



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

**UM ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA DO ESPAÇO-TEMPO EM
TORNO DE UM BURACO NEGRO SIMÉTRICO**

Francisco Fontenele Neto

PIRIPIRI

- 2025 -

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

UM ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA DO ESPAÇO-TEMPO EM TORNO DE UM
BURACO NEGRO SIMÉTRICO

Francisco Fontenele Neto

Trabalho de Conclusão de Curso realizado
sob a orientação do Prof. Dr. Neymar José
Nepomuceno Cavalcante, apresentado em
complementação aos requisitos para obten-
ção do título de Graduado em Licenciatura
Plena em Física.

PIRIPIRI

- 2025 -

F683e Fontenele Neto, Francisco.

Um estudo sobre a geometria do espaço-tempo em torno de um buraco negro simétrico / Francisco Fontenele Neto. - 2025.
52 f.: il.

Monografia (graduação) - Licenciatura em Física, Universidade Estadual do Piauí, 2025.

"Orientador: Prof. Dr. Neymar José Nepomuceno Cavalcante".

1. Relatividade geral. 2. Buracos negros. 3. Espaço-tempo. 4. Métrica de Schwarzschild. 5. Física. I. Cavalcante, Neymar José Nepomuceno. II. Título.

CDD 530.11



GOVERNO DO ESTADO DO PIAUÍ
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ – UESPI
CONSELHO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO



ANEXO A RESOLUÇÃO CEPEX 003/2021 (TCC)
ATA DE APRESENTAÇÃO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e cinco dias do mês de novembro de 2025, às dezesseis horas e trinta minutos, no laboratório de Matemática, localizado no campus Professor Antônio Geovane Alves de Sousa, em Piripiri-PI da UESPI, na presença da banca examinadora, presidida pelo professor Dr. **Neymar José Nepomuceno Cavalcante** e composta pelos seguintes membros: 1) professor Dr. **Giovane de Souza Silva** e o 2) professor Dr. **Leonardo Melo Oliveira**, o aluno **Francisco Fontenele Neto** apresentou o Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Física como elemento curricular indispensável à Colação de Grau, tendo como título: **“UM ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA DO ESPAÇO-TEMPO EM TORNO DE UM BURACO NEGRO SIMÉTRICO”**.

A Banca Examinadora reunida em sessão reservada deliberou e decidiu pelo resultado **APROVADO**, obtendo a nota final **10,0** ora formalmente divulgado ao aluno e aos demais participantes, e eu professor Dr. **Otávio de Brito Silva**, na qualidade de professor titular da disciplina de TCC II lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos membros da Banca Examinadora e pelo aluno apresentador do trabalho.

Assinaturas:

Documento assinado digitalmente
gov.br OTAVIO DE BRITO SILVA
Data: 27/11/2025 15:25:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

1 – Professor titular da disciplina de TCC

Documento assinado digitalmente
gov.br NEYMAR JOSE NEPOMUCENO CAVALCANTE
Data: 03/12/2025 12:57:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

2 – Presidente da Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br GIOVANE DE SOUZA SILVA
Data: 03/12/2025 08:34:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

3 – Membro da Banca

Documento assinado digitalmente
gov.br LEONARDO MELO OLIVEIRA
Data: 03/12/2025 14:10:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

4 – Membro da Banca

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO FONTENELE NETO
Data: 03/12/2025 15:15:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

5 – Aluno

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por estar sempre ao meu lado me concedendo a saúde necessária para continuar persistindo e por me abençoar todos os dias a conquistar meus objetivos no momento certo. Agradeço às minhas três mães, pelo amor e cuidado incondicionais, e aos meus três pais, pelos conselhos e cuidados que me guiaram. Agradeço aos meus familiares, em especial à minha irmã Isabelly, e aos meus amigos e irmãos Edwardo, Gabriel e Rafael pela amizade e apoio constante nessa jornada. Agradeço também à minha namorada, por me acompanhar em todos os momentos, oferecendo amor, paciência e incentivo. Por fim, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Neymar José Nepomuceno Cavalcante, pela orientação dedicada, pelos ensinamentos transmitidos e pela confiança depositada ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho. Cada um de vocês foi essencial nesta conquista, e levo comigo toda a gratidão e carinho por fazerem parte dessa caminhada.

*Não fui eu que ordenei a você? Seja forte
e corajoso! Não se apavore nem
desanime, pois o Senhor, o seu Deus,
estará com você por onde você andar".*
(Josué 1:9)

*A imaginação muitas vezes nos leva a
mundos que nunca existiram, mas sem
isso nós não vamos a lugar algum.*
(Carl Sagan)

RESUMO

Este trabalho analisa a geometria do espaço-tempo em torno de um buraco negro simétrico, com base na Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. A pesquisa aborda de forma significativa a transição da gravidade clássica de Newton, entendida como força, para uma visão moderna que a descreve como consequência da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. São discutidos os fundamentos teóricos das teorias da Relatividade Restrita e da Relatividade Geral, culminando na métrica de Schwarzschild como solução exata das equações de campo de Einstein no vácuo. A partir dessa métrica, analisam-se conceitos fundamentais como o horizonte de eventos e a singularidade, essenciais para a compreensão do comportamento do espaço-tempo em regiões de gravidade intensa. Dessa forma, conclui-se que a métrica de Schwarzschild representa uma das soluções mais elegantes e influentes para o entendimento da estrutura geométrica dos buracos negros.

Palavra-chave: Relatividade Geral; Buracos Negros; Espaço-Tempo; Métrica de Schwarzschild.

ABSTRACT

This work analyzes the geometry of space-time around a symmetric black hole, based on Albert Einstein's Theory of General Relativity. The research significantly addresses the transition from Newton's classical concept of gravity, understood as a force, to a modern view that describes it as a consequence of the curvature of space-time caused by the presence of mass and energy. The theoretical foundations of the Special and General Theories of Relativity are discussed, culminating in the Schwarzschild metric as an exact solution to Einstein's field equations in vacuum. From this metric, fundamental concepts such as the event horizon and the singularity are analyzed, which are essential for understanding the behavior of space-time in regions of intense gravity. Thus, it is concluded that the Schwarzschild metric represents one of the most elegant and influential solutions for understanding the geometric structure of black holes.

Keywords: General Relativity; Black Holes; Space-Time; Schwarzschild Metric.

Sumário

1	Introdução	10
2	Galileu Galilei e o Início da Física Moderna	11
2.1	As contribuições de Galileu para a compreensão do movimento e da gravidade . . .	11
2.2	O princípio da invariância de Galileu e sua importância para a física	12
2.3	Experimentos sobre a queda dos corpos e o movimento uniformemente acelerado .	14
3	Isaac Newton e a Consolidação da Mecânica Clássica	15
3.1	As leis do movimento de Newton e a Lei da Gravitação Universal	15
3.2	A Lei da Gravitação Universal	17
3.3	A visão de espaço e tempo absolutos na física newtoniana	19
3.4	Limitações da mecânica clássica frente a fenômenos eletromagnéticos e velocidades elevadas	19
4	Albert Einstein e a Teoria da Relatividade Restrita	21
4.1	Os postulados fundamentais da relatividade restrita	21
4.1.1	Postulado I : Princípio da relatividade	21
4.1.2	Postulado II : Constância da velocidade da luz	22
4.2	Consequências dos postulados	22
4.2.1	Dilatação do Tempo	22
4.2.2	Contração do Comprimento	24
4.2.3	Equivalência Massa-Energia	25
4.3	Superação das limitações da mecânica clássica e implicações para a física moderna	27
5	Teoria da Relatividade Geral	28
5.1	As equações de campo de Einstein e a nova compreensão da gravidade	29
5.2	Previsões da teoria: avanço do periélio de Mercúrio, desvio da luz por campos gravitacionais	30
5.2.1	Avanço do periélio de Mercúrio	31
5.2.2	Desvio da luz por campos gravitacionais	31
6	Buracos Negros	32
6.1	Horizonte de Eventos	34
6.2	Singularidade	35
6.3	Métrica de Karl Schwarzschild	36
7	Conclusão	42
8	Apêndice	44
8.1	Transformações de Lorentz	44
8.2	Cálculo da Curvatura Escalar de Ricci	45

8.3	Vetores de Killing da 2-Esfera (S^2)	46
-----	--	----

Lista de Figuras

1	Representação de dois referenciais inerciais em movimento relativo. O sistema S' move-se com velocidade constante v em relação ao sistema S ao longo do eixo x , ilustrando o princípio da invariância de Galileu.	13
2	Triângulo relacionado ao esquema de referencial	23
3	Representação esquemática da precessão do periélio da órbita de Mercúrio ao redor do Sol, mostrando o deslocamento gradual do ponto de máxima aproximação devido à curvatura do espaço-tempo.	31
4	Representação esquemática da deflexão da luz ao passar próxima ao Sol devido à curvatura do espaço-tempo.	32

1 Introdução

O espaço e o tempo sempre despertaram grande fascínio e curiosidade entre cientistas e filósofos, sendo objeto de estudo e de grande reflexão ao longo dos séculos. A necessidade pela compreensão da natureza dessas entidades fundamentais da realidade trouxe o surgimento de novas concepções que moldaram o desenvolvimento da física moderna. A relação entre espaço, tempo e gravidade constitui um dos mais profundos temas da ciência, e dois momentos significativos na história, entre 1905 e 1915, foram responsáveis por revolucionar completamente o entendimento dessa compreensão, com a formulação das teorias da Relatividade Restrita e da Relatividade Geral, propostas por Albert Einstein.

Publicada em 1905, a Relatividade Restrita reformulou as noções clássicas de espaço e tempo, introduzindo um novo paradigma para a ciência, baseada na constância da velocidade da luz e na invariância das leis físicas em todos os referenciais inerciais. Essa teoria mostrou como o espaço e o tempo não são entidades absolutas e independentes, mas aspectos diretos de uma única estrutura chamada espaço-tempo. Já em 1915, Einstein ampliou novamente os conceitos sobre a Relatividade, com a teoria da Relatividade Geral, apresentando uma nova interpretação para Gravidade, não tratando mais como uma força que atua à distância, como em Newton, mas como sendo consequência direta da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia.

Essa visão geométrica do universo permitiu agora compreender diversos fenômenos cósmicos sob nova ótica, entre eles os buracos negros, já que são regiões do espaço-tempo em que a curvatura se torna tão intensa que nada, nem mesmo a luz, pode escapar de sua forte influência gravitacional. Esses objetos de gravidade rigorosa constituem uma das previsões mais significativas presentes na Relatividade Geral e representam, seguramente ainda, um dos maiores desafios teóricos e observacionais da física.

A escolha deste tema se justifica tanto pela sua relevância conceitual e teórica que a Relatividade Geral apresenta dentro da Física moderna quanto pela necessidade de compreender como os fenômenos de extrema ação gravitacional, como os buracos negros, podem ser explicados por meio de estruturas geométricas e matemáticas. Além disso, estudar e compreender a geometria do espaço-tempo em torno de um corpo massivo proporciona novas bases sólidas para o entendimento cosmológico e dos limites da física clássica, mostrando diretamente como as mudanças na passagem de tempo e a curvatura do espaço são afetadas pela presença de massa e energia. Já do ponto de vista educacional, apresenta como esses conceitos, ao serem compreendidos, auxiliam na formação mais crítica do estudante de Física, favorecendo tanto uma visão integrada entre matemática e natureza quanto o raciocínio teórico.

Dessa maneira, o presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre a geometria do espaço-tempo em torno de um buraco negro simétrico, analisando a métrica de Schwarzschild e discutindo de maneira relevante as implicações físicas e geométricas derivadas dessa solução das equações de Einstein. Ao longo do texto, serão abordados os fundamentos históricos e teóricos que conduzem de forma concreta e linear ao desenvolvimento da Relatividade, bem como a transição das concepções clássicas sobre espaço e tempo para o modelo relativístico que sustenta a física moderna.

Metodologicamente, o trabalho prioriza uma compreensão conceitual e linear da Relatividade e de suas implicações geométricas, fundamentada em análises bibliográficas de obras clássicas e contemporâneas da Física. O desenvolvimento do trabalho está diretamente estruturado em capítulos que vão percorrer desde o que conhecemos sobre pensamento físico moderno, com as contribuições de Galileu e Newton, até as contribuições significativas para a física relativística de Einstein e a detalhada análise da métrica de Schwarzschild. Com isso, busca-se esclarecer como a geometria do espaço-tempo se comporta em redor de um buraco negro simétrico, já que são fundamentais suas contribuições para a física teórica e entendimento sobre a estrutura do universo.

2 Galileu Galilei e o Início da Física Moderna

Amplamente reconhecido como um dos precursores da ciência experimental e da física moderna, Galileu Galilei (1564-1642) não se limitou apenas a descobertas científicas, mas também a uma nova forma de fazer ciência. Galileu baseava-se na experimentação, observação e, de forma decisiva, no uso da matemática para descrever os fenômenos observados na natureza. Diante disso, este capítulo busca abordar uma análise sobre suas principais contribuições, sobre seus experimentos referentes ao movimento e seus estudos sobre o princípio da invariância, em que tais conceitos são fundamentais para entender a consolidação da física moderna.

2.1 As contribuições de Galileu para a compreensão do movimento e da gravidade

Durante séculos, as concepções acerca do movimento e da gravidade foram pautadas pelo que conhecemos de física aristotélica. O modelo de Aristóteles permaneceu concreto até o século XVII, em que se acreditava que o movimento dos corpos era ligado exclusivamente à sua natureza e massa, sugerindo que corpos mais pesados cairiam mais rapidamente que corpos mais leves [1].

