Universidade Estadual do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Graduação em Matemática

DERIVADAS E APLICAÇÕES

JOSÉ ARIMATÉA DA SILVA FILHO

Teresina - 2025

JOSÉ ARIMATÉA DA SILVA FILHO

Trabalho de conclusão de curso:

Sobre Derivadas e Aplicações

Trabalho de conclusão de curso à Coordenação do Programa de Graduação em Matemática, da Universidade Estadual do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Gildo de Jesus Sousa

Teresina - 2025

S586d Silva Filho, Jose Arimatea da.
Derivadas e aplicações / Jose Arimatea da Silva Filho. - 2025.
49f.: il.

Monografia (graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Piauí, 2025.
"Orientador: Profº. Me. Gildo de Jesus Sousa".

1. Derivadas. 2. Taxa de Variação. 3. Regra da Cadeia. 4. Aplicações de Derivadas. 5. Teorema do Valor Médio. I. Sousa, Gildo de Jesus . II. Título.

CDD 510

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
GRASIELLY MUNIZ OLIVEIRA (Bibliotecário) CRB-3ª/1067

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela força, saúde e determinação que me concedeu ao longo dessa jornada acadêmica. Sem a sua orientação e proteção, eu não teria chegado até aqui. À minha família, pelo apoio incondicional, pelos conselhos valiosos e por acreditarem em mim nos momentos de maior dificuldade. Cada palavra de incentivo e cada gesto de carinho foram fundamentais para que esta conquista tivesse o significado profundo que tem para mim. A meu orientador, Gildo de Jesus Sousa, pela paciência, dedicação e pelos ensinamentos preciosos que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Sua orientação foi indispensável em cada etapa deste processo. Aos meus colegas e professores, que, com seu conhecimento e experiências, contribuíram de maneira significativa para minha formação acadêmica e pessoal. Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte dessa trajetória, meu sincero agradecimento. Cada contribuição foi fundamental para que eu pudesse alcançar este momento.

Resumo

O presente trabalho aborda o estudo das derivadas e suas aplicações, enfatizando seu papel fundamental no cálculo diferencial e na análise da variação de funções. O objetivo principal é compreender os conceitos teóricos das derivadas e explorar suas aplicações em diferentes contextos matemáticos. O desenvolvimento do estudo está estruturado em três capítulos, iniciando por Derivadas e Taxas de Variação, onde são apresentados os conceitos de função derivada, derivadas de ordem superior e a Regra da Cadeia, além de suas aplicações na derivação de funções compostas, seguindo para Estudo da Variação das Funções e analisando o comportamento das funções por meio do Teorema do Valor Médio, que estabelece uma relação fundamental entre a taxa de variação média e a derivada em um ponto específico. E por último, serão abordados aplicações das derivadas em diferentes áreas.

Palavras-chaves:Derivadas; Taxas de Variação; Regra da Cadeia; Teorema do Valor Médio; Cálculo Diferencial; Aplicação de derivadas.

Abstract

This paper addresses the study of derivatives and their applications, emphasizing their fundamental role in differential calculus and in the analysis of function variation. The main objective is to understand the theoretical concepts of derivatives and explore their applications in various mathematical contexts. The study is structured into three chapters: it begins with Derivatives and Rates of Change, presenting concepts such as the derivative function, higher-order derivatives, and the Chain Rule, as well as their applications in differentiating composite functions. It then proceeds to The Study of Function Variation, analyzing the behavior of functions through the Mean Value Theorem, which establishes a fundamental relationship between the average rate of change and the derivative at a specific point. Finally, the work discusses applications of derivatives in different areas.

Sumário

Introdução

O estudo das derivadas é um dos pilares do cálculo diferencial, tendo sido desenvolvido por Newton e Leibniz no século XVII. Desde então, as derivadas tornaram-se uma ferramenta fundamental para a análise de variações em funções matemáticas, permitindo a modelagem de fenômenos naturais, econômicos e tecnológicos. Segundo Stewart (2013), a derivada de uma função mede a taxa instantânea de variação dessa função em relação à sua variável independente, sendo essencial para entender mudanças em sistemas dinâmicos.

> "*As derivadas possuem uma ampla gama de aplicações, indo desde a determinação de máximos e mínimos em funções até a modelagem de fenômenos físicos, como a velocidade e a aceleração de um corpo em movimento (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2019).*"

Para compreender suas propriedades e aplicações, este trabalho está dividido em três capítulos principais. No primeiro capítulo, intitulado "Derivadas", abordamos a definição de função derivada e derivadas de ordem superior, bem como a Regra da Cadeia, ferramenta essencial para a derivação de funções compostas (APOSTOL, 2017). Além disso, exploramos aplicações práticas dessa regra, demonstrando sua importância na resolução de problemas matemáticos complexos.

No segundo capítulo, "Estudo da Variação das Funções", analisamos o comportamento das funções por meio do Teorema do Valor Médio, um dos resultados fundamentais do cálculo diferencial. Esse teorema estabelece uma relação entre a taxa de variação média de uma função e sua derivada em um ponto específico, sendo amplamente utilizado em aplicações matemáticas e científicas (SPIVAK, 2018).

No terceiro capítulo, serão trabalhados as derivadas e suas aplicações. De forma clara e objetiva, é demonstrada aplicabilidade na geometria, por meio de situações do cotidiano,bem com práticas na física, administração e economia.

Dessa forma, este trabalho busca aprofundar a compreensão sobre as derivadas, suas propriedades e aplicações, destacando sua relevância para a matemática e para diversas áreas do conhecimento. Através da fundamentação teórica e exemplos práticos, pretendemos demonstrar a importância desse conceito para a análise e modelagem de fenômenos do mundo real.

Capítulo 1

Derivada

1.1 Derivadas e Taxas de Variação

O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite. Este tipo especial de limite é chamado *derivada* e veremos que ele pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia.

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calcularmos a inclinação da reta secante PQ :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

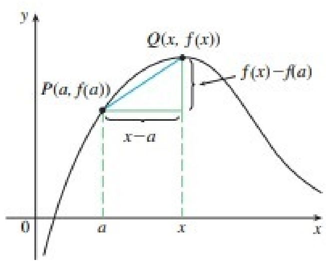


Figura 1.1: STEWART, J. Cálculo: Volume 1

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a. Se m_{pq} tender a um número m, então definimos a *tangente* t como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P.

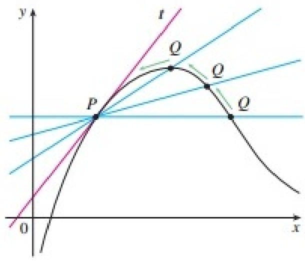


Figura 1.2: STEWART, J. Cálculo: Volume 1

Definição 1. *A* ***reta tangente*** *à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Ex. 1. *Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P(1,1).*

Solução 1.

Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} = (x + 1) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1$$

A forma ponto-inclinação da equação da reta por um ponto (x_1, y_1) com uma inclinação m é:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Há outra expressão para a inclinação da reta tangente que é, às vezes, mais fácil de ser usada. Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observe que quando x tende a a, h tende a 0 (pois $h = x - a$); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na Definição 1 fica

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ex. 2. *Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto $(3, 1)$.*

Solução 2.

Seja $f(x) = 3/x$. Então a inclinação da reta tangente em $(3, 1)$ é

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3+h)}{3+h}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto (3,1) é

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica para

$$x + 3y - 6 = 0.$$

Definição 2. *A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Quando x tende a a e escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tenderá a 0. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, como vimos na determinação das retas tangentes, é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ex. 3. *Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número a.*

Solução 3.

Da definição, temos

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\
&= 2a - 8
\end{aligned}$$

Definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ como a reta que passa em P e tem inclinação m dada pela Equação 1 ou 2. Uma vez que, pela definição 2, isso é o mesmo que a derivada $f'(a)$, podemos agora dizer o seguinte:

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ex. 4. *Encontre uma equação da reta tangente à parábola* $y = x^2 - 8x + 9$ *no ponto* $(3, -6)$.

Solução 4.

Sabemos que a derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ *no número* a *é* $f'(a) = 2a - 8$. *Portanto, a inclinação da reta tangente em* $(3, -6)$ *é* $f'(3) = 3(3) - 8 = 1$. *Dessa forma, uma equação da reta tangente é*

$$y - (-6) = (1)(x - 3) \text{ ou } y = -9 + x$$

1.2 Regras de derivação

Proposição 1. *Seja* $n \neq 0$ *um natural. São válidas as fórmulas de derivação:*

1. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.
2. $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}, x \neq 0$.
3. $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, *onde* $x > 0$ *se* n *for par e* $x \neq 0$ *se* n *for ímpar* $(n \geq 2)$.

Demonstração 1.

1. Por definição $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Fazendo $x+h=t$, então $t \to x$ quando $h \to 0$. Daí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x} [\underbrace{t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + ... + x^{n-1}}_{n\ parcelas}] \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + ... + x^{n-1}}_{n\ parcelas} \end{aligned}$$

   ou seja $f'(x) = nx^{n-1}$.

2. Novamente por definição temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^n} - \dfrac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{(x+h)^n - x^n}{h} . \frac{1}{(x+h)^n x^n}$$

   Por (1) temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1},$$

   e como

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^n x^n} = \frac{1}{x^{2n}},$$

   resulta:

$$f'(x) = -nx^{n-1} . \frac{1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

3. Pela Definição (3)

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim_{t\to x} \frac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x}}{t-x}$$

Fazendo $u = \sqrt[n]{t}$ *e* $v = \sqrt[n]{x}$ $(t \to x \Rightarrow u \to v)$ resulta:

$$f'(x) = \lim_{u\to v} \frac{u-v}{u^n - v^n} = \lim_{u\to v} \frac{1}{\dfrac{u^n - v^n}{u-v}} = \frac{1}{nv^{n-1}}$$

Assim, para $x \neq 0$ e x no domínio de f.

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

ou seja

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Ex. 5. *Seja* $f(x) = x^4$*. Calcule.*

1. *f'(x)*

2. *f'*$(\frac{1}{2})$

Solução 5.

1. $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^{4-1}$*, ou seja* $f'(x) = 4x^3$.

2. *Como* $f'(x) = 4x^3$*, segue* $f'(\dfrac{1}{2}) = 4(\dfrac{1}{2})^3$ *ou seja,* $f'(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$.

Proposição 2. *São válidas as fórmulas de derivação.*

1. $f(x) = \log_b x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln b}$

2. $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

3. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$

4. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Proposição 3. *São válidas as fórmulas de derivação.*

1. $f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$
2. $f(x) = cos(x) \Rightarrow f'(x) = -sen(x)$
3. $f(x) = tg(x) \Rightarrow f'(x) = sec^2(x)$
4. $f(x) = cossec(x) \Rightarrow f'(x) = -cossec(x) \cdot cotg(x)$
5. $f(x) = sec(x) \Rightarrow f'(x) = sec(x) \cdot tg(x)$
6. $f(x) = cotg(x) \Rightarrow f'(x) = -cossec^2(x)$

.

Demonstração 2.

1.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h) + cos(x)sen(h) - sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[sen(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{sen(h)}{h} \right] \\
&= sen(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} \\
&= sen(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\
&= cos(x)
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos(x)\cos(h)-sen(x)sen(h))-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x)(\cos(h)-1)}{h}-\frac{sen(x)sen(h)}{h}\right)\\
&= \cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}-sen(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\\
&= \cos(x)\cdot(0)-sen(x)\cdot(1)\\
&= -sen(x)
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{tg(x+h)-tg(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{sen(x+h)}{\cos(x+h)}-\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)\cos(x)-sen(x)\cos(x+h)}{h\cdot\cos(x+h)\cos(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sen((x+h)-x)}{h\cdot\cos(x+h)\cos(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h\cdot\cos(x+h)\cos(x)}\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos(x)}\right)\\
&= (1)\cdot\left(\frac{1}{\cos(x+0)\cos(x)}\right)\\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}\\
&= \sec^2(x)
\end{aligned}
$$

Proposição 4. *Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f + g$, kf e $f \, . \, g$ são deriváveis em p e têm-se*

1. $(f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p)$.
2. $(kf)'(p) = kf'(p)$.
3. $(f.g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.
4. $(g/h)'(p) = \frac{g'(p) \cdot h(p) - g(p) \cdot h'(p)}{[h(p)]^2}$

Demonstração 3.

1.

$$\begin{aligned} (f+g)'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{[f(x)+g(x)] - [f(p)+g(p)]}{x-p} \\ &= \lim_{x \to p} [\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \frac{g(x)-g(p)}{x-p}] \\ &= f'(p) + g'(p). \end{aligned}$$

(Em palavras: a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas.)

2.

$$\begin{aligned} (kf)'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x-p} = k \\ &= \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = kf'(p), \ \textit{ou seja}, \\ &= (kf)'(p) = kf'(p). \end{aligned}$$

(Em palavras: a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.)

3.

$$\begin{aligned}
(f.g)'(p) &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x)-f(p)g(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x)-f(p)g(x)+f(p)g(x)-f(p)f(p)}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p}[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}.g(x)+f(p).\frac{g(x)-g(p)}{x-p}] \\
&= f'(p)g(p)+f(p)g'(p).
\end{aligned}$$

Observe que, pelo fato de g ser derivável em p, g será contínua em p, e, assim,

$$\lim_{x\to p} g(x) = g(p).$$

(Em palavras: *a derivada do produto de duas funções é igual à derivada da primeira multiplicada pela segunda mais a primeira multiplicada pela derivada da segunda*).

