Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uma abordagem de Análise Combinatória para o Ensino Médio a partir de Situações-Problema

Jailson Ramos da Silva

Teresina

2019

Jaillson Ramos da Silva

Uma abordagem de Análise Combinatória para o Ensino Médio a partir de Situações-Problema

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí - Campus Poeta Torquato Neto, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aréa de Concentração: Matemática no Ensino Básico

Orientador : Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Junior

Teresina

2019

S586a Silva, Jailson Ramos da.
Uma abordagem de Análise Combinatória para o Ensino Médio a partir de Situações-Problema / Jailson Ramos da Silva. - 2019.
60f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2019.
"Orientador(a): Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Junior."

1. Análise Combinatória. 2. Situações-Problema. 3. Ensino Aprendizagem. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

JAILSON RAMOS DA SILVA

UMA ABORDAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Pedro Antônio Soares Júnior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Ítalo Dowell Lira Melo

Prof. Dr. Italo Dowell Lira Melo – Examinador
Universidade Federal do Piauí – UFPI

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Setembro/2019

Jailson Ramos da Silva graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI), sou professor em turmas de pré-vestibulares na disciplinas de Matemática Teresina/PI. É professor efetivo na rede pública no PI e MA - , durante o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI foi bolsista pela CAPES.

Dedicatória

Dedico esta dissertação a minha esposa, meus pais, irmãos, amigos e os professores, que pesquisam sobre o Analise Cominatória.

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar.

A minha esposa, Cristina, pelo amor e compreensão, por me incentivar e apoiar em todos os momentos, as minhas filhas Isabella e Isadora e a meu filho Expedito Sousa Silva Neto que eu espero que sejam futuros leitores dessa dissertação.

As minhas irmãs Janaina e Janilsa e meu irmão Josivan pelos incentivos, amizade, companherismo, apoio, voltados pelos princípios de união e respeito.

Aos meus pais, Expedito Sousa Silva e Maria Dalva Ramos da Silva pelo amor, carinho, apoio, por sua atenção e preocupação que proporcionaram conquistas em meus estudos.

Aos professores do PROFMAT/UESPI Dr. Pedro Júnior, Dr. Afonso Norberto, Dr. Arnaldo Brito, Me. Hélder Borges e Dra. Valdirene, Dr. Pitágoras pelas aulas esclarecedoras, em especial, ao Professor Dr. Pedro Júnior, meu orientador, pelas disciplinas que ministrou no PROFMAT que me fizeram ter um olhar matemático mais rigoroso voltado para a conceituação, manipulação e aplicação, pelo companheirismo, pela paciência de muitas vezes devido a nossa correria do dia a dia, sempre esteve solicito para os encontros que me ajudaram no desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

A todos os diretores das instituições que trabalhamos, em especial diretor do curso Tamandaré Gervázio Júnior e a diretora da escola do maranhão Maria do Socorro C.

Bandeira, pela paciência e compreensão que, muitas vezes, deixamos a desejar, pela exigência deste trabalho.

A todos os meus amigos, turma do PROFMAT/UESPI pelas contribuições, experiências e aprendizado nesses dois anos.

Aos meus amigos Professor Alencar (IFPI- Campus Corrente) e Professor Edson (IFMA-MA) pela sincera amizade.

Gostaria de agradecer a todos os amigos colaboradores desse projeto, os que tiveram contato direto com este trabalho. Entre eles cito os amigos Wladmilson Torres, Antunino e Edson, não só com apoio moral, mas também, muitas vezes, com seu intelecto. Em especial, a Edson pela ajuda no Latex, pois tenho certeza de que sem vocês, não conseguiria realizar esta etapa do trabalho.

Não poderia esquecer, dois amigos que são como irmãos: Genivaldo e Rogério, sempre me deram muito incentivo.

Por fim, a CAPES pelo apoio financeiro e Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem de Análise Combinatória com o foco na resolução de situações-problema. Trabalhamos problemas motivadores e interessantes com intuito de possibilitar ao aluno desenvolver estratégias através de situações-problema e evitar o processo de memorização e a simples aplicação de fórmulas. Realizamos oficinas com os alunos da 2°série do Ensino Médio de uma escola da rede Estadual do Maranhão, localizada na cidade de Graça Aranha-MA, como uma forma de avaliar nossa abordagem. As oficinas foram realizadas em duas etapas, primeiro, um pré-teste realizado com os conhecimentos prévios dos alunos, e posteriormente, a intervenção com seis encontros, cada um com duração de 3 horas, realizamos um pós-teste. Posteriormente as oficinas, realizamos a análise dos resultados, dos alunos investigados nessa pesquisa.

.

Palavras-chave:Análise Combinatória. Situações-problema. Ensino Aprendizagem

Abstract

In this work, we present a Combinatorial Analysis approach focusing on problem solving. We work with motivating and interesting problems in order to enable the student to develop strategies through problem situations and avoid the memorization process and the simple application of formulas. We conducted workshops with students from the High School, Maranhão State School, located in the city of Graça Aranha-MA, as a way to evaluate our approach. The workshops were held in two stages, first, a pre-test carried out with the students' prior knowledge, and later, the intervention with six meetings, each lasting 3 hours, we conducted a post-test. After the workshops, we performed the analysis of the results of the students investigated in this research.

Keywords: Combinatorial Analysis. problem-solving. teaching and learning

Lista de Figuras

Lista de Gráficos

Sumário

1 Introdução

A abordagem de Análise Combinatória partindo de situações-problema, foi motivado pelas dificuldades apresentadas pelos alunos com essa temática, as quais vivenciamos em nossa prática docente em turmas do Ensino Médio na disciplina de Matemática.

Com base em [19], o ensino era caracterizado por trabalho apoiado na repetição, memorização e reprodução de exemplos, visando superar este modelo e na tentativa de ampliar o conhecimento matemático dentro de outra abordagem, buscou-se desenvolver um ensino voltado a compreensão e reflexão.

Segundo os próprios PCNs, há recomendações que a Matemática seja abordada de maneira que aluno desenvolva a capacidade de resolução de problemas, que não seja uma atividade paralela ou como uma aplicação da aprendizagem, mas uma orientação da aprendizagem.

Esse trabalho teve como sujeitos alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola estadual da cidade de Graça Aranha MA , em que a priori, aplicamos um pré-teste (APÊNDICE A), e posteriormente, fizemos uma intervenção, sempre procurando evitar o uso de fórmulas, e depois, aplicamos o pós-teste , para observamos de que maneira esses alunos resolveriam essas situações-problema.

Para [21] o professor é um mediador, deve ter cuidado nas escolhas dos problemas, e incutir no seu aluno algum interesse por problemas e proporcioná-lhes muitas oportunidades de praticar.

Levando em conta o objetivo de realizar uma investigação, sobre o ensino de Análise Combinatória, partindo de situações-problema, foram realizadas oficinas no contra-turno, em que os alunos tentaram solucionar situações-problema, com seus conhecimentos prévios. O presente trabalho está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 1, temos a introdução. No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos de Análise Combinatória. No Capítulo 3, descrevemos a metodologia utilizada para a realização das oficinas. No Capítulo 4, Realizamos uma análise de dados decorrentes das oficinas. Finalmente, no Capitulo 5 apresentamos nossas Considerações Finais.

2 Elementos da Análise Combinatória

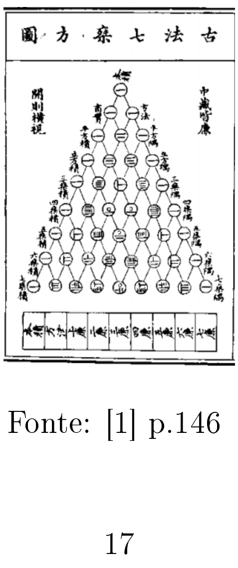
Nesse capítulo, abordamos um pouco da história e alguns conceitos de Análise Combinatória, tais como: principio aditivo, principio multiplicativo, permutações, arranjos e combinações onde a teoria apresentada para as definições são encontradas em [3], [9], [10], [12], [13], [14],[15], [16], [17], [24].

2.1 Um pouco de história

Para [13], o desenvolvimento do binômio$(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados a Analise Combinatória, pois ele está diretamente relacionado ao triângulo de Pascal.

Conforme em [13] o triângulo de Pascal já era conhecido por Chu Shin-Chien, na China, (*em torno de* 1300) e antes disso pelos hindus e árabes, isso mostra que povos diferentes com simbolos diferentes podem descobrir um mesmo resultado matemático. O hindu Bhãskara $(1114-1185)$, conhecido geralmente pela "fórmula de Bhãskara"para solução de equações de 2° grau sabia, calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos.