Com isso, Galileu foi o primeiro a propor uma abordagem ligada à modelagem matemática dos fenômenos e ao caráter experimental para prová-los. Galileu não apenas refutou esses conceitos mais antigos, mas mudou a forma de analisar a linguagem desses fenômenos naturais, visto ir contra as ideias mais qualitativas propostas pela filosofia natural de Aristóteles e propor essas concepções quantitativas na natureza.

Destacam-se dentre suas principais contribuições significativas as primeiras noções sobre inércia. Embora inteiramente formal, sendo desenvolvida mais tarde por Isaac Newton, Galileu já mostrava que, na ausência de forças externas, como, por exemplo, o atrito, os corpos tendem a permanecer em um movimento retilíneo uniforme ou em repouso. Tal suposição já apresentava uma ruptura direta com o que Aristóteles acreditava, pois ele entendia que todo movimento necessita, para ser mantido, uma força constante [2].

Além dessas referentes contribuições, são notáveis seus estudos sobre a queda dos corpos, demonstrando como a aceleração de um corpo em queda vai ser constante, independentemente da sua massa, desde que sejam desconsideradas as forças dissipativas, como, por exemplo, o (atrito

do ar). Segundo Galileu, em ausência de resistência do ar, corpos de diferentes massas caem com a mesma velocidade e atingem o solo simultaneamente.

Essa afirmação propôs um caminho significativo para os estudos de gravidade, visto que, sob ação exclusiva dela, esses corpos experimentam a mesma aceleração. Posteriormente, também objetivou novas contribuições no desenvolvimento matemático do movimento retilíneo uniformemente acelerado. Mostrando que, a partir de algumas observações experimentais utilizando planos inclinados, foi percebido que corpos com um movimento sob acelerações constantes percorriam distâncias sempre maiores, mas com intervalos de tempo sempre iguais. Levando Galileu à seguinte equação para descrever esse tipo de movimento

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (1)$$

nesta equação, (t) é o tempo decorrido; (S) , a posição final do corpo no instante (t) ; (S_0) é a posição inicial do corpo. Já (V_0) é a velocidade inicial no instante (t) igual a zero, e, não menos importante, (a) é a aceleração constante à qual o corpo está submetido. Com essa expressão, permitiu prever como um corpo, ao longo do tempo, vai se comportar com um movimento em aceleração constante. Se consideramos a queda livre vertical desse corpo, a partir de uma posição $(S_0 = 0)$ e do repouso $(V_0 = 0)$, e a aceleração da gravidade (g) , essa equação do movimento uniformemente acelerado vai simplificar para a seguinte expressão

$$S = \frac{1}{2} g t^2, \quad (2)$$

essa equação vai expressar com clareza a distância percorrida pelo corpo em queda livre em função do tempo. Confirmando a relação descoberta por Galileu de que o deslocamento é proporcional ao quadrado do tempo. Já que, se o tempo de queda for dobrado, a distância percorrida será quadruplicada, mostrando mais uma vez que a grandeza na obra de Galileu está entrelaçada em unir experimento com o raciocínio matemático.

Em síntese, Galileu não apenas é relevante por seus estudos referentes à gravidade e movimento, mas também por trazer uma nova forma de fazer ciência, mudando a própria prática científica [3]. Substituindo análises qualitativas feitas outrora por práticas mais quantitativas, trazendo a experimentação e abordagem matemática juntas [4, 5].

2.2 O princípio da invariância de Galileu e sua importância para a física

Diante de suas contribuições significativas para o estudo do movimento e queda dos corpos, Galileu formulou um dos mais importantes e duradouros princípios estudados na física. Princípio esse, chamado de princípio da invariância, sendo conhecido como "Relatividade Galileana", por se tratar de estabelecer que as leis físicas são as mesmas em todos os sistemas de referenciais inerciais. Ou seja, para corpos que se movem com velocidades constantes um em relação ao outro. Essa ideia foi proposta devido a ser observado que nenhum experimento mecânico realizado dentro de um sistema em movimento uniforme pode detectar esse movimento em relação a outro referencial

inercial externo, sendo que não haja qualquer interação com o ambiente externo.

Galileu revolucionou ao tirar a noção entendida sobre os conceitos de repouso absoluto, introduzindo o movimento relativo, que não tinha um referencial privilegiado para mostrar os fenômenos físicos. Validando qualquer sistema inercial para analisar as leis de movimento. Para isso ficar mais claro, podemos usar um exemplo que ajude na compreensão. Por exemplo, imagine um trem em movimento retilíneo e uniforme sobre trilhos precisamente nivelados: nele tem um observador num determinado vagão bem fechado, sem contato ou referência externa, os fenômenos mecânicos vistos por ele dentro do vagão como um objeto sendo lançado verticalmente ou deixar cair uma maçã, ocorrem da mesma forma como se o trem tivesse parado.

Em termos matemáticos, o princípio é expressado pelas transformadas de Galileu [6]. Onde, são relacionadas as coordenadas de espaço e as de tempo para um mesmo evento em dois referenciais inerciais diferentes.

Nesse contexto, analisando a figura abaixo:

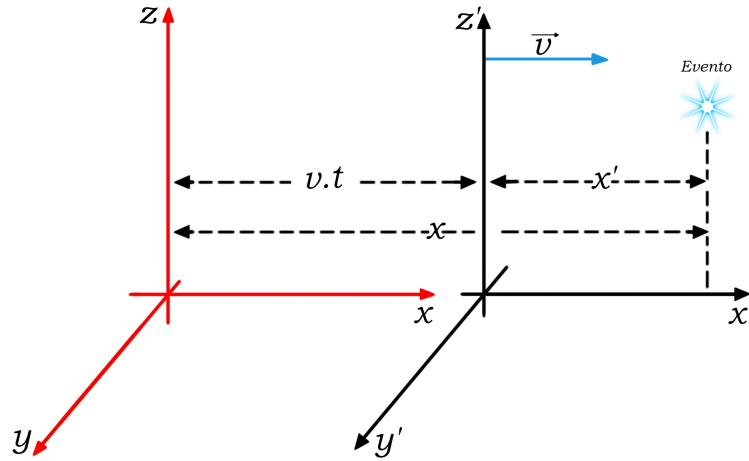


Figura 1: Representação de dois referenciais inerciais em movimento relativo. O sistema S' move-se com velocidade constante v em relação ao sistema S ao longo do eixo x , ilustrando o princípio da invariância de Galileu.

Fonte: Autoria própria (2025).

Na figura acima temos dois referenciais inerciais S e S' , em que o referencial S' se move em relação a S com uma velocidade constante v ao longo de um eixo que podemos denominar como x . Dessa maneira, as transformadas serão dadas por

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{3}$$

Essas equações vão mostrar que, para ambos os referenciais, o tempo é o mesmo (absoluto).

Enquanto, para as coordenadas espaciais, acontece um ajuste conforme a velocidade relativa, refletindo a visão clássica do espaço e do tempo até o início do século XX, com o surgimento da Relatividade restrita proposta por Einstein.

O princípio da invariância proposto por Galileu propôs implicações significativas: garantiu que as leis do movimento não vão depender da velocidade constante do observador e assim permitindo uma análise unificada conceitual dos fenômenos de descrição física entre referenciais diferentes. Posteriormente, permitindo por meio dessa noção de simetria entre dois observadores, a formulação das leis de Newton. Com isso, esse princípio representa umas das maiores inovações feitas por Galileu, que proporcionou uma concepção inovadora, dinâmica e racional do movimento. Pois tal princípio, mesmo que pareça trivial, retira o domínio do absoluto e traz um contexto mais observacional, consolidando a nova forma de pensar sobre as leis físicas e proporcionando pilares para a física moderna.

2.3 Experimentos sobre a queda dos corpos e o movimento uniformemente acelerado

Galileu, sabendo das limitações técnicas presentes no seu tempo, teve que encontrar ferramentas inovadoras com o que tinha de palpável ao seu redor para que pudesse desenvolver experimentalmente esses conceitos sobre a queda dos corpos e o movimento uniformemente acelerado. Com a limitação tecnológica para medir a queda livre vertical, a qual ocorria muito rápido. Galileu teve a brilhante ideia de abordar esses conceitos utilizando planos inclinados, visando diminuir a velocidade do movimento e, com isso, possibilitar registrar com uma exatidão superior os intervalos de tempo em que um corpo percorria algumas diferentes distâncias.

Para isso, Galileu teve que ser criativo e não poupou maneiras de medir o tempo. Ao utilizar esferas sobre o plano inclinado suavemente bem polido, utilizou ritmos musicais, já que tinha familiaridade com a música. Ele colocava pequenos ressaltos (como trastes) ao longo do plano inclinado utilizado, assim, cada vez que a esfera passava por um ressaltos, fazia um clique. Ajustando a posição desses ressaltos, ele conseguia garantir que o intervalo de tempo entre os cliques fosse sempre o mesmo. Também utilizou até mesmo fluxo de água de um recipiente para outro. No qual, cuja massa coletada ao final de cada experimento, estimaria o tempo decorrido.

Essa capacidade criativa revela que Galileu não apenas era um gênio teórico, mas também tinha grande capacidade de obter dados experimentais de maior confiança usando recursos considerados simples [5]. Ao registrar essas distâncias percorridas e agora conseguir medir os intervalos de tempo, ele observou que essas distâncias cresciam de forma proporcional ao quadrado do tempo, como vimos nos tópicos anteriores. Sendo possível, devido a sua repetição sistemática e precisa da análise quantitativa dos resultados por ele feita. Sendo fundamental no seu desenvolvimento matemático do movimento retilíneo uniformemente acelerado discutido antes.

Assim, torna-se mais notável que, a partir de agora, não apenas observava os fenômenos, mas agora tem uma necessidade de compreender de maneira lógica e significativamente quantitativa. Agora a realidade observável serve como critério de verdade a ser analisada e não apenas a razão pura proposta por um princípio absoluto.

Em suma, os experimentos de Galileu, além do seu rigor teórico e experimental, proporcionaram o simbolismo da passagem do que conhecemos de filosofia natural para o que denominamos de física moderna [3]. Mostrando que uma observação pautada na sistematização dos dados coletados e uma modelagem matemática concreta podem ser trabalhadas lado a lado, revelando as leis que regem os movimentos dos corpos. Assim, essa abordagem não apenas inspirou Isaac Newton, mas modificou toda a física clássica que se dava continuidade.

3 Isaac Newton e a Consolidação da Mecânica Clássica

Sendo um dos maiores expoentes do que conhecemos sobre ciência moderna, Isaac Newton (1643-1727) estabeleceu as bases da mecânica clássica com suas leis de movimento e expandiu os estudos outrora feitos por Galileu e outros precursores. Com seus trabalhos, Newton possibilitou de forma clara entender agora os fenômenos da natureza e de maneira matemática os seus dinamismos. Para mais, ele estabeleceu sua lei da gravitação universal, que corrobora no entendimento das demais, visto entender a dinâmica da queda de um corpo próximo a terra até o movimento dos planetas presentes no sistema Solar.

3.1 As leis do movimento de Newton e a Lei da Gravitação Universal

Newton, para ter uma compreensão concreta do movimento, propôs as três leis fundamentais da mecânica, conhecidas como **Leis de Newton**:

A **Primeira Lei**, chamada de *Lei da Inércia*, afirma que um corpo em movimento tende a manter seu movimento em linha reta e com velocidade constante, e um corpo em repouso tende a permanecer em repouso, a não ser que seja obrigado a mudar seu estado por forças externas. Essa concepção, por si só, já destoava do que era entendido anteriormente, pois demonstra que o movimento não necessita de uma força contínua para ser mantido [11].

A **Segunda Lei**, também chamada de *Lei Fundamental da Dinâmica*, estabelece de forma quantitativa uma relação entre massa, aceleração e força, a qual pode ser representada pela seguinte equação

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \quad (4)$$

Nessa equação, \vec{F} representa a força resultante que atua sobre um determinado corpo, m representa sua massa, e \vec{a} a aceleração produzida. Essa relação é fundamental para a análise do movimento dos corpos em inúmeras situações.

A **Terceira Lei**, evidenciada principalmente na interação direta entre corpos, permite compreender como ocorrem fenômenos como colisões e a propulsão de foguetes. Também chamada de *Lei da Ação e Reação*, ela afirma que para toda ação existe uma reação de mesma intensidade, mas em sentido oposto.

Agora, visto o que discutimos até aqui, podemos analisar alguns pontos importantes sobre as três leis. Como as Leis de Newton são formuladas para referenciais inerciais [12], a Primeira

Lei desempenha um papel fundamental: já que define o que é um referencial inercial, isto é, um sistema no qual um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme quando a força resultante é nula. Assim, embora o comportamento descrito pela Primeira Lei possa ser obtido da Segunda Lei ao considerar o caso particular $\vec{F}_R = 0$, a Primeira Lei não se reduz à Segunda. Ela possui caráter conceitual próprio, pois estabelece o critério necessário para identificar os referenciais nos quais a Segunda Lei é válida. Já a Segunda Lei, sendo o princípio fundamental da dinâmica, descreve quantitativamente como a força resultante produz uma variação na quantidade de movimento (ou momento linear) de um corpo

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (5)$$

Dessa forma, fica evidente a coerência interna do sistema newtoniano e a estrutura lógica presente na mecânica clássica. Conhecendo a força resultante, a Segunda Lei permite determinar a aceleração, e conseqüentemente as velocidades e posições, por meio de integrações sucessivas das seguintes equações

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (6)$$

Essas expressões vão mostrar a importância do tempo na descrição do movimento, pois simplifica observar como o movimento evolui sabendo suas condições iniciais e portanto matematicamente aborda como a primeira lei não é isolada das demais, e sim está ligada dentro da abrangência do formalismo Clássico.