1.3 Função Derivada e Derivadas de Ordem Superior

Sejam f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \to f'(x)$, denomina-se *função derivada* ou, simplesmente, *derivada* de f; diremos, ainda, que f' é a *derivada* de 1° *ordem* de f. A derivada de 1° ordem de f é também indicada por $f(1)$.
A derivada de f' denomina-se *derivada* de 2° *ordem* de f e é indicada por f^n ou por $f(2)$, assim, f'' $(f')'$. De modo análogo, define-se as derivadas de ordens superiores a 2 de f.

Ex. 6. *Seja $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$. Determine $f', f'' e f'''$.*

Solução 6.

$f'(x) = 9x^2 - 6$, *para todo x; assim* $D'_f = \mathbb{R}$

$f''(x) = 18x$, *para todo x;* $D''_f = \mathbb{R}$

$f'''(x) = 18$, *para todo x;* $D'''_f = \mathbb{R}$

1.4 Regra da Cadeia para Derivação de Função Composta

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis com $Im\, g \subset D_f$, nosso objetivo, a seguir, é provar que a composta $h(t) = f(g(t))$ é derivável e que vale a *regra da cadeia* (1) $h'(t) = f'(g(t))g'(t), t \in D_g$. Antes de passarmos a demonstração de (1), vejamos como fica a regra da cadeia na notação de Leibniz. Temos:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ e } \frac{dx}{dt} = g'(t).$$

Sendo a composta dada por $y = f(g(t))$, segue de (1) que

$$\frac{dy}{dt} = f'(g(t))\ g'(t)$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)g'(t), \text{ onde } x = g(t). \text{ Assim,}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \text{ onde,}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ deve ser calculado em } x = g(t).$$

Suponhamos $y = f(x)$ derivável em $p, x = g(t)$ derivável em t_0, com $p = g(t_0)$ e $Img \subset D_f$. Seja $h(t) = f(g(t))$. Vamos provar que

$$h'(t_0) = f'(g(t_0))g'(t_0).$$

Para isto, consideramos a função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Observe que o gráfico de T é a reta tangente ao gráfico de f, em $(p, f(p))$. Temos

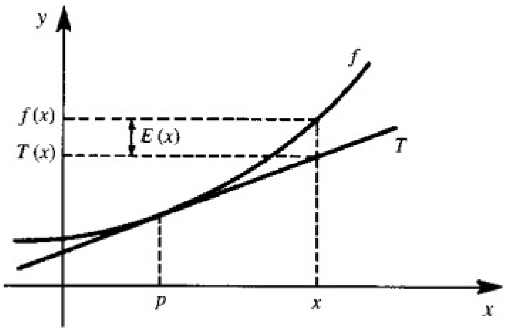


Figura 1.3: GUIDORIZZI. Um curso de cálculo Vol.1

$$f(x) = T(x) + E(x)$$

ou

$$(2)\ f(x) - f(p) = f'(p)(x-p) + E(x), x \in D_f$$

Onde $E(x)$ é o erro que se comete ao aproximar $f(x) por T(x)$. $E(x) = p(x)(x-p), x \in D_f$, onde $\lim\limits_{x\to p} p(x) = 0 = p(0)$. Fazendo em (2) $x = g(t)$ e $p = g(t_0)$ e, em seguida, dividindo ambos os membros por $t - t_0$, $(t \neq t_0)$ obtemos:

$$\frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = f'(g(t_0))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} + \frac{E(g(t))}{t - t_0}$$

Temos,

$$\lim_{t\to t_0} p(g(t)) = \lim_{x\to p} p(x) = 0$$

Daí,

$$\lim_{t\to t_0} \frac{E(g(t))}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} p(g(t)).\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = 0.g'(t_0) = 0$$

Portanto

$$h'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{h(t) - h(t_o)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = f'(g(t_0))g'(t_0).$$

1.5 Aplicações da Regra da Cadeia

Pelo que vimos na seção anterior, sendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$ deriváveis, com $Img \subset D_f$ então a derivada da composta $y = f(g(x))$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

$$\text{ou } \frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x), \text{ onde } u = g(x)$$

$$\text{ou } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$\text{onde } \frac{dy}{du} \text{ deve ser calculada em } u = g(x).$$

Ex. 7. *Calcule a derivada.*

1. $y = e^{3x}$

2. $y = \sin t^2$

Solução 7.

1. $y = e^u$, *onde* $u = 3x$. *Pela regra da cadeia*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Como $\dfrac{dy}{du} = e^u$ *e* $\dfrac{du}{dx} = 3$, *resulta*

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot 3 \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}.$$

2. $y = \sin x$, *onde* $x = t^2$. *Pela regra da cadeia*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Como $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ *e* $\dfrac{dx}{dt} = 2t$, *resulta*

$$\frac{dy}{dt} = \cos x \cdot 2t$$

ou seja

$$\frac{dy}{dt} = 2t \cos t^2$$

Poderíamos, também, ter obtido $\dfrac{dy}{du}$ *aplicando diretamente a fórmula* $[f(g(t))]' = f'((t))g'(t)$. *Veja:*

$$\frac{dy}{dt} = [\sin t^2]' = \sin' t^2 (t^2)' = 2t \cos t^2$$

Capítulo 2

Estudo da Variação das Funções

2.1 Teorema de Rolle

O Teorema de Rolle é um resultado fundamental do Cálculo Diferencial e garante, sob certas condições, a existência de pelo menos um ponto no interior de um intervalo onde a derivada de uma função se anula. Ele pode ser interpretado geometricamente como a existência de um ponto onde a reta tangente ao gráfico da função é horizontal.

Teorema 1. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, tal que $f(a) = f(b)$, onde a e b são alguns números reais. Então, existe algum c em $]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração 4. *Como f é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema do Valor Extremo, f atinge um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a,b]$. Ou seja, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que:*

$$f(x_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \quad f(x_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Como $f(a) = f(b)$, os valores nas extremidades são iguais. Logo, o máximo ou o mínimo de f deve ocorrer em algum ponto $c \in]a,b[$, a menos que f seja constante.

Caso 1: *Se f é constante em $[a,b]$, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$. Neste caso, o teorema está provado para qualquer $c \in]a,b[$.*

Caso 2: *Se f não é constante, então o valor máximo ou mínimo de f ocorre em algum ponto $c \in]a, b[$. Como f é diferenciável em $]a, b[$ e atinge um extremo local em c, segue que:*

$$f'(c) = 0.$$

Portanto, em ambos os casos, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

2.2 Teorema do Valor médio (TVM)

Definição 3. *Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:*

1. *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.*

2. *f é derivável no intervalo aberto $]a, b[$.*

Então, existe um número $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demonstrarmos esse teorema, podemos ver que ele é razoável interpretando-o geometricamente. As Figuras mostram os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ sobre os gráficos de duas funções deriváveis. A inclinação da reta secante AB é

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Uma vez que $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente no ponto $(c, f(c))$, o Teorema do Valor Médio na forma dada pela Equação diz que, no mínimo, um ponto $P(c, f(c))$ sobre o gráfico onde a inclinação da reta tangente é igual à inclinação da reta secante AB.