Figura 1: Triângulo de Chu Shin-Chien equivalente ao triângulo de Pascal

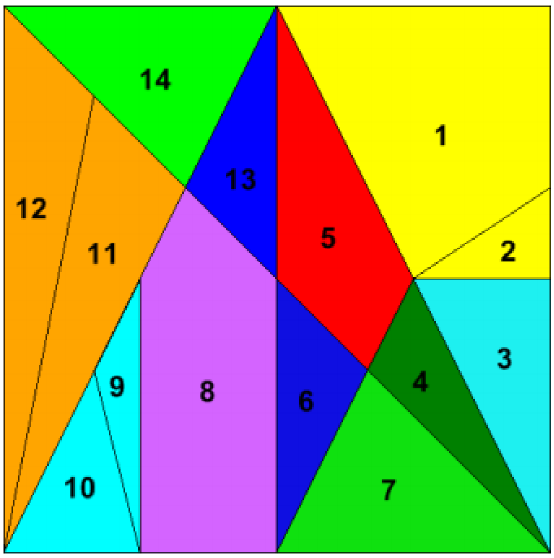


Fonte: [1] p.146

De acordo com [25], o jornal americano The New York Times publicou um artigo intitulado In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment, sobre os resultados da pesquisa do historiador de matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, em que ele afirma que Stomachion, aparentemente, um jogo, semelhante ao Tangran, constituído de 14 peças que devem ser encaixadas para formar um quadrado, não era um mero passatempo de um jogo, e sim um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória.

O quociente entre a área de cada peça e a área do quadrado total é um número racional. Para provarmos que a área de cada peça é comensurável com a área do quadrado total, é necessário recorrer ao Teorema de Pick para determinarmos, em primeiro lugar a área de cada peça.

Figura 2: Stomachion



Fonte: http://4umi.com/play/stomachion/animation.php

.

2.2 Principio Aditivo

Definição 2.1. *Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com respectivamente, p e q elementos então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.*

Exemplo 2.1. *Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Carlos tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?(Retirado de [24], p.38)*

Solução: Se ele tem dinheiro para assistir apenas a 1 evento, então ou ele assiste ao Filme 1 ou ao Filme 2 ou ao Filme 3 ou á Peça 1 ou á Peça 2 . Portanto, ao todo, são $2 + 3 = 5$ programas diferentes .

2.3 Principio multiplicativo

Definição 2.2. *Se um evento A pode ocorrer de α maneiras diferentes e, se para cada uma dessas α maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de β maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido de B é $\alpha.\beta$.*

Exemplo 2.2. *Um amigo mostrou-me* 5 *livros diferente de Matemática e* 7 *livros diferentes de Física e permitiu-me escolher um de cada. De quantas maneiras essa escolha pode ser feita?*

Solução: *Para cada escolha de um livro de Matemática, temos* 7 *possibilidades de Física, então* $5 \cdot 7 = 35$ *(Retirado de[24], p.40).*

Exemplo 2.3. *O código Morse usa duas letras, ponto e traço e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?*

Solução: *Há* 2 *palavras de uma letra. Há* $2 \cdot 2 = 4$ *palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda;*

analogamente, há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ *palavras de três letras e* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ *palavras de* 4 *letras. O número total de palavras é 2 + 4 + 8 + 16 = 30 (Retirado de[12], EXEMPLO 6.4, p.109).*

2.4 Permutação Simples

Dados n *objetos distintos* a_1, a_2,...., a_n, *de quantos modos é possível ordená-los?*

Por exemplo, para os números 1, 2, 3 há 6 ordenações: $123, 132, 213, 231, 312, 321$. *No caso geral temos* n *modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar,*$(n-1)$ *modos de escolher o que ocupará o segundo lugar,* $(n-2)$ *modos de escolher o que ocupará o terceiro lugar, isso ocorrerá sucessiva mente, até ter 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto existem* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ....1$ *maneiras de ordenar* n *objetos.*

Cada ordenação dos n *objetos é chamada uma permutação simples de* n *objetos e o número de permutações simples de* n *objetos distintos é representado por* P_n. *Assim,* $P_n = n!$

Exemplo 2.4. *Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?*

Solução : *Cada anagrama de PRÁTICO nada mais é que uma ordenação das letras P,R,A,T,I,C,O. Assim o número de anagramas de PRÁTICO, é* $P_7 = 7! =$ *5040. (Retirado de[13], p.24).*

Exemplo 2.5. *De quantos modos podemos arrumar em fila* 5 *livros diferentes de Matemática,* 3 *livros diferentes de Estatística e* 2 *livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?*

Solução : *Podemos escolher a ordem das matérias de* $3!$ *modos. Feito isso, há* $5!$ *modos para os de Matemática nos lugares que foram destinados,* $3!$ *modos para os de Estatísticas e* $2!$ *modos para os de Física .*

Portanto, temos $3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 8640$. *(Retirado de [12], p.114).*

Exemplo 2.6. *De quantos modos* 5 *rapazes e* 5 *moças podem se sentar em* 5 *bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?*

Solução : *O primeiro rapaz pode escolher seu lugar de* 10 *modos, o segundo de 8 modos, o terceiro de* 6 *modos, o quarto de* 4 *modos, e o quinto de* 2 *modos. Colocados os rapazes, temos que colocar as* 5 *moças nos* 5 *lugares que sobraram, o que pode ser feito de* $5!$ *modos . A resposta é* $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5! = 460800$.*(Retirado de [13], p.25).*

2.5 Permutação com Repetição

2.5.1 Conceito

Imaginamos o problema de formar os anagramas da palavra AZAR. Trocando a posição das letras, de maneiras que elas apareçam em ordens diferentes, obtemos:

AZAR, AZRA, AAZR, AARZ, ARZA, ARAZ, ZAAR, ZARA, ZRAA, RAZA, RAAZ, RZAA

A palavra AZAR tem 4 letras, mas duas delas são iguais ; por essa razão, o número de anagramas resultou 12, ao invés dos 24 que seriam obtidos permutando-se 4 elementos diferentes. As 12 permutações que não apareceram corresponderiam aquelas encontradas pela troca da posição das duas letras iguais, o que é inútil.

O tipo de permutação que vimos ao fazer os anagramas deste exemplo é o que se chama Permutação com Repetição: permutação de um certo número elementos entre os quais há alguns repetidos.

Vamos, agora, enfrentar o caso geral. Seja um grupo de n *elementos, contendo*

n_1 *elementos são iguais a* A_1

n_2 *elementos são iguais a* A_2

n_3 elementos são iguais a A_3

....

n_k elementos são iguais a A_K

Portanto, $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$

O número de permutações desses elementos é indicado por

$$P_n^{n_1,n_2,....,n_k} = \frac{n!}{n_1!.n_2....n_k!}$$

Demonstração : *Dispomos de n vagas para distribuir os elementos $A_1, A_2, A_3, ..., A_K$ em todas as posições possíveis.*

Para A_1, devemos escolher n_1 das n vagas : temos $C_n^{n_1}$ possibilidades .

Restam então $n - n_1$ vagas para os n_2 elementos iguais a A_2 : $C_{n-n_1}^{n_2}$ possibilidades.

Restam, então, n - n_1 - n_2 vagas para os n_3 elementos A_3 : $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ possibilidades.

E assim sucessivamente, até que restam n_k vagas para os n_k elementos de A_K:

$C_{n_k}^{n_k} = 1$ possibilidade.

Logo pelo Principio Fundamental da Contagem, o total de modos de se fazer a distribuição é:

$P_n^{n_1,n_2,....,n_k} = C_n^{n_1} .C_{n-n_1}^{n_2}.\ C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\ .....1 =$

$= \frac{n!}{(n_1)!\cdot(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n_2)!(n-n_1-n_2)!} . \frac{(n-n_1-n_2)!}{(n_3)!.(n-n_1-n_2-n_3)!}$

$= P_n^{n_1,n_2,....,n_k}$

(Retirado [15], p.290-291).

Exemplo 2.7. *Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B, dessa mesma reta que está* *a* 5 *metros de distância de A com exatamente* 9 *pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?*

Solução: *Como o gafanhoto vai dar nove pulos de um metro e quer alcançar um ponto que está a* 5 *metros de distância, certamente, ele vai dar sete pulos para frente(F) e dois pulos para trás(T).*

Portanto, cada forma diferente de ir de A até B pode ser representada por uma permutação de sete letras F e duas letras T: FFFFFFFTT, não necessariamente, sempre nessa ordem , consequentemente, teremos uma

$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{7!.2!} = 36 possibilidades.$$

(Retirado de [17], p.83).

Exemplo 2.8. *Quantos são os anagramas da palavra "MATEMÁTICA"?*

Solução: *Como temos 3 letras A, 2 letras T, 2 letras M, 1 letra E, 1 letra C, 1 letra I, a resposta é*

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

(Retirado de [13], p.44)

2.6 Combinação Simples

Por exemplo, suponha que você quer escolher três objetos de 8 *possiveis distintos. Enumeremos os objetos:* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *e* 8. *Organzaremos as escolhas: 1º escolha temos* 8 *possibilidades, na 2º escolha temos* 7 *possibilidades e na 3º escolha temos 6 possibilidades. Pelo principio da multiplicação, o número de sequências de três objetos distintos é* $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. *Contudo, nestas 336 sequências estão contadas idênticas,* *uma vez da forma que organizamos nossas escolhas a ordem dos elementos escolhidos importa. Como o nosso propósito é só a escolha dos objetos, vamos inicialmente contar quantas vezes cada seleção de objetos (sem interessar as sequências que são escolhidos) é contada nas 336 sequências. Como estamos escolhendo 3 objetos, podemo permutá-los de* $3! = 6 maneiras$. *Portanto, o número de maneiras de escolher* 3 *objetos distintos dentre* 8 *objetos distintos é igual a* $\frac{336}{6} = 56$

O nome que se dá para cada uma destas esclhas de objetos distintos é combinação, Simbolicamente C_n^k.