Seguindo essas análises, agora abordando a terceira lei, podemos observar como ela está relacionada ao princípio de conservação linear de um sistema isolado (sistemas ao qual não atuam forças externas). Para isso, vamos considerar dois corpos um sobre o outro, no qual sabemos que através da terceira lei de Newton as ações mútuas entre eles são sempre iguais, mas com sentido contrário. Assim, considerando as duas colidindo, o objeto 1 exerce uma força sobre a partícula 2, representada por um vetor \vec{F}_{12} , e, de forma correspondente, a partícula 2 vai exercer uma força sobre o objeto 1, representada por um \vec{F}_{21} . Sendo importante ser considerado, que tratamos aqui de uma força forte, pois o segmento de reta que uni as partículas é paralelo ao par ação e reação.

Com isso, admitindo que os objetos um e dois constituem um determinado sistema isolado vamos ter apenas as forças que foram resultado da colisão entre as duas. Para continuar a análise, devemos voltar para equação 5, na qual observamos que a força resultante delas está relacionado a taxa de variação do momento linear em relação ao tempo.

Por definição, o momento linear total \vec{p} é dado pela soma dos momentos lineares das partículas, isto é,

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (7)$$

Agora, vamos derivar a equação (7) no tempo

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}, \quad (8)$$

e aplicar a segunda lei de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}, \quad (9)$$

sabendo que a Terceira Lei de Newton é

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (10)$$

podemos substituir na equação (9) e observar que teremos a soma das forças internas nula, como esperado

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad (11)$$

dessa forma, concluímos que

$$\vec{p} = \text{constante}. \quad (12)$$

Ou seja, o momento linear é constante, pois não varia com o tempo t (momento linear é conservado). Para complementar essa análise mecânica, Isaac Newton propôs o que hoje conhecemos como Lei da Gravitação Universal, a qual descreve de maneira precisa a atração gravitacional entre dois corpos com massa. Essa lei não apenas explica a queda dos corpos próximos à Terra, mas também o movimento dos corpos celestes, unificando assim o comportamento terrestre e celeste sob a mesma ótica.

3.2 A Lei da Gravitação Universal

Buscando compreender não apenas os fenômenos que ocorrem na Terra, mas também preocupando-se com os movimentos dos corpos celestes, Isaac Newton propôs sua Lei da Gravitação Universal. Essa formulação está presente em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [7] e representa uma das grandes unificações da Física Clássica. Pois matematicamente vai afirmar que todos os corpos com massa exercem uma determinada força de atração entre si, não importando a distância entre os corpos analisados. Nessa obra, Newton também mostra como as leis de Kepler, anteriormente baseadas apenas em observações empíricas, são consequências diretas desta lei.

Segundo Isaac Newton, a força gravitacional entre dois corpos pontuais, com massa m_1 e m_2 , é diretamente proporcional ao produto das massas dos corpos analisados, e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Assim, a força tem a direção da reta que unifica as massas analisadas. Se considerarmos que \vec{r}_{12} é o vetor com origem no corpo m_1 e sua extremidade no corpo m_2 , e que \hat{e}_{12} é o vetor unitário com a mesma direção e sentido de \vec{r}_{12} , a

força gravitacional exercida por m_1 sobre m_2 é dada por

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{e}_{12}, \quad (13)$$

nessa equação, G é a constante de gravitação universal, com valor aproximado de $G \approx 6,674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

A força gravitacional também satisfaz a Terceira Lei de Newton, ou *lei da ação e reação*. Já que a força que o corpo m_2 exerce sobre o corpo m_1 é igual em módulo, mas oposta em direção à força \vec{F}_{12} , formando o par ação-reação, como podemos ver na equação abaixo.

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_2m_1}{|\vec{r}_{21}|^2}\hat{e}_{21}, \quad (14)$$

onde vemos que essas forças são aplicadas em corpos distintos, mas possuem mesma intensidade e sentido contrário. Satisfazendo novamente a seguinte equação que representa essa ilustração

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (15)$$

Onde podemos observar exatamente a terceira lei de Newton, a qual afirma que para toda ação, existe uma reação de mesma intensidade e direção, mas sentido oposto.

Dessa maneira, podemos discorrer sobre algumas aplicações e implicações referentes a essa lei. Já que se trata de um campo que, além de mostrar a relação de atração existente entre corpos com massa, ela mostra uma grande precisão em relação a inúmeros fenômenos naturais, já que explica as interações que estão presentes desde a queda de um corpo qualquer na Terra ao movimento dos planetas ao redor do Sol. Assim, essa unificação terrestre e celeste foi fundamental tanto física quanto matematicamente para a completude dessa lei.

Dessa forma, podemos, por exemplo, entender a força com que a Terra atrai um objeto de massa m perto da sua superfície. Para isso vamos imaginar o seguinte: a massa da Terra é M_t e seu raio médio seja R_t , e usando a equação 4 que vai corresponder diretamente ao peso do objeto, que mostra sua aceleração em direção ao solo. Já que o peso é o produto da massa com a gravidade, temos a seguinte equação para a aceleração da gravidade:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}. \quad (16)$$

Isso nos mostra que g é apenas um caso particular da lei da Gravitação Universal, e não utilizado apenas como uma constante usada para alguns fenômenos próximos à Terra. Essa propriedade ajuda a entender como os fenômenos planetários funcionam por meio da gravidade. Consequentemente, o cálculo de órbitas de satélites, explicação do movimento dos planetas, como ocorrem os eclipses e até mesmo como o movimento das marés funciona são apenas algumas das diferentes contribuições que essa lei ajuda a explicar para o entendimento moderno até o desenvolvimento da Relatividade Geral posteriormente.

3.3 A visão de espaço e tempo absolutos na física newtoniana

Para fundamentação de suas leis, Newton precisou entender não apenas o movimento dos corpos, mas antologicamente analisou a estrutura do universo para fomentar sua concepção sobre tempo e espaço absolutos. Segundo Newton, esses conceitos vivem separados de qualquer observador, já que em sua análise propôs ser sempre o mesmo e imóvel o espaço, e o tempo, por sua vez, absoluto ao fluir de forma uniforme, não tendo relação com nada externo. Assim, para todos os observadores em qualquer lugar do universo, isso seria válido.

Como vimos anteriormente nos tópicos sobre Galileu, a mecânica clássica aborda matematicamente o tempo imutável, ou seja, independente do referencial, ele será o mesmo. E como Galileu mostrava, o espaço pode ser analisado pelo sistema fixo de coordenadas, que pode ser imaginado como um determinado cenário tridimensional, como uma grelha, por exemplo, de forma invisível, para o qual os eventos estão acontecendo. Nessa grelha temos as coordenadas (x, y, z) estando em repouso absoluto e não se deformando e nem se movendo. Podendo, para Newton, descrever a posição de qualquer corpo em relação a esse espaço fixo no universo, não importando o instante analisado. Nesse contexto podemos ver como um palco e o cantor, onde o espaço é o palco e o corpo é o ator. Desse modo, os corpos mudam sua posição ao longo do tempo, pois, se muda a posição, tem movimento, mas, como o espaço é imutável, é possível saber exatamente onde o corpo esteve ou está.

Para Newton, as noções sobre aceleração só seriam significativas onde o espaço e tempo fossem imutáveis. Pois, sabendo que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (17)$$

É necessário, de forma simples, para encontrar a aceleração, saber a velocidade em instantes distintos, um referencial como um relógio, ao qual meça o tempo de forma confiável, e medir as mudanças de velocidade. Ou seja, depende ligadamente do espaço e tempo; se o tempo fluísse de formas diferentes para cada observador nesse contexto, a taxa de variação de velocidade seria diferente de uma constante universal, e se o espaço deformasse, a trajetória dos corpos seria influenciada pelo espaço e não pela força, mudando o sentido objetivo de mudança de posição e obrigatoriamente de velocidade e da aceleração.

Apesar do significativo valor das noções acerca de espaço e tempo absolutos, foram cada vez mais ganhando questionamentos com as melhorias em medições astronômicas e consequentemente com a evolução presente na eletrodinâmica, em que posteriormente a Teoria da Relatividade traria uma nova formulação que mudaria o entendimento visto antes desses conceitos.

3.4 Limitações da mecânica clássica frente a fenômenos eletromagnéticos e velocidades elevadas

Diante das contribuições advindas desses conceitos apresentados por Newton, faz-se necessário também analisar suas limitações quando estamos frente aos fenômenos eletromagnéticos e tam-

bém estudando corpos em altas velocidades. Essas limitações se tornaram mais aparentes com a evolução na teoria e nos experimentos acerca da óptica e do eletromagnetismo por volta do final do século XIX [25]. Onde, se tornava evidente com a teoria avançando e a experimentação que as leis da mecânica clássica falhavam em certos fenômenos.

Dentre diversas limitações quando estamos em altas velocidades e analisando fenômenos eletromagnéticos, podemos relembrar a segunda lei de Newton, fundamentada na suposição de que a massa permanece constante e de que o espaço e o tempo são absolutos, conforme visto anteriormente. No entanto, com o desenvolvimento das equações de Maxwell, ficou nítido que a luz no vácuo possuía velocidade constante, independente do movimento da fonte ou do observador. Essa previsão não é compatível com as transformações de Galileu, que regem a mecânica clássica e implicam uma adição simples de velocidades. Além disso, experimentos como o de Michelson–Morley mostraram que a velocidade da luz realmente não varia com o referencial, evidenciando a necessidade de revisar os conceitos clássicos de espaço e tempo e motivando o surgimento da Teoria da Relatividade Especial.

Ou seja, afirmação de constância da velocidade da luz não satisfaz as transformações de Galileu e a estrutura adotada na mecânica newtoniana, na qual abordamos anteriormente. Pois, segundo as transformações de Galileu, que são base da mecânica newtoniana, a velocidade de um objeto dependia do referencial, em que, se tivéssemos um objeto se movendo a 50km/h e você lançasse um segundo objeto a 10km/h na mesma direção, um determinado observador veria a velocidade do segundo objeto a 60km/h , que é o que vimos sobre adição de velocidades, a qual valeria para tudo, inclusive para a luz. Para Maxwell, se você estiver indo ao encontro na direção de uma fonte de luz, você ainda mediria a mesma velocidade da luz que o observador em repouso, não batendo com a adição de velocidades antes proposta.

Já com os experimentos de Michelson–Morley, isso se torna mais aparente, aumentando a necessidade dessa nova interpretação acerca do espaço e do tempo. Realizado em 1887, o experimento teve como objetivo analisar a detecção na variação da velocidade da luz devido ao movimento da Terra, pelo suposto "éter", mas o resultado não mostrava nenhuma alteração ou variação, indicando que a velocidade da luz realmente era a mesma para todos os referenciais [20].

Assim como, ao estudarmos o comportamento de partículas próximas a altas velocidades, seus comportamentos vão distanciando dos previstos pela mecânica clássica. Já que, nesses exemplos de situações, não basta apenas considerar espaço e tempo como fixo, mas também considerar como massa inercial aumenta próxima a velocidade alta ou própria constância da velocidade da luz que fizeram ser plausível buscar uma nova análise sobre a estrutura do universo, pois para essas situações a mecânica newtoniana seria incompatível.

Desse modo, essas ideias proporcionaram novamente buscar entender o funcionamento do espaço e do próprio tempo, fazendo com que fosse necessário essa nova análise sobre grandezas que analisam desde o tempo decorrido, quanto a simultaneidade dos eventos, que aprofundados veremos que dependem do referencial. Devido a isso, entender como ocorre a dilatação do tempo e a contração do espaço é necessário rigorosamente, e é o que vamos discutir nos próximos capítulos.

4 Albert Einstein e a Teoria da Relatividade Restrita

Publicada em 1905, por Albert Einstein, a teoria da relatividade especial, também conhecida como relatividade restrita, nos apresenta uma revolução na nossa compreensão do espaço e, consequentemente, do tempo e da natureza das leis físicas. Onde apresentou novos conceitos e princípios que apontaram revisões diante das noções tradicionais de espaço e tempo absolutos apresentadas por estudos anteriores, em especial as contribuições de Isaac Newton. Quando falamos de relatividade restrita, devemos ficar atentos a dois postulados essenciais, o Princípio da relatividade e a constância da velocidade da luz. Observando esses dois princípios, podemos observar suas importantes consequências.

4.1 Os postulados fundamentais da relatividade restrita

Para compreender a estrutura da Relatividade Restrita é necessário destacarmos dois Postulados fundamentais para a base da teoria. O primeiro postulado vai estabelecer que as leis físicas são invariantes em todos os referenciais abordados, enquanto o segundo abordará a afirmação de que a velocidade da luz no vácuo é constante e independente do movimento tanto da fonte quanto do observador. Nesse contexto, esses princípios vão diretamente romper com a visão clássica adotada anteriormente acerca do espaço e do tempo como absolutos e propõe um novo arcabouço conceitual, que vamos explorar nos tópicos seguintes.