Em outras palavras, há um ponto P onde a reta tangente é paralela à reta secante AB. (Imagine uma reta paralela a AB, iniciando distante e se movendo paralelamente a ela mesma até tocar o gráfico pela primeira vez.)

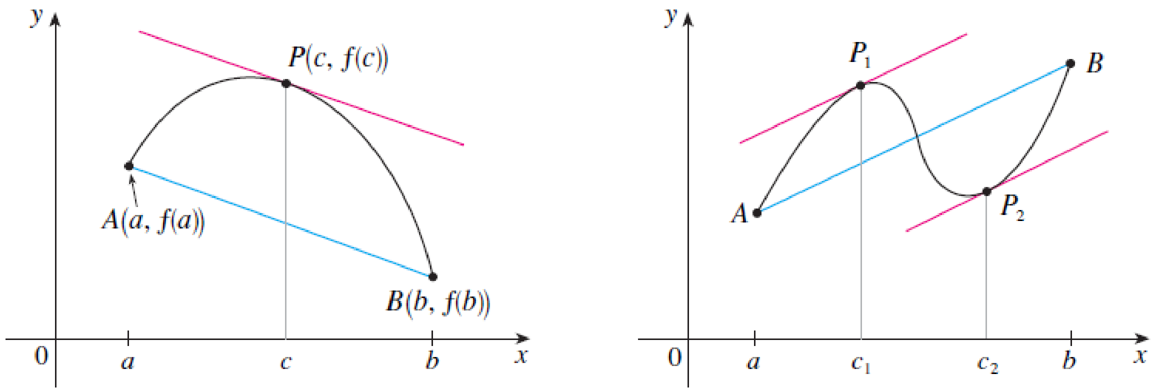


Figura 2.1: STEWART, J. Cálculo: Volume 1

Demonstração 5. *Aplicamos o Teorema de Rolle a uma nova função h definida como a diferença entre f e a função cujo gráfico é a reta secante AB. Vemos que a equação da reta secante AB pode ser escrita como*

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Assim, como mostrado na Figura:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Precisamos primeiro verificar que h satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle.

1. *A função h é contínua em $[a, b]$, pois é soma de f e de uma função polinomial de primeiro grau, ambas contínuas.*

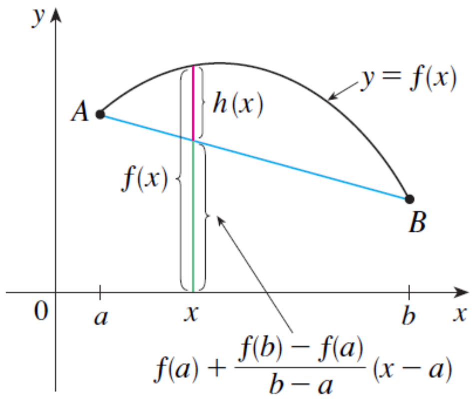


Figura 2.2: STEWART, J. Cálculo: Volume 1

2. *A função h é derivável em (a, b) pois tanto f quanto a função polinomial de primeiro grau são deriváveis. De fato, podemos calcular h':*

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Observe que $f(a)$ e $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ são constantes.)

3.
$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \\ h(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

Uma vez que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, esse teorema afirma que existe um número $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e, assim,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2.3 Intervalos de Crescimento e de Decrescimento

Como consequência do TVM temos o seguinte teorema.

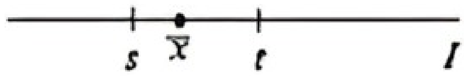
Teorema 2. *Seja f contínua no intervalo I.*

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I.

Demonstração 6.

a) Precisamos provar que quaisquer que sejam s e t em I, $s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$. Sejam, então, s e t em I, com $s < t$.



Da hipótese, segue que f é contínua em $[s,t]$ e derivável em $]s,t[$; pelo TVM existe $\bar{x} \in]s,t[$ tal que

$$f(t) - f(s) = f'(\bar{x})(t - s)$$

De $f'(\bar{x}) > 0$, pois $\bar{x}$ está no interior de I e de $t - s > 0$ segue

$$f(t) - f(s) > 0 \text{ ou } f(s) < f(t)$$

Portanto,

$$\forall\ s,t \in I, s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$$

Ex. 8. *Determine os intervalos de crescimento e de descrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$. Esboçe o gráfico.*

Solução 8.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

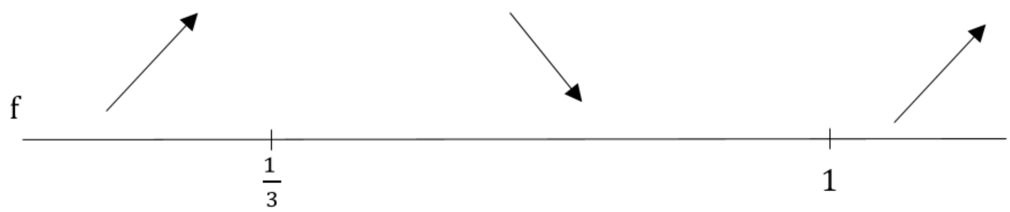
$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

Então,

$$\begin{cases} f'(x) & > 0 \ em \ ]-\infty, \dfrac{1}{3}[\ e \ em \ ]1, +\infty[\\ f'(x) & < 0 \ em \ ]\dfrac{1}{3}, 1[\end{cases}$$

Como f é contínua, segue do teorema anterior que

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty, \dfrac{1}{3}] \text{ e em }]1, +\infty[\\ f \text{ é estritamente decrescente em } [\dfrac{1}{3}, 1[\end{cases}$$

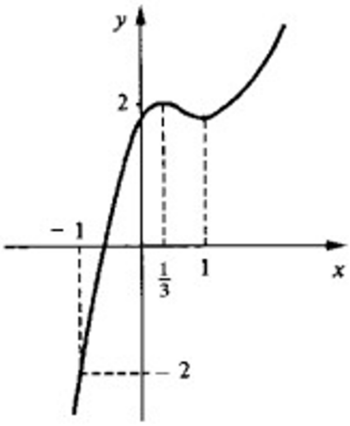


Antes de esboçar o gráfico de f vamos calcular os limites de f para $x \longrightarrow +\infty$ e $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[x^3 - 2x^2 + x + 2] = \lim_{x\to+\infty} x^3[1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x^3 - 2x^2 + x + 2] = +\infty$$

x	f(x)
-1	-2
0	2
1	2
$\frac{1}{3}$	$\frac{58}{27}$



2.4 Concavidade e Pontos de Inflexão

Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I. A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \quad \text{ou} \quad y = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 4. *Dizemos que f tem a* ***concavidade para cima*** *no intervalo aberto I se*

$$f(x) > T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.