Vamos agora generalizar. Digamos que você deseja calcular de quantas maneiras pode-se escolher k *elementos dentre* n *distintos fornecidos,* $0 \leq k \leq n$.

Note que para a 1º escolha temos n *possibilidades; para a 2º escolha* $(n-1)$ *possibilidades; para a 3º escolha temos* $(n-2)$ *possibilidades, assim sucessivamente, até a* kº *escolha, em que temos n - k + 1 possibilidades. Desta maneira, o número de sequências que podemos formar* k *elementos dos* n *é igual a* $n.(n-1).(n-2)....(n-k+1)$. *Porém não estamos interessados nas sequências dos elementos, uma vez que a ordem destes não interessa, estamos querendo apenas determinar quais vão ser escolhidos. Dests modo, cada um das* $n.(n-1).(n-2)....(n-k+1)$ *é contada* $k!$ *vezes, pois podemos permutar* k *elementos distintos de* $k!$ *maneiras. Assim* $C_n^k = \frac{n.(n-1).(n-2)....(n-k+1)}{k!}$

Multiplicando o numerador e denominador desta última expressão por $(n-k)!$ *:*

$C_n^k = \frac{n.(n-1).(n-2)....(n-k+1).(n-k)!}{k!.(n-k)!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$

Exemplo 2.9. *Quantas saladas contendo exatamente* 4 *frutas podemos formar se dispomos de* 10 *frutas diferentes ?*

Solução: *Para formar uma salada basta escolher* 4 *das* 10 *frutas, o que pode ser feito de*

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad modos$$

(Retirado de [13], p.30)

Exemplo 2.10. *Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se* 14 *pontos de um plano, não havendo* 3 *pontos alinhados?*

Solução: *Como não há 3 pontos alinhados, basta escolhermos 3 pontos dentre os 14 para traçarmos. Desta forma, podemos traçar*

$$C_{14}^{3} = \frac{14!}{3!.11!} = 364 \quad \textit{triângulos}$$

(Retirado de [24], p.64)

Exemplo 2.11. *De quantos modos podemos dividir* 8 *pessoas em* 2 *grupos de* 4 *pessoas cada ?*

Solução: *O primeiro grupo pode ser escolhido de* C_8^4 *modos.*

Escolhido o 1° grupo, sobram 4 *pessoas e só há* 1 *modo de formar o segundo grupo. A resposta parece ser* C_8^4. *Entretanto, contamos cada divisão duas vezes. Por exemplo,* $\{a, b, c, d\}$, $\{e, f, g, h\}$, *é idêntica a* $\{e, f, g, h\}$, $\{a, b, c, d\}$, *e foi contada como se fosse diferente , a resposta é*

$$C_8^4 = \frac{C_8^4}{2} = 35 \quad \textit{modos}$$

(Retirado de [13], p.31)

2.7 Combinação Completa

De quantos modos é possível comprar 4 *sorvetes em uma loja que os oferece em* 7 *sabores?*

A resposta não é $C_7^4 = 35$. Note que $C_7^4 = 35$, seria o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7 sabores oferecidos, isto é ,$C_7^4 = 35$ seria o número de modos de comprar 4 sorvetes diferentes em uma loja que os oferece em 7 sabores.

A resposta desse problema é representado por CR_7^4 , o número de combinações completas de classe 4 de 7 objetos. Portanto CR_7^4 é número de modos de escolher 4 objetos entre os 7 objetos distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez. De modo geral, C_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, diferente do caso, onde o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados é: CR_n^p. Poderíamos também interpretar isso de um outro modo, voltando ao problema da compra dos sorvetes, ou seja, comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores é tomar uma solução em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_7 = 4$$

$$Podemos, \quad portanto, \quad interpretar \quad CR_n^p \quad de \quad dois \quad modos:$$

a)é o número de modos de selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados.

b)é o número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p$$

Vamos agora resolver o problema da compra dos sorvetes, isto é, vamos calcular CR_7^4

Ora, a solução desse problema é o número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + ... + x_7 = 4$$

Para formar uma representação devemos arrumar em fila 4 bolas(pois em cada solução o total de unidades nas incógnitas é 4, já que $x_1 + x_2 + ... + x_7 = 4$ *e 6 traços para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços) Mas, o número de modos de fazer isso é:*

$$P_{6+4}^{4,6} = \frac{10!}{6!.4!} = C_{10}^{4} = 210.$$

Logo, $CR_7^4 = C_{10}^4 = 210$ *No caso geral, para calcular* CR_p^n*, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de* $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ *teríamos p bolas e n-1 traços. Logo,*

$$CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!.(n-1)!} = C_{n+p-1}^{p}.$$

Portanto,

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^{p}$$

Exemplo 2.12. *De quantos modos podemos comprar* 3 *sorvetes em um bar que os oferece em* 6 *sabores distintos ?*

Solução: *A resposta não é* C_6^3*= 20(seria o número de modos de comprar 3 sorvetes diferentes). Chamando de* X_K *o número de sorvetes do k-ésimo sabor que vamos comprar, devemos determinar valores inteiros e não- negativos para* X_k*, k=1,2,3,4,5,6, tais que*

$$x_1 + x_2 + ... + x_6 = 3.$$

Isso pode ser feito de $CR_6^3 = C_8^3 = 56$ *modos.*

(Retirado de [12],EXEMPLO 6.17, p.123)

Exemplo 2.13. *Podendo escolher entre* 5 *tipos de queijo e* 4 *marcas de vinho de quantos modos é possível comprar duas formas de queijo e* 3 *garrafas de vinho?*

Solução: *O prolema se resolve em duas etapas:*

i)Escolha das formas de queijo

Como se dispõe de 5 *tipos para escolher 2(iguais ou não)o número de possibilidades é* $CR_5^2 = C_6^2 = 15.$

ii)Escolha das formas de vinho

Como se dispõe de 4 *tipos para escolher 3(iguais ou não)o número de possibilidades é* $CR_4^3 = C_6^3 = 20.$

Finalmente, o número de possibilidades de compra de queijo e vinho é

$CR_5^2.\ CR_4^3 = 15.20 = 300$

(Retirado de [15],EXERCÍCIO 19.12, p.349)

Exemplo 2.14. *Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação* $x + y + z \leq 5$*?*

Solução: *As soluções inteiras e não negativas da inequação* $x + y + z \leq 5$ *dividem-se em vários grupos: soluções onde* $x + y + z = 5$*, onde* $x + y + z = 4$*, ..., onde* $x + y + z = 0$*. A resposta é*

$= CR_3^5 + CR_3^4 + CR_3^3 + CR_3^2 + CR_3^1 + CR_3^0$

$= C_7^5 + C_6^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + C_2^0$

$= 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$

(Retirado de [13], EXEMPLO 2.22, p.48)

2.8 Permutação Caótica

Uma permutação dos números (1,2,3, ...,n) é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum está no lugar primitivo. Assim as permutações 2143 e 3142 são caóticas mas 1342 não é(1 está no lugar primitivo)

De acordo com [13], sendo D_n a quantidade de permutações caóticas para um conjunto com n elementos, usamos a expressão $n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}$ *para calcular D_n, ou seja,* $D_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}$. *Ver demonstração em ([13], p.64-65)*

Exemplo 2.15. *Quantas são as permutações de* $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ *que têm exatamente* 3 *elementos no seu lugar primitivo?*

Solução: *Inicialmente, vamos escolher os 3 elementos que vão ocupar seu lugar primitivo. Como temos 7 elementos no total, para tanto existem $C_7^3 = 35$ possibilidades. Depois disso, temos que permutar caoticamente os demais 4 elementos, fato que pode ser feito de* $D_4 = 4!\ [\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}] = 9$ *possibilidades. Assim, no total, temos* $35 \cdot 9 = 315$ *permutações.*

(Retirado de [17],EXERCÍCIO 3 p.103)

Exemplo 2.16. *(OLIMPÍADA DA BÉLGICA -1994) Uma pequena escola possui* 4 *alunos. Uma professora coletou as provas resolvidas pelos os alunos, e imediatamente, repassou para eles mesmos corrigirem. De quantas maneiras é possível fazer isto sem que um aluno receba a mesma prova que fez?*

Solução: *O que se está pedindo nessa questão é o número de permutação caóticas de 4 elementos. Assim, temos*

$D_4 = 4!\ [\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}] = 9$ *possibilidades.*

Outra solução: *Vamos considerar, que as provas nos seus lugares primitivos, seguiam essa ordem (A, B, C, D), então, o número de maneiras de realizar as correções serão:*

(B, A, D, C) (C, D, A, B) (D, C, B, A)

(B, C, D, A) (C, D, B, A) (D, C, A, B)

(B, D, A, C) (C, A, D, B) (D, A, B, C)

Podem ser corrigidas, de 9 maneiras.

3 Metodologia

Neste capítulo, apresentamos a importância do ensino da matemática através da resolução de problemas, e também, como foram realizadas as oficinas com os alunos do 2°ano do Ensino Médio do colégio da rede estadual do MA, Centro de Ensino Humberto de Campos-C.E.H.C, para que possamos colher resultados para conclusão da nossa pesquisa. Para tanto, inicialmente, será feita a caracterização da pesquisa. Depois disso, apresentaremos os sujeitos investigados. Em seguida, a descrição dos problemas e, por último, os procedimentos das análises de dados.