4.1.1 Postulado I : Princípio da relatividade

O princípio da Relatividade foi formulado inicialmente só século XVII, por Galileu Galilei e consequentemente refinada por Einstein ao desenvolver a teoria que estamos observando. Esse princípio consiste em uma parâmetro fundamental da física, que afirma que as leis da física são as mesmas independente do referencial, ou seja ela são as mesmas para todos os referencial inercial (referencial que está em repouso ou não está acelerando, mas se movendo a uma velocidade constante, conhecido como movimento retilíneo uniforme).

Ou seja, os resultados de um experimento físico e as previsões das teorias físicas devem ser independentes do movimento do observador. Assim, não haveria um referencial inercial de preferência, podendo qualquer um ser válido para mostrar os fenômenos físicos. Desse modo, esse princípio vai de afastamento à física clássica, pois afirmava que havia um referencial absoluto contra o qual os movimentos poderiam ser medidos. Já em contraponto, o princípio da Relatividade mostra que não há um referencial absoluto, isso aplica que as leis da física não apresentam variação. Ou seja, as leis da Física apresentam a mesma forma em qualquer sistema inercial, independentemente de sua orientação ou de sua posição no espaço.

Desse modo, podemos entender que todo movimento é relativo e seria definido em relação ao movimento de outros objetos. O conceito de Relatividade também nos mostra a análise de dilatação do tempo e contração, que de acordo com ela as convicções de espaço defendidas anteriormente por outros cientistas, relacionadas a três dimensões, teriam que ser substituída por uma análise visando a unificação do espaço e o tempo. Ou seja, em um continuum quadridimensional

chamado espaço-tempo, com três dimensões de espaço e uma de tempo que vamos observar na teoria mostrada.

4.1.2 Postulado II : Constância da velocidade da luz

Após analisar o primeiro postulado acerca da invariância das leis físicas, onde observamos que os princípios fundamentais e as equações da física, devem ter a mesma forma não importando o movimento do observador. Agora, vamos observar o postulado que se trata da constância da luz no vácuo. Esse postulado proposto por Albert Einstein, traz uma ruptura ao modelo proposto anteriormente por Galileu Galilei, onde dizia que a velocidade da luz, variava com base no movimento do observador.

Assim, diferente do que era aceito anteriormente, a velocidade da luz permanece constante independente do movimento relativo de quem observa. De acordo com o postulado, se você medir a velocidade da luz no vácuo, atribuída pelo “ C ”, ela será como já vimos aproximadamente, 299.792.458 metros por segundo, independente do observador está em repouso ou se movendo em alta velocidade. Esse postulado, tem implicações relevantes no que conhecemos sobre dilatação do tempo, visto sua inferência em relação ao tempo, espaço e consequentemente energia que foi amplamente estudado por Albert Einstein, ao longo de sua teoria.

Em conclusão, tanto o princípio da Relatividade quanto a constância da luz, trouxeram uma nova visão e um impacto cósmico acerca de nosso entendimento do universo. Onde, sendo base da teoria proposta por Einstein, proporcionou uma compreensão do espaço e tempo não antes vista.

4.2 Consequências dos postulados

A Partir da análise feita pelo que vimos dos Postulados, é possível e fundamental derivar algumas consequências diretas deles. Dentre muitas e significativas implicações, podemos compreender a dilatação do tempo, a contração do espaço e a equivalência entre massa e energia, que são além de significados teóricos, é experimentalmente aceito em aplicações na prática atualmente. Esses conceitos, são de grande importância no estudo sobre Relatividade, pois proporciona uma contemplação significativa dos postulados e das análises feitas por Einstein. Assim, nos seguintes tópicos, iremos falar sobre esses principais fenômenos e aprofundar em suas implicações.

4.2.1 Dilatação do Tempo

A dilatação do tempo, conceito esse atribuído aos estudos sobre Relatividade Especial, é um aspecto fundamental no estudo sobre Relatividade. Visto, suas aplicações ao entendimento de espaço, tempo e do comportamento de objetos em condições rigorosas.

Na Relatividade Especial, ela ocorre diante ao movimento relativo, podendo ser analisada colocando dois observadores se movendo um em relação ao outro, um estando em alta velocidade e o outro em repouso, o que estaria em grande velocidade perceberia o tempo está se movendo mais lentamente em relação o que estaria em repouso. Assim, quanto mais próximo à velocidade da luz um dos observadores estiver, maior será essa variação do tempo entre os dois.

Esse exemplo pode ser analisado, visto as contribuições de Hafele-Keating, que observou esse efeito ao analisar medições feitas por relógios atômicos em determinados aviões viajando em velocidades desiguais [17]. Podendo também ser visualizado esse efeito de dilatação do tempo, calculando a observação de dois observadores, um dentro de um carro, observando um laser sendo disparado em um espelho no teto do carro e outro na calçada vendo o carro passar.

Dessa forma, segundo os postulados estudados o que estaria dentro do carro veria o laser na vertical, já ao mesmo tempo o que estaria pelo lado de fora, veria uma diagonal formando um triângulo, como podemos ver na figura abaixo: Nela, podemos observar um triângulo retângulo

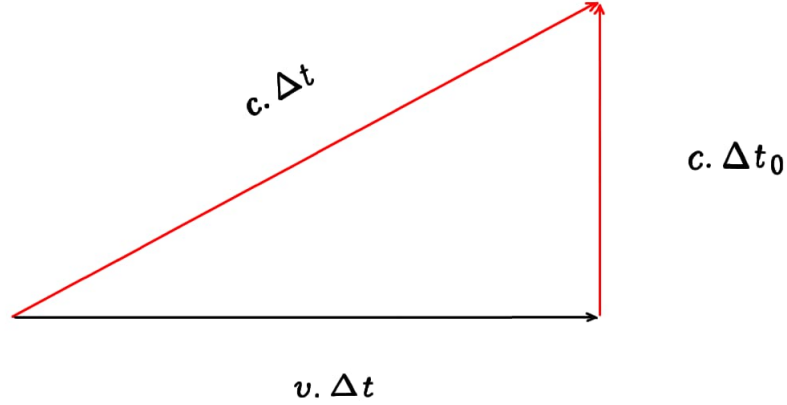


Figura 2: Triângulo relacionado ao esquema de referencial

Fonte: Autoria própria (2025).

que mostra como seria a análise de Albert Einstein sobre essa variação. Assim, podemos tomar como $c\Delta t$, sendo o deslocamento para o observador fora do carro. Já o $c\Delta t_0$ é o deslocamento da luz para o observador dentro do carro e o $v\Delta t$ seria o deslocamento do carro.

Assim, podemos encontrar essa variação partindo da equação de velocidade média

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (18)$$

isolando a variação de espaço ΔS , temos

$$\Delta S = v\Delta t, \quad (19)$$

podemos utilizar o teorema de Pitágoras para o triângulo proposto

$$\begin{aligned} (c\Delta t)^2 &= (v\Delta t)^2 + (c\Delta t_0)^2 \\ c^2\Delta t^2 &= v^2\Delta t^2 + c^2\Delta t_0^2 \\ c^2\Delta t_0^2 &= c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Seguindo, colocaremos em evidência o Δt^2 para depois isolar e fazer a raiz quadrada que vai

possibilitar observar a variação do tempo que queremos analisar

$$\begin{aligned}
c^2 \Delta t_0^2 &= \Delta t^2 (c^2 - v^2) \\
\Delta t^2 &= \frac{c^2 \Delta t_0^2}{(c^2 - v^2)} \\
&= \frac{c^2 \Delta t_0^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\
&= \frac{\Delta t_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{\Delta t_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Com essa equação, podemos observar a variação do tempo entre dois observadores, um próximo a velocidade da luz em relação ou outro. Tornando necessário, apenas substituir e visualizar a variação do tempo entre os dois observadores. Dessa maneira, esse fenômeno abre caminho para entendermos que o tempo não é absoluto, ideia que será fundamental ao tratar da gravidade como curvatura do espaço-tempo.

4.2.2 Contração do Comprimento

Desse modo, também podemos observar a contração do comprimento. Pois, de modo análogo ao da dilatação do tempo, podemos usar um exemplo para ilustrar imaginando assim o que ocorre com um corpo próximo a velocidade da luz. Para isso, adotamos como dois referenciais um próximo a velocidade da luz ($\Delta L'$) e outro na terra, chamado por (ΔL).

Próximo a c , temos

$$L' \rightarrow \Delta L' = X'_2 - X'_1, \tag{22}$$

na terra

$$L \rightarrow \Delta L = X_2 - X_1, \tag{23}$$

usando a transformação de Lorentz, apêndice 8.1, e tomando v como velocidade do referencial inercial que se move, e t como o tempo, observamos

$$X'_2 = \gamma(X_2 - vt) \tag{24}$$

$$X'_1 = \gamma(X_1 - vt). \tag{25}$$

Subtraindo a equação 24 pela 25

$$\begin{aligned} X'_2 - X'_1 &= \gamma X_2 - \gamma vt - (\gamma X_1 - \gamma vt) \\ X'_2 - X'_1 &= \Delta L' \\ \Delta L' &= \gamma X_2 - \gamma X_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Colocando o γ em evidência

$$\Delta L' = \gamma(X_2 - X_1), \quad (27)$$

e $X_2 - X_1 = \Delta L$, encontramos

$$\Delta L' = \gamma \Delta L, \quad (28)$$

tomando que o fator de Lorentz é $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, obtemos

$$\Delta L = \frac{\Delta L'}{\gamma}, \quad (29)$$

ou

$$\Delta L = \Delta L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (30)$$

Em síntese, observar a contração do comprimento até aqui, proporciona mostrar que o espaço também é relativo, tal como vimos com o tempo anteriormente. Contrariando dessa forma, a visão clássica newtoniana de grandezas absolutas e evidenciando a necessidade de tratar o espaço e tempo como de forma unificada no chamado contínuo espaço-tempo.

Esses efeitos, previstos teoricamente e confirmados por partículas se deslocando em altas velocidades de forma experimental, trás agora uma nova perspectiva para compreender não apenas a equivalência entre massa e energia, mas posteriormente, a ideia da gravidade como a manifestação direta da geometria do espaço-tempo na Relatividade Geral.

4.2.3 Equivalência Massa-Energia

Diante o que já vimos, trataremos de um dos principais resultados previstos pela Relatividade restrita, o conhecimento sobre equivalência sobre massa e energia. Tal princípio mostra como as relações presentes entre massa e energia funcionam, afirmando que massa pode ser diretamente convertida em energia e vice-versa. Essa afirmação se dá devido a conhecida equação de Einstein, proposta logo abaixo.

$$E = mc^2. \quad (31)$$

Essa simples equação correlaciona de maneira direta como massa e energia estão diretamente ligadas. Nela, podemos observar que (E) representa a energia total de um corpo em repouso, já (m) representa a massa desse corpo e (c) como já vimos é a representação da velocidade da luz no vácuo. Assim, diretamente a expressão mostra que mesmo mínima a massa vai apresentar uma quantidade relevante de energia.

Quando analisamos essa condição, observamos como a expressão mostra que conforme um corpo em repouso recebe alguma quantidade de energia, seja ela, térmica, potencial interna, cinética entre outras, vai contribuir no ganho de massa total do sistema. Pois, agora massa se comporta como medida de energia interna desse corpo.

Por exemplo, se consideramos uma determinada mola e que está sendo comprimida, logo ganhando mais energia potencial, nela veremos segundo a Relatividade que sua massa aumenta. Da mesma forma, se tiver uma determinada vasilha com chá e adiciono mais calor a ela também dará mais massa a ela. Ou seja, aqui o conceito está relacionado diretamente ao efeito que ocorre internamente e não só de forma superficial, pois no caso da mola esse energia potencial está dentro da mola, tendo mais energia e já na xícara, dentro dela as moléculas vão se agitar, rotacionar e vibrar mais, ganhando mais energia.

Essa ideia rompe com o conhecimento previsto anteriormente na Física clássica, pois segundo Newton, essas entidades são separadas. De forma comparativa, podemos lembrar da expressão de energia cinética de um corpo com massa m e uma velocidade v

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad (32)$$

se considerarmos essa partícula com uma velocidade próxima a da luz, é necessário o fator de Lorentz, trazendo a forma da energia total relativística

$$E = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2, \quad (33)$$

aqui podemos separar em duas partes essa expressão, a que já vimos na equação 31, que é a energia de repouso e na energia cinética relativística abaixo

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2, \quad (34)$$

que juntando as expressões, temos a seguinte equação para energia total na forma reduzida

$$E = \gamma mc^2. \quad (35)$$

Dessa maneira, a equivalência massa-energia evidência que não são distintas entidades, mas expressões diferentes de uma mesma realidade física. Além de fundamentar os estudos ligados a astrofísica, como fusão nuclear nas estrelas e a liberação de energia em supernovas, vai fornecer diretamente uma base tecnológica como as usadas em reatores nucleares, e mais Importante ainda, ela vai proporcionar ampliar o que conhecemos sobre o universo.

Pois, mostra que pequenas quantidades de massa poder se converter em grandes quantidades

de energia como vimos, proporcionando essa transição entre o conhecimento clássico e moderno. Com isso, esse princípio se conecta diretamente com a Relatividade Geral, pois além de massa e energia serem equivalentes, vão desempenhar papel central na curvatura do espaço-tempo.

