco Aurélio. **SOBRE A APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO:** UM ESTUDO DIAGNÓSTICO. Educação Matemática em Revista - RS,*[S. l.]*, v. 1, n. 25, 2024. Disponível em:https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/3973. Acesso em: 4 ago. 2025.

D`AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da teoria à prática. 17. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Atica, 2011.

FRANK, Tibor. GEORGE PÓLYA AND THE HEURISTIC TRADITION. Revista Brasileira de História da Matemática, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 19–36, 2020.Disponível em: https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/240. Acesso em: 2 set. 2025.

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MCCLINTOCK, C. Edwin. Problem solving: Some means and ends. Math Monograph, n. 7, p. 9-16, 1982.

MORGADO, AC de O. et al. Análise combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MOURA, Fabrício Marom. A resolução de problemas através do método de Pólya amparado por sistemas de ensino. Ponta Grossa: Atena, 2023.

NUNES, Célia Barros. O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática, p. 78-80, 2010.

PINHEIRO, CA de M.; SÁ, PF de. O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.

POLYA, George. A arte de resolver problemas. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Método de polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. Holos, v. 3, p. 1-9, 2019.

SANTOS, J. P. O.; M. P; MURARI, I. T. C. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

TEMAJ, Ismet; CANHASI-KASEMI, Esma; ORHANI, Senad. The Impact of Quick Mathematical Exercises (Warm-up Activities) on Students' Performance and Confidence. Pakistan Journal of Life & Social Sciences, v. 22, n. 2, p.16254, 2024.