3.1 A importância do ensino da matemática na resolução de problemas

Coforme [19], no início do século XX, o ensino da Matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização e reprodução de exemplos e técnicas era considerado importante, inviabilizando a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos e restringindo a aprendizagem matemática a poucos. Buscando superar esse modelo de ensino e na tentativa de ampliar o conhecimento matemático dentro de outra abordagem, buscou-se desenvolver um ensino voltado à compreensão e reflexão.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1999) recomendações para que a Matemática seja abordada possibilitando ao aluno pensar matematicamente, levantar ideias, estabelecer relações e conexões entre os temas matemáticos ou fora da Matemática, bem como desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e, até mesmo, propor novos problemas. Esse documento aponta que

[...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1999, p. 41).

A resolução de problemas, segundo [26], deve ser vista como uma atividade que se inicia a partir dos conhecimentos prévios e das dificuldades dos alunos, identificadas pelo professor. Sendo assim, cabe ao professor formular problemas para a aprendizagem significativa, criando um ambiente motivador e estimulante. Vale ressaltar que tal metodologia deve ser mantida como prática constante em sala de aula. Por isso, é preciso que o professor esteja atento: um bom problema deve ser desafiador e sua resolução não deve ser conhecida a priori ou memorizada previamente pelos alunos.

Conforme [19], p.81 "O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção do conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência do seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e dar sentido ao que faz.".Além disso, conforme detalhado em [19], o aluno passa a ser protagonista na construção do seu próprio conhecimento. Ao contrário de outras práticas de sala de aula, os problemas são propostos no início das atividades e não no final, e a aprendizagem se realiza a partir de sua resolução, promovendo o desenvolvimento do conhecimento sobre determinado conceito, conteúdo matemático ou algoritmo, ou desenvolvendo alguma habilidade específica.

Historicamente a resolução de problemas, tomando como referência as escolas americanas, segundo ([7] , p.3) destacam que, durante o século XX e até atualmente, o ensino de matemática "experienciou seis fases identificáveis com diferentes ênfases: (1) Exercício e prática; (2) Aritmética significativa; (3) Matemática Moderna; (4) Volta às bases; (5) Resolução de problemas; e, atualmente, (6) Padrões e responsabilidade" Ainda segundo [7], tais fases merecem atenção porque cada uma delas corresponde a um *período em que a educação, em geral, estava caminhando através de mudanças radicais e fundamentais e cada uma introduzia práticas novas e inovadoras para a Educação Matemática. A essas razões, acrescenta-se o fato de que algumas das fases apontadas também foram vivenciadas em outros lugares do mundo, e exerceram forte influência nos rumos que o trabalho com a matemática escolar tomou a partir de então.*

A pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerá -la como uma forma de ensinar Matemática receberam atenção a partir de Polya (1944), considerado o pai da Resolução de Problemas.

Para [21], há dois objetivos que o professor podem ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão dos problemas: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver problemas por si próprio. O Professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcioná -lhes muitas oportunidades de imitar e praticar.

Segundo [21], para a resolução de um problema matemático, ele descreve as seguintes etapas a serem seguidas:

Etapa 1: Compreender o problema.

Não existe nenhum sentido em responder uma pergunta que não tenha sido compreendida. Qual é a incógnita do problema? Quais os dados do problema? Qual a condicionante do problema?

Etapa 2: Estabelecimento de um plano.

O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano pode ser extenso e complexo; realmente, o principal feito na resolução de um problema, é uma concepção da ideia de um plano, que pode surgir gradualmente, ou após tentativas infrutíferas, pode surgir de uma "ideia brilhante".

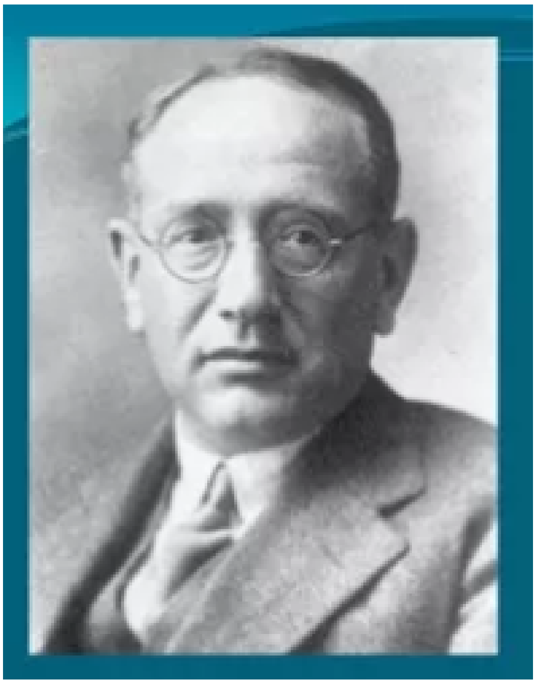
Etapa 3: Executa o plano

O plano proporciona apenas um roteiro geral; precisamos está convictos que os detalhes estão de acordo; para isso, temos que investigar um após outro, passo a passo, até que tudo fique perfeitamente claro e que não haja nenhuma dúvida que possa gerar um erro. Podemos nos convencer "intuitivamente "ou "formalmente"da correção de um passo do nosso raciocínio. Podemos nos concentrar no ponto em questão até que percebamos com tanta certeza e nitidez que não reste dúvida de que o passo é correto ou, então, podemos deduzi-los com regras formais.

Etapa 4: Revisar a solução

Realizando uma revisão completa da solução do problema, reconsiderando e re-examinando o resultado final e o caminho que levou até este, os alunos poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum está completamente esgotado.Resta sempre alguma a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e; é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. De acordo ainda com [21] a escolha do problema é muito importante, não sendo muito difícil e nem muito fácil, interessante e natural para que aluno possa conseguir compreender, estabelecer um plano, executar o plano e depois revisar a solução.

Figura 3: George Polya



Fonte: http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/polya.html

”

3.2 Caracterização da Pesquisa

De acordo com o objetivo geral e o problema de pesquisa que nortearam esse trabalho , entendemos que essa se caracteriza por uma pesquisa mista. Em conformidade com [11], p.21, a pesquisa qualitativa responde as questões muito particulares.Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ou não deveria ser quantificado, ou seja, ela trabalha com os universos dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes. Esse conjunto de fenômenos humanos é entendido aqui como parte da realidade social, pois o ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes .

Segundo([5], p.14), mesmo já constituída como um campo de conhecimento, a Educação Matemática ainda busca sua identidade própria. As investigações em Educação Matemática são recentes, realizadas no Brasil há pouco mais de cinquenta anos. Trata-se de uma área em consolidação cujo desafio ainda é "encontrar a adequada articulação e/ou diálogo entre o específico e o não específico da Educação Matemática. Conforme [20], o que parece ser consensual em relação à Educação Matemática é que sua principal função é buscar melhorias no que se refere aos diferentes aspectos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática .

3.3 Sujeitos/participantes da Pesquisa

Esse trabalho teve como sujeitos alunos de uma turma do 2° ano Ensino Médio Regular do Centro de Ensino Humberto de Campos (C.E.H.C). Dos 22 alunos matriculados, e que frequentam as aulas , apenas uma aluna não participou da pesquisa, alegando não puder,por ser realizado no contra turno, sendo nossa amostra de 21 alunos, 10 do sexo feminino e 11 do sexo masculino, com faixa etária entre 16 e 19 anos.

3.4 Campo/ambiente de pesquisa

Os dados empíricos da pesquisa foram produzidos e coletados em uma escola pública estadual da cidade de Graça Aranha-Ma, no primeiro semestre de 2019.

A escola possui cinco salas, a pouco tempo sofreu uma reforma, melhorando seus aspectos físicos, mas ainda deixa a desejar por falta que as salas não serem climatizadas, temos um farol onde funciona a biblioteca; infelizmente, a sala de computação não funciona como deveria, por falta de uma rede que suportasse todos os computadores funcionando. A escola funciona em dois turnos: matutino e noturno.

Figura 4: Centro de Ensino Humberto de Campos

Fonte:Próprio autor (2019)

3.5 Instrumentos de produção dos dados

Para a produção dos dados e com o propósito de se fazer um diagnóstico dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos acerca dos conceitos de Análise Combinatória , a priori, aplicamos um questionário, ou seja, um pré-teste (APÊNDICE A),para observamos de que maneira esses alunos resolveriam essas situações-problemas, sem o conhecimento das técnicas de contagem, usando simplesmente o seu raciocínio intuitivo. Essa atividade diagnóstica é composta de 10 questões subjetivas, diversificadas,tendo como base [3], [9], [10], [12], [13], [15], [17], [24] .

Após esse primeiro contato com pré-teste (APÊNDICE A), fizemos uma capacitação dos alunos, com exposição dos conteúdos para resolver situações problemas da

Análise Combinatória.

Para verificar o resultado da capacitação, aplicamos um pós-teste(APÊNDICE B), que consta de algumas modificações no questionário pré-teste, sendo essas mundanças nos problemas : P5, P7, P8, P10.

3.6 Procedimento de análise de dados

Durante a aplicação da pesquisa, os dados foram analisados e organizados levando-se em conta ao recurso metodológico que adotamos e dividida em etapas como veremos, a seguir:

1° etapa: Aplicação da atividade diagnóstica (pré-teste);

2° etapa: Observação dos sujeitos na realização do pré- teste

3° etapa: Após o pré-teste ,exposição das técnicas de contagem de Análise Combinatória

4° etapa: Aplicação de uma nova atividade diagnóstica (pós-teste).