4.3 Superação das limitações da mecânica clássica e implicações para a física moderna

A Relatividade restrita proporcionou grandes contribuições para a Física contemporânea, permitindo entender como alguns fenômenos antes vistos pela física clássica como sem solução, agora podendo ser compreendidos, assim como, suas análises mais didáticas são de grande importância para a construção gradual do entendimento relativístico geral tem sido discutida por diversos autores [10]. Além de que, a compreensão de fenômenos como dilatação do tempo, contração do espaço e a constância da luz, abordam a ideia de dependerem do referencial abordado, sendo entidades relativas agora. Junto a isso, vimos como massa e energia são equivalentes, que propiciaram a entender como se comporta a matéria e as novas bases para o que conhecemos sobre energia, já que mostra pequenas quantidades de massa pode ser convertida em uma grande quantidade de energia.

Essa nova interpretação sobre a matéria e energia, Possibilitou novas pesquisas e construções futuras nas áreas da física nuclear, astrofísica e Relatividade Geral, já que, fundamenta o estudo do funcionamento da geração de energia em usinas nucleares quanto o comportamento do processo de alimentação de estrelas. Nesse contexto, o campo da experimentação proporcionou mostrar na prática como os fenômenos relativísticos ocorriam, como o de contração do comprimento e dilatação do tempo, ajudando consequentemente na utilização dessas equações em equipamentos voltados para algumas áreas, dentre elas, a espacial, com o uso comum em satélites e alguns sistemas de navegação, que de maneira precisa, necessitam de uma correção relativística, um exemplo é o GPS, sendo utilizada essa correção relativística para que não ocorresse erros no cálculo de posição, mostrando que além de sua importância teórica, esse estudo é utilizado na prática.

Quando tratamos de invariância da velocidade da luz, observamos uma contribuição chave para a ruptura com a Física clássica, abordando as limitações experimentais e matemáticas das teorias propostas anteriormente por Galileu e Newton. Desse maneira, não apresentando apenas correções nas teorias anteriores, mas mudando um paradigma para algumas novas áreas da física, como a (física de partículas, a cosmologia e as tecnologias de alta precisão), como vimos. No entanto, mesmo essa teoria explicando com sucesso os fenômenos presentes nos referenciais inerciais e o comportamento da luz, ela não abrange os efeitos gravitacionais que estamos procurando entender. Dessa maneira, compreender situações em que a gravidade apresenta o papel fundamental é devidamente necessário, assim, fez-se importante uma nova formulação ainda mais abrangente, culminando na teoria da Relatividade Geral, que agora vai introduzir a curvatura do espaço-tempo como a explicação para a Gravidade.

5 Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein em 1915, representa uma nova forma de compreender o espaço, o tempo e a gravidade. Diferentemente das concepções newtonianas, em que a gravidade era tratada como uma força que atrai os corpos, relacionando diretamente o produto das massas e inversamente ao quadrado da distância, Einstein mostrou que o fenômeno gravitacional é, na verdade, uma manifestação geométrica. Segundo essa teoria, a presença de massa e energia deforma o espaço-tempo, e essa curvatura é o que vai orientar o movimento dos corpos. Assim, a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo diz à matéria como se mover, ideia que resume de forma elegante o conteúdo da teoria da Relatividade Geral [24]. Dessa forma, a Relatividade Geral unifica a geometria e a física, revelando uma visão mais profunda da estrutura do universo.

Para entender essa teoria, podemos partir da ideia central desse modelo. Onde mostra concretamente que energia e massa distorcem o espaço-tempo e conseqüentemente produzem uma força gravitacional. Com isso, entendemos que o espaço-tempo se curva, fazendo com que inevitavelmente influencie na vizinhança.

Essas relações entre massa, energia e curvatura do espaço-tempo estão significativamente relacionadas nas equações de campo de Einstein, que serão trabalhadas posteriormente, nas quais conectam o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas (por meio do tensor de curvatura de Ricci $R_{\mu\nu}$) à distribuição de energia e momento descrita pelo tensor $T_{\mu\nu}$.

Resolver essas equações em diferentes contextos nos permite descrever desde o espaço-tempo ao redor de um buraco negro até a expansão em larga escala do universo. É por meio delas que descobrimos essas interações de distribuição de matéria, energia e os efeitos gravitacionais envolvidos [8]. Assim, para entender esses fenômenos, são necessários alguns conceitos importantes, como o conhecimento do Tensor de Einstein, que é feito pela combinação de tensor métrico e suas derivadas. Ao resolver essas equações, podemos entender significativamente as interações da curvatura do espaço-tempo em torno de buracos negros estacionários ou até mesmo a expansão do universo.

De forma análoga, podemos também observar essa distorção do espaço-tempo de uma maneira mais didática, utilizando uma espécie de cama elástica bidimensional representando o espaço. Que, ao ser colocada uma esfera de massa significativa sobre ela, a própria irá distorcer a cama elástica que outrora estava reta. Assim, ao colocar outros objetos também de massa significativa, mas reduzida em relação ao anterior, o mesmo causaria também uma distorção, mas relativamente menor em relação ao anterior, fazendo com que ele ficasse de certa forma preso geometricamente ao de maior massa [9]. Esse exemplo proporciona, na prática e de forma didática, entender como ocorre essa distorção no espaço-tempo, podendo assim relacionar de maneira simples o entendimento acerca das relações presentes nas órbitas dos planetas em torno do Sol até o comportamento da luz perto de um buraco negro.

Após as informações vistas acima, podemos analisar o espaço-tempo rigorosamente mais simples. Pois, ao entendermos que se desprendendo das análises clássicas de outrora, que abordavam o espaço separadamente do tempo, e agora combinando essas grandezas fundamentais da física

mostrada por Albert Einstein, às três dimensões de espaço (largura, comprimento e altura) com uma dimensão adicional de tempo. Vai ocorrer uma estrutura conhecida como estrutura quadridimensional, que facilita a observação da interferência sofrida por objetos próximos a campos gravitacionais e próximos da velocidade da luz, diretamente interferindo no fluxo temporal e espacial ali presentes.

Dessa maneira, a Relatividade Geral aborda que não há tempo absoluto nem espaço fixo, mas sim uma geometria dinâmica que se molda à presença de massa e energia. Essa perspectiva é fundamental para entendermos a estrutura dos buracos negros, que representam as soluções significativamente extremas das equações de Einstein.

5.1 As equações de campo de Einstein e a nova compreensão da gravidade

Com a construção da teoria da Relatividade Geral, Albert Einstein estabeleceu uma nova relação direta entre geometria do espaço-tempo e a distribuição de massa e energia existente nele. Diferentemente da visão clássica proposta por Newton, na qual gravidade era interpretada como uma força que atua à distância entre corpos massivos, Einstein, propõe que essa interação é, na verdade, o resultado da curvatura presente no espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia [19].

Matematicamente, essa ideia é expressa pelas equações de campo de Einstein, relacionando o conteúdo energético do universo com sua geometria intrínseca. Essas equações podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (36)$$

Onde:

- $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que mede a curvatura do espaço-tempo;
- R é o escalar de Ricci, obtido pela contração do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ com o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$, ou seja,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}; \quad (37)$$

- $g_{\mu\nu}$ representa o tensor métrico, que descreve a geometria local do espaço-tempo;
- $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, que descreve a densidade e o fluxo de energia e momento da matéria;
- G é a constante gravitacional de Newton, e c é a velocidade da luz no vácuo.

A equação evidencia que a curvatura do espaço-tempo, representada pelos termos $R_{\mu\nu}$ e R , está diretamente determinada pela presença de matéria e energia, expressa por $T_{\mu\nu}$. De forma essencial, o lado esquerdo da equação vai traduzir a estrutura geométrica do espaço-tempo, enquanto o lado

direito aborda o conteúdo físico que o deforma. Dessa maneira, matéria e energia não apenas estão presentes no espaço-tempo, mas moldam propriamente a sua geometria.

Em regiões do espaço onde não há matéria ou radiação, isto é, no vácuo, o tensor energia-momento vai se anular

$$T_{\mu\nu} = 0, \quad (38)$$

e as equações de campo assumem a forma simplificada

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (39)$$

Como destaca Carroll [13] as equações de Einstein no vácuo é simplesmente $R_{\mu\nu} = 0$. Isso é um pouco menos intimidador e de considerável utilidade física, essa forma das equações de Einstein, válida no vácuo, é fundamentalmente importante pois descreve como o espaço-tempo tempo se comporta na ausência de fontes materiais, proporcionando a busca de soluções exatas para caracterizar os campos gravitacionais puramente geométricos.

Dessa maneira, foi justamente ao resolver essas equações no caso estático e esfericamente simétrico que Karl Schwarzschild, em 1916, encontrou a primeira solução exata da Relatividade Geral, conhecida como a métrica de Schwarzschild. Essa solução, vai descrever o comportamento do espaço-tempo ao redor de uma massa pontual ou de um corpo esférico não rotativo e sem carga elétrica.

Essa formulação marca uma das maiores conquistas da teoria física moderna, pois a partir dela passamos a observar a Gravitação não como uma força analisada pela geometria newtoniana, mas uma manifestação da geometria presente no universo. Desse modo, fenômenos como o desvio gravitacional da luz, o avanço do periélio de Mercúrio e existência dos buracos negros, puderam apresentar ser explicados de forma natural dentro do arcabouço geométrico.

5.2 Previsões da teoria: avanço do periélio de Mercúrio, desvio da luz por campos gravitacionais

A teoria mais geral da relatividade não apenas trouxe um novo conceito sobre gravidade, mas também apresentou previsões observacionais de grande relevância para sua consolidação como uma teoria física fundamental. Einstein, desde sua formulação, buscou a aplicação de suas equações em situações concretas, proporcionando a explicação de diversos fenômenos astronômicos através da curvatura do espaço-tempo [23].

Dentre as previsões, destaca-se o avanço no periélio de Mercúrio, o desvio da luz por campos gravitacionais e a própria existência de buracos negros, como consequência rigorosa das equações de campo.

5.2.1 Avanço do periélio de Mercúrio

Observamos no decorrer do trabalho que as leis de Newton representaram grande relevância na ciência, já que permitiram concretamente analisar muitos problemas presentes na natureza, com explicações e previsões importantes como a própria lei da gravitação universal. No contexto astronômico, essa lei é fundamental pois garantia desde a descrição de órbitas a descoberta de novos corpos planetários.

No entanto, em décadas, astrônomos observaram que o ponto de maior aproximação de Mercúrio ao Sol (periélio) apresentava uma precessão adicional que não poderia ser explicada concretamente pela gravitação newtoniana [5]. Essa diferença se aproximava de ($\Delta\phi \sim 43''$), ou seja, segundos de arco por século, valor comprovadamente incompatível com as previsões clássicas [14]. Ao aplicar as equações de campo previstas pela teoria de Einstein, ao sistema Sol-Mercúrio, foi demonstrado que a curvatura do espaço-tempo solar gera precisamente esse acréscimo, abordando o problema de antes de forma satisfatória, trouxe uma das primeiras confirmações da Relatividade Geral [16].

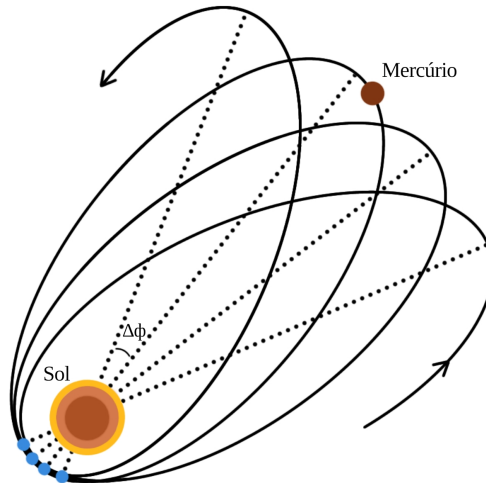


Figura 3: Representação esquemática da precessão do periélio da órbita de Mercúrio ao redor do Sol, mostrando o deslocamento gradual do ponto de máxima aproximação devido à curvatura do espaço-tempo.

Fonte: Autoria própria (2025).

Podemos observar que a órbita de Mercúrio não fecha sobre si mesma após cada revolução. O periélio se desloca no sentido do movimento orbital, representado pelas sucessivas elipses que apresentam uma rotação progressiva. Esse comportamento é explicado pela Relatividade Geral, ao considerar a deformação do espaço-tempo causada pela grande massa solar.

5.2.2 Desvio da luz por campos gravitacionais

Os primeiros cálculos do desvio da luz pela gravidade foram realizados por Soldner, em 1801, dentro da ótica newtoniana. No entanto, embora sua abordagem previsse uma deflexão luminosa, o valor obtido era apenas metade do que seria posteriormente encontrado por Einstein [18]. Quando tratamos da Relatividade Geral, a luz passa a ser entendida como seguindo geodésicas do espaço-

tempo curvo, onde sofre naturalmente um desvio ao se propagar em regiões próximas a corpos massivos.

Einstein então recalculou o ângulo de deflexão previsto para a luz ao passar próximo ao Sol, obtendo o valor correto, que foi confirmado experimentalmente em 1919 pelas medições de Arthur Eddington durante um eclipse solar total.