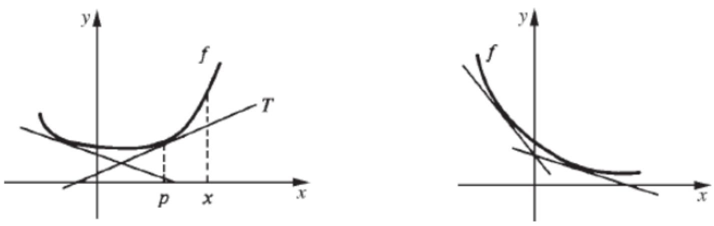


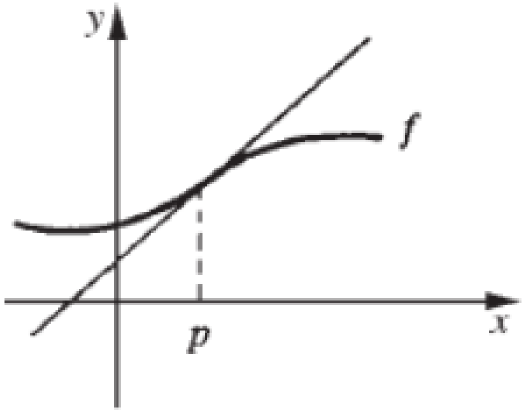
Figura 2.3: GUIDORIZZI. Um curso de cálculo Vol.1

Definição 5. *Dizemos que f tem a **concavidade para baixo** no intervalo aberto I se*

$$f(x) < T(x)$$

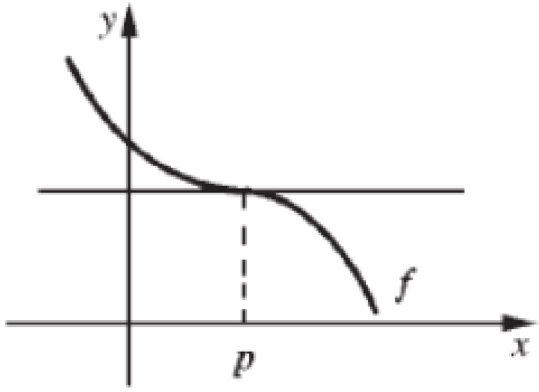
quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.

Definição 6. *Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p. Dizemos que p é **ponto de inflexão** de f se existirem números reais a e b, com $p \in]a, b[\subset D_f$, tal que f tenha concavidades com denominações contrárias em $]a, p[$ e em $]p, b[$.*



p é ponto de inflexão de f

(ponto de inflexão oblíquo)



p é ponto de inflexão de f

(ponto de inflexão horizontal)

Teorema 3. *Seja f uma função que admite derivada até a 2° ordem no intervalo aberto I.*

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.

Demonstração 7.

a) Seja p um real qualquer em I. Precisamos provar que, para todo $x \in I$, $x \neq p$,

$$f(x) > T(x)$$

em que $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$.

Consideremos a função $g(x) = f(x) - T(x)$, $x \in I$; vamos provar que $g(x) > 0$ para todo $x \in I$, $x \neq p$.

Temos:

$$\begin{cases} g'(x) = f'(x) - T'(x) \\ T'(x) = f'(p) \end{cases}$$

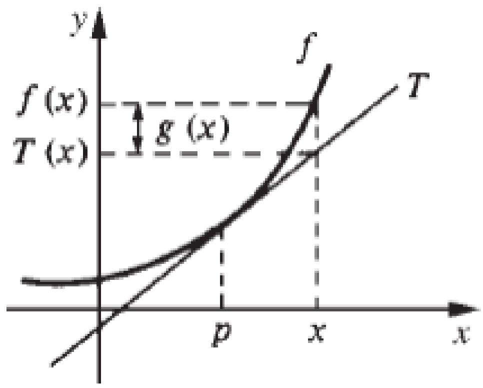


Figura 2.4: GUIDORIZZI. Um curso de cálculo Vol.1

daí

$$g'(x) = f'(x) - f'(p), \;\; x \in I.$$

Como $f'(x) > 0$ em I, segue que f' é estritamente crescente em I. Então,

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \quad \textit{para } x > p \\ g'(x) < 0 \quad \textit{para } x < p \end{cases}$$

Segue que g é estritamente decrescente em $]a, p[\subset I$ e estritamente crescente em $]p, b[\subset I$, pois $g'(x) \neq 0$. Como $g(p) = 0$, o resultado

$$g(x) > 0$$

para todo $x \in I, x \neq p$.

b) Análogo.

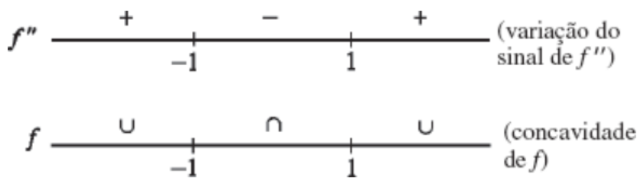
Ex. 9. *Seja $f(x) = e^{-x^2/2}$. Estude f com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão.*

Solução 9.

$$f'(x) = -x\, e^{-x^2/2}$$

$$f''(x) = (x - 1)\, e^{-x^2/2}$$

Com $e^{-x^2/2} > 0$ para todo x, o sinal de $f''(x)$ é o mesmo que o de $x^2 - 1$.



$$\begin{cases} f''(x) > 0 \quad em\ ]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ f''(x) < 0 \quad em\ ]-1, 1[\end{cases}$$

Então,

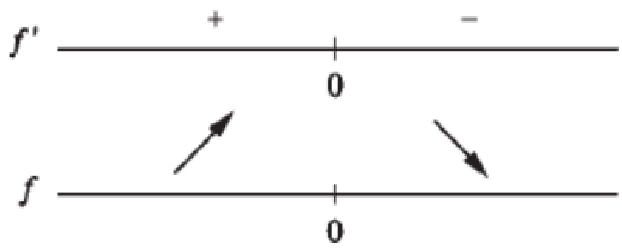
$$\begin{cases} f \quad tem\, concavidade\, para\, cima\, em\,]-\infty, -1[\, e\, em\,]1, +\infty[\\ f \quad tem\, concavidade\, para\, baixo\, em\,]-1, 1[\end{cases}$$

Pontos de inflexão: $x = -1$, $x = 1$.