Feito isso, de posse dos dados coletados para este estudo, a fim de que o processo de análise fosse desenvolvido de forma mais efetiva, trabalhamos com o uso de categorias (ou eixos de análise), seguindo as orientações de([5], p. 134):

> *A categorização significa um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham que elementos ou características comuns.Nesse processo, existem alguns princípios devem ser observados pelos pesquisador. O primeiro deles é que o conjunto das categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias.[...]*

Em concordância com essas orientações, elencamos duas categorias, as quais serão discutidas no próximo capítulo, são elas:

1) Os conhecimentos prévios dos alunos investigados acerca dos conhecimentos matemáticos da Análise Combinatória;

2) Os conhecimentos posteriores dos alunos investigados acerca dos conhecimentos matemáticos da Análise Combinatória;

4 Resultados

Nesta seção, discutiremos as duas categorias apresentadas na seção anterior.

4.1 Análise e discurssão dos dados

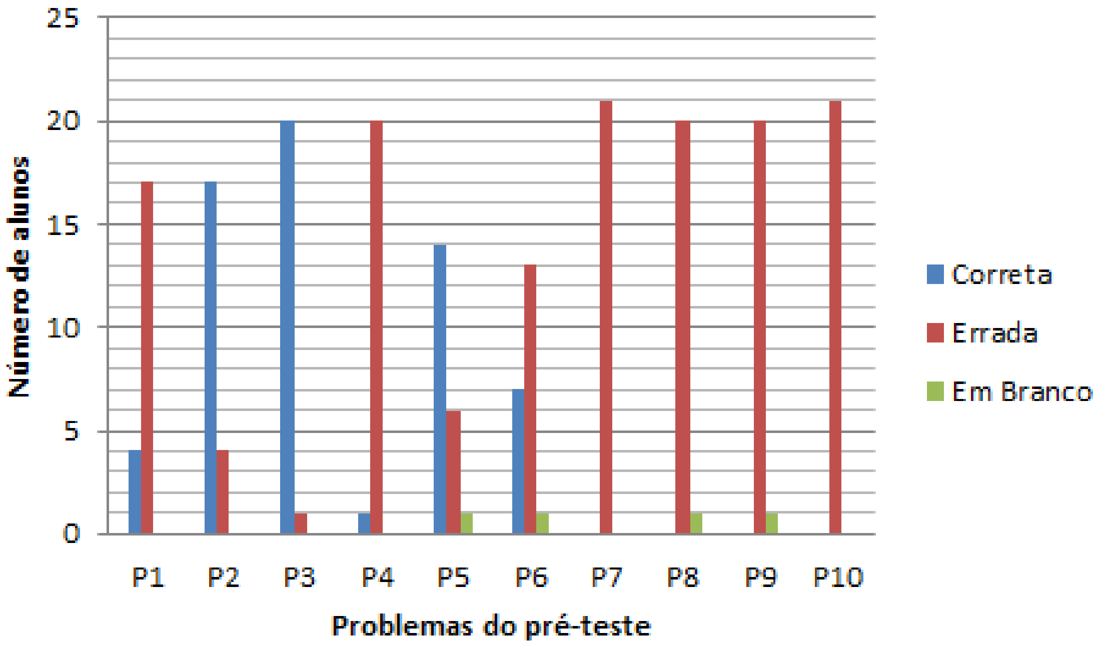
Analisando os dados produzidos para esta pesquisa através dos instrumentos: dois questionários, sendo um pré-teste e um pós-teste, ambos com 10 questões de situações problemas da Análise Combinatória, sendo aplicada em 21 alunos, onde todos relataram não ter tido nenhum conhecimento prévio acerca das técnicas de contagem. Para tanto, a descrição e explicação desses dados tiveram como fundamento as contribuições de vários autores do campo da educação/educação matemática, já apresentados no referencial teórico.

4.2 Análise e discurssão do pré-teste

Nesta categoria, a pesquisa contou com a aplicação de um questionário/pré-teste com 10 questões sobre situações problemas da Análise Combinatória (APÊNDICE A). A aplicação desse questionário ocorreu no dia 29/05/2019, com a participação dos 21 sujeitos/alunos presentes. Vale destacarmos que foram empregados os recursos: o pré- teste, grafite e caneta. Na verdade, o referido pré-teste teve a finalidade de avaliarmos como os sujeitos investigados resolveriam as situações problemas da Análise Combinatória, sem o conhecimento prévio das técnicas de contagem.

Assim, passamos a apresentar as impressões e análises dos resultados, conforme Gráfico 1, na próxima página, por aluno, em que registramos: C como solução correta, E como questão errada, e B como questão em branco.

Gráfico 1 *: Resultados dos problemas do pré-teste*



Fonte:Próprio autor (2019)

É pertinente enfatizarmos que, como já havíamos verificado, nenhum dos 21 alunos investigados tiveram qualquer contato acerca das técnicas de contagem; com isso baseando-se em ([19],2011,p.81), as situações-problema motivadoras e desafiadoras, com intuito de que sua resolução não seja previamente conhecida através de memorização de fórmulas, e que os alunos criem seus próprios métodos na resolução das situações problemas.

Retomando às nossas análises do pré-teste (Gráfico 1) acerca do desempenho dos alunos por questão, separadamente, destacamos que:

Problema 1: *Uma situação problema que trata simultaneamente do uso do principio aditivo e multiplicativo, ou seja, a solução seria o uso do principio multiplicativo indo de A até C, passando por B, ou seja, 5 maneiras de A até B, e 3 maneiras de B até C, 3.5 =15, e a outra maneira indo de A até C, sem passar por B, sendo 2 maneiras, aplicando o principio aditivo, 15 +2 =17. Percebemos um certo grau de* *dificuldades pelos alunos, ja que, dos 21 investigados, 4 apresentaram solução correta, que representa 19,05 % , e 17 apresentaram solução incorreta, que representa 80,95%, e nenhum aluno deixou o problema em branco.*

Problema 2: *Uma situação problema que, na sua solução, trata do uso do principio aditivo, pois ou ele compraria uma caneta ou compraria um lápis, como tem 5 maneiras distintas de comprar uma caneta e 7 maneiras distintas de comprar um lápis, então 5 +7 = 12 maneiras. Percebemos uma maior facilidade na compreensão dos alunos, já que, dos 21 alunos investigados, 17 apresentaram solução correta, que representa 80,95%, e 4 apresentaram solução incorreta, que representa 19,05%, e nenhum aluno deixou em branco.*

Problema 3: *Uma situação problema que, na sua solução, trata do uso do principio multiplicativo, pois como para entrar no salão de festas temos 5 possibilidades, usado uma dessas possibilidades na entrada, vão restar 4 possibilidades para saída, já que, a porta usada na entrada, não pode ser a mesma da saída, então 5.4=20. Percebemos, um bom entendimento dos alunos, pelo principio multiplicativo, já que dos 21 investigados, 20 apresentaram solução correta, que representa 95,24%, e 1 apresentou solução incorreta, que representa 4,76%, e nenhum em branco.*

Problema 4: *Uma situação problema que, na solução, trata do uso simultâneo do principio aditivo e multiplicativo, pois, para realizar a refeição, obrigatoriamente, temos que ter salada e prato principal, como temos 3 tipos de saladas, e 4 tipos de prato principal, então uma refeição com salada e prato principal pode ser feita de 3.4 = 12 maneiras, mas, como opcionalmente, pode ser acrescido na refeição sopa, então uma refeição com prato principal, salada e sopa, pode ser feita de 4.3.3 =36 maneiras, ou seja, como abrimos em dois casos, o número de maneiras de realizar uma refeição é 12 + 36 = 48. Percebemos que houve uma grande dificuldade dos alunos nesse problema,* *já que dos 21 investigados, 1 aluno apresentou solução correta, o que representa 4,76%, 20 apresentaram solução incorreta, o que representa 95,24%, e nenhum em branco.*

Problema 5: *Uma situação problema que, na solução, aplica-se o principio multiplicativo, como temos 5 livros de matemática e 7 de física , onde escolheremos um de cada, então 5.7=35 maneiras. Percebemos que em problemas que se tratam, somente com o uso de um dos princípios, ou aditivo ou multiplicativo, há uma melhor interpretação por partes dos alunos, já que dos 21 investigados, 14 alunos apresentaram solução correta, o que representa 66,67%, 6 alunos apresentaram solução incorreta que representa 28,57% e 1 aluno em branco, o que representa 4,76%.*

Problema 6: *Uma situação problema de combinação simples, mas que podemos resolver usando o seguinte raciocínio , pois se em um grupo de 10 pessoas, vão cumprimentar-se cada um entre si, uma única vez, então escolhido primeiro entre os 10, esse realiza 9 cumprimentos, o segundo escolhido também realizará 9 cumprimentos, ou seja, cada uma das 10 pessoas do grupo realizará 9 cumprimentos, mas, como o cumprimento é único, para não cometemos o erro de contar o mesmo cumprimento duas vezes, então o número de cumprimentos é*

$$\frac{9.10}{2} = 45$$

Outra solução: *Poderíamos pensar que, primeiro aluno realiza 9 cumprimentos, como o primeiro aluno, já cumprimentos o segundo, não cumprimentará o primeiro, ou seja, realizará apenas 8, e assim, sucessivamente, então a solução seria 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 +1 = 45.*