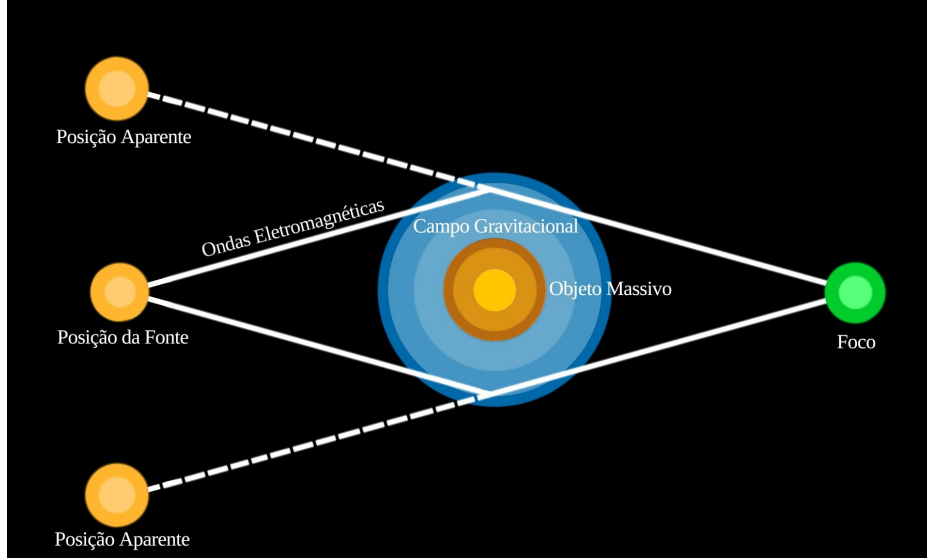


Figura 4: Representação esquemática da deflexão da luz ao passar próxima ao Sol devido à curvatura do espaço-tempo.

Fonte: Autoria própria (2025).

Conforme ilustrado na Figura 4, a trajetória da luz é desviada ao se propagar em regiões de forte curvatura do espaço-tempo. Esse resultado tornou-se uma das primeiras e mais importantes verificações observacionais da Relatividade Geral, consolidando o novo modelo gravitacional [18].

Atualmente, o fenômeno da lente gravitacional é essencial para a astrofísica e cosmologia modernas, permitindo observar e estudar objetos extremamente distantes no Universo, muitas vezes inacessíveis por outros meios.

6 Buracos Negros

As concepções primárias sobre os buracos negros remontam ao século XVIII. Em 1783, John Michell analisou utilizando apenas os princípios da mecânica newtoniana e a lei da gravitação universal, como uma dada estrela extremamente massiva e compacta teria ao seu redor um campo gravitacional muito forte, não deixando nem mesmo a luz sair. Objeto esse denominado por ele como "Estrelas escuras", não poderia ser vistos de forma direta, mas sim por sua influência gravitacional a outros corpos. Posteriormente, Laplace em sua obra *Exposition du Système du Monde* [21] traria uma relevante observação sobre esses objetos, que dizia não serem observáveis por impossibilitar a luz de escapar, propondo a ideia de "corpo escuro", ou seja, esses astros seriam de certa forma invisíveis, pois impossibilitavam a saída de luz. Dessa maneira, as primeiras análises

referentes a esses fenômenos gravitacionais são feitas de forma clássica, não trazendo menções a curvatura do espaço-tempo.

Porém, somente no século XX, com o desenvolvimento da Relatividade Geral de Einstein, os estudos sobre buracos negros ganhou rigorosamente um caráter matemático no seu desenvolvimento com Karl Schwarzschild, em 1916. Pois de maneira correta, desenvolveu a primeira solução exata das equações de campo de Einstein, também conhecida como a solução que descreve o buraco negro de Schwarzschild [22]. Ao qual é caracterizada por uma simetria esférica e ausência de rotação. Posteriormente, John Wheeler, em 1968, cunhou o termo “Buracos negros”, que foi popularizado no meio científico.

Com isso, partindo da lei de conservação da energia mecânica, podemos deduzir a velocidade de escape de um corpo celeste e, em seguida, a condição necessária para a formação de um buraco negro no contexto newtoniano. Primeiramente partiremos da energia total de um corpo de massa m sob a influência gravitacional de um corpo massivo de massa M e raio R

$$E = E_c + E_p, \quad (40)$$

onde, $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética, $E_p = -\frac{GMm}{R}$ é a energia potencial gravitacional. Para que o corpo escape do campo gravitacional, sua energia total deve ser zero no infinito

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} &= 0 \\ \frac{1}{2}v_e^2 &= \frac{GM}{R}, \end{aligned} \quad (41)$$

multiplicando ambos os lados por 2, encontramos a velocidade de escape

$$\begin{aligned} v_e^2 &= \frac{2GM}{R} \\ v_e &= \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \end{aligned} \quad (42)$$

dessa maneira, se nem mesmo a luz consegue escapar, a velocidade de escape deve ser maior ou igual à velocidade da luz c

$$\begin{aligned} v_e \geq c &\Rightarrow \sqrt{\frac{2GM}{R}} \geq c \\ \frac{2GM}{R} &\geq c^2 \\ R &\leq \frac{2GM}{c^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

proporcionando encontrar o valor crítico abaixo

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (44)$$

Nessa expressão, R_s é conhecido como raio de Schwarzschild e define o tamanho do horizonte de

eventos de um buraco negro não rotativo no contexto da Relatividade Geral. A dedução acima mostra como, mesmo a partir da mecânica clássica, já se tornou possível prever a existência de corpos com gravidade tão rigorosamente forte, que evitavam que até a própria luz conseguisse escapar. Esse limite, que representamos como raio de Schwarzschild, assume um papel importante na Relatividade Geral, pois sendo interpretado como horizonte de eventos de um buraco negro, nos mostra em outras palavras que qualquer objeto ou radiação que ultrapasse essa fronteira não conseguirá retornar, sendo confinada a região do buraco negro.

Essa transição do formalismo Clássico para o tratamento relativístico mostra uma robustez da ideia central sobre o estudo de buracos negros, mas também, a necessidade de uma geometria do espaço-tempo que mostra a compreensão dos fenômenos associados a esses objetos de extrema força gravitacional, explicando como algumas concepções clássicas sobre a trajetória da luz por exemplo, são diferentes agora no contexto relativístico.

Dessa forma, a evolução desse conceito, remonta uma transição importante na área gravitacional, pois caminha de uma primeira hipótese seguramente clássica para uma previsão inevitável na Relatividade Geral. Com isso, sendo caracterizados como uma região do espaço-tempo na qual a gravidade é tão alta que nada possa escapar, podemos partir para pontos principais que caracterizam eles.

O raio de Schwarzschild, embora aqui sendo analisado a partir de considerações clássicas, vai adquirir um significado físico muito mais rigoroso na Relatividade Geral, já que vai definir o limite além do qual nenhuma informação pode ser transmitida para o exterior. A partir disso, a descrição dos buracos negros se organiza em torno de conceitos mais fundamentais, como a singularidade central, o horizonte de eventos e os efeitos observáveis no espaço-tempo ao redor, que serão seguramente detalhados a seguir.

6.1 Horizonte de Eventos

O horizonte de eventos é uma das característica mais fundamentais dos buracos negros. Pois, de maneira sistemática trata-se de analisar o que define o limite da região observável e a de não retorno no espaço-tempo, já que nela a atração gravitacional é intensa o suficiente para que nem mesmo a luz não escape. Na solução de Schwarzschild, que analisaremos posteriormente, esse fenômeno está presente no que chamamos de raio de Schwarzschild o qual já encontramos utilizando uma analogia clássica 44.

Diferentemente de uma superfície material, o horizonte não é diretamente uma barreira física, mas uma determinada barreira causal e matemática, dessa maneira qualquer evento que aconteça dentro dessa região estudada não poderá afetar um observador externo a ela. Já que, o horizonte de eventos vai atuar como um ponto sem retorno, mostrando o que conhecemos de transição a parte acessível e não acessível do interior do buraco negro. Podemos com isso fazer uma analogia ao que entendemos sobre a natureza relativa do tempo devido aos limites observáveis que o horizonte de eventos propõe na observação. Um objeto que se aproxime dessa região será analisado por um observador distante, como parecer desacelerar, e nunca realmente atravessar completamente o horizonte, já que os efeitos de dilatação temporal da Relatividade Geral apresentam isso. No

entanto, quando analisamos o próprio objeto em queda, a travessia ocorrerá em tempo finito, ilustrando a natureza relativística do tempo e do espaço próxima a buracos negros.

Assim, podemos notar que esse limite tem uma natureza geométrica significativa, que depende diretamente da massa do buraco negro. Isso fortalece a relação direta entre a massa do objeto e a força do campo gravitacional que ele gera. A detecção direta desses sistemas compactos tem sido dificultada pela própria intensidade desse campo. No entanto, a presença dos discos de acreção facilitou bastante sua observação. Como destacado por [13], buracos negros possuem campos gravitacionais extremamente fortes. Portanto, uma das formas mais eficientes de detectá-los é analisando o comportamento da matéria em suas proximidades. Quando o gás ou outros materiais se aproximam de um buraco negro, eles aquecem gradualmente e começam a emitir radiação, geralmente na faixa dos raios X. Isso permite que sejam detectados por observatórios espaciais.

No entanto, vale ressaltar que o disco de acreção não está incluído na solução idealizada apresentada por Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo externo a uma massa esférica, estática e isolada. Essa solução de vácuo não considera a matéria circundante, os fluxos de gás, as colisões ou qualquer mecanismo que cause dissipação. Ainda assim, no cenário astrofísico, buracos negros reais costumam estar rodeados por discos de acreção, formados pelo acúmulo de gás, poeira e detritos que orbitam e, aos poucos, perdem momento angular até atravessarem o horizonte de eventos.

Durante esse processo de queda, as partículas do disco experimentam atrito e compressão, o que aumenta sua temperatura e faz com que emitam radiação eletromagnética de alta energia. Portanto, mesmo que o disco de acreção não esteja incluído na estrutura matemática da solução de Schwarzschild, ele desempenha um papel fundamental na observação desses objetos, possibilitando a estimativa de parâmetros como a massa do buraco negro e sua taxa de acreção. Embora seja importante para a astrofísica, o disco de acreção não é o foco principal deste estudo.

A menção a ele aqui visa situar sua função na detecção observacional de buracos negros e contextualizar a aplicação física da métrica de Schwarzschild. Essa descrição ainda é válida para caracterizar a geometria do espaço-tempo fora do horizonte de eventos, área em que o regime de vácuo é uma aproximação apropriada.

6.2 Singularidade

No centro de um buraco negro, segundo a Relatividade Geral, podemos encontrar a chamada singularidade gravitacional. Onde, trata-se de uma região no qual certas quantidades geométricas como a densidade efetiva da matéria e os escalares de curvatura tendem ao infinito. Em termos conceituais, seria o ponto em que toda a massa do buraco negro estaria concentrada em um volume que se aproxima de zero, e a curvatura do espaço-tempo se torna ilimitada. Essas previsões impostas sugerem que a teoria, deixa de fornecer descrições físicas válidas nessa região.

Quando analisamos Matematicamente, a singularidade surge como solução das equações de Einstein, de forma particular na métrica de Schwarzschild, quando $r \rightarrow 0$. Nesse limite, as grandezas físicas como densidade de energia e curvatura, deixam de serem descritas de forma finita,

indicando uma quebra no poder explicativo da teoria. É importante ressaltar, porém, que a mãe existência de uma singularidade não significa necessariamente que a natureza apresente de fato esses infinitos físicos, mas sim, apenas propõe o limite de aplicabilidade da teórica relativística. Devido a isso, é muitas vezes vista a singularidade como possível indício de que haja uma teoria mais completa da Gravitação - como por exemplo, unindo a Relatividade com a Mecânica Quântica, para descrição mais adequada do interior de um buraco negro.

Fisicamente, a singularidade está representada como a região inacessível de um buraco negro. Ou seja, qualquer partícula ou radiação que ultrapasse o horizonte de eventos que vimos anteriormente, será inevitavelmente conduzida ao centro, atingindo a singularidade em tempo finito conforme seu próprio referencial. Dessa forma, ela atua como uma espécie de fim de trajetória no espaço-tempo, já que todas as geodésicas convergem.

Conceitualmente, a ideia traz implicações profundas, já que questiona até mesmo onde nossa abordagem teórica física pode ser estendida. Portanto, a singularidade dos buracos negros constitui não apenas o centro matemática da solução de Schwarzschild, mas também vai propor o limite do conhecimento físico atual. Mostrando nesse ponto um dos maiores desafios da ciência contemporânea.

6.3 Métrica de Karl Schwarzschild

Um dos principais resultados da Relatividade Geral foi obtido em 1916 por Karl Schwarzschild, que encontrou a primeira solução exata das equações de campo de Einstein. Essa solução propõe descrever o espaço-tempo fora de uma distribuição de massa esférica, estática e não carregada, sendo a base para o estudo da geometria de um buraco negro simétrico que procuramos entender no andamento dos capítulos.

Para realizar a dedução analítica da solução, inicia-se considerando o caso mais elementar: um espaço-tempo sem curvatura, denominado espaço-tempo plano. Esse tipo de geometria é descrito pela métrica de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (45)$$

Essa métrica é o ponto de partida para comparações com geometrias mais complexas, como a métrica de Schwarzschild, permitindo avaliar como a gravidade altera a estrutura do espaço-tempo. Dessa forma, a Eq.(45) está escrita nas coordenadas cartesianas (t, x, y, z) . Para problemas com simetria esférica, como no caso da solução de Schwarzschild é conveniente usar coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) .

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (46)$$

Dessa maneira, sabendo que as equações de campo de Einstein são expressas pela equação 36, e como vimos anteriormente, fora da distribuição de matéria, o tensor energia-momento se anula no vácuo,38. Com isso, como estamos interessados na solução fora de um corpo esférico, nos preocupando com a equação de Einstein no vácuo 39. A métrica procurada deve ser estática

(sem termos cruzados e sem dependência temporal) e apresentar simetria esférica, de modo que a parte angular mantenha a forma $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$. As propriedades de simetria esférica estão associadas à existência de três vetores de Killing independentes na (S^2) , conforme demonstrado no Apêndice 8.3.