Ex. 10. *Esboce o gráfico de $f(x) = e^{-x^2/2}$.*

Solução 10.

$$f'(x) = -x\,e^{-x^2/2}$$



Definição 7. *Uma função f tem* ***máximo absoluto*** *(ou* ***máximo global****) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado* ***valor máximo*** *de f em D. Analogamente, f tem um* ***mínimo absoluto*** *em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D, e o número $f(c)$ é denominado* ***valor mínimo*** *de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados* ***valores extremos*** *de f.*

A figura abaixo mostra o gráfico de uma função f com um máximo absoluto em d e um mínimo absoluto em a. Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto do gráfico, enquanto $(a, f(a))$ é o ponto mais baixo.

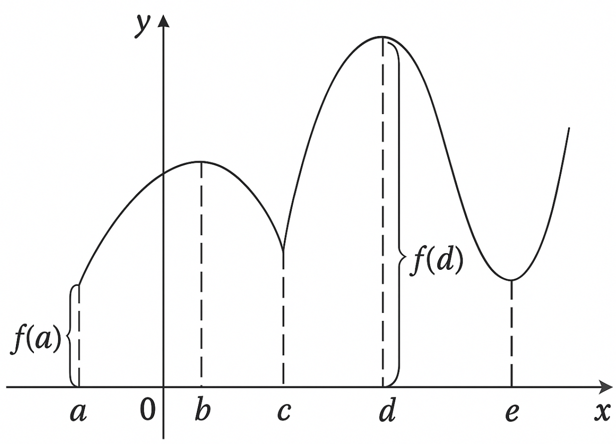


Figura 2.5: STEWART, J. Cálculo: Volume 1

Na Figura acima, se considerarmos somente os valores de x próximos de b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c)], então $f(b)$ é o maior desses valores de $f(x)$ e é chamado *valor máximo local* de f. Da mesma forma, $f(c)$ é denominado *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leq f(x)$ para x nas proximidades de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f tem também um mínimo local em e. Em geral, temos a seguinte definição.

Definição 8. *Uma função f tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. Isso significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c. Analogamente, f tem um **mínimo local** em c se $f(c) \leq f(x)$ quando x estiver próximo de c.*

Capítulo 3

Derivadas e Aplicações

O estudo das derivadas possui uma ampla variedade de aplicações práticas e é essencial para compreender e resolver problemas que envolvem taxas de variação. Entre as aplicações mais conhecidas está a otimização, que consiste em encontrar valores máximos e mínimos de funções, uma técnica fundamental para determinar soluções ideais em diversos contextos.

As derivadas são amplamente utilizadas em áreas como a Física, para descrever movimentos e forças; na Economia, para analisar custos, receitas e lucros; na Engenharia, no dimensionamento de estruturas e controle de sistemas; na Biologia, para modelar o crescimento populacional ou a velocidade de reações químicas; e até mesmo na área de Tecnologia da Informação, na criação de algoritmos de aprendizado de máquina e processamento de sinais.

Por isso, o estudo das derivadas não apenas integra a base do cálculo diferencial, mas também se revela uma ferramenta poderosa para lidar com problemas concretos em diferentes campos do conhecimento. Aqui estão alguns exemplos práticos:

1. Redução do consumo de materiais: Determinar a quantidade mínima de material necessária para fabricar um produto.

2. Aumento do lucro: Analisar como as despesas podem ser ajustadas para maximizar os lucros.

3. Maximização de áreas: Calcular a maior área possível em relação a um perímetro fixo.

4. Eficiência na produção industrial: Encontrar a melhor forma de organizar processos para diminuir o tempo de produção.

Esses exemplos demonstram como as derivadas são ferramentas essenciais para a tomada de decisões em várias áreas.

3.1 Aplicações na Geometria

Aplicação 1. *Um retângulo está posicionado com sua base no eixo x, tendo seus vértices superiores na parábola $y = 16-x^2$. Qual é a área máxima que esse retângulo pode alcançar e quais são suas dimensões?*

Resolução 1.

1. Dimensões do Retângulo: - Os vértices superiores do retângulo estão em (x, y) e $(-x, y)$. Assim, a largura é $2x$ e a altura é $y = 16 - x^2$.

2. Área do Retângulo: a área A é dada por:

$$A = 2x(16 - x^2) = 32x - 2x^3$$

3. Maximizando a Área: Derivando A em relação a x e igualando a zero:

$$\frac{dA}{dx} = 32 - 6x^2 = 0 \implies 6x^2 = 32 \implies x^2 = \frac{32}{6} \implies x^2 = \frac{16}{3} \implies x = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2.31$$

Para obter um número inteiro, vamos considerar $x = 2$.

4. Calculando a Altura: - Substituindo $x = 2$ na equação da parábola:

$$y = 16 - (2)^2 = 16 - 4 = 12$$

5. Dimensões do Retângulo: A largura é $2x = 2 \cdot 2 = 4$ e a altura é $y = 12$.

6. Área Máxima: A área máxima é:

$$A = 2x(16 - x^2) = 2(2)(12) = 48$$

Portanto, a maior área que o retângulo pode ter é 48 unidades quadradas, com dimensões de largura 4 unidades e altura 12 unidades.

Aplicação 2. *Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com 1000 m de fio à disposição, qual é a maior área que você pode cercar e quais são suas dimensões?*

Resolução 2.

Vamos usar as variáveis L para o comprimento da área retangular(paralelo ao rio) e W para a largura da área retangular (perpendicular ao rio).

Sabemos que a área a ser cercada é dada por:

$$A = L \cdot W$$

A quantidade total de arame disponível para cercar os três lados da área (dois lados de largura e um lado de comprimento) é 1000 metros. Então, temos a equação para o perímetro:

$$2W + L = 1000$$

Agora, queremos maximizar a área $A = L \cdot W$, mas precisamos expressar L em termos de W para poder derivar. Da equação do perímetro, isolamos L:

$$L = 1000 - 2W$$

Substituímos essa expressão de L na fórmula da área:

$$A(W) = (1000 - 2W) \cdot W$$
$$A(W) = 1000W - 2W^2$$

Agora, para encontrar o valor de W que maximiza a área, derivamos $A(W)$ em relação a W:

$$\frac{dA}{dW} = 1000 - 4W$$

igualamos a derivada a zero para encontrar o ponto crítico:

$$1000 - 4W = 0$$
$$4W = 1000$$
$$W = 250$$

Agora que temos $W = 250$, *substituímos esse valor na equação do perímetro para encontrar* L:

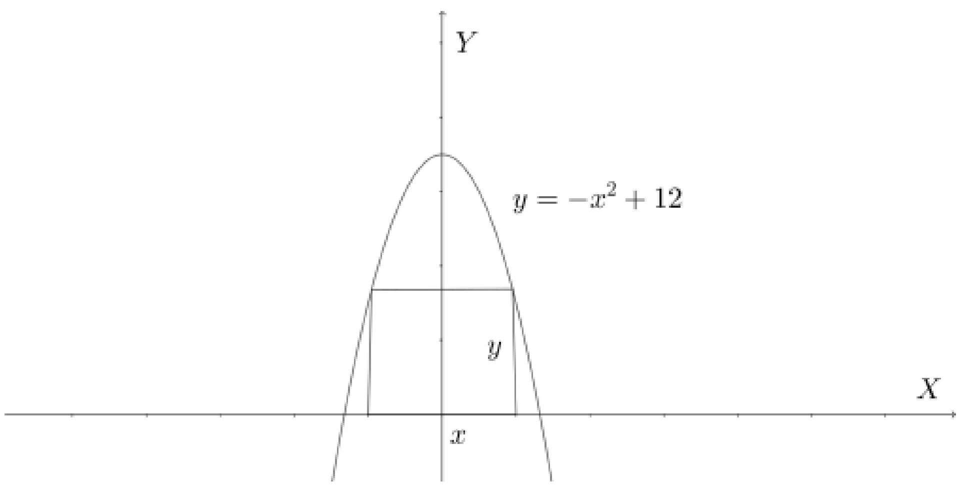
$$L = 1000 - 2 \cdot 250 = 500$$

Então, as dimensões que maximizam a área são comprimento $L = 500$ *metros e largura* $W = 250$ *metros. Logo, a área máxima é* $A = 500 \cdot 250 = 125.000m^2$.

Aplicação 3. *Um retângulo tem sua base no eixo* x *e seus dois vértices superiores na parábola* $y = 12?x^2$. *Qual a maior área que esse retângulo pode ter? Quais são suas dimensões?*

Resolução 3. *Dado* $y = 12 \cdot x^2$ *temos que a área do retângulo é* $A = 2xy = 2x(12 \cdot x^2)$, *onde* $0 \leq x \leq \sqrt{12}$. *Fazendo* $A'(x) = 0$, *obtemos*

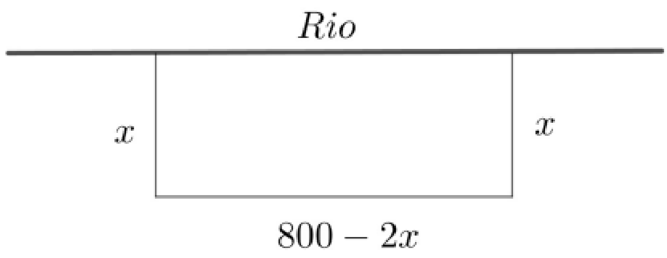
$$-6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$



Como $x = -2$ não está no domínio, e desde que $A(0) = 0$ e $A(\sqrt{12}) = 0$, concluímos que $A(2) = 32$ unidades quadradas é a área máxima. As dimensões são 4 unidades por 8 unidades.

Aplicação 4. *(O melhor esquema para a cerca). Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com* $800m$ *de fio à disposição, qual é a maior área que você pode cercar e quais são suas dimensões?*

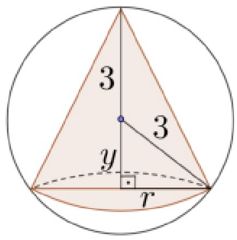
Resolução 4.



A área é $A(x) = x(800 \cdot 2x)$*, onde* $0 \leq x \leq 400$*. Resolvendo* $A'(x) = 800 \cdot 4x = 0 \Rightarrow x = 200$*. Com* $A(0) = A(400) = 0$*, a área máxima é* $A(200) = 80,000m^2$*, As dimensões são de* $200m$ *por* $400m$*.*

Aplicação 5. *Determine o volume do maior cone de revolução que pode ser inscrito em uma esfera de raio* $R = 3$*.*

Resolução 5.



Considere o cone de revolução C*, inscrito na esfera de raio 3. O volume de* C *é dado por*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

onde r *é o raio da base e* h *é a altura de* C*.*

O volume do cone é

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

onde $r = \sqrt{9 - y^2}$ *e* $h = y + 3$, *onde* y *é como na figura 6. Assim,*

$$V(y) = \frac{\pi}{3}(9 - y^2)(y + 3) = \frac{\pi}{3}(27 + 9y - 3y^2 - y^3)$$

e, portanto,

$$V'(y) = \frac{\pi}{3}(9 - 6y - 3y^2) = \pi(1 - y)(3 - y).$$

Os pontos críticos são -3 *e* 1, *mas* -3 *não está no domínio. Como*

$$V''(1) = \frac{\pi}{3}(-6 - 6(1)) < 0,$$

então em $y = 1$ *temos o volume máximo de*

$$V(1) = \frac{\pi}{3}(8)(4) = \frac{32\pi}{3}$$

unidades cúbicas.

3.2 Aplicações na Física

Aplicação 6. *Jane está em um barco a remo a 3km da costa e deseja chegar a uma cidade litorânea que está a 10km em linha reta do ponto (na costa) mais próximo do barco. Ela rema a 3km/h e caminha a 8km/h. Onde ela deve aportar para chegar a cidade no menor tempo possível?*

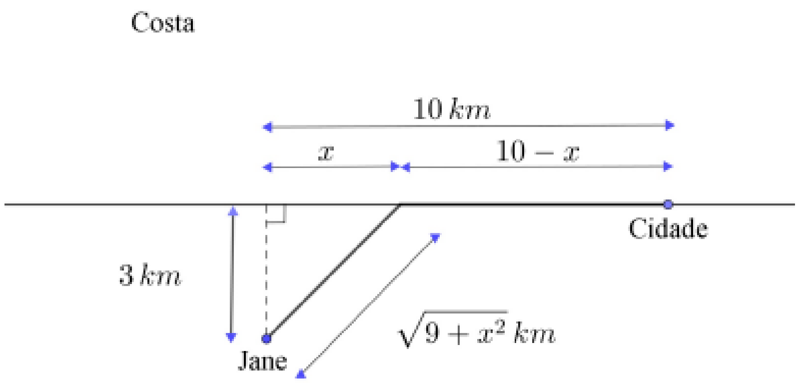
Resolução 6.

Dados:

Jane rema: 3km/h

Jane caminha: 8km/h

Objetivo minimizar a variável tempo.



Do problema obtemos f,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{10-x}{8} \quad (0 \leq x \leq 10)\\
f(x) &= \frac{(9+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{10-x}{8}\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(9+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) - \frac{1}{8}\\
f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} \cdot (2x) - \frac{1}{8}\\
f'(x) &= \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} &= \frac{1}{8}\\
\Rightarrow 8x &= 3\sqrt{9+x^2}\\
\Rightarrow 64x^2 &= 9(9+x^2)\\
\Rightarrow 64x^2 &= 81 + 9x^2\\
\Rightarrow 55x^2 &= 81\\
\Rightarrow x &= \pm\frac{9}{\sqrt{55}}
\end{aligned}$$

Descartemos o valor negativo, pois não pertence ao domínio de f. Aplicando em f os pontos críticos, o ponto inicial e ponto final, obtemos:

$$f(0) \approx 2{,}25km, \quad f\left(\frac{9}{\sqrt{55}}\right) \approx 2{,}16km \quad e \quad f(10) \approx 3{,}48km$$

Jane deveria aportar seu barco na costa $\frac{9}{\sqrt{55}}$ km *a partir do ponto mais próximo de seu barco.*

Aplicação 7. *Movimento vertical. A altura de um objeto que se desloca verticalmente é dada por*

$$h = -4t^2 + 24t + 28$$

com h *em metros* t *em segundos. Determine:*

1. *A velocidade do objeto quando* $t = 0$.