Percebemos que, apesar de ser um problema de combinação simples, que muitos procuram solucionar simplesmente com o uso de fórmulas , de maneira satisfatória, alguns alunos sem mesmo conhecer as técnicas de contagem, tiveram uma o boa compreensão do problema, já que dos 21 investigados, 7 alunos apresentaram solução correta, o *que corresponde 33,33%, 13 alunos apresentaram solução incorreta, o que corresponde 61,91%, e 1 aluno em branco o que corresponde 4,76% .*

Problema 7: *Uma situação problema em que para determinarmos o número de funções de A em B, cada elemento de A tem que se associar a um único elemento de B, então como o número de elementos de A é 2, o número de elementos de B é 4, para cada elemento de A, temos 4 possibilidades em B, portanto o número de funções de A em B é dado por 4.4 = 16. Percebemos que a maior dificuldade nesse problema foram os alunos não conseguirem uma compreensão para associar uma relação de A em B que seja uma função, já que dos 21 investigados , todos os alunos apresentaram solução errada , o que corresponde 100%, e nenhum acertou, e nenhum em branco.*

Problema 8: *Uma situação-problema de Combinação Simples, tendo que 3 pontos nunca estarão alinhados, e, para determinação de uma reta, temos que ter dois pontos distintos, pensando que ponto A e B formam uma reta, A e C, outra e ......A e J outra, então com o ponto A, com os demais pontos, podemos ter 9 retas, só temos que ter atenção que a reta AB, é a mesma BA, então pensando que cada dois pontos formam uma reta, então o número de retas é :*

$$\frac{9.10}{2} = 45$$

.

Percebemos que esse problema teve um grau de dificuldade muito grande para os alunos, já que dos 21 investigados, 20 alunos apresentaram solução errada, que corresponde 95,24% , e 1 aluno deixou em branco, o que corresponde a 4,76% , e nenhum aluno acertou alguma questão.

Problema 9: *Uma situação-problema muito interessante, que envolve 4 alunos que irão realizar uma prova; posteriormente, cada aluno irá realizar a correção de uma prova, mas existe uma condição que cada aluno não poderá corrigir sua prova.*

Façamos o seguinte, digamos que as provas foram feitas nessa ordem:(A,B,C,D). Para determinarmos o número de maneiras que cada um corrija uma prova, sem que seja a sua, nenhum deles poderão ocupar aquela posição de origem.

(B,A,D,C) (B,D,A,C) (B,C,D,A)

(C,A,D,B) (C,D,A,B) (C,D,B,A)

(D,A,B,C) (D,C,A,B) (D,C,B,A)

Podemos concluir que o número de maneiras que essas correções podem ser feitas é 9.

Problema 10: *O nosso propósito era mostrar que, apesar de ser uma situação-problema de combinação completa, podemos resolver sem o uso da técnica, logicamente, situações com grupos pequenos, mas percebemos a dificuldade dos alunos, já que dos 21 investigados, 20 apresentaram solução errada que corresponde a 95,24%, e 1 aluno deixou a questão em branco, o que corresponde a 4,76%, e nenhum acertou alguma questão.*

Uma situação-problema de combinação completa, em que temos 3 tipos de pastéis e pretendermos comprar 4.Podemos pensar que:

"q"representa a quantidade de pastéis de queijo que irei comprar;

"p"representa a quantidade de pastéis de presunto que irei comprar;

"f"representa a quantidade de pastéis de frango que irei comprar.

Como iremos comprar 4 pastéis, podemos escrever dessa forma:

$q + p + f = 4$*, onde a solução será representada (q,p,f) sem o uso da técnica, de forma a encontrarmos a tripla ordenada satisfazendo a equação:*

(0,0,4) (0,4,0) (4,0,0)

(1,0,3) (1,3,0) (0,1,3)

(0,3,1) (3,0,1) (3,1,0)

(1,1,2) (1,2,1) (2,1,1)

(2,0,2) (2,2,0) (0,2,2)

Podemos concluir que o número de maneiras de comprar 4 pastéis, com os três tipos citados é de 15 maneiras .

O nosso propósito de uma situação-problema com esse grau de dificuldade, mas com grupo com pequenas quantidades, que o aluno usando seu raciocínio, fosse encontrando as soluções satisfatórias, evitando o uso de fórmula, mas percebemos a dificuldade dos alunos, já que dos 21 alunos investigados, 21 alunos apresentaram solução errada, o que corresponde 100%, nenhum aluno acertou ou deixou alguma questão em branco.

Para uma análise ponderada das resoluções das situações-problema apresentadas pelos alunos no Pré-teste (APÊNDICE A), em linhas gerais, constatamos que a matemática, mesmo no ensino médio, ainda se apresenta distante da realidade dos nossos alunos, o que dificulta a compreensão dos mesmos.

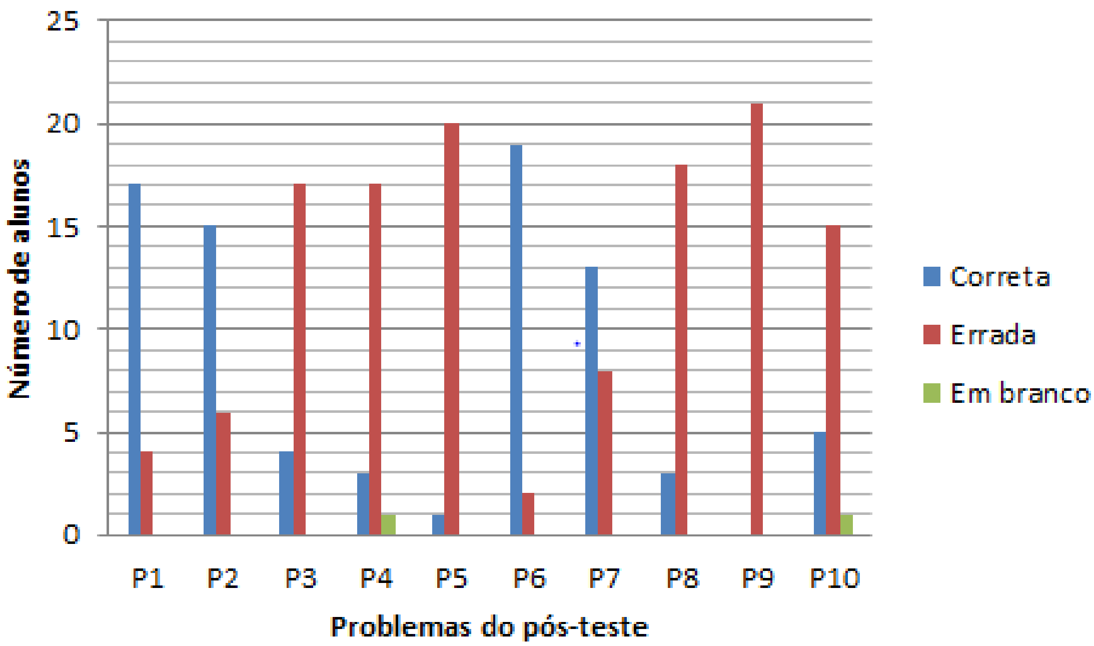
É nesse contexto que reforçamos a necessidade de se trabalhar com a proposta de situações-problema, para provocarem nos alunos a desenvolverem sua imaginação e seu raciocínio lógico, a fim de que os alunos se apropriem dos conceitos matemáticos a partir dos conhecimentos prévios.

4.3 Análise e Discurssão do pós-teste

O objetivo desse pós-teste foi o de avaliar os conhecimentos adquiridos durante a exposição dialogada das técnicas de contagem, sendo realizado os encontros no contraturno num período de três semanas, sendo dois encontros por semana, cada encontro com duração de três horas. Esses encontros foram realizados entre os dias 10/06/2019 á 26/06/2019.

Feitos os comentários, apresentamos no Gráfico 2 o resultado quantitativo dessa *atividade, embora que, por conta da natureza desta pesquisa, priorizamos os aspectos qualitativos. Para isso, novamente dividimos as soluções em: C - solução correta; E - solução errada; e B - questão em branco.*

Gráfico 2 *: Resultados dos problemas do pós-teste*



Fonte:Próprio autor (2019)

Problema 1: *Após a realização do pós-teste, e analisando o ´Gráfico 2, podemos observar que em relação ao problema 1(mesmo do pré-teste), dos 21 alunos investigados, 17 apresentaram solução correta, o que corresponde a 80,96%, 4 apresentaram solução errada, o que corresponde a 19,04%, nenhuma em branco. Realizando um breve comentário do resultado do pré-teste e pós-teste, em que temos a mesma situação problema, podemos observar uma melhora nos resultados, onde os acertos subiram de 19,04% para 80,96%.*

Problema 2: *Analisando o problema 2,(mesmo do pré-teste), dos 21 alunos investigados, 15 apresentaram solução correta, o que corresponde a 71,5%, 6 apresentaram,* *solução errada, o que corresponde a 28,5%, nenhuma em branco. Realizando um breve comentário do resultado do pré-teste e pós-teste, onde temos a mesma situação problema, podemos observar uma piora nos resultados, onde os acertos caíram de 80,96% para 71,5%.*

Problema 3: *Analisando o problema 3,(mesmo do pré-teste), dos 21 alunos investigados, 4 apresentaram solução correta, o que corresponde a 19,04%, 17 apresentaram solução errada, o que corresponde a 80,96%, nenhuma em branco. Realizando um breve comentário do resultado do pré-teste e pós-teste, onde temos a mesma situação problema, podemos observar tivemos uma piora significativa nos resultados, em que os acertos caíram de 95,24% para 19,04%.*

Problema 4: *Analisando o problema 4,(mesmo do pré-teste), dos 21 alunos investigados, 3 apresentaram solução correta, o que corresponde a 14,28%, 17 apresentaram solução errada, o que corresponde a 80,96%, 1 em branco, o que corresponde a 4,76% . Realizando um breve comentário do resultado do pré-teste e pós-teste, em que temos a mesma situação-problema, podemos observar tivemos uma pequena melhora nos resultados, onde os acertos aumentaram de 4,76% para 14,28%.*

Problema 5: *Uma situação-problema de permutação com repetição, diferente do pré-teste, em que podemos observar dos 21 alunos investigados, apenas 1 aluno apresentou solução correta, o que corresponde a 4,76%, 20 apresentaram solução errada, o que corresponde a 95,24%, e nenhum problema em branco.*

Nesse problema, o aluno ja tinha conhecimento de algumas técnicas de contagem, que poderiam ser utilizadas, após a exposição nas aulas dialogadas.