Admitindo que os coeficientes dependam apenas da coordenada radial r , a métrica mais geral compatível com essas exigências pode ser escrita como

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2, \quad (47)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Pode-se ver que a assinatura da métrica permanece a mesma, mesmo com a introdução das funções exponenciais nos coeficientes. Para simplificar sua forma, é conveniente eliminar essa dependência exponencial por meio de uma mudança na coordenada radial, introduzindo uma nova coordenada \bar{r} . Expressa por

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r. \quad (48)$$

Assim, introduzimos essa nova coordenada \bar{r} , de forma a absorver a função $\gamma(r)$ e fazer com que os termos angulares assumam a forma padrão $\bar{r}^2 d\Omega^2$, preservando a simetria esférica.

Derivando a Eq.(48) em relação a r , obtém-se a expressão diferencial

$$d\bar{r} = e^{\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right) dr. \quad (49)$$

Elevando ambos os lados da Eq.(49) ao quadrado e isolando dr^2 , encontramos

$$dr^2 = e^{-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} d\bar{r}^2.$$

Substituindo esta relação na métrica inicial, obtemos a nova forma em termos de $(t, \bar{r}, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} e^{-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \\ &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (50)$$

Considerando o caso particular em que $\gamma(r) \rightarrow 0$, ou seja, eliminando a reparametrização radial, temos $\bar{r} \rightarrow r$

$$e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right)^{-2} \rightarrow e^{2\beta(r)}. \quad (51)$$

Assim, a Eq.(50) retorna à forma padrão da métrica

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (52)$$

Essa forma revela explicitamente a natureza estática e esfericamente simétrica do espaço-tempo fora de uma distribuição de massa.

As componentes covariantes são dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Onde;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (54)$$

e as contravariantes correspondentes

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{2\alpha(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2\beta(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Os símbolos de Christoffel associados a métrica, Eq.(52), são obtidos a partir da relação

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} \right), \quad (56)$$

sendo os valores não nulos dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha(r), \\ \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha(r), \\ \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta(r), \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \cot \theta, \end{aligned} \quad (57)$$

encontramos as componentes não nulas do tensor de Riemann, ao qual descreve a curvatura do

espaço-tempo

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (58)$$

Usando as conexões não nulas, obtemos

$$\begin{aligned} R^t_{rtr} &= -\partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{rr} - \Gamma^t_{rt} \Gamma^t_{tr} \\ &= -\partial_r (\partial_r \alpha) + \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2 \\ &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2. \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} R^t_{\theta t \theta} &= \partial_t \Gamma^t_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^t_{t\theta} + \Gamma^t_{t\lambda} \Gamma^\lambda_{\theta\theta} - \Gamma^t_{\theta\lambda} \Gamma^\lambda_{t\theta} \\ &= \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{\theta\theta} \\ &= \partial_r \alpha \cdot (-re^{-2\beta}) \\ &= -re^{-2\beta} \partial_r \alpha, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} R^t_{\phi t \phi} &= \partial_t \Gamma^t_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^t_{t\phi} + \Gamma^t_{t\lambda} \Gamma^\lambda_{\phi\phi} - \Gamma^t_{\phi\lambda} \Gamma^\lambda_{t\phi} \\ &= \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{\phi\phi} \\ &= \partial_r \alpha \cdot (-re^{-2\beta} \sin^2 \theta) \\ &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} R^r_{\theta r \theta} &= \partial_r \Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^r_{r\theta} + \Gamma^r_{r\lambda} \Gamma^\lambda_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\lambda} \Gamma^\lambda_{r\theta} \\ &= \partial_r \Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^r_{rr} \Gamma^r_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta} \Gamma^\theta_{r\theta} \\ &= \partial_r (-re^{-2\beta}) + (\partial_r \beta)(-re^{-2\beta}) - (-re^{-2\beta}) \left(\frac{1}{r}\right) \\ &= -e^{-2\beta} + 2r^{-2\beta} \partial_r \beta - re^{-2\beta} \partial_r \beta + e^{-2\beta} \\ &= re^{-2\beta} \partial_r \beta, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} R^r_{\phi r \phi} &= \partial_r \Gamma^r_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^r_{r\phi} + \Gamma^r_{r\lambda} \Gamma^\lambda_{\phi\phi} - \Gamma^r_{\phi\lambda} \Gamma^\lambda_{r\phi} \\ &= \partial_r \Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^r_{rr} \Gamma^r_{\phi\phi} - \Gamma^r_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{r\phi} \\ &= \partial_r (re^{-2\beta} \sin^2 \theta) + \partial_r \beta (-re^{-2\beta} \sin^2 \theta) - (-re^{-2\beta} \sin^2 \theta) \cdot \frac{1}{r} \\ &= -e^{-2\beta} \sin^2 \theta + 2re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta - re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta + e^{-2\beta} \sin^2 \theta \\ &= re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\theta\phi}^\theta &= \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \partial_\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^\lambda - \Gamma_{\phi\lambda}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\lambda \\
&= \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi \\
&= \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{1}{r} \cdot (r e^{-2\beta} \sin^2 \theta) - (-\sin \theta \cos \theta) \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= -[\cos \theta \cos \theta + \sin \theta (-\sin \theta)] - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta (1 - e^{-2\beta}).
\end{aligned} \tag{64}$$

Contraindo o tensor de Riemann, obtemos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}. \tag{65}$$

As componentes não nulas são

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2 + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right], \\
R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta, \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1, \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.
\end{aligned}$$

O escalar de Ricci é o traço, ver apêndice 8.2

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^t_t + R^r_r + R^\theta_\theta + R^\phi_\phi. \tag{66}$$

Impondo o vácuo, $R_{tt} = 0$ e $R_{rr} = 0$, temos

$$\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha = 0, \tag{67}$$

$$-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta = 0. \tag{68}$$

Somando as equações, obtemos

$$\frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) = 0, \tag{69}$$

integrando a relação obtida na Eq.(69), temos

$$\int \partial_r \alpha(r) dr = - \int \partial_r \beta(r) dr, \tag{70}$$

o que resulta em

$$\alpha(r) = -\beta(r) + c, \quad (71)$$

sendo c uma constante de integração.

A partir de $R_{\theta\theta} = 0$, temos

$$e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1 = 0, \quad (72)$$

ou, equivalentemente,

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1. \quad (73)$$

Integrando, encontramos

$$\begin{aligned} re^{2\alpha} + c_1 &= r + c_2, \\ e^{2\alpha} &= 1 - \frac{R_s}{r}, \end{aligned} \quad (74)$$

onde $R_s = c_2 - c_1$. Substituindo $e^{2\alpha(r)}$ na métrica, temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ &= -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{-2\alpha(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \end{aligned}$$

No limite de campo fraco, $R_s = 2GM$, obtendo-se

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (75)$$

A métrica corresponde à solução de Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo gerado por um corpo estático e esfericamente simétrico.

Com isso, essa métrica apresenta propriedades fundamentais significativas. Quando $r \rightarrow \infty$, recupera-se o espaço plano de Minkowski, indicando que o espaço-tempo é assintoticamente plano. Ou seja, Quando $r \rightarrow \infty$, os termos $\frac{2GM}{rc^2}$ tendem a zero, de modo que

$$g_{tt} \rightarrow -1, \quad g_{rr} \rightarrow +1, \quad (76)$$

e a métrica se reduz ao esperado na teoria

$$ds^2 \approx -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (77)$$

que é exatamente o espaço plano de Minkowski em coordenadas esféricas.

Em $r = R_s$, surge o horizonte de eventos, que, como discutido anteriormente, vai representar

a fronteira a partir da qual nenhuma informação pode escapar, nem mesmo a luz. Nessa região, os coeficientes da métrica assumem comportamentos característicos

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \rightarrow 0, \quad (78)$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \rightarrow \infty, \quad (79)$$

Essas condições indicam o aparecimento de uma singularidade de coordenadas, associada não a uma curvatura infinita, mas a uma superfície-limite do espaço-tempo o horizonte de eventos a partir da qual nenhuma influência causal pode alcançar um observador situado no infinito. Já no limite $r \rightarrow 0$, a curvatura do espaço-tempo torna-se infinita, caracterizando a singularidade central. Nessa região, os invariantes de curvatura divergem, e as leis conhecidas da Física deixam de descrever adequadamente o comportamento da matéria e da geometria, marcando os limites de validade da Relatividade Geral.

Portanto, a solução de Schwarzschild ilustra a base matemática para o estudo da geometria do espaço-tempo em torno de buracos negros simétricos, foco central deste trabalho. Como também, mostra implicação da Relatividade Geral ao reformular as noções de gravidade: não mais como uma força, mas como a expressão direta da geometria do espaço-tempo em torno de uma massa.

7 Conclusão

Ao longo deste trabalho, buscou-se compreender, de forma conceitual e matemática, a geometria do espaço-tempo em torno de um buraco negro simétrico, tomando como base teórica a Relatividade Geral de Albert Einstein. A partir de uma abordagem que caminhou desde os fundamentos da mecânica clássica até o formalismo relativístico, foi possível notar como as funções tradicionais acerca de espaço e tempo, que antes eram vistos como absolutos, deram lugar a uma concepção unificada e inteiramente dinâmica dessas entidades, cuja curvatura agora é determinada pela presença de massa e energia.

Dessa forma, ao longo do estudo, é evidente a profunda mudança de paradigma pela Relatividade Geral, que trouxe uma nova interpretação à gravidade, não mais como força de atração entre corpos, mas como manifestação geométrica do espaço-tempo. Essa nova maneira de ver a gravidade permitiu explicar fenômenos que a física newtoniana não conseguia descrever precisamente, como o avanço do periélio de Mercúrio, a deflexão da luz em campos gravitacionais e, de modo especial, os buracos negros.

Com isso, a partir da solução exata das equações de Einstein para o caso estático e esfericamente simétrico (métrica de Schwarzschild), foi possível analisar os principais elementos que vão caracterizar um buraco negro. Como horizonte de eventos, singularidade e o comportamento da matéria próximo a essas regiões. Essa métrica tornou-se uma das soluções mais elegantes da física moderna, pois traduz com precisão essa relação direta entre geometria e gravitação. Além disso, a compreensão da métrica de Schwarzschild e suas implicações oferece essencialmente um

caminho para o entendimento de fenômenos astrofísicos extremos e para o desenvolvimento de modelos cosmológicos mais amplos. Em termos educacionais e científicos, este trabalho reforça a importância de aproximar o estudante da física teórica, mostrando uma visão geométrica do universo e destacando de forma concreta a relação entre matemática e os fenômenos naturais. O estudo sobre a geometria do espaço-tempo em torno de buracos negros, portanto, não vai apenas aprofundar o entendimento sobre a natureza da gravidade, mas também ampliar a perspectiva sobre o funcionamento do universo.

8 Apêndice

8.1 Transformações de Lorentz

As transformações de Galileu, utilizadas na mecânica clássica, pressupõem que o tempo é absoluto e que as leis da física permanecem invariantes em todos os referenciais inerciais. No entanto, esse conjunto de transformações se mostrou inadequado para descrever fenômenos eletromagnéticos. Dessa forma, a incompatibilidade entre o eletromagnetismo clássico e a abordagem newtoniana levou à necessidade de reformular o conceito de espaço e tempo e buscar transformações que respeitassem os postulados fundamentais da Relatividade propostos por Albert Einstein.

Lorentz, em 1904 descobriu um conjunto de transformações que deixava inalterada a estrutura matemática das equações de Maxwell, garantindo sua covariância mesmo quando se realizava uma mudança de referencial inercial. Dessa forma, seu resultado propôs propriedades profundas do espaço-tempo e antecipou aspectos essenciais da Relatividade Restrita.

As transformações de Lorentz explicam a relação entre as coordenadas de espaço e tempo em dois referenciais inerciais que se movem com velocidade constante. Considerando que o referencial S' se move com velocidade constante v ao longo do eixo x em relação ao referencial S , as transformações são dadas por

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),\end{aligned}\tag{80}$$

onde o fator de Lorentz é definido por

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\&= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.\end{aligned}\tag{81}$$

Sendo, $\beta = v/c$ o parâmetro adimensional de velocidade. As coordenadas y e z vão permanecer inalteradas, pois o movimento relativo ocorre apenas na direção do eixo x . Dessa forma, a principal diferença entre as transformações de Lorentz e as transformações de Galileu é que, além de juntarem espaço e tempo, as transformações relativísticas introduzem dependência temporal e espacial na determinação simultânea de eventos, trazendo ruptura com o conceito de tempo absoluto.

Além disso, um aspecto fundamental é que, para velocidades muito menores que a velocidade da luz ($v \ll c$), o fator de Lorentz se aproxima de $\gamma \approx 1$. Nesse limite, as transformações de Lorentz reduzem-se às transformações de Galileu, mostrando como a mecânica clássica surge como um caso particular da Relatividade restrita para baixas velocidades.

Já para velocidades próximas à da luz ($v \approx c$), as transformações de Galileu deixam de ser precisas, pois ignoram a variação relativística do tempo e do espaço. Nesse regime, apenas as transformações de Lorentz descrevem corretamente os fenômenos físicos, evidenciando a falha da abordagem galileana em altas velocidades. Dessa maneira, as Transformações de Lorentz desempenham um papel central na física moderna, garantindo a compatibilidade entre os postulados da Relatividade Restrita e o comportamento do eletromagnetismo, além de estabelecerem a estrutura geométrica do espaço-tempo relativístico.