2. *Sua altura máxima e quando esta ocorre.*

3. *Sua velocidade quando* $h = 0$.

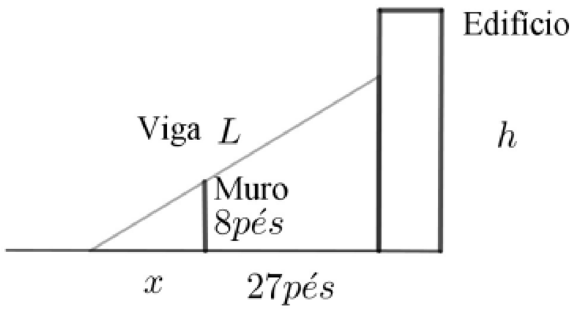
Resolução 7.

1. $h(t) = -4t^2 + 24t + 28 \Rightarrow v(t) = h'(t) = -8t + 24$. *Em* $t = 0$, *a velocidade é* $v(0) = 24\, m/s$.

2. *A altura máxima ocorre quando* $v(t) = 0$, *isto é, quando* $t = 3$. *A altura máxima é* $h(3) = 64$ *metros e ocorre em* $t = 3$ *segundos.*

3. *Observe que* $h(t) = -4t^2 + 24t + 28 = -4(t+1)(t-7)$, *então* $h = 0$ *quando* $t = -1$ *ou* $t = 7$. *Escolhendo o valor positivo de* t, *como* $v(t) = h'(t)$, *a velocidade quando* $h = 0$ *é* $v(7) = -32\, m/s$.

Aplicação 8. *O muro de 8 pés da figura a seguir está a 27 pés do edifício. Determine o comprimento da viga mais curta para alcançar o edifício, apoiado no solo do lado esquerdo do muro.*



Resolução 8.
Temos $\dfrac{8}{x} = \dfrac{h}{x+27} \Rightarrow h = 8 + \dfrac{216}{x}$,

$$L(x) = \sqrt{h^2 + (x+27)^2} = \sqrt{\left(8 + \frac{216}{x}\right)^2 + (x+27)^2},$$

quando $x \geq 0$. *Note que* $L(x)$ *é minimizado quando*

$$f(x) = \left(8 + \frac{216}{x}\right)^2 + (x+27)^2$$

é minimizado. Resolvendo $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2\left(8 + \dfrac{216}{x}\right)\left(-\dfrac{216}{x^2}\right) + 2(x+27) = 0$, *obtemos*

$$(x+27)\left(1 - \frac{1728}{x^3}\right) = 0 \Rightarrow x = -27 \text{ ou } x = 12,$$

em $x = -27$ *não é aceitável, pois a distância nunca é negativa, para* $x = 12$ *temos o comprimento máximo de* $L(x)$. *Logo,*

$$L(12) = \sqrt{2197} \approx 46.87 \text{ pés.}$$

Aplicação 9. *Em cinemática, a posição de uma partícula de massa m pode ser determinada a cada instante de tempo t, a equação que produz as informações da posição em função do tempo é chamada de equação horária da posição (ALMEIDA et al., 2011).*

Uma partícula que se desloca de uma certa posição S_0 *no instante* t_0 *até uma posição* S *em* t, *define a grandeza chamada de velocidade escalar média dada por*

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0},$$

onde ΔS e Δt são as variações da posição e do tempo, respectivamente.

Por outro lado, a velocidade escalar no instante $t = t_0$ é dada por

$$v(t_0) = S'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0}.$$

3.3 Aplicações à Administração e à Economia

Aplicação 10. *Considere C(x), a função custo, for o custo da produção de x unidades de certo produto, então o custo marginal é a taxa de variação de C em relação a x. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, C' , da função custo.*

Vamos considerar agora o marketing. Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, p é chamada função demanda (ou função preço) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a receita total será

$$R(x) = xp(x)$$

e R é chamada função receita. A derivada R' da função receita é chamada função receita marginal e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas. Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e P é chamada função lucro. A função lucro marginal é P' , a derivada da função lucro.

Aplicação 11. *Uma loja tem vendido 200 aparelhos reprodutores de Blu-ray por semana a \$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada \$ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?*

Solução 11. *Se x for o número de reprodutores de Blu-ray vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em \$10. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será*

$$\frac{10}{20} \times 1 = \frac{1}{2}$$

e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 350 - \frac{1}{2}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

A função receita é

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(450 - \frac{1}{2}x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que abre para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 450 - 225 = 225$$

e o desconto é

$$350 - 225 = 125$$

Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de \$125.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, G.R.; AMARAL, E.B.; FERREIRA, M.T. *A derivada e suas aplicações na ciência. XX Encontro Latino Americano de Iniciação Científica, XVI Encontro Latino Americano de Pós-Graduação e VI Encontro de Iniciação à Docência ? Universidade do Vale do Paraíba, 2016.*

[2] ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo: Volume 1. Porto Alegre: Bookman, 2019.*

[3] APOSTOL, T. *Calculus: Volume 1. 2. ed. Wiley, 2017.*

[4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz *Um curso de cálculo Volume 1. 5. ed. LTC, 2008.*

[5] KHAN ACADEMY. *Aplicações das derivadas ? cálculo diferencial.* Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/differential-calculus/dc-context-app. Acesso em: 15 jan. 2025.

[6] LIMA, Abizai Campos. *As derivadas e a sua aplicação na análise marginal de custos na economia.* Revista Científica Semana Acadêmica, Fortaleza, n. 84, 2016. Disponível em: https://semanaacademica.org.br/artigo/derivadas-esua-aplicacao-na-analise-marginal-de-custos-na-economia. Acesso em: 28 maio 2025.

[7] LIMA, E. L. *Análise real: volume 1. Funções de uma variável.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[8] MATOS, M. P. *Séries e equações diferenciais.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.

[9] Robert A. Adams *Cálculo Diferencial e Integral*

[10] SPIVAK, M. *Calculus. 4. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.*

[11] STEWART, J. *Cálculo: Volume 1. 8. ed. Cengage Learning, 2013.*

[12] STEWART, James. *Cálculo, volume I. 5ª edição. São Paulo - SP: Pioneira Thomson Learning, 2006.*

[13] SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Pearson, 2010.