Problema 6:*Analisando o problema 6,(mesmo do pré-teste), dos 21 alunos investigados, 19 apresentaram solução correta, o que corresponde a 90,5%, 2 apresentaram solução errada, o que corresponde a 9,5%, nenhum problema em branco. Realizando* *um breve comentário do resultado do pré-teste e pós-teste, em que temos a mesma situação-problema, podemos observar uma melhora significativa nos resultados, em que os acertos aumentaram de 33,33% para 90,5%.*

Problema 7:*Uma situação-problema diferente do pré-teste, de olimpíadas de 1° fase que envolvia permutação simples, que o aluno poderia resolver, usando simplesmente o principio multiplicativo, onde trava-se da troca de posição de 5 fotografias lado a lado, ou seja, 5.4.3.2.1 =120, em que cada posição dessa correspondia a um dia, logo considerando 1 mês com 30 dias, então o número de meses seria 120/4 = 4 meses, alternativa correta letra D.*

Observamos que os alunos tiveram uma boa compreensão no problema, após a aula expositiva sobre permutação , já que dos 21 alunos investigados, 13 apresentaram solução correta, o que corresponde 61,9% , 8 apresentaram solução errada, o que corresponde 38,1% .

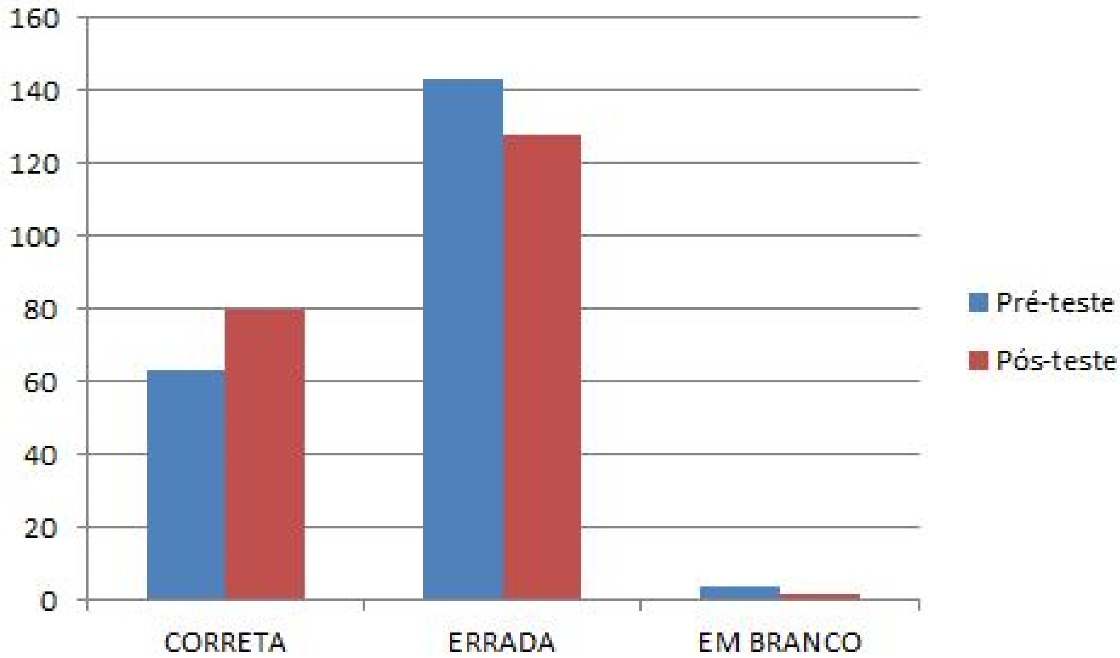
Problema 8: *Uma situação-problema diferente do pré-teste, que tratava da quantidade de caminhos, que um sapo poderia seguir, um caso que, com a exposição das técnicas de contagem, após o pré-teste, os alunos já teriam suporte para solucionar esse problema. Podemos observar dos 21 alunos investigados, 3 alunos apresentaram solução correta, o que corresponde a 14,28%, 18 apresentaram solução errada, o que corresponde a 85,72%, nenhum problema em branco.*

Problema 9: *Analisando o problema 9,(mesmo do pré-teste), dos 21 alunos investigados, apresentaram solução errada, o que corresponde a 100%, nenhum apresentou solução correta ou em branco. Podemos observar que mesmo, após o pré-teste, com a exposição de situações-problema similares, sem o uso da fórmula de permutação caótica, os alunos não tiveram uma boa compreensão.*

Problema 10: *Analisando o problema 10,mesmo não sendo igual do pré-teste,* *trata da mesma ideia, combinação completa, e dos 21 alunos investigados, 5 apresentaram solução correta, o que corresponde a 23,8%, 15 apresentaram solução errada, o que corresponde 71,44%, 1 apresentou em branco, o que corresponde 4,76%. Podemos observar que mesmo, após o pre-teste, com a exposição dessa situação-problema, os aluns tiveram uma melhora na compreensão da situação-problema. Podemos observar que tivemos uma melhora nos resultados, em relação a essa situação-problema, aumentando de 0% para 23,8%. Acreditamos que temos muito a melhorar nesse processo de ensino-aprendizado, mas podemos perceber que, após essa investigação, nosso papel de professor temos que ser um mediador, um organizador de ensino,atividades , se baseando em [26]((2009) "que a resolução de problemas, deve ser vista como uma atividade que se inicia a partir dos conhecimentos prévios e das dificuldades dos alunos, identificadas pelo professor. Sendo assim, cabe ao professor formular problemas para a aprendizagem significativa, criando um ambiente motivador e estimulante"*

O Gráfico 3 realiza uma comparação do Gráfico 1 e Gráfico 2, em relação a quantidade de acertos e erros, do total de problemas dos investigados.

Gráfico 3 *: Comparativo do resultado entre pré-teste e pós-teste*



Fonte:Próprio autor (2019)

5 Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos ferramentas didáticas que possam melhorar o processo de ensino-aprendizado de Análise Combinatória, pois, ainda enquanto estudante sentimos muita dificuldade no processo de aprendizado dessa parte da matemática, causando consequências, de já estarmos com um certo período de atuação como professor, evitarmos trabalhar com Análise Combinatória.

Com a presente abordagem e, após muitos anos de experiência com o ensino do tema, observamos que Análise Combinatória, é um universo muito vasto, mas, ao mesmo tempo apaixonante, pois permite que, mesmo que não se conheça com profundidade as técnicas, pode-se solucionar problemas sem uso das fórmulas, utilizando-se princípios básicos de contagem.

Sabemos que outros fatores influenciam no processo de ensino-aprendizado, e que não conseguiremosatingir o objetivo com todos os alunos, mas esperamos que, com este trabalho contribuímos para que professores de Matemática do Ensino Médio possam dar um tratamento diferente para o ensinamento da Analise Combinatória, emergindo da necessidade de se trabalhar esse tópico subsidiado por uma didática como sugerido em nossa abordagem .