8.2 Cálculo da Curvatura Escalar de Ricci

Neste apêndice é apresentado o cálculo detalhado da curvatura escalar de Ricci para uma métrica estática e esfericamente simétrica. O ponto de partida é a definição do traço do tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu = R^t_t + R^r_r + R^\theta_\theta + R^\phi_\phi. \quad (82)$$

Os componentes mistos do tensor de Ricci são dados por

$$\begin{aligned} R^t_t &= -\frac{1}{e^{2\alpha}} \left[\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\beta}} \left(\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right) \right] \\ &= -e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right], \\ R^r_r &= e^{-2\beta} \left[-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right], \\ R^\theta_\theta &= \frac{1}{r^2} (e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1), \\ R^\phi_\phi &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [\sin^2 \theta (re^{-2\beta} \partial_r \beta - re^{-2\beta} \partial_r \alpha - e^{-2\beta} + 1)]. \end{aligned} \quad (83)$$

Realizando as substituições apropriadas, obtém-se a expressão da curvatura escalar

$$\begin{aligned} R &= \left[-e^{-2\beta} \left(\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right) \right] \\ &+ \left[e^{-2\beta} \left(-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right) \right] \\ &+ \left[\frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \beta - \frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \alpha - \frac{e^{-2\beta}}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \\ &+ \left[\frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \beta - \frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \alpha - \frac{e^{-2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

Simplificando os termos, tem-se finalmente

$$R = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\beta}) \right]. \quad (85)$$

A relação entre as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$, presentes nos expoentes que multiplicam os coeficientes da métrica na Eq.(52), é obtida impondo as condições $R_{tt} = 0$ e $R_{rr} = 0$:

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] = 0, \quad (86)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta = 0. \quad (87)$$

A partir das Eqs. (86) e (87), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha &= R_{tt} e^{2(\alpha-\beta)}, \\ -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta &= R_{rr}. \end{aligned} \quad (88)$$

Subtraindo as equações acima, chega-se à seguinte relação entre as derivadas das funções

$$\frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) = 0. \quad (89)$$

Esta relação mostra que as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ estão relacionadas de forma que sua soma é constante, o que simplifica significativamente a forma da métrica, auxiliando na determinação da solução final.

8.3 Vetores de Killing da 2-Esfera (S^2)

Neste apêndice, abordaremos a dedução explícita dos vetores de Killing da esfera (S^2), isto é, os campos vetoriais que preservam a métrica sob transformações infinitesimais. Esses vetores estão associados diretamente às simetrias de rotação da superfície esférica, onde desempenham um papel fundamental na compreensão das isotropias presentes na métrica de Schwarzschild. A métrica da esfera de raio a é expressa por

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (90)$$

A equação de Killing é escrita em termos das derivadas covariantes e requer o conhecimento dos símbolos de Christoffel associados a esta métrica. Relembrando os resultados obtidos anteriormente, temos os componentes não nulos

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta. \quad (91)$$

A derivada covariante de um vetor V^a é dada por

$$\nabla_b V^a = \partial_b V^a + \Gamma_{cb}^a V^c. \quad (92)$$

Aplicando a equação de Killing componente a componente, iniciamos pelo caso $a = b = \theta$. Obtemos

$$\nabla_\theta X^\theta + \nabla_\theta X^\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_\theta X^\theta = 0. \quad (93)$$

Substituindo a expressão da derivada covariante, temos

$$\nabla_\theta X^\theta = \partial_\theta X^\theta - \Gamma_{\theta\theta}^\theta X^\theta - \Gamma_{\theta\theta}^\phi X^\phi. \quad (94)$$

Como $\Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\theta}^\phi = 0$, a equação se reduz a

$$\partial_\theta X^\theta = 0. \quad (95)$$

Logo, a componente X^θ é independente de θ , dependendo apenas de ϕ

$$X^\theta = f(\phi). \quad (96)$$

Prosseguindo com o caso $a = b = \phi$, a equação de Killing torna-se

$$\nabla_\phi X^\phi = 0. \quad (97)$$

Desenvolvendo a derivada covariante

$$\nabla_\phi X^\phi = \partial_\phi X^\phi - \Gamma_{\phi\phi}^\theta X^\theta - \Gamma_{\phi\phi}^\phi X^\phi. \quad (98)$$

Como $\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta$ e $\Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0$, obtemos

$$\frac{\partial X^\phi}{\partial \phi} = -\sin\theta \cos\theta f(\phi). \quad (99)$$

Integrando em relação a ϕ , resulta

$$X^\phi = -\sin\theta \cos\theta \int f(\phi) d\phi + g(\theta), \quad (100)$$

onde $g(\theta)$ é uma função ainda indeterminada.

Agora consideramos o caso misto $a = \theta$ e $b = \phi$, que fornece a última equação independente

$$\nabla_\theta X^\phi + \nabla_\phi X^\theta = 0. \quad (101)$$

Cada termo é calculado separadamente. O primeiro é

$$\nabla_\theta X^\phi = \partial_\theta X^\phi - \Gamma_{\theta\theta}^\phi X^\phi = \partial_\theta X^\phi - \cot\theta X^\phi, \quad (102)$$

e o segundo termo é

$$\nabla_\phi X^\theta = \partial_\phi X^\theta - \Gamma_{\theta\phi}^\phi X^\phi = \partial_\phi X^\theta - \cot \theta X^\phi. \quad (103)$$

Assim, a equação de Killing se torna

$$\partial_\theta X^\phi + \partial_\phi X^\theta - 2 \cot \theta X^\phi = 0. \quad (104)$$

Podemos agora refinar a equação mista utilizando as expressões previamente obtidas para X^θ e X^ϕ . Assim, escrevemos

$$\partial_\theta X^\phi = \partial_\theta \left(-\sin \theta \cos \theta \int f(\phi) d\phi + g(\theta) \right), \quad (105)$$

calculando essa derivada

$$\partial_\theta X^\phi = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \int f(\phi) d\phi + \frac{dg(\theta)}{d\theta}, \quad (106)$$

enquanto

$$\partial_\phi X^\theta = \frac{df(\phi)}{d\phi}. \quad (107)$$

Substituindo esses resultados na equação 104, obtemos

$$(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \int f(\phi) d\phi + \frac{dg(\theta)}{d\theta} + \frac{df(\phi)}{d\phi} = 2 \cot \theta \left(-\sin \theta \cos \theta \int f(\phi) d\phi + g(\theta) \right). \quad (108)$$

Simplificando o termo à direita e usando $\cot \theta (\sin \theta \cos \theta) = \cos^2 \theta$, a equação torna-se

$$(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \int f(\phi) d\phi + \frac{dg(\theta)}{d\theta} + \frac{df(\phi)}{d\phi} = -2 \cos^2 \theta \int f(\phi) d\phi + 2 \cot \theta g(\theta). \quad (109)$$

Reorganizando os termos, podemos separar as variáveis de modo que todos os termos em ϕ fiquem em um lado e os termos em θ no outro

$$\int f(\phi) d\phi + \frac{df(\phi)}{d\phi} = 2 \cot \theta g(\theta) - \frac{dg(\theta)}{d\theta}. \quad (110)$$

Como o lado esquerdo depende apenas de ϕ e o direito apenas de θ , concluímos que ambos devem ser iguais a uma constante k , ou seja

$$\int f(\phi) d\phi + \frac{df(\phi)}{d\phi} = k, \quad \frac{dg(\theta)}{d\theta} - 2 \cot \theta g(\theta) = -k. \quad (111)$$

A segunda equação é uma EDO linear de primeira ordem, e podemos resolvê-la utilizando o

método do fator integrante. Escrevendo-a na forma padrão $g'(\theta) + p(\theta)g(\theta) = r(\theta)$, identificamos

$$p(\theta) = -2 \cot \theta, \quad r(\theta) = -k. \quad (112)$$

O fator integrante é dado por $e^{\int p(\theta) d\theta}$, o que fornece

$$P(\theta) = \int -2 \cot \theta d\theta = -2 \ln(\sin \theta), \quad e^{-P(\theta)} = \sin^2 \theta. \quad (113)$$

Aplicando a fórmula geral para equações desse tipo, obtemos

$$g(\theta) = \sin^2 \theta \int \frac{(-k)}{\sin^2 t} dt + C \sin^2 \theta, \quad (114)$$

onde C é a constante de integração. Como $\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\cot t$, o resultado final é

$$g(\theta) = \sin^2 \theta (k \cot \theta + C). \quad (115)$$

Agora resolvemos a equação para $f(\phi)$

$$\int f(\phi) d\phi + \frac{df(\phi)}{d\phi} = k. \quad (116)$$

Derivando ambos os lados, obtemos

$$\frac{d^2 f}{d\phi^2} + f(\phi) = 0, \quad (117)$$

cuja solução geral é:

$$f(\phi) = A \cos \phi + B \sin \phi. \quad (118)$$

A substituição mostra que $k = 0$, levando a

$$g(\theta) = C \sin^2 \theta. \quad (119)$$

Reunindo os resultados:

$$\begin{aligned} X_\theta &= A \cos \phi + B \sin \phi, \\ X_\phi &= -\sin \theta \cos \theta (A \sin \phi - B \cos \phi) + C \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (120)$$

Elevando os índices com a métrica, obtemos

$$\begin{aligned} X^\theta &= X_\theta, \\ X^\phi &= \frac{X_\phi}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (121)$$

O vetor de Killing completo é, portanto

$$\begin{aligned}
X &= X^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= (A \cos \phi + B \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + [C - \cot \theta (A \sin \phi - B \cos \phi)] \frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= -AL_x + BL_y + CL_z,
\end{aligned} \tag{122}$$

onde os operadores de momento angular são definidos por

$$\begin{aligned}
L_x &= -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \\
L_y &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \\
L_z &= \frac{\partial}{\partial \phi}.
\end{aligned} \tag{123}$$

Esses três vetores de Killing correspondem às simetrias de rotação da S^2 . Dessa forma, demonstramos explicitamente que as simetrias da S^2 estão intimamente ligadas à conservação do momento angular, conceito essencial para a compreensão da estrutura esférica do espaço-tempo Schwarzschild discutido ao longo deste trabalho.

Referências

- [1] OLIVEIRA FILHO, K. de S.; SARAIVA, M. de F. *Astronomia e Astrofísica*. São Paulo: LF Editorial, 2014.
- [2] PORTO, C. M. A física de Aristóteles: uma construção ingênua? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 4, 2009.
- [3] WEINBERG, S. *Para explicar o mundo: A descoberta da ciência moderna*. Companhia das Letras, 2015.
- [4] PANEK, R. *The Trouble with Gravity: Solving the Mystery Beneath Our Feet*. Mariner Books, 2019.
- [5] PIRES, A. S. T. *Evolução das Ideias da Física*. LF Editorial, 2011.
- [6] TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A. *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity*. 2. ed. San Francisco: W. H. Freeman, 1992.
- [7] NEWTON, I. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [Princípios Matemáticos da Filosofia Natural]. Londres: Royal Society, 1687. 1. ed.
- [8] OLIVEIRA, A. J. S. Buracos Negros, curvatura no Espaço-Tempo e Ondas Gravitacionais. **Revista Científica de Veterinária**, maio 2020.
- [9] SIQUEIRA-BATISTA, R.; HELAYËL NETO, J. A. Buracos negros estelares: A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild. **Cadernos de Astronomia**, v. 2, n. 2, p. 123, 2021.
- [10] GUERRA, A.; BRAGA, M.; REIS, J. C. Teoria da relatividade restrita e geral no programa de mecânica do ensino médio: uma possível abordagem. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 4, p. 575–583, 2007.
- [11] NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica: Mecânica. v. 1. São Paulo: Blucher, 2015.
- [12] SYMON, K. R. Mecânica. Rio de Janeiro: Campus, 1996.
- [13] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- [14] CUNHA, R. F. F.; TORT, A. C. O estudo de precessão da órbita de Mercúrio no ensino médio. **Revista do Professor de Física**, v. 1, n. 2, p. 45–56, 2017.
- [15] EDDINGTON, A. The total eclipse of 1919: Observations and results. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, 1919.
- [16] BRITO, I. As equações de campo da gravitação. In: EINSTEIN, A. Atas da Academia Prussiana das Ciências de Berlim. Tradução de: Die Feldgleichungen der Gravitation. 2015.

- [17] HAFELE, J. C.; KEATING, R. E. Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains. **Science**, v. 177, n. 4044, p. 166–168, 1972.
- [18] LIMA, J. A. S.; SANTOS, R. C. *Lentes gravitacionais: fundamentos e aplicações*. São Paulo: USP, 2019.
- [19] JANSSEN, M.; RENN, J. How Einstein Found His Field Equations. Cham: Springer, 2017.
- [20] MICHELSON, A. A.; MORLEY, E. W. On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether. **American Journal of Science**, v. 34, p. 333–345, 1887.
- [21] LAPLACE, P. S. Exposition du Système du Monde. Paris: Cercle-Social, 1796.
- [22] SCHWARZSCHILD, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, v. 1, p. 189–196, 1916.
- [23] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley & Sons, 1972.
- [24] WHEELER, J. A. *Exploring black holes: Introduction to general relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2000.
- [25] NOLAN, P. J. *Fundamentals of Modern Physics*. 1. ed. Farmingdale, NY: Physics Curriculum & Instruction, 2014.