Referências

[1] BOYER, C. B. *História da Matemática. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.*

[2] *BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF. 1997. Disponível em<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 15 de fev. 2018.*

[3] CARVALHO, P.C.P.; Métodos de Contagem e Probabilidade -Iniciação Científica OBMEP 2006

[4] EVES, H. Introdução à história da matemática. *Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Unicamp, 2011.*

[5] Fiorentini, Dário; Lorenzato, Sergio *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos, 3a ed. -Campinas-SP: Autores Associados, 2012.*

[6] < HTTPS://http://4umi.com/play/stomachion/animation.php>Acesso em: 06 ago.2019

[7] LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. *Changes through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum. In: MARTIN, W. G. et al. (Eds.). The Learning of Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2007.*

[8] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.;MORGADO, A.C.; A Matemática do Ensino Médio Vol.2 *Rio de Janeiro 3º ed.SBM, 1998.*

[9] LIMA,E.L.;CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO,A.C.; Temas e Problemas Elementares *Rio de Janeiro 12° ed.SBM , 2006.*

[10] LIMA, E. L. Números e funções Reais. *Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).*

[11] MINAYO, M. C. S. ; DESLANDES, S. F. ;GOMES, R.; Pesquisa Social: teoria, método e criatividade *28°ed - Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.*

[12] MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P. Matemática Discreta(coleção profmat). *2° ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.*

[13] MORGADO, A.C; PITOMBEIRA, J.B.; WAGNER, E.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ. P. Análise Combinatória/ Probabilidade com as soluções dos exercício . *10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.*

[14] MUNIZ NETO, A. C. Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória/Caminha Muniz Neto . *2° ed Rio de Janeiro: SBM, 2016. Vol 4 (Coleção Professor de Matemática)*

[15] NETO, A. A. *et al.* Combinatória ,Matrizes e Determinantes . *1° ed São Paulo : l Editora Moderna Ltda,1979.*

[16] NETO, A. C. M. Fundamentos de cálculo. *Rio de Janeiro: SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).*

[17] OLIVEIRA, MARCELO RUFINO.;CARNEIRO, MANOEL LEITE Elementos da matemática *3°ed Fortaleza:Editora VestSeller , 2010.*

[18] ONUCHIC, LOURDES DE LA ROSA *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.*

[19] ONUCHIC, LOURDES DE LA ROSA; ALLEVATO, NORMA SUELY GGOMES. *Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através de resoluçao de problemas. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M de C. (Org). Educação matemática: pesquisa e movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213 - 231.*

[20] PINTO, N. B.; *Tendências e desafios nos cenários investigativos da educação, Matemática. Caxambu, MG: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação Matemática, 2004.*

[21] POLYA. GEORGE; *A arte de resolver problemas: um novo aspecto de método matemático; tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.*

[22] ROQUE, T. ; CARVALHO, J. B. P. Tópicos de história da matemática. *Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).*

[23] SANTOS, J0SÉ PLÍNIO O. ; MELLO, MARGARIDA P.; MURARI, IDANI, T.C. Introdução á Análise Combinatória , *Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.*

[24] SANTOS, JOSÉ PLÍNIO O.;ESTRADA,EDUARDO LUÍS Problemas Resolvidos de Combinatória. *Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda,2007.*

[25] TAVARES , CLÁUDIA , S. ; BRITO, F. R. M. *Contando a História da Contagem. Revista do Professor de Matemática, n. 57*

[26] VAN DE WALLE, J. A. V. *Matemática no ensino fundamental. 6. ed. edição. Artmed, 2009 .*

APÊNDICES

Apêndice A - *Questionário/pré-teste -Problemas*

1. *(J.Plínio O.Santos ,E.Luís Estrada ,Problemas Resolvidos de Combinatória Pág 3)*

   ENUNCIADO:Há 5 *estradas distintas ligando as cidades A e B ,* 3 *distintas ligando B e C e* 2 *distintas ligando A e C, diretamente. Quantas são as possíveis rotas ligando as cidades A e C?*

2. *(M. Rufino de Oliveira, M. Leite Carneiro , Coleção Elementos da Matemática, pág 59 ex:1)*

   ENUNCIADO: João recebeu R$ 2,00 de sua mãe para comprar uma caneta ou lapiseira, cada uma custando R$ 2,00 . Na papelaria , João encontrou 5 *tipos diferentes de canetas e* 7 *tipos diferentes de lapiseiras . De quantas formas distintas João pode fazer a compra ?*

3. *ENUNCIADO:Um salão de festa tem* 5 *portas distintas para entrar ou sair. De quantas maneiras podemos entrar e sair doo salão, de modo que a porta de entrada não seja a mesma de saída?*

4. *(P.C.P.Carvalho,Iniciação Cientifica OBMEP 2006,adaptada)*

   ENUNCIADO:Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas(salada verde,salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde,canja ou de legumes) e pratos principais (bifes com fritas, peixe com puré,frango com legumes ou lasanha) Para realizar um almoço obrigatoriamente, temos que ter prato principal e salada. Opcionalmente podem-se acrescentar sopa.De quantas maneiras podemos realizar uma refeição?

5. *(J.Plinio. O.Santos , INTRODUÇÃO Á COMBINATÓRIA)*

   ENUNCIADO: Um amigo mostrou-me 5 *livros diferentes de matemática,e* 7 *livros diferentes de física e permitiu-me escolher um de cada.De quantas maneiras esta escolha pode ser feita?*

6. *ENUNCIADO:Num grupo de* 10 *pessoas,cada uma cumprimenta, uma única vez,as demais. Calcular o número de cumprimentos?*

7. *(MORGADO-ADAPTADA)*

   ENUNCIADO: O conjunto A possui 2 *elementos e o conjunto B possui* 4 *elementos. Quantas são as funções* $f : A \to B$

8. *(J.Plínio.O . Santos,Introdução a Combinatória-ADAPTADA)*

   ENUNCIADO: Há 10 *pontos A,B,C....... num dado plano sem que haja quaisquer* 3 *pontos colineares . Quantas retas podemos formar com estes pontos?*

9. *(RUFINO-OLIMPIADA DA BÉLGICA-94ADAPTADA) ENUNCIADO: Uma pequena escola possui* 4 *alunos.Uma professora coletou as provas resolvidas pelos alunos e imediatamente repassou para eles mesmos corrigirem. De quantas maneiras é possível fazer isto sem que um aluno receba a mesma prova que fez?*

10. *ENUNCIADO: Em uma pastelaria,temos pastéis de queijo, de presunto e de frango. De quantas maneiras podemos comprar 4 pastéis?*

Apêndice B - *Questionário / pós-teste- Problemas*

1. *(J.Plínio O.Santos ,E.Luís Estrada ,Problemas Resolvdos de Combinatória Pág 3)*

ENUNCIADO: Há 5 *estradas distintas ligando as cidades* A *e* B *,* 3 *distintas ligando* B *e* C *e* 2 *distintas ligando* A *e* C*, diretamente. Quantas são as possíveis rotas ligando as cidades* A *e* C*?*

2. *(M. Rufino de Oliveira, M. Leite Carneiro , Coleção Elementos da Matemática, pág 59 ex:1)*

   ENUNCIADO: João recebeu R$ 2,00 de sua mãe para comprar uma caneta ou lapiseira, cada uma custando R$ 2,00 . Na papelaria , João encontrou 5 *tipos diferentes de canetas e* 7 *tipos diferentes de lapiseiras . De quantas formas distintas João pode fazer a compra ?*

3. *ENUNCIADO:Um salão de festa tem* 5 *portas distintas para entrar ou sair. De quantas maneiras podemos entrar e sair doo salão, de modo que a porta de entrada não seja a mesma de saída?*

4. *(P.C.P.Carvalho,Iniciação Cientifica OBMEP 2006,adaptada)*

   ENUNCIADO:Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas(salada verde,salada russa ou salpicão), sopas (caldo verde,canja ou de legumes) e pratos principais (bifes com fritas, peixe com puré,frango com legumes ou lasanha) Para realizar um almoço obrigatoriamente, temos que ter prato principal e salada. Opcionalmente podem-se acrescentar sopa.De quantas maneiras podemos realizar uma refeição?

5. *(M0RGADO -P.44)*

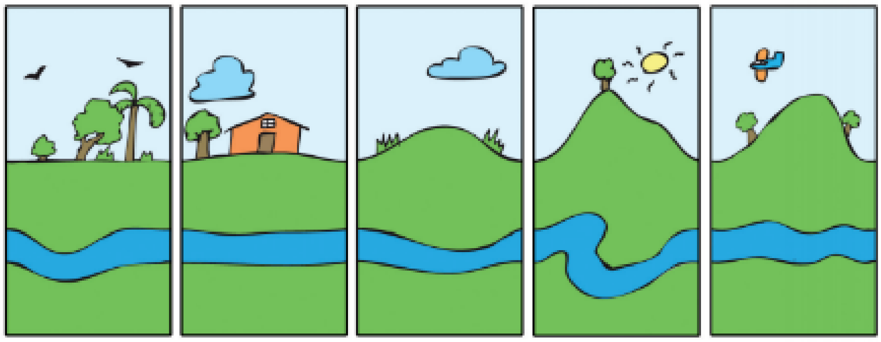
   ENUNCIADO:Quantos são os anagramas da palavra "URUGUAI"que começam por vogal?

6. *ENUNCIADO: Num grupo de* 10 *pessoas,cada uma cumprimenta, uma única vez,as demais. Calcular o número de cumprimentos?*

7. *OBEMP 2011-N2013-1°FASE)*

   ENUNCIADO: Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

   Figura 5: Fotos

   Fonte: (2011) olimpíada

   (a) uma semana (b) um mês (c) dois meses (d) quatro meses (e) seis meses

8. *ENUNCIADO: O sapo pula exatamente* $50cm$ *. Ele está em um ponto* P *de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto* Q *dessa mesma reta que dista* $3m$ *de distância de* P *com exatamente* 10 *pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?*

9. *(RUFINO-OLIMPIADA DA BÉLGICA-94 ADAPTADA)*

   ENUNCIADO:Uma pequena escola possui 4 *alunos.Uma professora coletou as provas resolvidas pelos alunos e imediatamente repassou para eles mesmos corrigirem. De quantas maneiras é possível fazer isto sem que um aluno receba a* *mesma prova que fez?*

10. *(PLINIO-P.99-daptada)*

    ENUNCIADO: De quantos modos podemos comprar 5 *refrigerantes em um bar que vende* 3 *tipos de refrigerantes?*